Blatt 14 - Keine Abgabe

151. ** Bestimmen Sie alle lokale Maxima und Minima der folgenden Funktionen:

(a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ im Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$;

(b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$ im Definitionsbereich $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.

(c) $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$ im Definitionsbereich $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

152. ** Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$. Für differenzierbare Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ definieren wir die Funktionen $\operatorname{grad} f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ (Gradient von f), $\operatorname{rot} g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ (Rotation von g) und $\operatorname{div} g : \Omega \to \mathbb{R}$ (Divergenz von g) wie folgt:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f &= (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)\\ \operatorname{rot} g &= (\partial_2 g_3 - \partial_3 g_2, -\partial_1 g_3 + \partial_3 g_1, \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1)\\ \operatorname{div} g &= \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 + \partial_3 g_3.\end{aligned}$$

Angenommen, dass f und alle Komponenten von g in $C^2(\Omega)$ sind, beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$

(b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} g) = 0$

(c) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \partial_{11} f + \partial_{22} f + \partial_{33} f.$

153. ** Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Seien U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f, g : U \to \mathbb{R}$ Funktion der Klasse C^l. Dann liegen auch die Funktionen $f+g$, fg, f/g in C^l (im Fall f/g vorausgesetzt $g \neq 0$).

(b) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $f : U \to V$, $g \in V \to \mathbb{R}^k$ die Abbildungen der Klasse C^l. Dann liegt auch die Komposition $g \circ f$ in C^l.

154. ** Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine 2-fach stetig differenzierbare Funktion, wobei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Beweisen Sie die Identität

$$\partial_{xx} f + \partial_{yy} f = \partial_{rr} f + \frac{1}{r}\partial_r f + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta} f,$$

wobei (x,y) die Kartesischen Koordinaten sind und (r,θ) Polarkoordinaten.

155. ** Bestimmen Sie die Ableitungen y' und y'' der Funktion $y = y(x)$ die implizit durch die folgende Gleichung gegeben wird:

(a) $x^2 + 2xy - y^2 = 1$

(b) $y - \frac{1}{2}\sin y = x$

(c) $\ln(x^2+y^2) = 2\arctan\frac{y}{x}$

Die Ableitungen y' und y'' sollen durch x und y ausgedrückt werden.

156. ** Bestimmen Sie die partiellen Ableitung $\partial_x z$, $\partial_y z$ und $\partial_{xy} z$ von der Funktion $z = z\,(x, y)$ die implizit durch die Gleichung

$$z^3 - 3xyz = 1$$

gegeben wird. Die Ableitungen von z sollen durch x, y, z ausgedrückt werden. Insbesondere berechnen Sie $\partial_{xy} z\,(0, 0)$.

157. ** Betrachten wir die Abbildung

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^2$$
$$f\,(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$$

wobei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

(a) Berechnen Sie die totale Ableitung f' und zeigen, dass f' immer invertierbar ist.

(b) Beschließen Sie, dass die f in der Nähe von jedem Punkt in ihrem Definitionsbereich die inverse Abbildung hat. Bestimmen Sie die inverse Abbildung im Bereich

$$\Omega' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 0 < y < \pi/2\right\}.$$

(c) Berechnen Sie die totale Ableitung der inversen Abbildung f^{-1}.

158. ** Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^2 Funktion. Bezeichnen wir mit Q_x die quadratische Form der Hesse-Matrix $f''(x)$. Fixieren wir $x, u \in \mathbb{R}^n$ und betrachten die Funktion

$$\varphi\,(t) = f\,(x + tu)\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beweisen Sie, dass $\varphi''\,(t) = Q_{x+tu}\,(u)$.

159. ** Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *konvex* wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $t \in [0, 1]$ gilt

$$f\,((1 - t)\,x + ty) \le (1 - t)\,f(x) + tf\,(y)\,. \tag{59}$$

(a) Beweisen Sie, dass eine Norm $N(x)$ in $\mathbb{R}^n$ konvex ist.

(b) Für $f \in C^2\,(\mathbb{R}^n)$ beweisen Sie folgendes: ist die Hesse-Matrix $f''(x)$ positiv semidefinit für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so ist f konvex.

(c) Beweisen Sie, dass die Funktion $f\,(x, y) = e^{x^2} + e^{y^2} - 2xy$ konvex ist.

160. ** Eine Metrik d auf einer Menge X heißt *Ultrametrik* when

$$d(x, y) \le \max\,(d(x, z), d(z, y)) \tag{60}$$

für alle $x, y, z \in X$. Die Ungleichung (60) heißt die *ultrametrische* Dreiecksungleichung (offensichtlich ist (60) stärker als die übliche Dreiecksungleichung), und das Paar (X, d) heißt ein *ultrametrischer Raum*. Für alle $x \in X$ und $r > 0$ definieren wir im ultrametrischen Raum (X, d) die abgeschlossene Kugel

$$B_r(x) := \{y \in X : d(x, y) \le r\}\,.$$

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaft der Kugeln im ultrametrischen Raum.

(a) Zwei Kugeln $B_r(x)$ und $B_r(y)$ mit gleichem Radius sind entweder disjunkt oder identisch.

(b) Die Sammlung aller verschiedenen Kugeln mit dem gleichen Radius r bildet eine Partition von X

Bemerkung. Ein Mengensystem $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ist eine Partition von X when alle V_α disjunkt sind und ihre Vereinigung gleich X ist.

(c) Jeder Punkt $y \in B_r(x)$ ist auch das Zentrum von $B_r(x)$, d.h. $B_r(x) = B_r(y)$.

(d) Jede Kugel $B_r(x)$ ist eine abgeschlossene als auch eine offene Teilmenge von X.

(e) Jedes Dreieck $\{x, y, z\} \subset X$ ist gleichschenklig.

161. ** Fixieren wir eine Primzahl $p > 1$ und definieren in $\mathbb{Q}$ die p-adische Norm $\|x\|_p$ wie folgt. Jede Zahl $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ lässt sich wie folgt darstellen:

$$x = p^n \frac{a}{b}$$

wobei a, b, n ganze Zahlen sind und a, b nicht durch p teilbar sind. Dann setzen wir

$$\|x\|_p = p^{-n}$$

und $\|0\|_p = 0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt die Ungleichung

$$\|x+y\|_p \leq \max\left(\|x\|_p, \|y_p\|\right). \tag{61}$$

(b) $\|xy\|_p = \|x\|_p \|y\|_p$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$.

(c) Die Funktion $d_p(x, y) := \|x - y\|_p$ ist eine Ultrametrik auf $\mathbb{Q}$.

162. ** Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^n dx = 2\frac{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot 2n}{3 \cdot .5 \cdot .. \cdot (2n+1)}$$

163. ** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir das Legendre-Polynom $P_n(x)$ mit

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} f^{(n)}(x)$$

wobei $f(x) = \left(x^2 - 1\right)^n$. Beweisen Sie, dass

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

164. ** Bestimmen Sie das Bild der Funktion

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2 - xy}$$

im Definitionsbereich

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2,\ 0 < y < 2\right\}.$$

165. ** Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt *wegzusammenhängend* falls es für jede zwei Punkte $x, y \in \Omega$ eine Folge $\{x_k\}_{k=0}^m$ von Punkten gibt mit

$$x_0 = x, \quad x_m = y \quad \text{und} \quad [x_{k-1}, x_k] \subset \Omega \text{ für alle } k = 1, ..., m. \tag{62}$$

(a) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene wegzusammenhängende Menge und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Beweisen Sie folgendes: gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$ so gilt $f(x) = \text{const}$ in Ω.

Hinweis. Benutzen Sie den Mittelwertsatz.

(b) Beweisen Sie, dass eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend genau dann ist, wenn sie zusammenhängend ist.

166. ** Bestimmen Sie die Taylorpolynome der gegebenen Funktionen:

(a) Das Taylorpolynom T_3 der Funktion

$$f(x, y) = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}$$

im Punkt $(0, 0)$.

(b) Das Taylorpolynom T_2 der Funktion

$$f(x, y) = x^y$$

im Punkt $(1, 1)$. Mit Hilfe von Taylor-Formel berechnen Sie ungefähr $1,02^{1,1}$.

(c) Das Taylorpolynom T_2 der Funktion

$$f(x, y) = \sqrt{x} \ln y$$

im Punkt $(1, 1)$;

(d) Das Taylorpolynom T_3 der Funktion

$$f(x, y) = \sin(x - y)$$

im Punkt $(0, 0)$.