Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2019/20

Mathematik für Naturwissenschaften I
Präsenzübungsblatt 14

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die alle paarweisen Produkte der folgenden (reellen) Matrizen, soweit sie definiert sind:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden sei K ein Körper.

Aufgabe 2. Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es geordnete K-Basen für V und W gibt mit der Eigenschaft, dass die Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,\dim W \\ j=1,\ldots,\dim V}}$ von f bezüglich dieser Basen die folgende Gestalt hat:

$$a_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{falls } 1 \leq i, j \leq \dim_K(\mathrm{im}(f)), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei ist δ_{ij} das aus der Vorlesung bekannte Kronecker-Symbol, d.h.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ wenn } i = j \text{ und} \\ 0, \text{ wenn } i \neq j. \end{cases}$$

Hinweis: Skizzieren Sie die Matrix A. Erinnern Sie sich an die allgemeine Interpretation der j-ten Spalte einer eine lineare Abbildung darstellenden Matrix in Termen der gewählten Basen. Was besagt die Interpretation im vorliegenden Spezialfall? Benutzen Sie Basisergänzungssatz 6.29 und Satz 8.12.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_2(K)$ ist genau dann invertierbar, wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Geben Sie eine Formel für A^{-1} an.

Hinweis: Formulieren Sie die Invertierbarkeitsbedingung

$$\exists A' \in \mathrm{Mat}_2(K) : \ AA' = E_2 = A'A$$

in Termen der Einträge der Matrix A.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Es sei

$$\mathrm{GL}_n(K) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid A \text{ invertierbar}\}.$$

Zeigen Sie: Für $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ gilt $(A^{-1})^{\mathrm{t}} = (A^{\mathrm{t}})^{-1}$. Hier bezeichnet B^{t} die *Transponierte* der Matrix B; vgl. Präsenzübungsblatt 13, Aufgabe 3.