Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Mathematik 2 für Chemie

Präsenzübungsblatt 2[1]

Aufgabe 1. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit Neutralelement e. Zeigen Sie:

(1) Das neutrale Element e ist eindeutig, d.h. gibt es ein Element $e' \in G$, so dass $e'g = ge' = g$ für alle $g \in G$,, dann gilt $e' = e$.
(2) Jedes Element $g \in G$ hat ein eindeutiges Inverses, d.h. gilt $hg = gh = e$ und $h'g = gh' = e$, so ist $h = h'$.
(3) Wenn für alle $g \in G$ gilt, dass $g \circ g = e$, dann ist G abelsch.

Aufgabe 2. Die Funktionen $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (für $x \in \mathbb{R}$) genügen den Gleichungen

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$
$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y,$$

für $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Menge

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R} \right\}$$

ist eine Gruppe, mit Matrixmultiplikation als Verknüpfung. Ist die Gruppe abelsch? Welcher Wert von u liefert das Neutralelement? Geben Sie eine explizite Formel für das Inverse eines allgemeinen Elements an. (Hinweis: Multiplizieren Sie zwei allgemeine Elemente von L.)

Aufgabe 3. Wir definieren auf der Menge

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

die folgende Operation:

$$* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mapsto (a_1a_2 - b_1b_2, b_1a_2 + a_1b_2)$$

Zeigen Sie: Zusammen mit der gewöhnlichen Addition

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mapsto (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

stiftet die Operation $*$ auf $\mathbb{R}^2$ die Struktur eines Körpers. (Hinweis: Sie kennen diesen Körper bereits.)

[1] Die Präsenzübungen beginnen in Woche 2. Es gibt kein Präsenzübungsblatt 1.