Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2019/20

Mathematik für Naturwissenschaften I
Präsenzübungsblatt 8

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Zeigen Sie, etwa unter Zuhilfenahme der Formeln

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \quad \sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right),$$

(die Sie nicht beweisen müssen, da sie unmittelbar aus der Formel $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ folgen), dass für die trigonometrischen Funktionen cos und sin die folgenden vier(!) *Additionstheoreme* gelten:

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen x, y gilt:

(a) $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$.
(b) $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ und $\sin(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$.
(c) $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$.

Hinweis. Teil (c): Additionstheoreme (vgl. Aufgabe 1) und Teil (a).

Aufgabe 3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\sin' = \cos$.
(b) $\cos' = -\sin$.

Hinweis. Teil (a): Verwenden Sie die Identität aus Aufgabe 2(c), die Stetigkeit der Cosinusfunktion und den Limes $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$. Teil (b): Folgt aus Teil (a) zusammen mit den Identitäten aus Aufgabe 2.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.
(b) $f(x) = \sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.
(c) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$.
(d) $f(x) = \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
(e) $f(x) = \cot(x) := \frac{1}{\tan(x)}$.
(f) $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$.
(g) $f(x) = \log(\frac{1}{1-x})$.
(h) $f(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.

Hinweis. Überlegen Sie zunächst, was jeweils der richtige Definitionsbereich ist.