Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2018/19

Algebra 1
Übungsblatt 10

Abgabe bis 12:00 Uhr am Mittwoch, den 19. Dezember 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Sei G eine abelsche Gruppe mit Elementen $a, b \in G$ endlicher Ordnung $|a| = m$ und $|b| = n$. Zeigen Sie, dass in G ein Element der Ordnung $\mathrm{kgV}(m, n)$ existiert.

(Vorschlag: Behandeln Sie erst den Fall, dass $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Reduzieren Sie dann den allgemeinen Fall auf diesen Spezialfall.)

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und H eine endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe K^*. Zeigen Sie, dass H zyklisch ist. Bestimmen Sie alle endlichen Untergruppen der Gruppen $\mathbb{C}^*$ und $\mathbb{R}^*$.

(Vorschlag zum ersten Aufgabenteil: Betrachten Sie die Untergruppe $H_{\max}$ von H bestehend aus Elementen, deren Ordnung die maximale auftretende Ordnung von Elementen teilt. (Sie sollen auch zeigen, dass $H_{\max}$ überhaupt eine Untergruppe von H ist!) Zeigen Sie, dass $H_{\max}$ zyklisch ist. Führen Sie schließlich die Annahme ad absurdum, dass $H_{\max} \neq H$. Dafür mag die Aussage von Aufgabe 1 hilfreich sein.)

Aufgabe 3. Seien $K = \mathbb{F}_2$ und L der Körper $K[X]/(X^4 + X + 1)$. Geben Sie an, wie viele der $15 = 2^4 - 1$ Elemente von L^* jeweils welche Ordnung haben. Bestimmen Sie alle primitiven Elemente von L/K explizit.

Zeigen Sie allgemein: Ein endlicher Körper der Ordnung q hat $\phi(q-1)$ primitive Elemente. Hierbei ist ϕ die Eulersche ϕ-Funktion, definiert durch

$$\phi(m) = \#\{i \in \{1, 2, \ldots, m-1\} \mid \mathrm{ggT}(i, m) = 1\}, \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Mit der folgenden Aufgabe zeigen Sie, dass die Hypothese der Separabilität im Satz vom Primitiven Element notwendig ist.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Betrachte $K := k(X, Y) \subset L$, wobei L ein Zerfällungskörper des Polynoms

$$(Z^p - X)(Z^p - Y) \in K[Z]$$

ist. In L existieren also p-te Wurzeln von X und Y, d.h. Elemente $x, y \in L$ mit $x^p = X$ und $y^p = Y$.

(1) Zeigen Sie, dass $L = K(x, y)$ und bestimmen Sie die Grade $[L : K]_s$ und $[L : K]$. Schließen Sie, dass L/K nicht separabel ist.
(2) Zeigen Sie, dass L/K nicht einfach ist. (Vorschlag: Zeigen Sie hierfür, dass $[K(z) : K] \leq p$ für jedes $z \in L$. Schreiben Sie dazu z und z^p in Termen einer K-Basis von L, und zeigen Sie damit, dass z eine Nullstelle des Polynoms $Z^p - z^p \in K[Z]$ (sic!) ist.)