Fakultät für Mathematik — Prof. Dr. Christopher Voll
Universität Bielefeld — Wintersemester 2018/19

Algebra 1
Übungsblatt 13

Abgabe bis 12:00 Uhr am Mittwoch, den 23. Januar 2019, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Seien G eine Gruppe, X eine Menge und

$$G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto gx$$

eine Aktion von G auf X. Seien weiterhin $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass die Isotropiegruppen G_x und G_y in G konjugiert sind, wenn x und y in derselben Bahn liegen, d.h. wenn $Gx = Gy$.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe mit Zentrum Z. Zeigen Sie: Ist G/Z zyklisch, so ist G abelsch. Schließen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung p^2, wobei p eine Primzahl ist, abelsch ist.

Aufgabe 3. Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Die Menge

$$\mathrm{Proj}(V) := \{U \leq V \mid \dim_K U = 1\}$$

heißt die *Projektivisierung* von V.

(1) Zeigen Sie:

$$\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{Proj}(V) \to \mathrm{Proj}(V), \quad (g, U) \mapsto g(U)$$

ist eine transitive Aktion der Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ auf $\mathrm{Proj}(V)$.

(2) Sei nun $\dim_K V = n \leq \infty$. Wir identifizieren V mit K^n und $\mathrm{GL}(V)$ mit $G := \mathrm{GL}_n(K)$. Sei $U = \langle e_1 \rangle_K$ der vom ersten Standardeinheitsvektor $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in K^n$ erzeugte eindimensionale K-Unterraum von K^n. Bestimmen Sie explizit die Isotropiegruppe G_U von U unter der oben beschriebenen Aktion von G.

(3) Sei nun zusätzlich $|K| < \infty$. Bestimmen Sie die Ordnungen $|G|$ und $|G_U|$ und benutzen Sie diese Daten, um $|\mathrm{Proj}(K^n)|$ zu bestimmen.

Aufgabe 4. Sei G eine endliche Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Für $g \in G$ bezeichne $X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$ die Menge der *Fixpunkte* von g. Zeigen Sie, dass die Anzahl $|X/G|$ der Bahnen von G auf X durch die durchschnittliche Anzahl von Fixpunkten gegeben ist, d.h.

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

(Vorschlag: Zeigen Sie zunächst, dass $\sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{x \in X} |G_x|$ gilt, und wenden Sie dann den Bahnensatz an.)