Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2019/20

Mathematik für Naturwissenschaften I
Zusatzübungsblatt

Zusätzliche Aufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur. Keine Abgabe, keine Bepunktung.

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1.

(a) Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = xe^x + e^{-2x}$. **(3 P.)**

(b) Haben Sie eine Vermutung für die Formel der n-ten Ableitung $f^{(n)}(x)$ von f? Beweisen Sie sie mittels vollständiger Induktion! **(4 P.)**

Aufgabe 2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := 3n + \sin(n\pi)$. Zeigen Sie:

(a) Die Folge a_n ist monoton wachsend und divergent.

(b) Die alternierende Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$ ist konvergent. **(2 P.)**

(c) Die alternierende Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(a_n)^2}$ ist *absolut* konvergent. **(3 P.)**

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, dass $|a| - |b| \leq |a - b|$ gilt für jedes $a, b \in \mathbb{R}$. **(1 P.)**

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$. Zeigen Sie mit einem ϵ-δ Argument, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. **(2 P.)**

Aufgabe 4. Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 (x+1)e^x \, dx.$$

Geben Sie die Antwort in der Form $Ae^2 + Be + C$. **(3 P.)**

Aufgabe 5. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die inverse Matrix. **(3 P.)**

Aufgabe 6.

(a) Sei i die imaginäre Einheit. Bringen Sie $\frac{1}{1+2i} - \frac{2}{2+i}$ auf eine möglichst einfache Form (ein Bruch mit reellem Nenner). **(2 P.)**

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen von $z^2 = 8i$ in $\mathbb{C}$. **(2 P.)**

Aufgabe 7. Seien W_1, W_2 Unterräume von $\mathbb{R}^4$, mit $\dim(W_1) = 2$ und $\dim(W_2) = 3$. Untersuchen Sie, welche Werte von $\dim(W_1 \cap W_2)$ damit möglich sind. Geben Sie für jeden möglichen Wert von $\dim(W_1 \cap W_2)$ an, was der zugehörige Wert von $\dim(W_1 + W_2)$ dann ist. **(2 P.)**

Aufgabe 8. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$, die zugehörige lineare Abbildung.

(a) Bestimmen Sie den Rang von A, sowie die Dimension von $\operatorname{Im} f$ und $\operatorname{Ker} f$. **(3 P.)**

(b) Bestimmen je eine Basis von $\operatorname{Im} f$ und von $\operatorname{Ker} f$. **(3 P.)**

Aufgabe 9. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Az = b$ in $\mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wieviele Lösungen in $\mathbb{R}^3$ gibt es? **(2 P.)**

(b) Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen. Welche Rolle spielen dabei die Lösungen des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$? **(3 P.)**