Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2019/20

Mathematik für Naturwissenschaften I
Präsenzübungsblatt 11

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen und skizzieren Sie deren Lösungen in der komplexen Zahlenebene:

(1) $z^2 + 4z - 5 = 0$,
(2) $z^2 + 4z + 5 = 0$,
(3) $z^4 = -i$,
(4) $z^2 + z = -1$.

Aufgabe 2. Eine komplexe Zahl z heißt n-te Einheitswurzel, wenn $z^n = 1$ gilt. Welche der folgenden Zahlen sind n-te Einheitswurzel, ggfs. für welches n?

$$i, \quad \frac{1}{6}, \quad -1, \quad e^{i\frac{5}{3}\pi}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Fertigen Sie eine Skizze der komplexen Zahlenebene ein, in der Sie die 2-ten, 3-ten und 4-ten Einheitswurzeln einzeichnen. Beschreiben Sie die Menge der n-ten Einheitswurzeln geometrisch.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^5$:

$$(1, -1, -1, 0, -1), (0, 2, -1, 1, -1), (-1, -1, -3, 0, -3), (-2, 2, -2, 0, -2)$$

Wählen Sie aus diesen Vektoren ein maximales System linear unabhängiger Vektoren aus und ergänzen Sie es zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe 4. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$P_n := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0, 1, \ldots, n \right\}$$

die Menge der *reellen Polynome vom Grad höchstens n.*

(1) Zeigen Sie, dass P_n, bezüglich den gewöhnlichen Operationen von Polynomen (Addition und Multiplikation mit Skalaren) ein Vektorraum ist.
(2) Bestimmen Sie zwei verschiedene (!) Basen von P_n. Schreiben Sie jedes Element der ersten Basis als Linearkombination der Elemente der zweiten Basis und umgekehrt. Bestimmen Sie die Dimension $\dim_{\mathbb{R}} P_n$.