Blatt 13 - Abgabe bis 11.07.2025 12:00

Die mit *markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden korrigiert
Die mit **markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden nicht korrigiert.

140. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen ∂_x und ∂_y der folgenden Funktionen:

$$\text{(i)}\ \ln\left(x+y^2\right) \qquad \text{(ii)}\ \arctan\frac{y}{x} \qquad \text{(iii)}\ \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\text{(iv)}\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{(v)}\ \arctan\frac{x+y}{1-xy} \qquad \text{(vi)}\ e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

141. Mit Hilfe von der Kettenregel bestimmen Sie die folgenden partiellen Ableitungen.

(a) Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion. Angenommen, dass die partiellen Ableitungen $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ bekannt sind, bestimmen Sie die Ableitungen ∂_x und ∂_y der Funktion $g(x,y)=f(xy,\frac{x}{y})$.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ der Funktion

$$f(x,y,z)=x^{y^z}$$

im Definitionsbereich $x,y,z>0$.
Hinweis. Benutzen Sie die Ableitungen von $\ln f$ und $\ln\ln f$.

(c) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen ∂_x, ∂_y der Funktion

$$h(x,y)=x^{y^x}$$

im Definitionsbereich $x,y>0$.
Hinweis. Verwenden Sie die Kettenregel für $h(x,y)=f(x,y,x)$.

142. Betrachten wir die folgende Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

Beweisen Sie: f ist in $(0,0)$ stetig, partiell differenzierbar, aber nicht total differenzierbar.

143. Seien (r,θ) die Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ und f eine Funktion in einer offenen Menge $\Omega\subset\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

(a) Sei f in Ω total differenzierbar. Beweisen Sie, dass

$$\partial_x f=(\partial_r f)\cos\theta-(\partial_\theta f)\frac{1}{r}\sin\theta$$
$$\partial_y f=(\partial_r f)\sin\theta+(\partial_\theta f)\frac{1}{r}\cos\theta,$$

wobei (x,y) die kartesischen Koordinaten sind.
Hinweis. Verwenden Sie die Formel aus Vorlesung

$$\partial_r f=\partial_x f\cos\theta+\partial_y f\sin\theta$$
$$\partial_\theta f=r\left(-\partial_x f\sin\theta+\partial_y f\cos\theta\right).$$

(b) Beweisen Sie die Identität

$$(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 = (\partial_r f)^2 + \frac{1}{r^2} (\partial_\theta f)^2 .$$

(c) Bestimmen Sie $\partial_x f$ und $\partial_y f$ für die Funktion $f(x,y) = r \sin 2\theta$.

144. * Seien (r,θ) die Polarkoordinaten von $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Definieren wir die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wie folgt:

$$f(z) = \begin{cases} (r\cos 5\theta, r\sin 5\theta), & z \neq 0, \\ (0,0), & z = 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie: die Abbildung $f(z)$ ist an der Stelle $z=0$ stetig, partiell differenzierbar, aber nicht total differenzierbar.

145. * Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ zwei metrische Räume. Definieren wir im Produktraum $Z = X \times Y$ die Abstandsfunktion

$$d_Z((x,y),(x',y')) = \max(d_X(x,x'), d_Y(y,y')),$$

so dass (Z, d_Z) auch ein metrischer Raum ist. Beweisen Sie folgendes:

(a) Sind X und Y vollständig, so ist Z auch vollständig.

(b) Sind X und Y folgenkompakt, so ist Z auch folgenkompakt.

146. ** Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei $N(x)$ eine Norm in $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Funktion $N(x)$ nicht total differenzierbar in $x = 0$.

(b) Die Funktion $f(x) = \|x\|_2$ in $\mathbb{R}^n$ ist total differenzierbar in allen Punkten $x \neq 0$.

147. ** Die *räumlichen Polarkoordinaten* (r,φ,θ) in $\mathbb{R}^3$ sind mit den kartesischen Koordinaten (x,y,z) in $\mathbb{R}^3$ wie folgt verbunden:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\theta \\ y &= r\cos\varphi\sin\theta \\ z &= r\sin\varphi, \end{aligned}$$

wobei φ der Breitengrad und θ der Längengrad sind.

(a) Sei f eine differenzierbare Funktion im Definitionsbereich von räumlichen Polarkoordinaten. Beweisen Sie die Identität

$$(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + (\partial_z f)^2 = (\partial_r f)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\varphi f)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}(\partial_\theta f)^2 .$$

(b) Beweisen Sie, dass

$$\begin{aligned} \partial_x f &= (\partial_r f)\cos\varphi\cos\theta - (\partial_\varphi f)\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi - (\partial_\theta f)\frac{\sin\theta}{r\cos\varphi} \\ \partial_y f &= (\partial_r f)\cos\varphi\sin\theta - (\partial_\varphi f)\frac{1}{r}\sin\varphi\sin\theta + (\partial_\theta f)\frac{\cos\theta}{r\cos\varphi} \\ \partial_z f &= (\partial_r f)\sin\varphi + (\partial_\varphi f)\frac{1}{r}\cos\varphi. \end{aligned}$$

148. ** Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zwei total differenzierbare Abbildungen. Beweisen Sie, dass auch das Produkt $fg : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar ist und es gilt

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Bemerkung. Das Produkt $f(x)g'(x)$ ist eine $m \times n$ Matrix da $f(x)$ eine Zahl ist und $g'(x)$ eine $m \times n$ Matrix. Das Produkt $g(x)f'(x)$ ist auch eine $m \times n$ Matrix da $g(x)$ eine $m \times 1$ Spalte ist und $f'(x)$ eine $1 \times n$ Zeile.

Hinweis. Bemerken Sie, dass $fg = F(f, g)$, wobei

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m \\ F(u, v) &= uv \quad \text{mit } u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

und benutzen die Kettenregel.

149. ** Angenommen, eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erfüllt die folgende *Hölder-Bedingung* für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|^\alpha,$$

wobei C, α positive Konstanten sind und $\|\cdot\|$ eine Norm in $\mathbb{R}^n$ ist.

(a) Sei $\alpha > 1$. Beweisen Sie, dass alle partielle Ableitungen von f identisch gleich 0 sind. Gewinnen Sie daraus, dass f eine konstante Funktion ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel von einer nicht-konstanten Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die die Hölder-Bedingung mit $\alpha = 1$ erfüllt.

150. ** Betrachten wir die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|_2} \tag{58}$$

Beweisen Sie folgendes.

(a) f ist total differenzierbar in allen Punkten $x \neq 0$.

(b) f ist total differenzierbar auch in $x = 0$.

(c) Bestimmen Sie das Bild von der mit (58) definierten Funktion f.

(d) Beweisen Sie, dass die inverse Funktion f^{-1} existiert und bestimmen Sie f^{-1}.