Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 7

Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung.

Aufgabe 1. Die Abbildung f habe die Eigenschaft, dass

$$f^2 := f \circ f = f$$

gilt. (Lineare Abbildungen mit dieser Eigenschaft nennt man *Projektionen.*) Zeigen Sie, dass es komplementäre Unterräume W_1 und W_2 von V gibt mit $f(W_1) = \{0\}$ und $f(w_2) = w_2$ für alle $w_2 \in W_2$.

Aufgabe 2. Sei $\dim_K V < \infty$. Setze $V_0 := V$ und

$$V_{i+1} := f(V_i) = \{f(v) \mid v \in V_i\}$$

für $i \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $V_{n+i} = V_n$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Annahme '$\dim_K V < \infty$' notwendig ist für die Schlußfolgerung.

Aufgabe 3. Man bestimme komplementäre Unterräume zu den folgenden $\mathbb{R}$-linearen Unterräumen W des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$:

(1) $W = \langle (3, -3, -1), (-2, 0, 1), (-5, 9, 1) \rangle_{\mathbb{R}}$,
(2) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid -2x + 3y - z + 2w = 0\}_{\mathbb{R}}$.