

Mathematik für Naturwissenschaften I
Präsenzübungsblatt 10

Aufgabe 1. Die Funktionen $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (für $x \in \mathbb{R}$) genügen den Gleichungen

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y)$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y),$$

für $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Menge

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} \cosh(u) & \sinh(u) \\ \sinh(u) & \cosh(u) \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R} \right\}$$

ist eine Gruppe, mit Matrixmultiplikation als Verknüpfung. Ist die Gruppe abelsch? Welcher Wert von u liefert das Neutralelement? Geben Sie eine explizite Formel für das Inverse eines allgemeinen Elements an. (Hinweis: Multiplizieren Sie zwei allgemeine Elemente von L .)

Aufgabe 2. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Gruppen bezüglich der angegebenen Verknüpfungen sind. Begründen Sie Ihre Antworten. Wenn Sie eine Gruppe ausfindig gemacht haben, geben Sie bitte das Neutralelement explizit an.

- (1) Die Menge $3\mathbb{Z} + 1 = \{3x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$, bezüglich der Addition.
- (2) Die Menge $3\mathbb{Q} + 1 = \{3x + 1 \mid x \in \mathbb{Q}\}$, bezüglich der Addition.
- (3) Die Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reellwertigen Folgen, bezüglich der Addition.
- (4) Die Menge $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ der $(0, 1)$ -wertigen Folgen, bezüglich der Addition.

Aufgabe 3. Es seien (G, \star) eine Gruppe und $g, h \in G$.

- (1) Zeigen Sie: Gilt $g = g\star h$, so ist h das Neutralelement in G bezüglich \star .
- (2) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $b\star b = b$ in G .

Sei nun $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

- (3) Bestimmen Sie alle Lösung der Gleichung $x \cdot x = x$ in K .

Vergleichen Sie Ihre Antworten zu (2) und (3).

Aufgabe 4. Seien, wie in der Vorlesung, $V = C^0(\mathbb{R})$ und

$$W_1 = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \mid f(-x) = f(x)\},$$

$$W_2 = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \mid f(-x) = -f(x)\}$$

Zeigen Sie, dass $V = W_1 \oplus W_2$ gilt. Schreiben Sie die Funktion $e^x \in C^0(\mathbb{R})$ als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion. Ist diese Darstellung eindeutig?