Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 15

Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

wobei $B \in \mathrm{Mat}_m(K)$ für ein $m \leq n$, $E \in \mathrm{Mat}_{n-m}(K)$, $C \in \mathrm{Mat}_{m,n-m}(K)$ und $0 \in \mathrm{Mat}_{n-m,m}(K)$ die Nullmatriz bezeichnet. Man zeige, dass

$$\det(A) = \det(B)\det(E)$$

gilt.

Aufgabe 2. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Bedingungen:

(1) x und y sind K-linear abhängig.

(2) $\begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

(3) Die Matrix $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$ hat Rang höchstens 1.

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i < j \\ 0 & \text{für } i = j \\ -1 & \text{für } i > j. \end{cases}$$

Man zeige $\det(A) = 1$. Hinweis: Manipulieren Sie zunächst nur die ersten zwei Zeilen und Spalten von A durch Operationen, die die Determinante invariant lassen, bis Sie induktiv argumentieren können (etwa mithilfe von Aufgabe 1).