Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 9

Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, und $W \leq V$ ein m-dimensionaler K-linearer Unterraum von V.

(1) Es sei
$$E_W := \{f \in \mathrm{End}_K(V) \mid f(W) \subseteq W\}.$$
Zeigen Sie, dass E_W ein Unterring des Endomorphismenrings $\mathrm{End}_K(V)$ ist und beschreiben Sie seine Einheitengruppe ${E_W}^*$.

(2) Es sei
$$M_m(K) := \{A \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ falls } i > m \text{ und } j \in \{1, \ldots, m\}\}.$$
Zeigen Sie, dass $M_m(K)$ ein Unterring des Matrizenrings $\mathrm{Mat}_n(K)$ ist, und beschreiben Sie seine Einheitengruppe $M_m(K)^*$.

(3) Zeigen Sie: Es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ für V derart, dass für alle $f \in \mathrm{End}_K(V)$ gilt:
$$f = f_A \in E_W \text{ genau dann, wenn } A \in M_m(K),$$
$$f = f_A \in {E_W}^* \text{ genau dann, wenn } A \in M_m(K)^*.$$

Aufgabe 2. Sei nun p eine Primzahl, und $K = \mathbb{Z}/(p)$. Berechnen Sie, für $m = 0, 1, \ldots, n$, die Mächtigkeiten $|M_m(K)|$ und $|M_m(K)^*|$. Hierbei sind $M_m(K)$ und $M_m(K)^*$ wie in Aufgabe 1 definiert.

Aufgabe 3. Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $\phi_1, \ldots, \phi_n \in V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ und $b_1, \ldots, b_n \in K$. Zeigen Sie: Genau dann ist das lineare Gleichungssystem
$$\phi_i(x) = b_i, \quad i = 1, \ldots, n$$
lösbar in $x \in V$, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i = 0$, so gilt auch $\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 0$.

Aufgabe 4. In Aufgabe 2 von Blatt 7 hatten Sie nachgerechnet, dass die Menge L aller Quadrupel $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, für die die drei folgenden Gleichungen erfüllt sind, einen affinen Unterraum des $\mathbb{R}^4$ bilden:
$$\begin{aligned} x - y + z - w &= 2 \\ -4x + 2y + 3z + 2w &= 12 \\ x - y + z + w &= -8 \end{aligned}$$
Schreiben Sie L in der Form $v + W$ für $v \in \mathbb{R}^4$ und $W \leq \mathbb{R}^4$, und ergänzen Sie L zu einer Basis des Quotientenraums $\mathbb{R}^4/W$.