Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2019/20

Mathematik für Naturwissenschaften I
Übungsblatt 3

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 31. Oktober 2019, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1. Gegeben seien eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine reelle Zahl a.

(a) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist genau dann, wenn $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge ist.

(b) Aus der Vorlesung wissen Sie, dass, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit Limes a, auch $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit Limes $|a|$. Gilt hier auch die Umkehrung?

Hinweis. Teil (b): Fallunterscheidung $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$.

Aufgabe 2 (Potenzen wachsen schneller als Polynome)**.** Zeigen Sie, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

Hinweis. Aufgabe 3(b) von Übungsblatt 2 zusammen mit Aussage 3) von Satz 2.4 über das Rechnen mit Grenzwerten.

Aufgabe 3. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Folge, gegeben durch

$$a_n := \frac{\alpha_k n^k + \alpha_{k-1}n^{k-1} + \ldots + \alpha_2 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_0}{\beta_l n^l + \beta_{l-1}n^{l-1} + \ldots + \beta_2 n^2 + \beta_1 n + \beta_0},$$

wobei k, l natürliche Zahlen sind und $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ bzw. $\beta_0, \ldots, \beta_l$ reelle Zahlen sind mit $\alpha_k, \beta_l, \beta_0 \neq 0$ sind.
Hinweis. Da $\beta_0 \neq 0$, ist der Nenner für fast alle n ungleich Null und damit der gesamte Term wohldefiniert. Nehmen Sie zur Einfachheit ruhig an, dass der Nenner niemals Null ist. Zähler und Nenner des n-ten Folgeglieds sind also Polynome in n vom Grad k bzw. l. Klammern Sie in Zähler und Nenner die höchste Potenz von n aus und unterscheiden Sie dann die Fälle $k > l$, $k = l$ und $k < l$.

Aufgabe 4. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der nachstehenden Folgen und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{4n^3+n+1}{n^4-n+1}$.
(b) $a_n = f_{n+2}/f_{n+1}$, wobei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Fibonacci-Folge bezeichnet[1].
(c) $a_n = (1 - \frac{1}{n+1})(2 + \frac{n}{n+1})$.
(d) $a_n = 2 + \frac{1}{2}(-1)^n$.

[1] vgl. Aufgabe 3 auf Präsenzübungsblatt 1