

Algebra 1
Übungsblatt 12

Abgabe bis 12:00 Uhr am Mittwoch, den 16. Januar 2019, im Postfach
Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

Aufgabe 1. Seien p eine Primzahl und $n \in \{p, 2p\}$. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe des Polynoms $X^n - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ zyklisch ist.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Polynoms $X^{15} - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 3. Es bezeichne ϕ die Eulersche ϕ -Funktion. Zeigen Sie, dass, für $n \in \mathbb{N}$

- (1) die Gleichung $\phi(n) = n \prod_{p|N, p \text{ prim}} (1 - p^{-1})$ gilt,
- (2) die Gleichung $n = \sum_{d \in \mathbb{N}, d|n} \phi(d)$ gilt,
- (3) für $a \in \mathbb{N}$ mit $\text{ggT}(a, n) = 1$ die Kongruenz $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ gilt,
und
- (4) es nur endlich viele $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $\phi(m) = n$.

Aufgabe 4. Es sei ζ eine primitive 12-te Einheitswurzel über \mathbb{Q} . Bestimmen Sie alle Zwischenkörper der Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$.