Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2019/20

Mathematik für Naturwissenschaften I
Präsenzübungsblatt 13

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Sei $\phi \in \mathbb{R}$. Wie in der Vorlesung besprochen wird die Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel ϕ durch die lineare Abbildung

$$f_\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gegeben.

(1) Zeigen Sie, dass, für $\psi \in \mathbb{R}$, die Relation $f_\phi \circ f_\psi = f_{\phi+\psi}$ gilt.
Hinweis: Additionstheoreme (Präsenzübungsblatt 8, Aufgabe 1).

(2) Bestimmen Sie die darstellende Matrix der Abbildung f_ϕ bezüglich
- der Standardeinheitsbasis $\{e_1, e_2\}$ des $\mathbb{R}^2$ und
- der Basis $\{-e_2, -e_1\}$ des $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2. Seien U und V Vektorräume über einem Körper K und $f : U \to V$ eine K-lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $\ker(f)$ bzw. $\operatorname{im}(f)$ Unterräume von U bzw. V sind.

Aufgabe 3. Für einen Körper K und $m, n \in \mathbb{N}$ sei $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ die Menge der $m \times n$-Matrizen über K.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ bezüglich der Addition von Matrizen und der Multiplikation mit Skalaren einen K-Vektorraum bildet.

(2) Zeigen Sie, dass, für $1 \le r, s \le n$, die Matrizen $E_{rs} = (e_{ij}^{(rs)})$, wobei $e_{ij}^{(rs)} = \delta_{ri}\delta_{sj}$ für $1 \le i, j \le n$, eine K-Basis von $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ bilden. Hierbei bezeichnet

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 1, & \text{falls } a = b, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

das sogenannte *Kroneckerdelta.*

Die *Transponierte* der Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ ist die Matrix $A^{\mathrm{t}} = (a_{ji}) \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$.

(3) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$t : \mathrm{Mat}_{m\times n}(K) \to \mathrm{Mat}_{n\times m}(K), \quad A \mapsto A^{\mathrm{t}}$$

eine K-lineare Abbildung ist.

(4) Bestimmen Sie die darstellende Matrix der Abbildung $t : \mathrm{Mat}_2(K) \to \mathrm{Mat}_2(K)$ bezüglich der Standardeinheitsbasis des K^2.

Aufgabe 4. In Teil 1 von Aufgabe 4 des Präsenzübungsblattes 11 hatten Sie gezeigt, dass, für $n \in \mathbb{N}_0$, die Menge

$$P_n := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0, 1, \ldots, n \right\}$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. In Teil 2 derselben Aufgabe hatten Sie zwei verschiedene Basen $B_{n,1}$ und $B_{n,2}$ von P_n bestimmt.

(1) Zeigen Sie, dass der Differentialoperator

$$D_n : P_n \to P_n, \quad f \mapsto f',$$

der einem Polynom $f \in P_n$ seine Ableitung $f' \in P_n$ zuordnet, eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist.

(2) Ist D_n injektiv / surjektiv / bijektiv?

(3) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von D_2 bezüglich $B_{2,1}$ bzw. $B_{2,2}$.