Analysis II

Alexander Grigoryan
Universität Bielefeld

SS 2025

Contents

8 Differentialrechnung (Fortsetzung) **1**

→**Vorlesung 1** (09.04.2025) 1

8.1 Berechnungsmethoden der Ableitung 1

8.2 Sätze von Fermat, Rolle und Lagrange 6

8.3 Untersuchung von Funktionen mit Hilfe von f' 9

→**Vorlesung 2** (11.04.2025) 10

8.4 Vergleichstest und Ungleichungen 13

8.5 Unbestimmte Ausdrücke und Regel von L'Hôspital 16

→**Vorlesung 3** (16.04.2025) 19

8.6 Landau-Symbol und Differential 24

8.7 Zweite Ableitung und Taylorformel 25

→**Vorlesung 4** (23.04.2025) 26

8.8 Lokale Extrema 29

→**Vorlesung 5** (25.04.2025) 31

8.9 Konvexe und konkave Funktionen 31

8.10 Untersuchung von Funktionen mit Hilfe von f' und f'' 35

→**Vorlesung 6** (30.04.2025) 38

8.11 * Funktionsgraphen und Statistiken 40

8.12 * Verwenden von Software zum Zeichnen von Funktionsgraphen 40

8.13 Höhere Ableitungen 41

8.14 Taylorformel mit Peano-Restglied 43

→**Vorlesung 7** (02.05.2025) 47

8.15 Taylorformel mit Lagrange-Restglied 48

8.16 * Beweis der Taylor-Formel mit Lagrange-Restglied 50

9 Integralrechnung: unbestimmtes Integral **53**

9.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral 53

9.2 Linearität des unbestimmten Integrals 58

→**Vorlesung 8** (07.05.2025) 58

9.3 Partielle Integration 60

9.4 Substitutionsregel 61

→**Vorlesung 9** (09.05.2025) 64

9.5 Integration von rationalen Funktionen 67

9.6 * Integration von rationalen Funktionen - Vertiefung 71

9.7 * Berechnen von unbestimmten Integralen mit Hilfe von Software 79

10 Integralrechnung: bestimmtes Integral **81**
→**Vorlesung 10** (14.05.2025) 81
10.1 Riemann-Integral 81
10.2 Fundamentalsatz der Analysis, 1 84
→**Vorlesung 11** (16.05.2025) 87
10.3 Linearität und partielle Integration 89
10.4 Substitutionsregel 91
→**Vorlesung 12** (21.05.2025) 94
10.5 Länge von Kurve 94
→**Vorlesung 13** (23.05.2025) 101
10.6 Darboux-Integrierbarkeit 101
→**Vorlesung 14** (28.05.2025) 106
10.7 Integrierbarkeit von stetigen und monotonen Funktionen 106
10.8 Integration und Ungleichungen 109
10.9 Additivität von Integral 111
10.10 Fundamentalsatz der Analysis, 2 113
10.11 Taylorformel mit Integralrestglied 114
→**Vorlesung 15** (30.05.2025) 115
10.12 Uneigentliches Integral 116
→**Vorlesung 16** (04.06.2025) 123
10.13 Konvergenzkriterien von uneigentlichen Integralen 123
→**Vorlesung 17** (06.06.2025) 128
10.14 * Wallis-Produkt 132
10.15 * Stirling-Formel 134

11 Metrische Räume und stetige Abbildungen **137**
11.1 Abstandsfunktion 137
→**Vorlesung 18** (11.06.2025) 138
11.2 Die p-Norm in $\mathbb{R}^n$ 139
11.3 Metrische Kugel 142
→**Vorlesung 19** (13.06.2025) 145
11.4 Konvergenz in metrischen Räumen 145
11.5 Stetige Abbildungen 146
11.6 Offene und abgeschlossene Mengen 147
→**Vorlesung 20** (18.06.2025) 150
11.7 Stetigkeit und offene Mengen 150
11.8 Äquivalente Metriken 153
11.9 Vollständigkeit 154
→**Vorlesung 21** (20.06.2025) 155
11.10 Unterraum 156
11.11 Fixpunktsatz von Banach 157
→**Vorlesung 22** (25.06.2025) 159
11.12 Kompakte Mengen und Extremwertsatz 159
→**Vorlesung 23** (27.06.2025) 164
11.13 Fundamentalsatz der Algebra 168
→**Vorlesung 24** (02.07.2025) 169
11.14 * Gleichmäßige Stetigkeit 171

11.15 * Zusammenhängende Mengen und Zwischenwertsatz 171
11.16 * Topologie 174
11.17 * Vervollständigung von metrischen Räumen 175
11.18 * p-adische Zahlen 178
11.19 * Lebesgue-integrierbare Funktionen 181

12 Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$ 183

12.1 Partielle und totale Differenzierbarkeit 183
→**Vorlesung 25** (04.07.2025) 190
12.2 Kettenregel für totale Ableitung 191
→**Vorlesung 26** (09.07.2025) 195
12.3 Partielle Ableitungen höherer Ordnung 195
12.4 Lokale Extrema 199
→**Vorlesung 27** (11.07.2025) 201
12.5 * Richtungsableitung 208
12.6 * Parameterintegral 210
12.7 * Taylorformel 216
12.8 * Satz von der inversen Funktion 222
12.9 * Satz von der impliziten Funktion 223
12.10 * Beweise 228
12.10.1 Satz von der impliziten Funktion 228
12.10.2 Satz von der inversen Funktion 233

13 * Konvergenz von Integralen und Funktionenreihen 235

13.1 Bedingte Konvergenz von Integralen 235
13.2 Gammafunktion 238
13.3 Dirichlet-Integral 240
13.4 Alternative Definition von Elementarfunktionen 243
13.5 Funktionenfolgen 248
13.6 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen 250
13.7 Potenzreihen 253
13.8 Integrations unter gleichmäßiger Konvergenz 258
13.9 Differenzieren unter gleichmäßiger Konvergenz 261
13.10 Taylorreihen 263
13.11 Binomische Reihe 265
13.12 Sätze von der majorisierten und monotonen Konvergenz 269
13.13 Gauss-Integral 273
13.14 Approximationssatz von Weierstraß 275
13.15 Zweiter Beweis des Approximationssatzes von Weierstraß 279
13.16 Fourier-Reihen 283

14 * Flächen in $\mathbb{R}^n$ 293

14.1 Parametrische Gleichung einer Fläche 293
14.2 Tangentialebene 296
14.3 Implizite Flächen 299

15 * Analysis und Topologie der Ebene **303**
15.1 Holomorphe und harmonische Funktionen 303
15.2 Maximum-Prinzip und Fundamentalsatz der Algebra 305
15.3 Kurvenintegral und Windungszahl 306
15.4 Anwendungen von Windungszahl 312
15.4.1 Fundamentalsatz der Algebra 312
15.4.2 Fixpunktsatz von Brouwer 313
15.4.3 Das Komplement einer abgeschlossenen Kurve 313

Chapter 8

Differentialrechnung (Fortsetzung)

09.04.2025 **Vorlesung 1**

Zunächst erinnern wir uns an die Definition der *Ableitung*. Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall J.

Definition. Die Ableitung von f an einer Stelle $x \in J$ ist der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \tag{8.1}$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert.

Der Ausdruck $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ heißt der *Differenzenquotient* von f. Ist der Grenzwert in (8.1) endlich, so heißt f *differenzierbar* in $x \in J$. Ist f an allen Stellen $x \in J$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar auf dem Intervall J. In diesem Fall ist die Ableitung f' auch eine Funktion auf J.

Andere Notation für f':

$$f' = \frac{df}{dx} = \partial_x f.$$

8.1 Berechnungsmethoden der Ableitung

Rechenregeln

Satz 8.1 *Seien f und g zwei Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$, die in einem $x \in J$ differenzierbar sind. Dann sind die Funktionen $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ auch in x differenzierbar (im Fall von f/g vorausgesetzt $g \neq 0$) und die folgenden Identitäten gelten an der Stelle x:*

(*a*) Summenregel:

$$\boxed{(f+g)' = f' + g'.} \tag{8.2}$$

(*b*) Produktregel (*oder* Leibnizregel):

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'.} \tag{8.3}$$

(c) Quotientenregel:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}. \tag{8.4}$$

Sind f und g in J differenzierbar so gelten diese Identitäten auch in J.

Beweis von Satz 8.1. (a) Nach Definition von Ableitung und Summenregel für Limes erhalten wir

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{y\to x} \frac{(f+g)(y) - (f+g)(x)}{y-x} \\
&= \lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y-x} + \lim_{y\to x} \frac{g(y) - g(x)}{y-x} \\
&= f'(x) + g'(x).
\end{aligned}$$

(b) Mit gleichem Argument und mit Hilfe von Stetigkeit von f an der Stelle x, erhalten wir

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{y\to x} \frac{f(y)g(y) - f(x)g(x)}{y-x} \\
&= \lim_{y\to x} \frac{f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(x)g(x)}{y-x} \\
&= \lim_{y\to x} \frac{f(y)(g(y) - g(x))}{y-x} + \lim_{y\to x} \frac{(f(y) - f(x))g(x)}{y-x} \\
&= f(x) \lim_{y\to x} \frac{g(y) - g(x)}{y-x} + \lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y-x} g(x) \\
&= f(x)g'(x) + f'(x)g(x),
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

(c) Berechnen wir zunächst $\left(\frac{1}{g}\right)'$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{y\to x} \frac{1}{y-x}\left(\frac{1}{g(y)} - \frac{1}{g(x)}\right) \\
&= \lim_{y\to x} \frac{1}{y-x}\left(\frac{g(x) - g(y)}{g(y)g(x)}\right) \\
&= \lim_{y\to x} \frac{g(x) - g(y)}{y-x} \lim_{y\to x} \frac{1}{g(y)g(x)} \\
&= -g'(x)\frac{1}{g^2(x)},
\end{aligned}$$

d.h.

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}}. \tag{8.5}$$

Diese Identität ist ein spezieller Fall von (8.4) für $f \equiv 1$.

Für allgemeine Funktion f erhalten wir mit Hilfe von Produktregel (8.3) und (8.5):

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\frac{1}{g}\right)' = f'\left(\frac{1}{g}\right) + f\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

■

Bemerkung. Es folgt per Induktion aus der Summenregel, dass für n differenzierbare Funktionen $f_1, ..., f_n$ gilt

$$\left(\sum_{k=1}^n f_k\right)' = \sum_{k=1}^n f_k'.$$

Bemerkung. Für das Produkt dreier Funktionen f, g, h gilt die Regel

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh',$$

da nach (8.3)

$$(fgh)' = ((fg)\,h)' = (fg)'\,h + (fg)\,h' = (f'g + fg')\,h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

Analog gilt für das Produkt von n Funktionen $f_1, ..., f_n$ die Regel

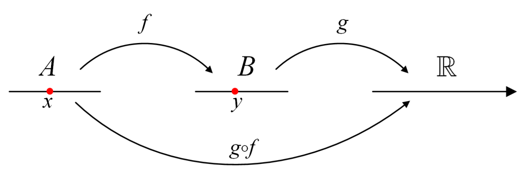
$$(f_1 ... f_n)' = f_1' f_2 ... f_n + f_1 f_2' f_3 ... f_n + ... f_1 ... f_k' ... f_n + ... f_1 ... f_{n-1} f_n',$$

die man per Induktion nach n beweisen kann.

Kettenregel

Satz 8.2 (Kettenregel) *Seien f eine Funktion auf einem Intervall A und g eine Funktion auf einem Intervall B, so dass die Verkettung $g \circ f$ definiert ist (d.h. $f(A) \subset B$). Sei f differenzierbar in einem $x \in A$ und g differenzierbar in $y = f(x) \in B$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x und es gilt*

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(y)\, f'(x)} = g'(f(x))\, f'(x)\,. \tag{8.6}$$



Für den Beweis des Satzes 8.2 brauchen wir das folgende Lemma.

Lemma 8.3 *Sei f eine Funktion auf einem Intervall J die in einem $a \in J$ differenzierbar ist. Dann existiert eine Funktion $\Phi : J \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $f(x) - f(a) = \Phi(x)(x - a)$ *für alle* $x \in J$;

(ii) $\Phi(a) = f'(a)$

(iii) Φ *ist stetig in* a.

Bemerkung. Da f in a differenzierbar ist, so gilt eine ungefähre Gleichheit

$$f(x) - f(a) \approx f'(a)(x-a) \quad \text{für} \quad x \approx a.$$

Die Bedeutung von (i) ist dass wir die Konstante $f'(a)$ hier durch eine Funktion $\Phi(x)$ ersetzen und somit eine richtige Gleichheit für alle $x \in J$ erhalten. Die Funktion Φ aus Lemma 8.3 heißt die *Verhältnisfunktion* von f an der Stelle a.

Beweis. Definieren wir $\Phi(x)$ für alle $x \in J$ wie folgt:

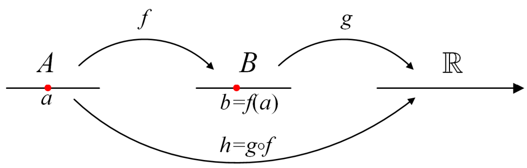
$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}, & x \neq a, \\ f'(a), & x = a. \end{cases} \tag{8.7}$$

Die Identität (i) gilt für $x \neq a$ nach Definition (8.7), und für $x = a$, da die beiden Seiten von (i) verschwinden. Die Identität (ii) gilt auch nach Definition (8.7). Die Bedingung (iii) gilt, da

$$\lim_{x\to a} \Phi(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a) = \Phi(a).$$

■

Beweis von Satz 8.2. Im Beweis wechseln wir die Notation: sei $f : A \to B$ differenzierbar in $a \in A$ und $g : B \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $b = f(a)$.



Setzen wir $h = g \circ f$ und beweisen, dass

$$h'(a) = g'(b) f'(a).$$

Sei Φ die Verhältnisfunktion von f in a und Ψ – die Verhältnisfunktion von g in b, so dass

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \Phi(x)(x-a) \quad \forall\, x \in A, \\ g(y) - g(b) &= \Psi(y)(y-b) \quad \forall y \in B, \end{aligned} \tag{8.8}$$

Einsetzen in (8.8) $y = f(x)$ und $b = f(a)$ ergibt

$$\begin{aligned} h(x) - h(a) = g(f(x)) - g(f(a)) &= \Psi(f(x))(f(x) - f(a)) \\ &= \Psi(f(x))\Phi(x)(x-a), \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\frac{h(x) - h(a)}{x-a} = \Psi(f(x))\Phi(x)$$

und

$$h'(a) = \lim_{x\to a} \frac{h(x) - h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \Psi(f(x))\Phi(x).$$

Da $f(x)$ stetig in a ist und $\Psi(y)$ stetig in $b = f(a)$, so ist die Verkettung $\Psi(f(x))$ stetig in a. Da $\Phi(x)$ auch stetig in a ist, so gilt

$$h'(a) = \Psi(f(a))\,\Phi(a) = \Psi(b)\,\Phi(a) = g'(b)\,f'(a),$$

was zu beweisen war. ■

Bemerkung. Die Kettenregel lässt sich für Komposition von mehreren Funktionen verallgemeinern wie folgt. Sei

$$F = h \circ g \circ f,$$

wobei f in einem x differenzierbar ist, g – in $y = f(x)$ und h – in $z = g(y)$. Dann ist F in x differenzierbar und es gilt

$$\boxed{F'(x) = h'(z)\,g'(y)\,f'(x)} = h'(g(f(x)))\,g'(f(x))\,f'(x), \tag{8.9}$$

da $F = h \circ (g \circ f)$, $z = (g \circ f)(x)$ und somit nach dem Satz 8.2

$$F'(x) = h'(z)\,(g \circ f)'(x) = h'(z)\,g'(y)\,f'(x).$$

Die ähnliche Regel gilt für Verkettung von mehreren Funktionen.

Ableitung der inversen Funktion

Satz 8.4 (Ableitung der inversen Funktion) *Sei f eine stetige streng monotone Funktion auf einem Intervall J, so dass die inverse Funktion f^{-1} auf dem Intervall $I = f(J)$ wohldefiniert ist* (Satz 6.9 aus *A1*). *Nehmen wir an, dass f in einem $x \in J$ differenzierbar ist und dass $f'(x) \neq 0$. Dann ist f^{-1} in $y = f(x)$ differenzierbar und es gilt*

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}}. \tag{8.10}$$

Beweis von dem Satz 8.4. Wechsel der Notation: sei f differenzierbar in $a \in J$ und $f'(a) \neq 0$. Beweisen wir, dass f^{-1} differenzierbar in $b = f(a)$ ist und

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Sei Φ die Verhältnisfunktion von f in a, so dass

$$f(x) - f(a) = \Phi(x)(x - a) \qquad \forall x \in J \tag{8.11}$$

Setzen wir in (8.11) $y = f(x)$, $b = f(a)$ ein und erhalten, dass

$$y - b = \Phi\left(f^{-1}(y)\right)\left(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\right) \qquad \forall y \in I$$

und somit

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{\Phi\left(f^{-1}(y)\right)},$$

Da die Funktion f^{-1} stetig auf J ist und Φ stetig in $a = f^{-1}(b)$ ist, so erhalten wir, dass

$$\lim_{y \to b} \Phi\left(f^{-1}(y)\right) = \Phi\left(f^{-1}(b)\right) = \Phi(a) = f'(a).$$

Da $f'(a) \neq 0$ so erhalten wir

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{1}{\Phi\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{f'(a)},$$

was zu beweisen war. ■

8.2 Sätze von Fermat, Rolle und Lagrange

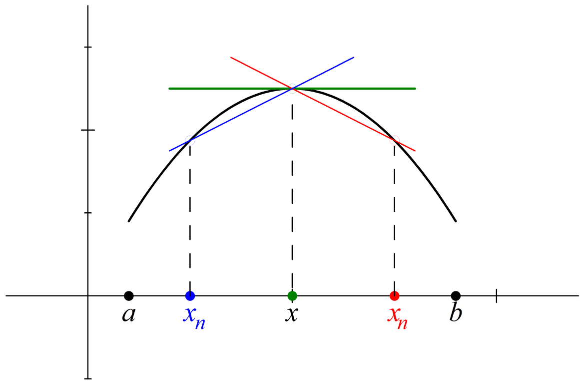
Hauptsatz 8.5 (Satz von Fermat) *Sei f eine Funktion auf einem offenen Intervall (a, b) und sei $x \in (a, b)$ eine Maximumstelle (bzw Minimumstelle) von f. Ist f in x differenzierbar, so gilt $f'(x) = 0$.*

Die geometrische Bedeutung dieser Aussage ist wie folgt: die Steigung der Tangente an der Maximumstelle (Minimumstelle) von f ist 0, d.h. die Tangente an dieser Stelle waagerecht ist.

Beweis. Für jede Folge $\{x_n\}$ aus $(a, b) \setminus \{x\}$ mit $x_n \to x$ haben wir

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}.$$

Da x eine Maximumstelle ist, so gilt $f(x_n) \leq f(x)$ für alle n.



Die linke Sekante (blau) hat eine positive Steigung, die rechte Sekante (rot) hat eine negative Steigung, und die Tangente (grün) an der Maximumstelle ist waagerecht.

Für jede Folge $\{x_n\}$ aus (a, x) gilt $x_n - x < 0$ und somit

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \geq 0,$$

und für jede Folge $\{x_n\}$ aus (x, b) gilt $x_n - x > 0$ und

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \leq 0,$$

woraus folgt $f'(x) = 0$. Der Fall von Minimumstelle wird analog behandelt. ■

Korollar 8.6 *Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall $[a, b]$ mit $a < b$, die auf (a, b) differenzierbar ist. Ist x eine Maximum- oder Minimumstelle von f auf $[a, b]$, so gilt eine von drei Bedingungen:*

1. *entweder $x \in (a, b)$ und $f'(x) = 0$,*
2. *oder $x = a$,*
3. *oder $x = b$.*

Bemerken wir, dass die Maximum- und Minimumstellen von f auf $[a,b]$ existieren nach dem Extremwertsatz (Satz 6.13 von $A1$).

Beweis. Gilt $x \in (a,b)$ so gilt $f'(x) = 0$ nach dem Satz 8.5. Sonst $x = a$ oder $x = b$. ■

Definition. Definieren wir die *kritische* Menge von f wie folgt:

$$\boxed{K_f = \{x \in (a,b) : f'(x) = 0\} \cup \{a,b\}}.$$

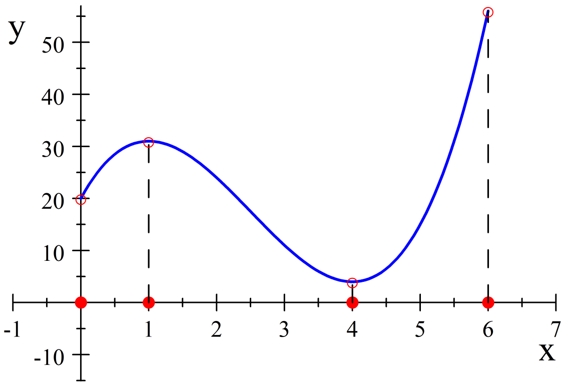
Nach dem Korollar 8.6 liegen die Maximum- und Minimumstellen von f in der Menge K_f. Es folgt, dass

$$\max_{[a,b]} f = \max_{K_f} f \quad \text{und} \quad \min_{[a,b]} f = \min_{K_f} f.$$

Beispiel. Bestimmen wir das Maximum und Minimum der folgenden Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 20$$

auf dem Intervall $[0,6]$.



Der Graph der Funktion $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 20$ und die kritischen Stellen von f

Die Ableitung ist

$$f'(x) = \left(2x^3 - 15x^2 + 24x + 20\right)' = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x-1)(x-4),$$

und sie hat zwei Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$. Somit erhalten wir die kritische Menge

$$K_f = \{0, 1, 4, 6\}.$$

Die Werte von f an den kritischen Stellen sind

$$f(0) = 20, \quad f(1) = 31, \quad f(4) = 4, \quad f(6) = 56.$$

Deshalb $\max_{[0,6]} f = 56$ wird an der Stelle $x = 6$ angenommen, und $\min_{[0,6]} f = 4$ wird an $x = 4$ angenommen.

Satz 8.7 (Satz von Rolle) *Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall $[a,b]$ mit $a < b$, die auf (a,b) differenzierbar ist. Gilt $f(a) = f(b)$ so existiert eine Stelle $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = 0$.*

Beweis. Nach dem Extremwertsatz existieren $\max_{[a,b]} f$ und $\min_{[a,b]} f$. Sei c_1 eine Maximumstelle von f und c_2 – eine Minimumstelle von f. Liegt eines von c_1, c_2 im (a,b), zum Beispiel $c_1 \in (a,b)$, so gilt $f'(c_1) = 0$ nach dem Satz 8.5, und wir setzen $c = c_1$. Seien jetzt c_1 und c_2 die Grenzen von $[a,b]$. Da $f(a) = f(b)$, so folgt es dass $f(c_1) = f(c_2)$ und somit

$$\max_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f.$$

Folglich ist f eine Konstantefunktion auf $[a,b]$, und dann gilt es $f'(c) = 0$ für jedes $c \in (a,b)$. ■

Hauptsatz 8.8 (Mittelwertsatz von Lagrange) *Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall $[a,b]$ mit $a < b$, die auf (a,b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $c \in (a,b)$ mit*

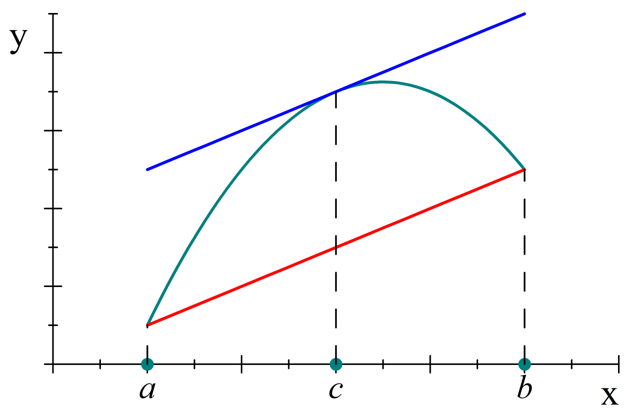
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \tag{8.12}$$

Bemerkung. Im Fall $f(a) = f(b)$ ergibt (8.12) dass $f'(c) = 0$, was den Satz 8.7 impliziert.

Bemerkung. Die Identität (8.12) ist äquivalent zu

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Die Zahl $\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ist die Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$. Somit besagt Satz 8.8 folgendes: die Steigung dieser Sekante ist gleich die Steigung der Tangente an einer Mittelstelle $c \in (a,b)$, d.h. es gibt eine Tangente parallel zur Sekante.



Die Tangente an $(c, f(c))$ (blau) und die Sekante durch $(a, f(a)), (b, f(b))$ (rot) haben die gleichen Steigungen

Beweis. Setzen wir

$$\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

und betrachten die Funktion

$$h(x) := f(x) - \alpha(x-a).$$

Die Funktion h ist offensichtlich stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b), und es gilt

$$h(a) = f(a) - \alpha(a-a) = f(a)$$

und

$$h(b) = f(b) - \alpha(b-a) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a),$$

d.h. $h(a) = h(b)$. Nach dem Satz 8.7 gibt es ein $c \in (a,b)$ mit $h'(c) = 0$. Da

$$h'(x) = f'(x) - \alpha,$$

es folgt daraus, dass $f'(c) - \alpha = 0$ und somit

$$f'(c) = \alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

was zu beweisen war. ■

Bemerkung. Die Identität (8.12) gilt auch im Fall wenn $a > b$, d.h. wenn f auf dem Intervall $[b,a]$ stetig ist und auf (b,a) differenzierbar ist. In der Tat gilt in diesem Fall nach dem Satz 8.8 die Identität

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a-b)$$

für ein $c \in (b,a)$ woraus (8.12) folgt.

8.3 Untersuchung von Funktionen mit Hilfe von f'

Konstantentest

Satz 8.9 (Konstantentest) *Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J. Dann gilt $f = \mathrm{const}$ auf J genau dann wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in J$.*

Beweis. Gilt $f = \mathrm{const}$, so gilt auch $f'(x) = 0$ für alle $x \in J$. Für die Rückrichtung beweisen wir, dass $f(a) = f(b)$ für alle $a, b \in J$. Sei $a < b$. Nach dem Satz 8.8 erhalten wir, für ein $c \in (a,b)$,

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a-b).$$

Da $f'(c) = 0$, so erhalten wir $f(a) = f(b)$. ■

Der Konstantentest wird häufig in der folgenden Situation benutzt. Gilt

$$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in J,$$

so folgt es, dass

$$f(x) = g(x) + \mathrm{const} \;\; \forall x \in J,$$

da für die Funktion $f - g$ gilt $(f-g)' = 0$ und somit $f - g = \mathrm{const}$ auf J.

Beispiel. Bestimmen wir alle Funktionen f mit $f'(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bemerken wir zunächst, dass die Funktion $g(x) = \frac{x^2}{2}$ die Gleichung $g' = x$ erfüllt. Es folgt, dass für beliebige Funktion f mit $f' = x$ gilt

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + C,$$

wobei C eine beliebige Konstante ist. Somit lässt sich die Funktion $f(x)$ durch ihre Ableitung wiederherstellen.

11.04.2025 Vorlesung 2

Monotonietest

Satz 8.10 (Monotonietest) *Sei J ein beliebiges Intervall in $\mathbb{R}$ mit den Grenzen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. Sei f eine stetige Funktion auf J, die auf (a, b) differenzierbar ist.*

(*a*) *Funktion f ist monoton steigend auf J genau dann wenn $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$.*
Funktion f ist monoton fallend auf J genau dann wenn $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in (a, b)$.

(*b*) *Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton steigend auf J.*
Gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton fallend auf J.

Beweis. (*a*) Sei f monoton steigend auf J. Beweisen wir, dass $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Für verschiedene $x, y \in (a, b)$ gilt

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0,$$

da $y > x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$ und $y < x \Rightarrow f(y) \leq f(z)$. Somit erhalten wir für alle $x \in (a, b)$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

Umgekehrt, sei $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Beweisen wir, dass f monoton steigend ist, d.h. für alle $x, y \in J$ mit $y > x$ gilt $f(y) \geq f(x)$. Die Funktion f ist stetig im Intervall $[x, y] \subset J$ und differenzierbar im $(x, y) \subset (a, b)$. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 8.8) gibt es ein $c \in (x, y)$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x). \tag{8.13}$$

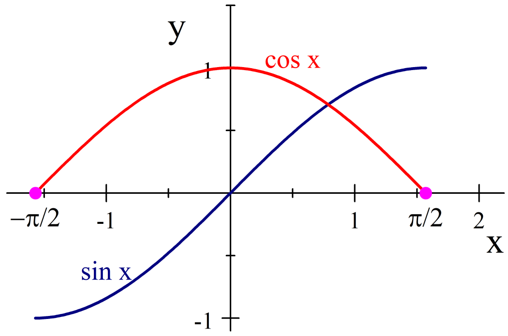
Da $f'(c) \geq 0$, so folgt es, dass $f(y) \geq f(x)$, d.h. f monoton steigend ist.

(*b*) Gilt $f' > 0$ auf (a, b), so haben wir in (8.13) $f'(c) > 0$ und somit $f(y) > f(x)$, d.h. f streng monoton steigend ist.

Die Aussagen mit $f' \leq 0$ und $f' < 0$ lassen sich analog beweisen. ■

Bemerkung. In der Aussage (*b*) gilt die Umkehrung nicht: die Bedingung, dass f streng monoton steigend ist, impliziert die *echte* Ungleichung $f'(x) > 0$ *nicht*. Zum Beispiel, die Funktion $f(x) = x^3$ ist streng monoton steigend auf $\mathbb{R}$, aber $f'(0) = 0$ (da $f'(x) = 3x^2$).

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = \sin x$ auf dem Intervall $J = [-\pi/2, \pi/2]$. Es gilt $f'(x) = \cos x > 0$ für alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, woraus folgt, dass $\sin x$ streng monoton steigend auf $[-\pi/2, \pi/2]$ ist, was wir schon aus $A1$ wissen.

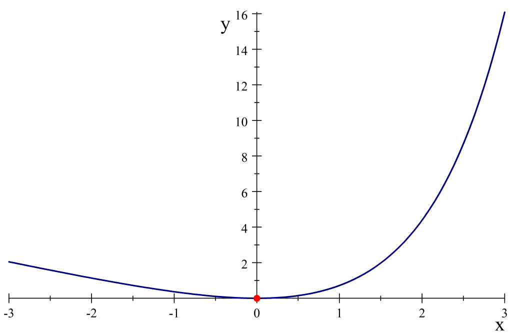


Die Graphen von $\cos x$ (blau) und $\sin x$ (rot) auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Beispiel. Untersuchen wir die Monotonieintervallen der Funktion $f(x) = e^x - 1 - x$ im Definitionsbereich $(-\infty, +\infty)$. Wir haben

$$f'(x) = e^x - 1.$$

Da $f'(x) > 0$ für $x \in (0, \infty)$, so beschließen, dass $f(x)$ streng monoton steigend auf $[0, \infty)$ ist. Da $f'(x) < 0$ für $x \in (-\infty, 0)$, so ist $f(x)$ streng monotone fallend auf $(-\infty, 0]$.



Die Funktion $f(x) = e^x - 1 - x$

Folglich hat die Funktion $f(x)$ eine Minimumstelle an $x = 0$. Da $f(0) = 0$, so gilt die Ungleichung $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel. Bestimmen wir die Minimumstelle der Funktion $f(x) = x^x$ im Definitionsbereich $(0, +\infty)$. Die logarithmische Ableitung dieser Funktion ist

$$(\ln x^x)' = (x \ln x)' = (x)' \ln x + x (\ln x)' = \ln x + 1.$$

Da $f'(x) = (\ln f(x))' f(x)$, so erhalten wir

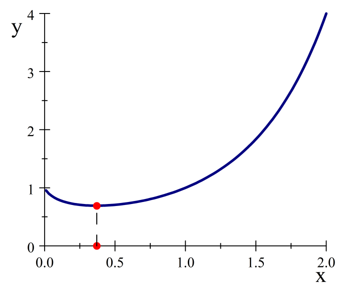
$$(x^x)' = (\ln x + 1) x^x.$$

Die Ableitung $f'(x)$ verschwindet when $\ln x + 1 = 0$, d.h. when $\ln x = -1$ und somit $x = \frac{1}{e}$. Wir haben

$$f'(x) = (\ln x + 1) x^x \ > 0 \text{ für } x > \frac{1}{e},$$

$$f'(x) = (\ln x + 1)\, x^x < 0 \ \text{ für } x < \frac{1}{e}.$$

Es folgt dass für $x > \frac{1}{e}$ die Funktion $f(x)$ streng monoton steigend ist, and für $x < \frac{1}{e}$ – streng monoton fallend.



Funktion $f(x) = x^x$

Folglich ist $x = \frac{1}{e} \approx 0.37$ die Minimumstelle von $f(x)$. Der minimale Wert von $f(x)$ ist

$$\min_{(0,+\infty)} f = f(\frac{1}{e}) = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e} \approx 0.69.$$

Anwendung zur inversen Funktion

Satz 8.11 (Satz von der inversen Funktion) *Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J. Nehmen wir an, dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in J$ (bzw $f'(x) < 0$ für alle $x \in J$). Dann existiert die inverse Funktion f^{-1} auf dem Intervall $I = f(J)$, f^{-1} ist differenzierbar auf I und es gilt für alle $y \in I$*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \tag{8.14}$$

wobei $x = f^{-1}(y)$.

Beweis. Die Funktion f ist stetig auf J. Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in J$ so ist f streng monoton steigend nach dem Satz 8.10.

Nach dem Satz 6.9 von $A1$ existiert die inverse Funktion f^{-1} auf $I = f(J)$.

Da $f'(x) \neq 0$, so ist f^{-1} nach dem Satz 8.4 differenzierbar an der Stelle $y = f(x)$ und die Ableitung von f^{-1} erfüllt (8.14).

Der Fall $f'(x) < 0$ ist analog. ■

Beispiel. Für die Funktion $f(x) = e^x$ auf $J = (-\infty, +\infty)$ gilt $f'(x) = e^x > 0$. Somit existiert die inverse Funktion im Definitionsbereich $I = f(J) = (0, +\infty)$, die mit ln bezeichnet wird, und es gilt

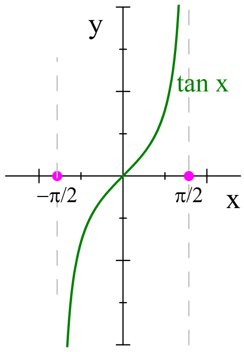
$$(\ln y)' = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

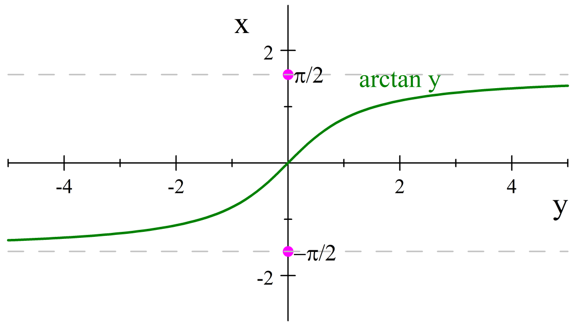
Beispiel. Für die Funktion $f(x) = \tan x$ auf $J = (-\pi/2, \pi/2)$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0.$$

Somit existiert die inverse Funktion im Definitionsbereich $I = f(J) = (-\infty, +\infty)$, die mit arctan bezeichnet wird, und es gilt

$$(\arctan y)' = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$





8.4 Vergleichstest und Ungleichungen

Der Monotonietest (Satz 8.10) kann benutzt werden um Ungleichungen zu beweisen.

Satz 8.12 (Vergleichstest)

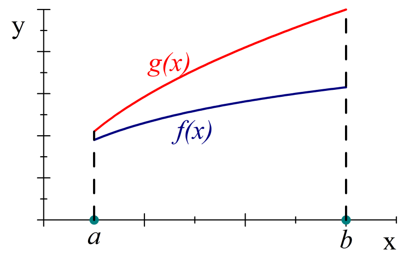
(*a*) *Seien f und g zwei stetige Funktionen auf einem Intervall $[a, b)$, $a < b$, die auf (a, b) differenzierbar sind. Nehmen wir an, dass*

(i) $f(a) \leq g(a)$

(ii) $f'(x) \leq g'(x)$ *für alle* $x \in (a, b)$.

Dann gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in (a, b)$.

Gilt $f'(x) < g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$, so gilt auch $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (a, b)$.



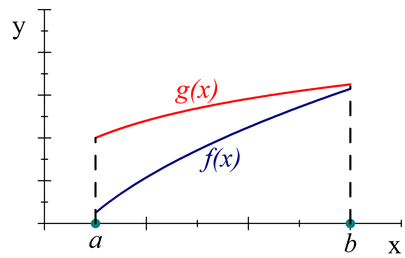
(*b*) *Seien f und g zwei stetige Funktionen auf einem Intervall $(a, b]$, $a < b$, die auf (a, b) differenzierbar sind. Angenommen seien die Bedingungen:*

(i) $f(b) \leq g(b)$

(ii) $f'(x) \geq g'(x)$ *für alle* $x \in (a, b)$.

Dann gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in (a, b)$.

Gilt $f'(x) > g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$, so gilt auch $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (a, b)$.



Beweis. (*a*) Betrachten wir die Funktion

$$h(x) = g(x) - f(x).$$

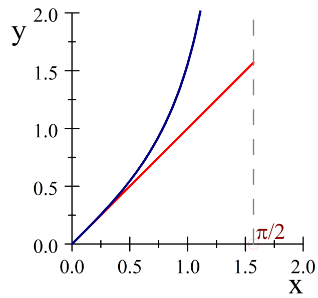
Für alle $x \in (a, b)$ gilt
$$h'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0$$
so dass die Funktion h nach dem Satz 8.10 monoton steigend auf $[a, b)$ ist. Da
$$h(a) = g(a) - f(a) \geq 0,$$
so gilt es für alle $x \in (a, b)$
$$h\,(x) \geq h\,(a) \geq 0$$
und somit $f\,(x) \leq g\,(x)$.

Gilt die echte Ungleichung $f'\,(x) < g'\,(x)$ so erhalten wir, dass $h'(x) > 0$ und somit h streng monoton steigend ist, woraus folgt $h\,(x) > 0$ und somit $f\,(x) < g\,(x)$.

(b) In diesem Fall gilt $h'(x) = g'(x) - f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist h monoton fallend auf $[a, b)$. Da $h(b) \geq 0$ so folgt es dass für alle $x \in (a, b)$
$$h\,(x) \geq h\,(b) \geq 0,$$
woraus folgt $f\,(x) \leq g\,(x)$.

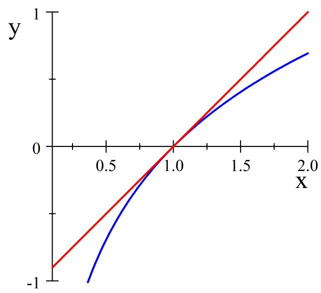
Gilt die echte Ungleichung $f'\,(x) > g'\,(x)$, so gilt auch $h'(x) < 0$ so dass h streng monoton fallend ist, woraus folgt $h\,(x) > 0$ und somit $f\,(x) < g\,(x)$. ■

Beispiel. Beweisen wir für alle $x \in [0, \pi/2)$ die Ungleichung $\tan x \geq x$. Da $x = \tan x$ für $x = 0$, so reicht es zu zeigen, dass $(\tan x)' \geq x'$ was der Fall ist da $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \geq 1$.



Die Graphen von Funktionen $\tan x$ (blau) und x (rot)

Beispiel. Beweisen wir die Ungleichung
$$\ln x \leq x - 1 \quad \text{für alle } x > 0. \tag{8.15}$$
Die Graphen dieser beiden Funktionen werden auf dem folgenden Bild gezeigt:



Die Funktionen $\ln x$ (blau) und $x - 1$ (rot)

Für $x = 1$ sind die beiden Seiten von (8.15) gleich 0. Für $x \in (1, +\infty)$ haben wir

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} < 1 = (x-1)' .$$

Wir verwenden den Vergleichstest des Satzes 8.12(a) auf dem Interval $[1, +\infty)$ und beschließen, dass $\ln x < x - 1$ für alle $x > 1$.

Für $x \in (0, 1)$ haben wir

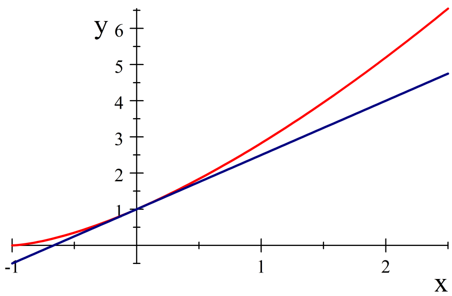
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 1 = (x-1)' .$$

Nach dem Vergleichstest des Satzes 8.12(b) auf dem Interval $(0, 1]$ erhalten wir $\ln x < x-1$ für alle $x \in (0, 1)$. Somit gilt (8.15) für alle $x > 0$.

Beispiel. Beweisen wir, dass für alle $a > 1$ und $x > -1$ gilt

$$(1+x)^a \geq 1 + ax. \tag{8.16}$$

Das ist eine Verallgemeinerung der Bernoulli-Ungleichung, die für $a \in \mathbb{N}$ in $A1$ per Induktion nach a bewiesen wurde.



Die Graphen von Funktionen $(1+x)^{3/2}$ (rot) und $1 + \frac{3}{2}x$ (blue)

Für $x = 0$ sind die beiden Seiten von (8.16) gleich 1. Für $x \in (0, +\infty)$ gilt

$$((1+x)^a)' = a\,(1+x)^{a-1} > a = (1+ax)' ,$$

da $(1+x)^{a-1} > 1$, und für $x \in (-1, 0)$ gilt

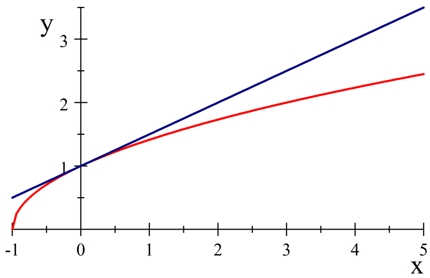
$$((1+x)^a)' = a\,(1+x)^{a-1} < a = (1+ax)' ,$$

da in diesem Fall $(1+x)^{a-1} < 1$. Nach dem Satz 8.12 beschließen wir, dass (8.16) für alle $x > -1$ gilt.

Analog beweist man, dass für alle $0 < a < 1$ und $x > -1$ die umgekehrte Ungleichung gilt:

$$(1+x)^a \leq 1 + ax$$

(Aufgabe 19).



Die Graphen von Funktionen $\sqrt{1+x}$ (rot) und $1+\frac{1}{2}x$ (blue)

8.5 Unbestimmte Ausdrücke und Regel von L'Hôspital

Nach der Rechenregel für lim gilt die Identität

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$$

vorausgesetzt, dass die beiden Grenzwerte auf der rechten Seite existieren und ihrer Quotient bestimmt ist. Allerdings ist das nicht der Fall, wenn die beiden Grenzwerte gleich 0 oder gleich $\pm\infty$ sind. Man spricht in diesem Fall von der *unbestimmten Ausdrücken* $\frac{0}{0}$ bzw $\frac{\infty}{\infty}$. Häufig lassen sich diese Ausdrücke mit Hilfe von Ableitungen lösen wie der folgende Satz besagt.

Hauptsatz 8.13 (Regel von L'Hôspital) *Seien f und g differenzierbare Funktionen auf einem Intervall $J\subset\mathbb{R}$. Angenommen sei, dass für ein $a\in\overline{J}$*

(a) entweder

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0, \tag{8.17}$$

(b) oder

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\lim_{x\to a}|g(x)|=+\infty. \tag{8.18}$$

Nehmen wir an, dass $g\neq0$ und $g'\neq0$ auf $J\setminus\{a\}$ und dass

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=b \tag{8.19}$$

für ein $b\in\overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=b. \tag{8.20}$$

Diese Regel lässt sich kurz wie folgt formulieren:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \tag{8.21}$$

vorausgesetzt, dass die linke Seite ein unbestimmter Ausdruck $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ist und die rechte Seite wohldefiniert ist.

Beispiel. 1. Bestimmen wir
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}.$$
Das ist unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$. Nach dem Satz 8.13 mit $J=(-1,1)$ und $a=0$ erhalten wir
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x))'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{\cos x}=1. \tag{8.22}$$
Um rigorous zu sein, man soll die Gültigkeit der Gleichheiten in (8.22) rückwärts beweisen: da $\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x))'}{(\sin x)'}$ existiert und gleich 1 ist, so gilt nach dem Satz 8.13 auch
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=1.$$
Diese Bemerkung gilt auch für alle Anwendungen von der Regel von L'Hôspital.

2. Die Regel von L'Hôspital gilt nur wenn $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ ein unbestimmter Ausdruck ist. Betrachten wir, zum Beispiel, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x}$, dass kein unbestimmter Ausdruck ist und offensichtlich gleich 1 ist. Andererseits gilt
$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2)'}{(x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{1}=2$$
und somit
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x}\neq\lim_{x\to 1}\frac{(x^2)'}{(x)'}.$$

3. Bestimmen wir
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2},$$
was ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{\infty}{\infty}$ ist. Versuchen wir die Regel von L'Hôspital mit $J=(0,+\infty)$ und $a=+\infty$ zu benutzen:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}, \tag{8.23}$$
und erhalten, dass der Grenzwert in der rechten Seite wieder ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{\infty}{\infty}$ ist. Verwenden wir noch einmal die Regel von L'Hôspital und erhalten
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty. \tag{8.24}$$
Somit erhalten wir nach zwei Anwendungen von der Regel von L'Hôspital, dass
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty.$$
Analog beweist man per Induktion nach n, dass
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \tag{8.25}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Das gleiche Ergebnis kann man auch mit Hilfe von der Exponentialreihe erhalten.

4. Bestimmen wir

$$\lim_{x\to 0} x \ln x$$

wobei die Funktion $f(x) = x \ln x$ im $J = (0, +\infty)$ definiert ist. Da $\ln x \to -\infty$ für $x \to 0$, so bekommen wir einen unbestimmten Ausdruck der Form $0 \cdot \infty$. Um ihn zu lösen, stellen wir den Grenzwert in der Form von Quotient dar:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x},$$

was ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{\infty}{\infty}$ ist. Nach der Regel von L'Hôspital erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = -\lim_{x\to 0} \frac{1/x}{1/x^2} = -\lim_{x\to 0} x = 0. \tag{8.26}$$

5. Bestimmen wir

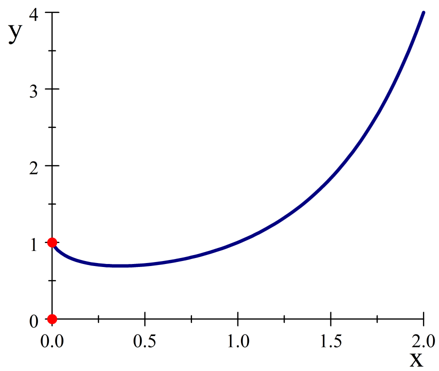
$$\lim_{x\to 0} x^x,$$

wobei die Funktion $f(x) = x^x$ im $J = (0, +\infty)$ definiert ist. Das ist unbestimmter Ausdruck der Form 0^0. Um ihn zu lösen, betrachten wir den Logarithmus der Funktion x^x:

$$\lim_{x\to 0} \ln x^x = \lim_{x\to 0} x \ln x = 0,$$

wo wir (8.26) verwendet haben. Mit Substitution $y = x \ln x$ erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x \ln x} = \lim_{y\to 0} e^y = 1.$$



Der Graph der Funktion x^x

6. Bestimmen wir

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

was ein unbestimmter Ausdruck der Form 1^∞ ist. Die Funktion $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ist im Intervall $J = (0, +\infty)$ definiert. Der Logarithmus ist

$$\ln f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

was unbestimmter Ausdruck der Form $\infty \cdot 0$ ist. Dann erhalten wir mit Hilfe von Substitution $y = \frac{1}{x}$ und der Regel von L'Hôspital

$$\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{(\ln(1+y))'}{(y)'} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{1+y}}{1} = 1.$$

Es folgt mit Hilfe von Substitution $z = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{z\to 1} e^z = e.$$

Zum Vergleich erinnern wir uns daran, dass $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Für den Beweis des Satzes 8.13 brauchen wir die folgende Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes von Lagrange.

Hauptsatz 8.14 (Mittelwertsatz von Cauchy) *Seien f, g stetige Funktionen auf einem Intervall $[a,b]$, $a < b$, die auf (a,b) differenzierbar sind. Dann existiert ein $c \in (a,b)$ mit*

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)). \tag{8.27}$$

Der Mittelwertsatz von Lagrange (Satz 8.8) ist ein spezieller Fall des Satzes 8.14 für $g(x) = x$ da in diesem Fall (8.27) wird

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Wenn $g'(c) \neq 0$ und $g(b) \neq g(a)$, so lässt die Identität (8.27) sich wie folgt umschreiben:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Beweis. Setzen wir

$$A = g(b) - g(a), \qquad B = f(b) - f(a)$$

und betrachten die Funktion

$$h(x) = Af(x) - Bg(x).$$

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} h(b) - h(a) &= Af(b) - Bg(b) \; - [Af(a) - Bg(a)] \\ &= A(f(b) - f(a)) - B(g(b) - g(a)) \\ &= AB - BA = 0, \end{aligned}$$

so dass $h(a) = h(b)$. Nach dem Satz von Rolle (Satz 8.7) existiert ein $c \in (a,b)$ mit $h'(c) = 0$. Da

$$h'(x) = Af'(x) - Bg'(x),$$

so erhalten wir für $x = c$

$$Af'(c) = Bg'(c),$$

was äquivalent zu (8.27) ist. ■

16.04.2025 Vorlesung 3

Beweis von Satz 8.13(a)**.** Die Voraussetzungen in diesem Fall sind

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0, \tag{8.28}$$

wobei $a \in \overline{J}$, und

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b, \tag{8.29}$$

wobei $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Wir müssen beweisen, dass

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b. \tag{8.30}$$

Zunächst sei $a \in \mathbb{R}$ (der Fall $a = \pm\infty$ wird unterhalb behandelt). Ist $a \in J$ so gilt nach (8.28) und der Stetigkeit von f und g dass

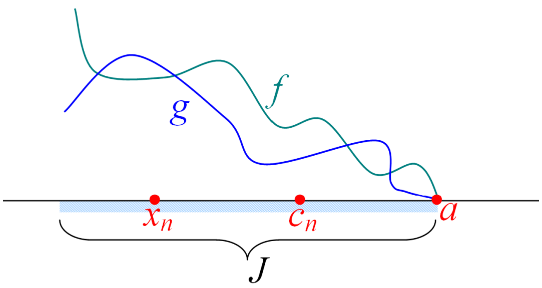
$$f(a) = g(a) = 0. \tag{8.31}$$

Ist $a \notin J$, so erweitern wir den Definitionsbereich von f und g auf $J \cup \{a\}$ und definieren f und g an der Stelle a mit (8.31). Dann sind f und g stetig auf dem Intervall $J \cup \{a\}$.

Um (8.30) zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus $J \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = b. \tag{8.32}$$

Sei $x_n < a$. Die Funktionen f und g sind stetig in $[x_n, a] \subset J \cup \{a\}$ und differenzierbar in $(x_n, a) \subset J$.



Nach dem Mittelwertsatz von Cauchy (Satz 8.14) gibt es ein $c_n \in (x_n, a)$ mit

$$\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \tag{8.33}$$

(nach Voraussetzung gelten $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$).

Im Fall $x_n > a$ erhalten wir analog ein $c_n \in (a, x_n)$ mit (8.33).

Da c_n zwischen x_n und a liegt und $x_n \to a$, so gilt auch $c_n \to a$ für $n \to \infty$, und wir erhalten wir nach der Voraussetzung (8.29) dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = b,$$

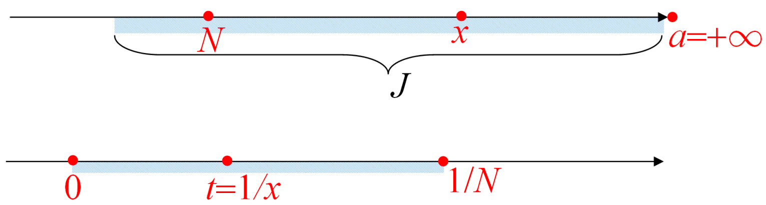
was zusammen mit (8.33) ergibt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=b$$

was zu beweisen war.

Sei jetzt $a=+\infty$ so dass $+\infty$ eine Grenze von J ist. Fixieren wir ein positives $N\in J$ so dass $J\supset(N,+\infty)$. Betrachten wir die neue Variable $t=\frac{1}{x}$ und die Funktionen

$$F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)\quad\text{und}\quad G(t)=g\left(\frac{1}{t}\right)\quad\text{für}\quad t\in(0,1/N).$$



Es gilt

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{t\to0}\frac{F(t)}{G(t)},\tag{8.34}$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert in der rechten Seite existiert. Es handelt sich um einen unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ da

$$\lim_{t\to0}F(t)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0\quad\text{und}\quad\lim_{t\to0}G(t)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0.$$

Um den Grenzwert $\lim_{t\to0}\frac{F(t)}{G(t)}$ zu bestimmen, verwenden wir den oben bewiesenen Fall der L'Hôspital-Regel. Nach dem Satz 8.2 (Kettenregel) und der Voraussetzung (8.19) gilt

$$\lim_{t\to0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=b.$$

Nach dem oben beweisenen Fall der L'Hôspital-Regel (mit $a=0$) beschließen wir

$$\lim_{t\to0}\frac{F(t)}{G(t)}=b,$$

so dass nach (8.34)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=b,$$

was zu beweisen war.

Der Fall $a=-\infty$ wird analog bewiesen. ■

Beweis von Satz 8.13(b)**.** Die Voraussetzungen in diesem Fall sind

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\lim_{x\to a}|g(x)|=+\infty\tag{8.35}$$

wobei $a \in \overline{J}$, und

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{8.36}$$

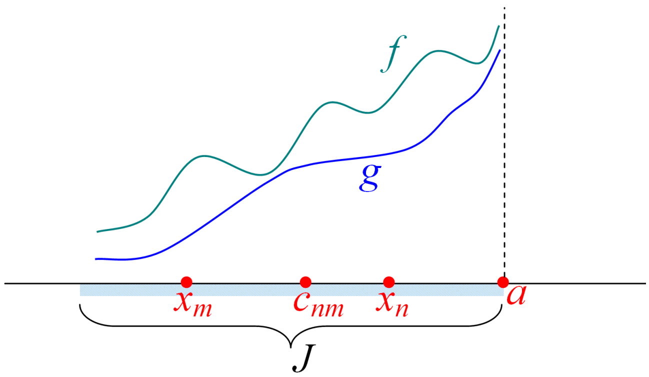
Wir müssen beweisen, dass auch

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b. \tag{8.37}$$

Nehmen wir an, dass $b \in \mathbb{R}$ und sogar $b > 0$ (die Fälle $b < 0$, $b = 0$ und $b = \pm\infty$ sind ähnlich). Wir müssen beweisen, dass für jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus $J \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = b.$$

Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit verschiedenen x_n, x_m ist f im Intervall $[x_m, x_n]$ (bzw $[x_n, x_m]$) differenzierbar.



Nach dem Mittelwertsatz von Cauchy existiert ein $c_{nm} \in (x_m, x_n)$ (bzw $c_{nm} \in (x_n, x_m)$) mit

$$\frac{f'(c_{nm})}{g'(c_{nm})} = \frac{f(x_n) - f(x_m)}{g(x_n) - g(x_m)} = \frac{\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} - \dfrac{f(x_m)}{g(x_n)}}{1 - \dfrac{g(x_m)}{g(x_n)}}.$$

(Bemerken wir dass nach der Voraussetzung $g'(c_{nm}) \neq 0$. Auch gilt $g(x_n) \neq g(x_m)$, da anderenfalls nach dem Satz von Rolle (Satz 8.7) die Ableitung g' eine Nullstelle im $J \setminus \{a\}$ hat, was nicht der Fall ist). Wir lösen diese Gleichung bezüglich $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}$ und erhalten

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_{nm})}{g'(c_{nm})} \left(1 - \frac{g(x_m)}{g(x_n)}\right) + \frac{f(x_m)}{g(x_n)}. \tag{8.38}$$

Fixieren wir ein $0 < \varepsilon < b$. Nach der Voraussetzung (8.36) gibt es eine Umgebung U von a mit

$$b - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < b + \varepsilon \quad \text{für alle } x \in J \cap U.$$

Da $x_n \to a$, so liegen die Punkte x_n, x_m in $U \cap J$ für alle $n, m \geq N$ für ein N, woraus folgt, dass auch $c_{nm} \in U \cap J$ und somit

$$b - \varepsilon < \frac{f'(c_{nm})}{g'(c_{nm})} < b + \varepsilon. \tag{8.39}$$

Fixierten wir ein $m \geq N$ und lassen $n \to \infty$ in (8.38). Da $x_n \to a$ und nach (8.35) $|g(x_n)| \to +\infty$, so erhalten wir

$$\frac{g(x_m)}{g(x_n)} \to 0 \quad \text{und} \quad \frac{f(x_m)}{g(x_n)} \to 0,$$

insbesondere gelten für alle $n \geq N'$ (für ein ausreichend großes N') die Ungleichungen

$$-\varepsilon < \frac{g(x_m)}{g(x_n)} < \varepsilon \quad \text{und} \quad -\varepsilon < \frac{f(x_m)}{g(x_n)} < \varepsilon.$$

Es folgt aus (8.38) und (8.39) dass für $n \geq N'$ gilt

$$(b-\varepsilon)(1-\varepsilon) - \varepsilon < \frac{f(x_n)}{g(x_n)} < (b+\varepsilon)(1+\varepsilon) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, so folgt es dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = b,$$

was zu beweisen war. ■

Bemerkung. Im Beweis des Satzes 8.13(b) wurde die Voraussetzung $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$ nicht benutzt. Somit gilt dieser Satz auch wenn anstatt (8.35) nur $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ bekannt ist.

Beispiel. Bestimmen wir den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right).$$

Es handelt sich hier um einen unbestimmten Ausdruck $\infty - \infty$. Wir formen diesen Ausdruck wie folgt um:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \sqrt{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1\right) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

und wechseln die Variable $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Wir erhalten

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{1+y}-1}{y},$$

und das ist ein unbestimmter Ausdruck $\frac{0}{0}$. Mit Hilfe von l'Hôspital-Regel erhalten wir

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{1+y}-1}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+y}-1\right)'}{y'} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+y}}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Die Antwort ist

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}.$$

8.6 Landau-Symbol und Differential

Definition. Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen auf einem Interval $J \subset \mathbb{R}$, und sei $a \in \overline{J}$. Man schreibt

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to a \tag{8.40}$$

wenn

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

(vorausgesetzt $g(x) \neq 0$ in $J \setminus \{a\}$). Man sagt in diesem Fall: $f(x)$ ist klein o von $g(x)$, oder $f(x)$ ist vernachlässigbar klein gegenüber $g(x)$. Das Symbol o heißt das *Landau-Symbol*.

Zum Beispiel, es gilt

$$x^2 = o(x) \text{ für } x \to 0$$

aber

$$x = o\left(x^2\right) \text{ für } x \to +\infty.$$

Auch gilt $x^2 = o(e^x)$ für $x \to +\infty$.

Behauptung. *Ist f differenzierbar in $a \in J$, so gilt*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \quad \textit{für } x \to a. \tag{8.41}$$

Die Gleichheit (8.41) heißt eine *asymptotische Identität* da sie nicht für alle x gilt sondern nur für $x \to a$.

Beweis. Die Identität (8.41) bedeutet dass

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = o(x-a) \text{ für } x \to a. \tag{8.42}$$

In der Tat haben wir

$$\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \to 0 \text{ für } x \to a,$$

woraus (8.42) folgt. ∎

Schreiben wir (8.41) wie folgt um:

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + o(y-x) \quad \text{für } y \to x$$

und bezeichnen die Differenz $y-x$ mit dx. Man nennt die Differenz dx auch das *Differential* der Variable x. Man betrachten dx als eine neue Variable (anstatt y) während x fixiert ist. Es folgt, dass

$$f(x+dx) - f(x) = f'(x)\,dx + o(dx) \text{ für } dx \to 0. \tag{8.43}$$

Definition. Der Ausdruck $f'(x)\,dx$ in der rechten Seite von (8.43) heißt das *Differential* der Funktion f und wird auch mit $df(x)$ bezeichnet, so dass

$$\boxed{df(x) = f'(x)\,dx.} \tag{8.44}$$

D.h. das Differential $df(x)$ der Funktion f ist eine lineare Funktion von dem Differential dx der Variable x, mit dem Koeffizient $f'(x)$.

Es folgt aus (8.44) dass

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Der Ausdruck $\frac{df}{dx}$ wird häufig anstatt f' für Bezeichnung der Ableitung benutzt.

Nach (8.43) haben wir

$$f(x + dx) - f(x) = df(x) + o(dx),$$

so dass das Differential df eine Annäherung der Differenz der Funktion ist, nämlich ein *linearer Hauptteil* der Differenz.

Beispiel. Benutzen wir die oberhalb berechneten Ableitungen und erhalten aus (8.44)

$$\begin{aligned} dx^n &= nx^{n-1}dx \\ de^x &= e^x dx \\ d\sin x &= \cos x \, dx \\ d\cos x &= -\sin x \, dx. \end{aligned}$$

8.7 Zweite Ableitung und Taylorformel

Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J, so dass die Ableitung f' auch eine Funktion auf J ist.

Definition. Ist f' in $a \in J$ differenzierbar, so heißt f *2-fach* differenzierbar in a. Die Ableitung $(f')'(a)$ heißt die *zweite Ableitung* von f in a und wird mit $f''(a)$ bezeichnet, d.h.

$$f''(a) = (f')'(a).$$

Ist f 2-fach differenzierbar in jedem $a \in J$, so heißt f 2-fach differenzierbar in J.

Beispiel. Wir haben

$$\begin{aligned} (e^x)'' &= (e^x)' = e^x \\ (\sin x)'' &= (\cos x)' = -\sin x \\ (\cos x)'' &= -(\sin x)' = -\cos x \\ (\ln x)'' &= \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \\ (x^a)'' &= \left(ax^{a-1}\right)' = a(a-1)x^{a-2}. \end{aligned}$$

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung der Identität (8.41) mit Hilfe von zweiter Ableitung.

Hauptsatz 8.15 (Taylorformel 2er Ordnung mit Peano-Restglied) *Sei f differenzierbar in J und 2-fach differenzierbar in einem $a \in J$. Dann gilt die asymptotische Identität*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right) \quad \text{für } x \to a. \tag{8.45}$$

23.04.2025 Vorlesung 4

Vergleichen wir (8.45) mit (8.41):

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \quad \text{für } x \to a, \tag{8.46}$$

die *Taylorformel 1er Ordnung* heißt. Die Formeln (8.45) und (8.46) liefern Näherungen für $f(x)$ in der Nähe von a mittels Funktionen

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

und

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Definition. $T_1(x)$ und $T_2(x)$ heißen Taylor-Polynome von f der Ordnung 1 bzw 2 im Punkt a.

Die Approximationsfehler

$$R_1(x) = f(x) - T_1(x) \quad \text{und} \quad R_2(x) = f(x) - T_2(x)$$

heißen die *Resglieder*. Die Identitäten (8.46) und (8.45) bedeuten, dass

$$R_1(x) = o(x-a) \quad \text{und} \quad R_2(x) = o\left((x-a)^2\right) \quad \text{für } x \to a.$$

Diese Darstellungen von R_1 und R_2 heißen *Restgliedform nach Peano.*

Man erwartet, dass $R_2(x)$ viel kleiner als $R_1(x)$ für $x \approx a$ so dass das quadratische Polynom $T_2(x)$ eine bessere Näherung von $f(x)$ liefert als die lineare Funktion $T_1(x)$.

Beweis von dem Satz 8.15. Die asymptotische Identität (8.45) ist äquivalent zu

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x-a)^2} = 0.$$

Da $T_2(a) = f(a)$, der Nenner und der Zähler für $x \to a$ verschwinden, so dass die linke Seite ein unbestimmter Ausdruck $\frac{0}{0}$ ist. Nach der Regel von L'Hôspital erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x-a)^2} &= \lim_{x\to a} \frac{(f(x) - T_2(x))'}{\left((x-a)^2\right)'} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a)}{2(x-a)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} - f''(a)\right) = 0,
\end{aligned}$$

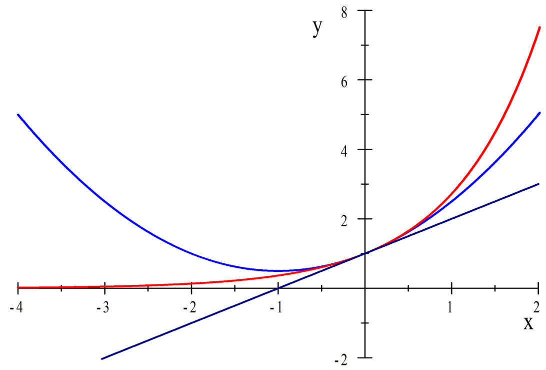
was zu beweisen war. ∎

Beispiel. Bemerken wir, dass der Graph von $T_1(x)$ die Tangente zum Graph G von f im Punkt $(a.f(a))$ ist. Der Graph von $T_2(x)$ ist eine Parabel (die *Schmiegparabel*), die eine bessere Approximation von G in der Nähe von a liefert als die Tangente.

Zum Beispiel, für die Funktion $f(x) = e^x$ im Punkt $a = 0$ erhalten wir $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$ und somit

$$T_1(x) = 1 + x \quad \text{und} \quad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Die Funktion e^x, ihre Tangente $T_1(x)$ und ihre Schmiegparabel $T_2(x)$ sind hier gezeichnet:



Funktion e^x (rot) und ihre Taylor-Polynome $T_1(x) = 1 + x$ (schwarz) und $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ (blau) im Punkt 0.

Beispiel. Für $f(x) = \ln x$ auf $(0, +\infty)$ erhalten wir $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}$ und somit

$$\ln x = \ln a + \frac{1}{a}(x-a) - \frac{1}{2a^2}(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right) \text{ für } x \to a.$$

Für $a = 1$ und $x = 1,2$ erhalten wir

$$\ln 1,2 \approx \ln 1 + 0,2 - \frac{1}{2} \cdot 0,2^2 = 0,18$$

während $\ln 1,2 = 0,182\,321556\,793955...$

Der nächste Satz ist eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes 8.8 von Lagrange:

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a).$$

Hauptsatz 8.16 (Taylorformel 2er Ordnung mit Lagrange-Restglied) *Sei f 2-fach differenzierbar auf einem Intervall $[a,b]$ mit $a < b$. Dann gibt es ein $c \in (a,b)$ so dass*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2. \tag{8.47}$$

Beweis von dem Satz 8.16. Betrachten wir die Hilfsfunktionen

$$\boxed{F(x) = f(x) + f'(x)(b-x)}$$

und
$$\boxed{G(x) = (x-b)^2}.$$
Nach dem Mittelwertsatz von Cauchy (Satz 8.14), es gibt ein $c \in (a,b)$ mit
$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}. \tag{8.48}$$
Wir haben
$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= f(b)-f(a)-f'(a)(b-a), \\ F'(x) &= f'(x)+f'(x)(b-x)'+f''(x)(b-x) \\ &= f''(x)(b-x) \\ G(b)-G(a) &= -(a-b)^2 \\ G'(x) &= 2(x-b), \end{aligned}$$
insbesondere $G(b)-G(a) \neq 0$ und $G'(c) = 2(c-b) \neq 0$ (so dass die Nenner in (8.48) nicht verschwinden). Es folgt aus (8.48)
$$\frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{-(a-b)^2} = \frac{f''(c)(b-c)}{2(c-b)} = -\frac{f''(c)}{2}.$$
und somit
$$f(b)-f(a)-f'(a)(b-a) = \frac{1}{2}f''(c)(a-b)^2,$$
was äquivalent zu (8.47) ist. ∎

Bemerkung. Die Identität (8.47) gilt auch im Fall $a > b$ d.h. wenn f auf dem Intervall $[b,a]$ 2-fach differenzierbar ist und c ein Punkt in (b,a) ist. Der Beweis ist gleich da der Mittelwertsatz von Cauchy auch im Fall $a > b$ gilt.

Ersetzen wir b in (8.2) mit beliebigem $x \in [a,b]$ und erhalten
$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(c)}{2}(x-a)^2 = T_1(x)+\frac{f''(c)}{2}(x-a)^2, \tag{8.49}$$
für ein c zwischen x und a. Somit bekommen wir eine andere Darstellung des Restgliedes $R_1(x)$ wie folgt:
$$R_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2. \tag{8.50}$$
Diese Darstellung von $R_1(x)$ heißt *die Restgliedform nach Lagrange.*

Später beweisen wir auch eine ähnliche Darstellung von $R_2(x)$ als auch die Taylorformeln höherer Ordnung.

Beispiel. Berechnen wir $\sqrt{1,1}$ mit Hilfe von (8.49). Für $f(x) = \sqrt{x}$ haben wir
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}.$$
Die Formel (8.49) mit $x = 1,1$ und $a = 1$ ergibt
$$\sqrt{1,1} = f(a)+f'(a)(x-a)+R_1 = 1+\frac{1}{2}\cdot 0,1+R_1 = 1,05+R_1,$$

wobei nach (8.50) für ein $1 < c < 1,1$ gilt

$$R_1 = \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2 = -\frac{1}{8}\frac{1}{c^{3/2}}0,1^2 = -0.001\,25\frac{1}{c^{3/2}}.$$

Da $\frac{1}{c^{3/2}} \leq 1$, so folgt es, dass $|R_1| \leq 0,00125$ so dass

$$\sqrt{1,1} \approx 1,05$$

mit dem Approximationsfehler $\leq 0,00125$. Eine genaue Berechnung ergibt $\sqrt{1,1} = 1,0488088...$ so dass der tatsächliche Approximationsfehler ist $\approx 0,001\,2$.

8.8 Lokale Extrema

Definition. Sei f eine Funktion auf einem offenen Intervall J und sei $a \in J$. Man sagt, dass a eine *lokale Maximumstelle* von f ist wenn es eine Umgebung $U \subset J$ von a gibt, so dass a eine Maximumstelle von f in U ist.

Analog definiert man lokale Minimumstelle von f. Man sagt, dass a eine *lokale Extremumstelle* von f ist, wenn a lokale Maximum- oder Minimumstelle ist.

Satz 8.17 *Sei f eine Funktion auf einem offenen Intervall J.*

- (a) (Notwendige Bedingung für locales Extremum) *Sei f differenzierbar auf J. Ist $a \in J$ eine lokale Extremumstelle von f, so gilt $f'(a) = 0$.*

- (b) (Hinreichende Bedingung für locales Extremum) *Sei f 2-fach differenzierbar auf J. Sei $f'(a) = 0$ für ein $a \in J$. Gilt $f''(a) > 0$ so ist a eine lokale Minimumstelle von f. Gilt $f''(a) < 0$, so ist a eine lokale Maximumstelle von f.*

Bemerkung. Die Nullstellen der Ableitung f' heißen die *kritischen Punkte* der Funktion f. Nach dem Satz 8.17, die lokalen Extremumstellen sind die kritischen Punkte, aber die Umkehrung gilt nicht immer. Zum Beispiel, die Funktion $f(x) = x^3$ hat einen kritischen Punkt $x = 0$, der offensichtlich keine lokale Extremumstelle ist. An diese Stelle gilt $f''(0) = 0$ so dass Satz 8.17(b) nicht anwendbar ist.

Beweis. (a) Ist a eine lokale Maximumstelle, dass ist a eine Maximumstelle von f in einer Umgebung U von a. Nach dem Satz von Fermat (Satz 8.5) gilt $f'(a) = 0$. Gleiches gilt für eine lokale Minimumstelle.

(b) Nach dem Satz 8.15 haben wir

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + R_2(x), \tag{8.51}$$

wobei $R_2(x) = o\left((x-a)^2\right)$ für $x \to a$, d.h.

$$\lim_{x \to a} \frac{R_2(x)}{(x-a)^2} = 0.$$

Dann gibt für jedes $\varepsilon > 0$ es eine Umgebung $U \subset J$ von a mit

$$\left|\frac{R_2(x)}{(x-a)^2}\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in U \setminus \{a\},$$

woraus folgt

$$-\varepsilon (x-a)^2 \leq R_2(x) \leq \varepsilon (x-a)^2 \quad \text{für alle } x \in U. \tag{8.52}$$

Sei $f''(a) > 0$. Da $f'(a) = 0$, so erhalten wir aus (8.51) und (8.52), dass für alle $x \in U$,

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 - \varepsilon (x-a)^2 \\ &= f(a) + \left(\frac{f''(a)}{2} - \varepsilon\right)(x-a)^2. \end{aligned}$$

Wählen wir ein $\varepsilon < \frac{1}{2} f''(a)$ und erhalten, dass

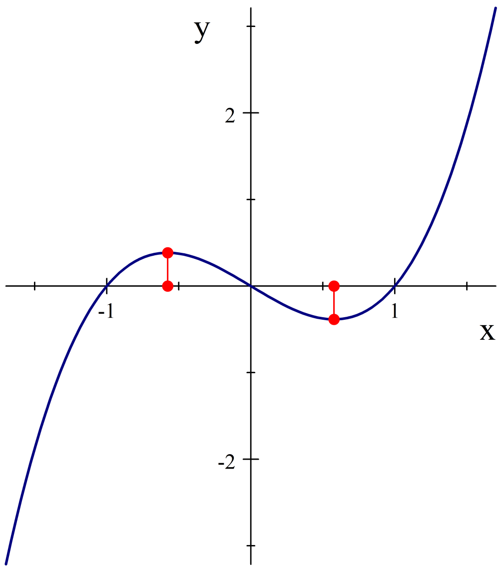
$$f(x) \geq f(a) \quad \text{für alle } x \in U,$$

so dass a eine Minimumstelle von f in U ist und somit eine lokale Minimumstelle. In der Tat gilt es

$$f(x) > f(a) \quad \text{für alle } x \in U \setminus \{a\}.$$

Der Fall $f''(a) < 0$ wird analog behandelt. ∎

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^3 - x$. Dann hat die Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 1$ die Nullstellen $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $a_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Da $f''(x) = 6x$, so erhalten wir $f''(a_1) > 0$ und $f''(a_2) < 0$. Deshalb ist a_1 eine lokale Minimumstelle und a_2 – eine lokale Maximumstelle.



Die Funktion $f(x) = x^3 - x$ hat zwei lokale Extremumstellen a_1 und a_2

25.04.2025 **Vorlesung 5**

8.9 Konvexe und konkave Funktionen

Definition. Eine Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall J heißt *konvex* wenn für alle $a, b \in J$ und $t \in (0,1)$ gilt

$$f\left((1-t)\,a + tb\right) \leq (1-t)\,f\,(a) + tf\,(b)\,. \tag{8.53}$$

Die Funktion f heißt *konkav* auf J wenn für alle $a, b \in J$ und $t \in (0,1)$ gilt

$$f\left((1-t)\,a + tb\right) \geq (1-t)\,f\,(a) + tf\,(b)\,. \tag{8.54}$$

Z.B. die Ungleichung (8.53) für $t = \frac{1}{2}$ bedeutet

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Diese Definition hat die folgende geometrische Bedeutung. Bezeichnen wir

$$x = (1-t)\,a + tb = a + t(b-a) \tag{8.55}$$

und beachten, dass

$$t \in (0,1) \Leftrightarrow x \in (a,b)\,.$$

Es folgt aus (8.55)

$$t = \frac{x-a}{b-a},$$

und (8.53) ist äquivalent zu

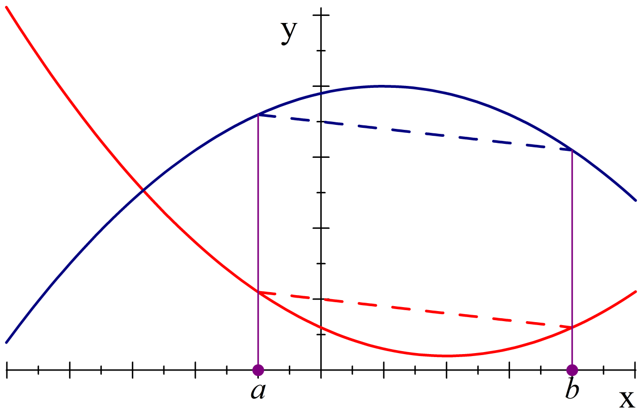
$$f\,(x) \leq f\,(a) + \frac{f\,(b) - f\,(a)}{b-a}\,(x-a)\,,$$

für alle $x \in (a,b)$. Betrachten wir die lineare Funktion

$$S\,(x) = f\,(a) + \frac{f\,(b) - f\,(a)}{b-a}\,(x-a)$$

deren Graph die Gerade durch $(a, f\,(a))$ und $(b, f\,(b))$ ist. Der Graph von $S(x)$ für $x \in (a,b)$ heißt die *Sekante* von dem Graph G von f auf dem Intervall (a,b).

Funktion f ist somit konvex auf J genau dann, wenn die Sekante auf jedem Intervall $(a,b) \subset J$ über dem Graph G von f liegt. Analog ist die Funktion f konkav genau dann, wenn die Sekante auf jedem Intervall $(a,b) \subset J$ unter G liegt.



konvex - rot, konkav - blau

Satz 8.18 (Kriterium von Konvexität/Konkavität) *Sei f eine 2-fach differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall $J \subset \mathbb{R}$.*

(a) *Funktion f ist konvex auf J genau dann, wenn $f'' \geq 0$ auf J.*

(b) *Funktion f ist konkav auf J genau dann, wenn $f'' \leq 0$ auf J.*

Mit Hilfe von dem Monotonietest (Satz 8.10) erhalten wir eine Folgerung:

$$f \text{ ist konvex } \Leftrightarrow f' \text{ ist monoton steigend}$$
$$f \text{ ist konkav } \Leftrightarrow f' \text{ ist monoton fallend.}$$

Beweis. (a) Sei $f'' \geq 0$ auf J. Wir beweisen, dass f konvex ist, d.h. für alle $a, b \in J$ und $t \in (0,1)$ gilt

$$f(x) \leq (1-t) f(a) + t f(b), \tag{8.56}$$

wobei

$$x = (1-t)a + tb = a + t(b-a).$$

Nach dem Satz 8.16 (Taylor-Formel mit Lagrange-Restglied) haben wir

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + f''(c_1)\frac{(a-x)^2}{2}$$

und

$$f(b) = f(x) + f'(x)(b-x) + f''(c_2)\frac{(b-x)^2}{2},$$

wobei $c_1, c_2 \in (a,b)$. Da $f''(c_1) \geq 0$ und $f''(c_2) \geq 0$, so folgt es

$$f(a) \geq f(x) + f'(x)(a-x) = f(x) + f'(x)\, t(a-b)$$
$$f(b) \geq f(x) + f'(x)(b-x) = f(x) + f'(x)(1-t)(b-a)$$

Multiplizieren die erste Gleichung mit $(1-t)$, die zweite Gleichung mit t und Addieren ergibt

$$(1-t) f(a) + t f(b) \geq (1-t) f(x) + t f(x)$$

$$+ f'(x)(1-t)t(a-b) + f'(x)t(1-t)(b-a)$$
$$= f(x),$$

was (8.56) beweist.

Sei jetzt f konvex auf J. Wir beweisen, dass $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in J$. Nach der Konvexität von f gilt es für jedes $x \in J$

$$f(x) = f\left(\frac{(x+h)+(x-h)}{2}\right) \leq \frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}, \tag{8.57}$$

wobei h so klein ist dass $x+h$ und $x-h$ in J liegen. Nach dem Satz 8.15 (Taylor-Formel mit Peano-Restglied) haben wir

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + o\left(h^2\right) \quad \text{für } h \to 0$$

und

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + o\left(h^2\right) \quad \text{für } h \to 0.$$

Es folgt, dass

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2} = f(x) + f''(x)\frac{h^2}{2} + o\left(h^2\right).$$

Vergleichen mit (8.57) ergibt

$$f''(x)\frac{h^2}{2} + o\left(h^2\right) \geq 0,$$

$$\frac{f''(x)}{2} + \frac{o(h^2)}{h^2} \geq 0,$$

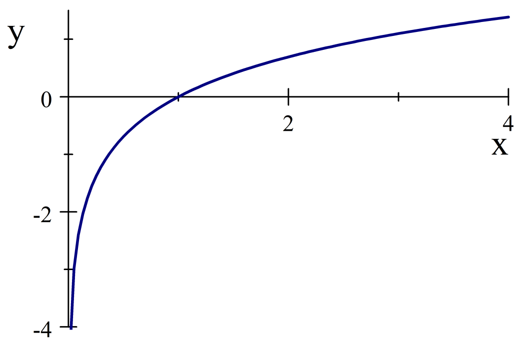
woraus folgt für $h \to 0$ dass $\frac{f''(x)}{2} \geq 0$ da $\frac{o(h^2)}{h^2} \to 0$.

(b) Diese Aussage folgt aus (a) da f konkav genau dann ist, wenn $-f$ konvex, und $f'' \leq 0$ äquivalent zu $(-f)'' \geq 0$. ■

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = \ln x$ für $x \in (0, +\infty)$. Da

$$(\ln x)'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

so erhalten wir nach dem Satz 8.18, dass $\ln x$ konkav auf $(0, +\infty)$ ist.



Die Funktion $\ln x$ ist konkav

Nach (8.54) gilt die folgende Ungleichung

$$\ln\left((1-t)\,a+tb\right) \geq (1-t)\ln a + t\ln b \tag{8.58}$$

für alle $a,b>0$ und $t\in(0,1)$. Bezeichnen wir

$$p=\frac{1}{1-t} \quad \text{und } q=\frac{1}{t},$$

so dass $p,q>1$ und

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{8.59}$$

Die Zahlen $p,q>1$ mit (8.59) heißen *konjugierte Hölder-Exponenten*. Es folgt aus (8.58), dass

$$\ln\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln a + \frac{1}{q}\ln b = \ln\left(a^{1/p}b^{1/q}\right). \tag{8.60}$$

Setzen wir $x=a^{1/p}$, $y=b^{1/q}$ und erhalten aus (8.60) die *Young-Ungleichung*

$$\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q} \geq xy,$$

die für alle konjugierte Hölder-Exponenten p,q und alle $x,y>0$ (und auch für $x,y\geq 0$) gilt.

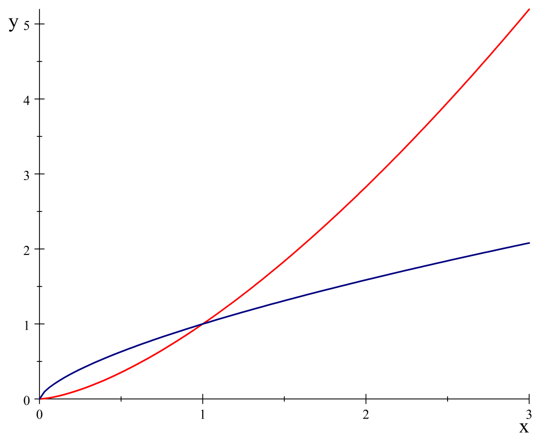
Beispiel. Sei $f(x)=x^p$ auf $J=(0,+\infty)$, wobei $p\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Da

$$f''(x)=p(p-1)\,x^{p-2},$$

so erhalten wir folgendes:

- für $0<p<1$ gilt $f''(x)<0$ für alle $x>0$;
- für $p<0$ oder $p>1$ gilt $f''(x)>0$ für alle $x>0$.

Somit ist die Funktion $f(x)=x^p$ konkav wenn $0<p<1$ und konvex wenn $p<0$ oder $p>1$.



Die konvexe Funktion $x^{3/2}$ (rot) und konkave Funktion $x^{2/3}$ (blau)

Es folgt, dass für $p > 1$ und alle $a, b > 0$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p + b^p}{2}, \tag{8.61}$$

d.h.

$$\frac{a+b}{2} \leq \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}.$$

Das ist die Ungleichung vom arithmetischen Mittel und *Hölder-Mittel zur Stufe p*.

Für $p < 1$ gilt die umgekehrte Ungleichung

$$\frac{a+b}{2} \geq \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}. \tag{8.62}$$

In der Tat, im Fall $0 < p < 1$ folgt (8.62) aus der Konkavität von x^p. Im Fall $p < 0$ gilt (8.61) nach der Konvexität von x^p, woraus (8.62) folgt, da $p < 0$.

Es ist interessant zu bemerken dass nach Aufgabe 24

$$\lim_{p \to 0} \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p} = \sqrt{ab}$$

so dass das geometrische Mittel sich betrachten lässt als das Hölder-Mittel zur Stufe 0. Die weitere Entwicklung von diesem Thema befindet sich in Aufgabe 37.

8.10 Untersuchung von Funktionen mit Hilfe von f' und f''

Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall J mit den Grenzen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. Nehmen wir an, dass f auf (a, b) 2-fach differenzierbar ist und dass f'' auf (a, b) stetig ist. Dann f' ist auch stetig auf (a, b).

Man untersucht die Funktion f mit Hilfe von f' und f'' ist wie folgt. In kurz bestimmt man alle Intervalle wo f' bzw f'' positive oder negative ist. In den Intervallen wo $f' > 0$ (bzw $f' < 0$) ist f monoton steigend (bzw fallend). In den Intervallen, wo $f'' > 0$ (bzw $f'' < 0$) ist f konvex (bzw konkav). Mit Hilfe von diesen Informationen kann man den Graph von f ziemlich gut skizzieren. Man macht es in den folgenden Schritten.

Schritt 1. **(Kritische Menge von f)** Man bestimmt die Ableitung f' und die kritische Menge der Funktion f:

$$K_f = \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\} \cup \{a, b\}.$$

Angenommen, dass die Menge K_f endlich ist, seien $x_0, x_1, ..., x_n$ alle Punkte von K_f in steigender Reihenfolge (d.h. $x_k < x_{k+1}\ \forall k = 0, ..., n-1$), insbesondere $x_0 = a$ und $x_n = b$.

Schritt 2. **(Die Werte von $f(x_k)$)** Man bestimmt alle Werte $f(x_k)$ (man darf einen Rechner dafür benutzen). Wenn die Grenze $x_0 = a$ nicht im J liegt, so setzen wir $f(a) := \lim_{x \to a} f(x)$, wobei der Grenzwert existiert, da f in (a, x_1) monoton ist. Analog bestimmt man $f(b)$.

Schritt 3. **(Intervalle von Monotonie)**. Die Funktion f is streng monoton in jedem Intervall (x_k, x_{k+1}), und man bestimmt die Typ von Monotonie: steigend oder fallend. Man kann dafür das Vorzeichen von f' verwenden:

- gilt $f' > 0$ auf (x_k, x_{k+1}) so ist f streng monoton steigend auf (x_k, x_{k+1});
- gilt $f' < 0$ auf (x_k, x_{k+1}) so ist f streng monoton fallend auf (x_k, x_{k+1}).

Bemerken wir, dass f' in (x_k, x_{k+1}) nicht verschwindet da keine Nullstelle von f' zwischen x_k und x_{k+1} liegt.

Alternativ kann man die Werte von f benutzen: gilt $f(x_k) < f(x_{k+1})$ so ist f in (x_k, x_{k+1}) monoton steigend; gilt $f(x_k) > f(x_{k+1})$ so ist f monoton fallend.

Schritt 4. **(Lokale Extremumstellen)** Man bestimmt für jeden Punkt $x_k \in (a, b)$ ob x_k eine lokale Extremumstelle ist. Man kann dafür das Vorzeichen von f'' verwenden:

- gilt $f''(x_k) > 0$ so ist x_k eine lokale Minimumstelle;
- gilt $f''(x_k) < 0$ ist x_k eine lokale Maximumstelle.

Alternativ kann man die Monotonie von f benutzen: ist f auf (x_{k-1}, x_k) monoton steigend (bzw fallend) und auf (x_k, x_{k+1}) monoton fallen (bzw steigend), so ist x_k eine lokale Maximumstelle (bzw Minimumstelle). Ist f auf den beiden Intervallen (x_{k-1}, x_k) und (x_k, x_{k+1}) monoton steigend oder fallend, so ist x_k keine lokale Extremumstelle. Die zweite Methode funktioniert auch wenn $f''(x_k) = 0$.

Schritt 5. **(Kritische Menge von f')** Man bestimmt die kritische Menge der Funktion f':

$$K_{f'} = \{x \in (a, b) : f''(x) = 0\} \cup \{a, b\}.$$

Angenommen, dass $K_{f'}$ endlich ist, bezeichnen wir mit $y_0, ..., y_m$ alle Punkte von $K_{f'}$ in steigender Reihenfolge; insbesondere $y_0 = a$ und $y_m = b$.

Schritt 6. **(Konvexität/Konkavität und Wendestellen)** Man bestimmt die Konvexität/Konkavität von f in jedem Intervall (y_j, y_{j+1}). Da f'' in jedem Intervall (y_j, y_{j+1}) nicht verschwindet, so gibt es zwei Möglichkeiten:

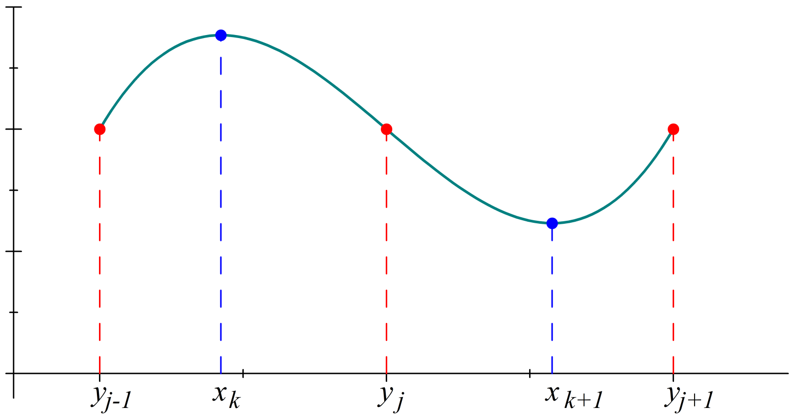
- entweder $f'' > 0$ auf (y_j, y_{j+1}) und somit f konvex auf (y_j, y_{j+1}) ist;
- oder $f'' < 0$ auf (y_j, y_{j+1}) und somit f konkav auf (y_j, y_{j+1}) ist.

Definition. Eine Nullstelle $y \in (a, b)$ von f'' heißt *Wendestelle* von f wenn f'' in den Intervallen $(y - \varepsilon, y)$ und $(y, y + \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$ unterschiedliche Vorzeichen hat, d.h. in einem Intervall ist f'' positiv und im anderen Intervall ist f'' negativ.

Man bestimmt ob jedes $y_j \in (a, b)$ eine *Wendestelle* ist indem man die Vorzeichen von f'' in den Intervallen (y_{j-1}, y_j) und (y_j, y_{j+1}) vergleicht. Sind die Vorzeichen unterschiedlich so ist y_j eine Wendestelle, d.h. beim Übergang von (y_{j-1}, y_j) nach (y_j, y_{j+1}) ändert sich die Konvexität von f in Konkavität, und umgekehrt.

Man bestimmt auch die Werte von f an allen Stellen y_j.

Schritt 7. **(Skizzieren von Funktionsgraph)** Man skizziert den Graph von f auf jedem Intervall (x_k, x_{k+1}) wo f monoton zwischen den Werten $f(x_k)$ und $f(x_{k+1})$ ist. Auf jedem Intervall (y_j, y_{j+1}) soll der Graph konkav bzw konvex sein. Somit erhält man eine Skizze des Graphes von f auf dem ganzen Intervall J.



Lokale Extremumstellen x_k, x_{k+1} und Wendestelle y_j

Beispiel. Untersuchen wir die Funktion

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Schritt 1. Wir haben

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' x - (\ln x)(x)'}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Die Gleichung $f'(x) = 0$ ergibt $\ln x = 1$ und somit $x = e$. Deshalb haben wir

$$K_f = \{0, e, +\infty\}.$$

Schritt 2. Weiter haben wir

$$f(0) := \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to 0} \ln x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

$$f(e) = \frac{1}{e} \approx 0,37,$$

$$f(+\infty) := \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Schritt 3. Für $x \in (0, e)$ gilt $f'(x) > 0$ und für $x \in (e, +\infty)$ gilt $f'(x) < 0$. Somit ist die Funktion $f(x)$ streng monoton steigend in $(0, e)$ und streng monoton fallend in $(e, +\infty)$.

Schritt 4. Wir haben

$$f'' = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

Insbesondere $f''(e) = \frac{2-3}{e^2} < 0$ so dass e eine lokale Maximumstelle ist. In der Tat ist e sogar die Maximumstelle von f auf $(0, +\infty)$, da $f(x)$ streng monoton steigend in $(0, e)$ und streng monoton fallend in $(e, +\infty)$ ist.

Schritt 5. Bestimmen wir die kritische Menge von f'. Die Gleichung $f''(x) = 0$ ergibt

$$2\ln x - 3 = 0$$

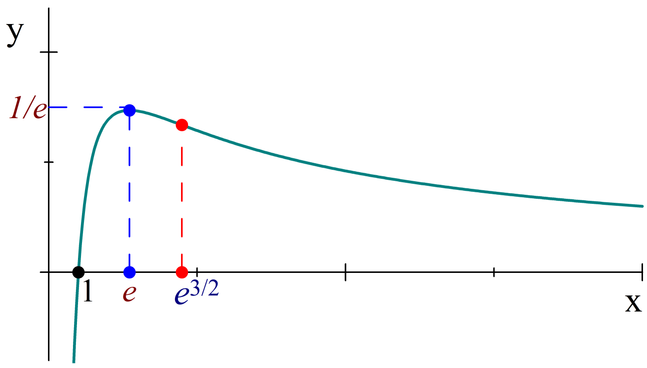
d.h. $x = e^{3/2} \approx 4,48$. Somit

$$K_{f'} = \left(0, e^{3/2}, +\infty\right).$$

Schritt 6. Im Intervall $\left(0, e^{3/2}\right)$ gilt $2\ln x < 3$ und $f''(x) < 0$; somit ist die Funktion f auf $\left(0, e^{3/2}\right)$ konkav. Im Intervall $\left(e^{3/2}, +\infty\right)$ gilt $f''(x) > 0$ und somit ist f konvex. Deshalb ist $e^{3/2}$ eine Wendestelle von f, und

$$f\left(e^{3/2}\right) = \frac{3}{2e^{3/2}} \approx 0,33.$$

Schritt 7. Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sieht wie folgt aus:



Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ mit der Maximumstelle (blau) und Wendestelle (rot)

30.04.2025 Vorlesung 6

Bei der Untersuchung der Funktion f mit Hilfe von Ableitungen ist es wichtig Folgendes zu beachten:

1. Die Intervalle von Monotonie liegen zwischen aufeinanderfolgenden kritischen Punkten von f. Für jede Nullstelle von f' bestimmt man ob sie eine Maximum - oder Minimumstelle ist.

2. Die Intervalle von Konvexität/Konkavität liegen zwischen aufeinanderfolgenden kritischen Punkten von f'. Für jede Nullstelle von f'' bestimmt man ob sie eine Wendestelle ist.

Beispiel. Untersuchen wir auf $(-\infty, +\infty)$ die Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10.$$

Schritt 1. Die erste Ableitung ist

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x+2)(x-3).$$

Die Gleichung $f'(x) = 0$ ergibt zwei Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$, so dass die kritische Menge von f ist

$$K_f = \{-\infty, -2, 3, +\infty\}.$$

Schritt 2. Die Werte von f auf K_f sind

$$f(-\infty) = -\infty, \quad f(-2) = 54, \quad f(3) = -71, \quad f(+\infty) = +\infty.$$

Schritt 3. Das Vergleichen von Werten von f ergibt: f ist auf $(-\infty, -2)$ und $(3, +\infty)$ streng monoton steigend, und auf $(-2, 3)$ streng monoton fallend.

Schritt 4. Die zweite Ableitung ist

$$f'' = 12x - 6.$$

Da $f''(-2) < 0$ so ist -2 eine lokale Maximumstelle. Da $f''(3) > 0$ so ist 3 ist eine lokale Minimumstelle (was aus der Monotonie auch klar ist).

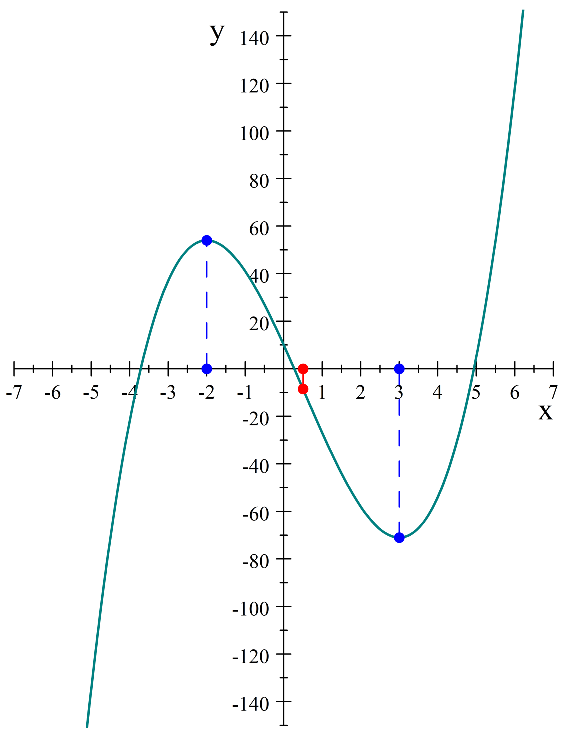
Schritt 5. Die Gleichung $f''(x) = 0$ ergibt $x = \frac{1}{2}$, so dass die kritische Menge von f' ist

$$K_{f'} = \{-\infty, \tfrac{1}{2}, +\infty\}.$$

Schritt 6. Auf dem Intervall $(-\infty, \frac{1}{2})$ gilt $f'' < 0$ so dass f konkav ist. Auf dem Intervall $(\frac{1}{2}, +\infty)$ gilt $f'' > 0$ so dass f konvex ist. Der Punkt $x = \frac{1}{2}$ ist somit eine Wendestelle, und

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -8,5.$$

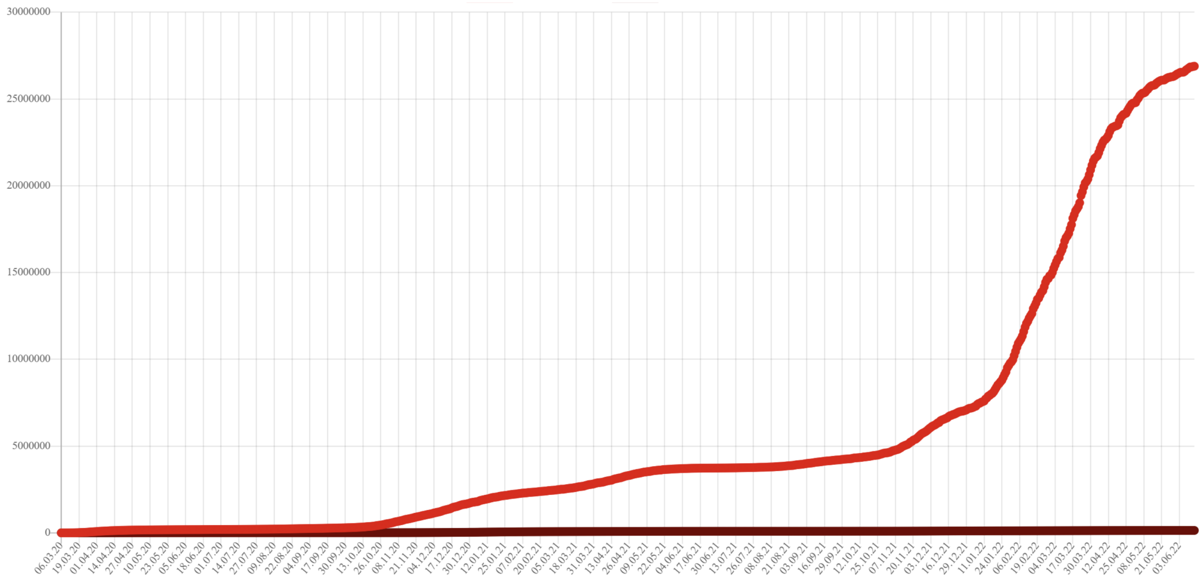
Schritt 7. Somit erhalten wir den folgenden Graph.



Der Graph der Funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$, die lokalen Extrema (blau) und Wendestellen (rot)

8.11 * Funktionsgraphen und Statistiken

Graphen von Funktionen werden in vielen Anwendungen eingesetzt, insbesondere zur visuellen Darstellung statistischer Informationen. Betrachten wir ein Beispiel. Das folgende Bild zeigt den Graph einer Funktion $y = f(x)$ die die Anzahl der Einwohner von Deutschland darstellt, die seit Beginn der Epidemie bis zum Tag x positiv auf Coronavirus getestet wurden.



Die Ableitung $f'(x)$ ist die unmittelbare Geschwindigkeit von f, d.h. die Anzahl infizierter Personen pro Tag am Zeitpunkt x. Es ist wichtig zu verstehen ob $f'(x)$ steigend oder fallend ist, da im ersten Fall die Epidemie wächst, während sie im zweiten Fall abnimmt.

Nach dem Satz 8.18, f' ist monotone steigend wenn f konvex ist, und f' ist monoton fallend wenn f konkav ist. Man sieht folgendes: der Graph ist konvex in bestimmten Zeitintervallen wenn die Epidemie stieg, und seit ca. März 2022 ist der Graph konkav, d.h. die Epidemie abnimmt. Die Epidemie ist vorbei when $f'(x) \equiv 0$, d.h. $f(x) = \text{const}$.

8.12 * Verwenden von Software zum Zeichnen von Funktionsgraphen

Für numerische Berechnungen und insbesondere zum Zeichnen von Funktionsgraphen gibt es eine Reihe praktischer Software, z.B. Matlab, Maple, Mathematica, Scientific Workplace, usw. Die meisten dieser Programme sind lizenziert und ziemlich teuer. Es gibt auch ähnliche Programme im öffentlichen Bereich, diese sind jedoch nicht so fortschrittlich. Zum Beispiel, die Graphen elementarer Funktionen können in Google Colab unter

$$\text{https}: //\text{colab.research.google.com}/$$

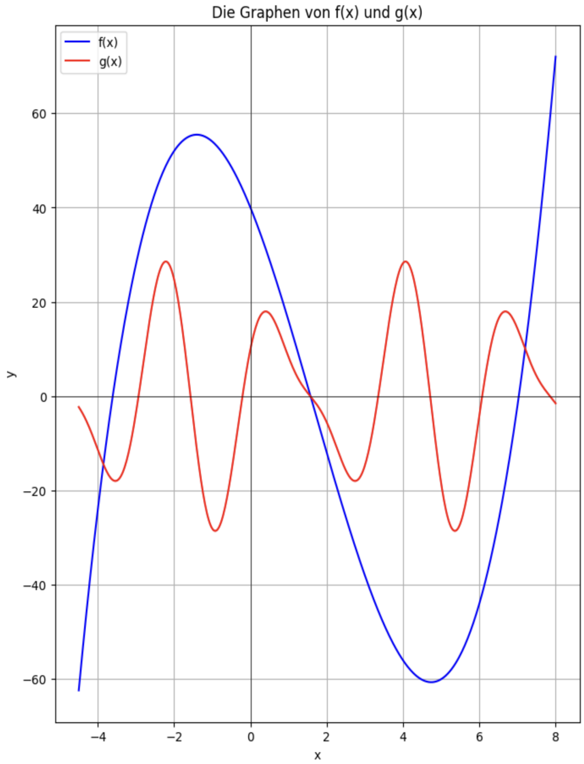
gezeichnet werden. Dazu benötigt man ein Python-Programm das man in Google Colab ausführen lassen kann. Unten ist ein Beispiel von Python-Programm zum Zeichnen von

Graphen zweier Funktionen

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 20x + 40 \quad \text{und} \quad g(x) = 20 \sin 2x + 10 \cos 3x,$$

sowie das Ergebnis seiner Anwendung:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math
# Die Werte von x
x = np.linspace(-4.5, 8, 500)
# Die erste Funktion
def f(x):
return x**3 - 5*x**2 - 20*x+40
# Die zweite Funktion
def g(x):
return 20*np.sin(2*x)+10*np.cos(3*x)
# Die Werte der beiden Funktionen
y1 = f(x)
y2 = g(x)
# Zeichnen der Graphen
plt.figure(figsize=(8, 10))
plt.plot(x, y1, label='f(x)', color='blue')
plt.plot(x, y2, label='g(x)', color='red')
# Die Achsen
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.grid(True)
plt.title('Die Graphen von f(x) und g(x)')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.show()
```



8.13 Höhere Ableitungen

Definition. Sei f eine Funktion auf einem Intervall J. Die Ableitung $f^{(n)}$ der Ordnung $n \in \mathbb{Z}_+$ (=die n-te Ableitung) wird per Induktion nach n wie folgt definiert:

$$f^{(0)} = f \quad \text{und} \quad f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \quad \text{für jedes } n \geq 1,$$

vorausgesetzt, dass $f^{(n-1)}$ auf J definiert und differenzierbar ist. In diesem Fall heißt f n-fach differenzierbar.

Schreibweise:

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n} = \partial_x^n f.$$

Man benutzt auch die Notation

$$f^{(1)} = f'$$

$$f^{(2)} = (f')' =: f''$$
$$f^{(3)} = (f'')' =: f'''$$
$$f^{(4)} = (f''')' =: f^{IV}$$

(mit römischer 4), usw.

Definition. Eine Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ heißt *unendlich oft* differenzierbar auf J, wenn f n-fach differenzierbar auf J für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel. 1. Sei $f = e^x$. Dann $f' = e^x$ und per Induktion erhalten wir, dass

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist e^x unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

2. Sei $f = \sin x$. Dann

$$f' = \cos x,\ f'' = -\sin x,\ f''' = -\cos x,\ f^{IV} = \sin x,$$

woraus folgt

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \sin x, & n = 0 \bmod 4 \\ \cos x, & n = 1 \bmod 4 \\ -\sin x, & n = 2 \bmod 4 \\ -\cos x, & n = 3 \bmod 4 \end{cases}$$

Insbesondere sind $\sin x$ und $\cos x$ unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

3. Sei $f(x) = x^a$ wobei $x \in (0, +\infty)$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann

$$f' = ax^{a-1},\ \ f'' = a(a-1)x^{a-2},\ \ f''' = a(a-1)(a-2)x^{a-3},$$

usw. Per Induktion erhalten wir für alle $k \in \mathbb{N}$

$$(x^a)^{(k)} = \underbrace{a(a-1)\dots(a-k+1)}_{k \text{ Glieder}}x^{a-k} = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(a-i)\right)x^{a-k}.$$

Insbesondere ist x^a unendlich oft differenzierbar auf $(0, +\infty)$.

4. Sei $f(x) = x^n$ wobei $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $k \leq n$

$$(x^n)^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}.$$

Für $k = n$ erhalten wir

$$(x^n)^{(n)} = n! = \text{const},$$

woraus folgt, dass $(x^n)^{(k)} \equiv 0$ für alle $k > n$. Insbesondere ist x^n unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

Für die n-te Ableitung gelten die Rechenregeln

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)},$$
$$(cf)^n = cf^{(n)}$$

vorausgesetzt, dass f und g n-fach differenzierbar sind und $c \in \mathbb{R}$. Für $n = 1$ gelten diese Regeln nach dem Satz 8.1, und für alle $n \geq 1$ beweist man sie per Induktion.

Für das Produkt gilt die Leibnizformel

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)},$$

wobei $\binom{n}{k}$ der Binomialkoeffizient ist (siehe Aufgabe 34). Zum Beispiel,

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''.$$

Beispiel. Sei f ein Polynom

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n \tag{8.63}$$

mit reellen Koeffizienten c_k, wobei $n \in \mathbb{Z}_+$ und $c_n \neq 0$. Die Zahl n heißt der Grad des Polynoms f und wird mit $\deg f$ bezeichnet. Ist $n \geq 1$ so gilt

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + ... + nc_n x^{n-1}.$$

Somit ist die Ableitung von f ein Polynom des Grades $n-1$.

Es folgt per Induktion, dass

$$f^{(n)}(x) = c_n n! = \text{const}$$

und $f^{(k)} \equiv 0$ für alle $k > n$. Die Eigenschaft, dass $f^{(k)} \equiv 0$ für ein k, ist eine charakteristische Eigenschaft von Polynomen (siehe Aufgabe 36).

8.14 Taylorformel mit Peano-Restglied

In diesem Abschnitt beweisen wir die *Taylorformel*, die eine Approximation der Funktion f mit Hilfe von Polynomen des beliebigen Grades n liefert.

Definition. Sei f n-fach differenzierbar auf einem Intervall J. Sei $a \in J$. Das Polynom

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \tag{8.64}$$

heißt *Taylor-Polynom* von f der Ordnung n an der Stelle a.

Die vollständige Notation von dem Taylor-Polynom ist $T_{n,f}(x;a)$, aber häufig schreibt man $T_n(x)$ wenn es klar ist was f und a sind.

Hauptsatz 8.19 (Taylorformel mit Peano-Restglied) *Sei $f(x)$ eine n-fach differenzierbare Funktion auf einem Intervall J, wobei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt es für jedes $a \in J$*

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + o\left((x-a)^n\right)} \quad \text{für } x \to a, \tag{8.65}$$

wobei T_n das Taylor-Polynom von f an der Stelle a ist.

Umgekehrt, gilt für ein Polynom

$$P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n$$

die asymptotische Identität

$$f(x) = P(x) + o\left((x-a)^n\right) \quad \text{für } x \to a, \tag{8.66}$$

so gilt dann $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ für alle $k = 0, 1, ..., n$, d.h. $P(x) \equiv T_n(x)$.

Die zweite Aussage lässt sich wie folgt umformulieren: $T_n(x)$ ist das einzige Polynom des Grades $\leq n$, das (8.65) erfüllt.

Das Taylor-Polynom $T_n(x)$ lässt sich betrachten als eine Approximation von $f(x)$ in der Nähe von a. Die Differenz

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

heißt das *Restglied* der Taylorformel. Es folgt aus (8.65) dass

$$R_n(x) = o\left((x-a)^n\right) \quad \text{für } x \to a,$$

und diese Darstellung des Restgliedes heißt die *Restgliedform nach Peano*.

Ein spezieller Fall des Satzes 8.19 für $n = 2$ stimmt mit dem Satz 8.15 überein.

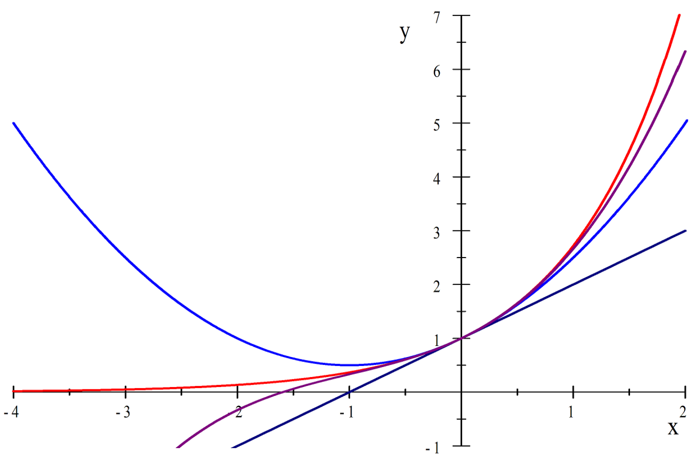
Beispiel. Sei $f(x) = e^x$. Da $f^{(n)}(a) = e^a$ für alle n, so erhalten wir aus (8.64)

$$T_n(x;a) = e^a \left(1 + \frac{(x-a)}{1!} + \frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}\right).$$

Insbesondere für $a = 0$ erhalten wir

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

d.h. $T_n(x)$ ist die n-te Partialsumme der Exponentialreihe.



Funktion e^x (rot) und ihre Taylor-Polynome $T_1(x) = 1 + x$ (schwarz) $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ (blau) und $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ (lila)

Bemerkung. Für jede Funktion $f(x)$ die mit Hilfe von Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

definiert ist, stimmt das Taylor-Polynom $T_n(x)$ an der Stelle 0 mit der Partialsumme $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k$ überein (Aufgabe 45). Die Idee ist zu beweisen, dass

$$f(x) = S_n(x) + o(x^n) \quad \text{für } x \to 0$$

und danach die Eindeutigkeitsaussage des Satzes 8.19 zu benutzen.

Beispiel. Sei $f(x) = x^p$, wobei $x > 0$ und $p \in \mathbb{R}$. Das Taylor-Polynom an einer Stelle $a > 0$ ist

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} a^{p-k}(x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} a^{p-k}(x-a)^k, \end{aligned} \tag{8.67}$$

wobei

$$\binom{p}{k} := \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$$

eine Verallgemeinerung von Binomialkoeffizienten ist. Nach (8.65) gilt

$$x^p = T_n(x) + o((x-a)^n) \quad \text{für } x \to a.$$

Für $b = x - a$ erhalten wir aus (8.67)

$$\boxed{(a+b)^p = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1}b + \binom{p}{2}a^{p-2}b^2 + \dots + \binom{p}{n}a^{p-n}b^n + o(b^n)}, \tag{8.68}$$

für $b \to 0$. Im Fall $p = n$ stimmt (8.68) mit dem binomischen Lehrsatz überein (wobei das Restglied $o(b^n)$ verschwindet).

Insbesondere für $n = 1$ erhalten wir

$$(a+b)^p = a^p + pa^{p-1}b + o(b),$$

für $n = 2$

$$(a+b)^p = a^p + pa^{p-1}b + \frac{p(p-1)}{2}a^{p-2}b^2 + o\left(b^2\right),$$

and für $n = 3$

$$(a+b)^p = a^p + pa^{p-1}b + \frac{p(p-1)}{2}a^{p-2}b^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{6}a^{p-3}b^3 + o\left(b^3\right). \tag{8.69}$$

Zum Beispiel, (8.69) ergibt für $p = 1/3$

$$\begin{aligned} (a+b)^{1/3} &= a^{1/3} + \frac{1}{3}a^{-2/3}b + \frac{1}{2\cdot 3}\left(-\frac{2}{3}\right)a^{-5/3}b^2 + \frac{1}{6\cdot 3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)a^{-8/3}b^3 + o\left(b^3\right) \\ &= a^{1/3} + \frac{1}{3}a^{-2/3}b - \frac{1}{9}a^{-5/3}b^2 + \frac{5}{81}a^{-8/3}b^3 + o\left(b^3\right). \end{aligned} \tag{8.70}$$

Berechnen wir mit Hilfe von (8.70) die Kubikwurzel aus 9. Für $a = 8$ und $b = 1$ erhalten wir

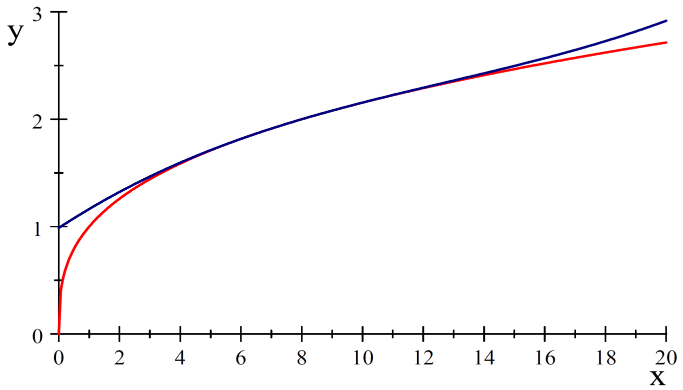
$$\sqrt[3]{9} = (8+1)^{1/3} \approx 8^{1/3} + \frac{1}{3}8^{-2/3} - \frac{1}{9}8^{-5/3} + \frac{5}{81}8^{-8/3}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2 + \frac{1}{3 \cdot 2^2} - \frac{1}{9 \cdot 2^5} + \frac{5}{81 \cdot 2^8} \\
&= 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} + \frac{5}{20\,736} = 2,08010... \qquad (8.71)
\end{aligned}
$$

In der Tat gilt es

$$\sqrt[3]{9} = 2,08008...$$

so dass der Approximationsfehler von (8.71) ca. $0,00002$ ist.



Function $f(x) = x^{1/3}$ (rot) und ihres Taylor-Polynom an $a = 8$:

$$T_3(x) = 2 + \frac{1}{3 \cdot 2^2}(x-8) - \frac{1}{9 \cdot 2^5}(x-8)^2 + \frac{5}{81 \cdot 2^8}(x-8)^3 \text{ (blau)}$$

Beweis von dem Satz 8.19. Wir beweisen die asymptotische Identität

$$f(x) - T_n(x) = o\left((x-a)^n\right) \quad \text{für } x \to a \qquad (8.72)$$

per Induktion nach n. Induktionsanfang: für $n = 1$ gilt (8.72) nach (8.46).

Induktionsschritt von $n-1$ nach n. Wir müssen beweisen, dass

$$f(x) - T_n(x) = o\left((x-a)^n\right) \quad \text{für } x \to a$$

d.h.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0. \qquad (8.73)$$

Leiten wir das Taylor-Polynom $T_n(x) = T_{n,f}(x)$ ab and erhalten folgendes:

$$
\begin{aligned}
T_n'(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)' \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k (x-a)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(f')^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(f')^{(l)}(a)}{l!} (x-a)^l,$$

wobei $l = k - 1$. Wir sehen, dass die rechte Seite hier mit dem Taylor-Polynom der Ordnung $n - 1$ der Funktion f' übereinstimmt. Somit gilt die folgende Identität:

$$\boxed{T'_{n,f}(x) = T_{n-1,f'}(x)}. \tag{8.74}$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1,f'}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0. \tag{8.75}$$

Da (8.73) ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ ist, so erhalten wir nach der Regel von L'Hôspital (Satz 8.13), (8.74) und (8.75), dass

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{(f(x) - T_n(x))'}{((x-a)^n)'} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1,f'}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = 0,$$

woraus (8.65) folgt.

02.05.2025 Vorlesung 7

Für die zweite Aussage, nehmen wir an, dass (8.66) gilt, d.h.

$$f(x) = P(x) + o((x-a)^n) \quad \text{für } x \to a, \tag{8.76}$$

und bezeichnen

$$b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} - c_k.$$

Wir müssen beweisen, dass $b_k = 0$. Es folgt aus (8.65) und (8.76), dass

$$\begin{aligned} b_0 + b_1(x-a) + ... + b_n(x-a)^n &= T_n(x) - P(x) \\ &= (f(x) + o((x-a)^n)) - (f(x) + o((x-a)^n)) \\ &= o((x-a)^n) \quad \text{für } x \to a. \end{aligned} \tag{8.77}$$

Leiten wir daraus her, dass $b_k = 0$ für alle $k = 0, ..., n$. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $b_k \neq 0$ für einige k und setzen

$$m = \min\{k \in \{0, ..., n\} : b_k \neq 0\}.$$

Dann gilt nach (8.77)

$$b_m(x-a)^m + b_{m+1}(x-a)^{m+1} + ... + b_n(x-a)^n = o((x-a)^n) \text{ für } x \to a.$$

Dividieren durch $(x-a)^m$ ergibt

$$b_m + b_{m+1}(x-a) + ... + b_n(x-a)^{n-m} = \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n}(x-a)^{n-m} \to 0 \text{ für } x \to a.$$

Andererseits, der Limes der linken Seite hier ist gleich b_m, woraus folgt $b_m = 0$, was im Widerspruch zur Annahme steht. ■

Beispiel. Bestimmen wir die Taylor-Polynome $T_{2n+1}(x)$ der Funktion $\sin x$ an der Stelle 0. Wir haben die folgende Reihe für $\sin x$:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

Nach Aufgabe 45 gilt

$$T_{2n+1}(x) = S_{2n+1}(x) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Analog bestimmt man die Taylor-Polynome von $\cos x$. Alternativ kann man die Taylor-Polynome von $\cos x$ mit Hilfe von (8.74) erhalten d.h. als die Ableitungen von Taylor-Polynomen von $\sin x$:

$$T_{2n,\cos}(x) = T'_{2n+1,\sin}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Es gelten die folgenden Taylorformeln:

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)} \text{ für } x \to 0$$

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})} \text{ für } x \to 0$$

(siehe Aufgaben 43 und 46).

8.15 Taylorformel mit Lagrange-Restglied

Wir geben hier eine andere Darstellung des Restgliedes in Taylorformel an.

Hauptsatz 8.20 (Taylorformel mit Lagrange-Restglied) *Sei $f(x)$ eine n-fach differenzierbare Funktion auf einem Intervall J, wobei $n \in \mathbb{N}$. Dann, für alle $a, x \in J$, $x \neq a$, gilt*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{8.78}$$

für ein c zwischen a und x (d.h. $c \in (a, x)$ oder $c \in (x, a)$).

Für $n = 1$ sieht (8.78) wie folgt aus:

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a),$$

was nicht anderes als Mittelwertsatz von Lagrange ist (Satz 8.8) . Für $n = 2$ erhalten wir

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2,$$

was mit dem Satz 8.16 übereinstimmt (mit $b = x$).

Die Identität (8.78) lässt sich wie folgt umschreiben:

$$f(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n,$$

wobei $T_{n-1}(x) = T_{n-1,f}(x;a)$, woraus die folgende Darstellung des Restgliedes folgt:

$$R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n, \tag{8.79}$$

was die *Restgliedform nach Lagrange* heißt.

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = \sin x$ und ihre Taylor-Polynome an 0

$$T_4(x) = T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

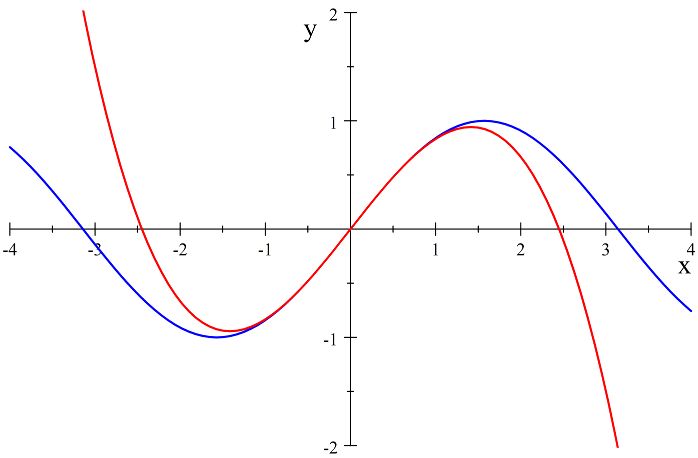
Nach dem Satz 8.20 gilt für alle $x \neq 0$

$$\sin x - T_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5$$

für ein c zwischen 0 und x. Da $f^{(5)}(c) = \cos c$ und $|\cos c| \leq 1$, so erhalten wir die Abschätzung des Approximationsfehlers:

$$|\sin x - T_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{120},$$

die für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.



Funktionen $\sin x$ (blau) und $T_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ (rot) in der Nähe von 0

Zum Beispiel, für $x = 0,1$ erhalten wir

$$\sin 0,1 \approx T_4\left(0,1\right) = 0,1 - \frac{0,1^3}{6} = 0,0998333... \ ,$$

und der Approximationsfehler ist kleiner gleich

$$\frac{0,1^5}{120} < 10^{-7}.$$

8.16 * Beweis der Taylor-Formel mit Lagrange-Restglied

Wir beweisen hier die Formel (8.78).

Beweis von dem Satz 8.20. Wir wechseln im Beweis die Notation und beweisen, dass für alle $a, b \in J$, $a \neq b$, gilt

$$f\left(b\right) - T_{n-1}\left(b\right) = \frac{f^{(n)}\left(c\right)}{n!}\left(b-a\right)^n, \tag{8.80}$$

für ein c zwischen a und b. Dafür verwenden wir den Mittelwertsatz von Cauchy (Satz 8.14) mit den folgenden Funktionen F und G:

$$F\left(x\right) := f\left(x\right) + \tfrac{f'(x)}{1!}\left(b-x\right) + \tfrac{f''(x)}{2!}\left(b-x\right)^2 + ... + \tfrac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\left(b-x\right)^{n-1}, \tag{8.81}$$

und

$$G\left(x\right) := \left(b-x\right)^n.$$

Nach Voraussetzungen ist F auf J differenzierbar, und nach dem Mittelwertsatz von Cauchy existiert ein c zwischen a und b mit

$$\frac{F\left(b\right) - F\left(a\right)}{G\left(b\right) - G\left(a\right)} = \frac{F'\left(c\right)}{G'(c)}. \tag{8.82}$$

Bestimmen wir alle Werte in dieser Identität. Wir haben

$$\begin{aligned} F(a) &= f\left(a\right) + \tfrac{f'(x)}{1!}\left(b-a\right) + \tfrac{f''(x)}{2!}\left(b-a\right)^2 + ... + \tfrac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\left(b-a\right)^{n-1} \\ &= T_{n-1}(b) \\ F(b) &= f(b) \\ F\left(b\right) - F\left(a\right) &= f\left(b\right) - T_{n-1}\left(b\right) \\ G\left(b\right) - G\left(a\right) &= -\left(b-a\right)^n \end{aligned}$$

und

$$G'\left(x\right) = -n\left(b-x\right)^{n-1}.$$

Leiten wir jedes Glied in (8.81) in x ab. Für jedes $k = 1, ..., n-1$ gilt

$$\left(\frac{f^{(k)}\left(x\right)}{k!}\left(b-x\right)^k\right)' = -\frac{f^{(k)}\left(x\right)}{k!}k\left(b-x\right)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}\left(x\right)}{k!}\left(b-x\right)^k$$

$$= -\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
F'(x) = f'(x) &- \frac{f'(x)}{0!} + \frac{f''(x)}{1!}(b-x) \\
&- \frac{f''(x)}{1!}(b-x) + \frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2 \\
&- \frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2 + \frac{f^{(4)}(x)}{3!}(b-x)^3 \\
&- \dots \\
&- \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-2)!}(b-x)^{n-2} + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Alle Glieder in diesem Ausdruck lassen sich wegkürzen, außer des letzten Glied. Somit erhalten wir

$$F'(x) = \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}. \tag{8.83}$$

Einsetzen die Werte von F, G, F', G' in (8.82) ergibt

$$\frac{f(b) - T_{n-1}(b)}{-(b-a)^n} = \frac{\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1}}{-n(b-c)^{n-1}} = -\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

woraus folgt

$$f(b) - T_{n-1}(b) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n,$$

d.h. (8.80). ■

Chapter 9

Integralrechnung: unbestimmtes Integral

Wir betrachten hier das folgende Problem: *wie lässt sich eine Funktion F durch ihre Ableitung F' wiederherstellen?* In Bezug auf die Bewegung von einem Auto bedeutet diese Frage folgendes: gegeben sei die Geschwindigkeit des Autos an jedem Zeitpunkt t, man muss seine Position bestimmen.

9.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Seien f und F reellwertige Funktionen auf einem Intervall J.

Definition. Gilt $F' = f$ auf einem Intervall J, so heißt die Funktion F eine *Stammfunktion* von f auf J.

Nicht alle Funktionen haben Ableitung. Auch nicht alle Funktion haben Stammfunktion. Im nächsten Kapitel beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 9.1 (Existenz von Stammfunktion) *Jede stetige Funktion auf einem Interval J hat eine Stammfunktion auf diesem Intervall.*

Für die Eindeutigkeit von Stammfunktion gilt folgendes.

Satz 9.2 (Eindeutigkeit von Stammfunktion) *Ist F eine Stammfunktion von f auf einem Intervall J, so hat jede Stammfunktion von f die Form $F(x) + C$, wobei C eine beliebige Konstante ist.*

Beweis. Gilt $F' = f$, so gilt auch $(F + C)' = F' = f$. Somit ist $F + C$ auch eine Stammfunktion von f. Umgekehrt, ist G eine andere Stammfunktion von f so gilt auf J die Identität $F' = G' = f$ woraus folgt $(G-F)' = 0$ auf J. Nach dem Konstantentest (Satz 8.9) ist die Funktion $G - F$ gleich eine Konstante C auf J, woraus folgt $G(x) = F(x) + C$ für alle $x \in J$, was zu beweisen war. $\blacksquare$

Zum Beispiel, we wissen, dass

$$\left(x^2\right)' = 2x,$$

so dass x^2 eine Stammfunktion von $2x$ ist. Es folgt, dass jede Stammfunktion von $2x$ gleich $x^2 + C$ ist.

Definition. Die Menge von allen Stammfunktionen von $f(x)$ bezeichnet man mit

$$\int f(x)\,dx$$

("Integral von f von x dx"). Dieser Ausdruck heißt auch *unbestimmtes* Integral von f. Nach dem Satz 9.2 ist $\int f(x)\,dx$ eine Funktion plus beliebige Konstante.

Z.B. es gilt

$$\int 2x\,dx = x^2 + C.$$

Der Grund für diese Notation ist wie folgt. Das Symbol $\int$ heißt *Integral* und stamm aus dem Buchstabe "S" von "**S**umme". Allerdings passt der Buchstabe "S" auch zum Wort "**S**tammfunktion".

Um die Nation $\int f(x)\,dx$ zu erklären, skizzieren wir eine Konstruktion für Stammfunktion, die wir später für den Beweis von dem Satz 9.1 verwenden. Sei F eine Stammfunktion von f auf einem Intervall J. Dann gilt für jedes $x \in J$

$$F(x+dx) - F(x) = F'(x)\,dx + o(dx) = f(x)dx + o(dx) \quad \text{für } dx \to 0. \tag{9.1}$$

Fixieren wir einen Punkt $x_0 \in J$ und für beliebigen Punkt $x \in J$ betrachten eine Folge $\{x_k\}_{k=0}^n$ mit $x_n = x$ so dass die Differenzen

$$dx_k = x_{k+1} - x_k$$

klein genug sind (d.h. n reichend groß ist). Wenn wir $o(dx)$ in (9.1) vernachlässigen so erhalten mit Hilfe von (9.1)

$$F(x) - F(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(F(x_{k+1}) - F(x_k)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(F(x_k + dx_k) - F(x_k)\right) \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,dx_k. \tag{9.2}$$

Im nächsten Kapitel beweisen wir, dass der Grenzwert der rechten Seite für $n \to \infty$ existiert und gleich $F(x) - F(x_0)$ ist. Wir sehen, dass die Notation $\int f(x)\,dx$ die Konstruktion der Stammfunktion widerspiegelt, und die Summe $\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,dx_k$ wird zum Integral $\int f(x)\,dx$ für $n \to \infty$.

Unterhalb sehen wir auch dass die Notation $\int f(x)\,dx$ sehr bequem für Berechnung von Integralen ist.

Die Operation $f \mapsto \int f(x)\,dx$ heißt *unbestimmte Integration* oder Integrieren. Das Wort "unbestimmt" bezieht sich auf die unbestimmte Konstante C im Satz 9.2. Die Funktion $f(x)$ heißt der *Integrand*, die Variable x heißt die *Integrationsvariable*. Natürlich ist der Wert von Integral unabhängig von der Notation der Integrationsvariable.

In diesem Kapitel lernen wir die Methoden von unbestimmten Integration. Da Integrieren eine inverse Operation von Ableiten (=Differenzieren) ist, so erhält man meist die Rechenregeln von Integrieren als Umkehrung von den Rechenregeln von Ableiten.

Sei F eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J. Nach dem Satz 9.2 gilt auf J die Identität

$$\boxed{\int F'(x)\,dx = F(x) + C}. \tag{9.3}$$

Diese Identität lässt uns eine Tabelle von Stammfunktionen zu erstellen.

Zum Beispiel, da $(x^{a+1})' = (a+1)\,x^a$ so für $a \neq -1$ erhalten wir

$$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = x^a,$$

woraus folgt, für $a \neq -1$,

$$\boxed{\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C.}$$

Für reelles a gilt diese Identität auf $(0,+\infty)$, für nichtnegative ganze a – auf $\mathbb{R}$, und für negative ganze a – auf $(0,+\infty)$ und $(-\infty,0)$.

Insbesondere erhalten wir

$$\int dx = x + C, \qquad \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C,$$
$$\int \sqrt{x}dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C, \qquad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

Da $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ auf $(0,+\infty)$ und $(-\infty,0)$ (Aufgabe 6) so erhalten wir

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C},$$

auch auf $(0,+\infty)$ und $(-\infty,0)$.

Umkehrung von Ableitung von Exponentialfunktion $(e^x)' = e^x$ ergibt

$$\boxed{\int e^x dx = e^x + C}$$

und $(e^{ax})' = ae^{ax}$ ergibt, für $a \neq 0$,

$$\boxed{\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C}.$$

Umkehrung von $(a^x)' = (\ln a)\,a^x$ ergibt

$$\boxed{\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C}$$

wobei $a > 0,\ a \neq 1$.

Umkehrung von Ableitungen $(\cos x)' = -\sin x$ und $(\sin x)' = \cos x$ ergibt:

$$\boxed{\int \sin x\,dx = -\cos x + C}$$

$$\boxed{\int \cos x\,dx = \sin x + C}.$$

Da und $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ und $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ so erhalten wir

$$\boxed{\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C},$$

auf jedem Intervall wo $\cos x$ nicht verschwindet, und

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C},$$

auf jedem Intervall wo $\sin x$ nicht verschwindet.

Umkehrung von Ableitungen $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ergibt

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C} \text{ auf } (-1,1)\,,$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C}.$$

Umkehrung von Ableitungen von den Hyperbelfunktionen $(\cosh x)' = \sinh x$ und $(\sinh x)' = \cosh x$ ergibt

$$\boxed{\int \sinh x\, dx = \cosh x + C}$$

$$\boxed{\int \cosh x\, dx = \sinh x + C}.$$

Da $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$ und $(\coth x)' = \frac{1}{\sinh^2 x}$, so erhalten wir

$$\boxed{\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C}\ ,$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C}$$

auf $(0,\infty)$ und $(-\infty,0)$. Wir haben auch

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{auf } (1,+\infty) \text{ und } (-\infty,-1)$$

$$\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)' = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{auf } (-\infty,-1)\,,(-1,1) \text{ und } (1,+\infty)$$

(Aufgabe 6). Umkehrung von diesen Identitäten ergibt folgendes:

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C},$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C} \text{ auf } (1,+\infty) \text{ und } (-\infty,-1)\,,$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C} \quad \text{auf} \quad (-\infty,-1)\,,(-1,1) \text{ und } (1,+\infty)$$

Die Funktionen $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ und $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$ heißen *langer Logarithmus.* Es gelten sie Identitäten

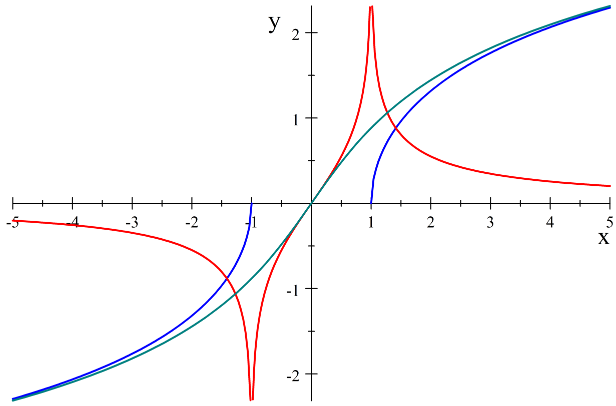
$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \sinh^{-1} x, \quad x \in \mathbb{R}$$

und

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \cosh^{-1} x, \quad x \in (1,+\infty)\,.$$

Die Funktion $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ heißt der *hohe Logarithmus,* es gilt

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \tanh^{-1} x, \quad x \in (-1,1)$$



Die Funktionen $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$ (blau), $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ (grün) und $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ (rot)

Die obigen Identitäten liefern eine Tabelle von Stammfunktionen, die auch *Integraltabelle* heißt. Die Einträge dieser Tabelle heißen *Grundintegrale.* Es gibt längere Tabellen von Stammfunktionen mit tausenden Einträgen. Es gibt mehrere Programme wie *Matlab, Maple, Mathematica, MuPAD, Scientific Workplace,* usw., die Stammfunktion explizit bestimmen können. Diese Programme benutzen die ausführlichen Integraltabellen und die Rechenregeln von Integrieren.

Integrieren ist normalerweise viel schwieriger als Differenzieren. Darüber hinaus ist es nicht immer möglich das Integral explizit durch elementare Funktionen auszudrücken. Z.B. die Integrale

$$\int e^{x^2}dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int e^{-x}\sqrt{x}dx, \quad \int \sqrt{x+\frac{1}{x}}dx$$

(und viele andere) lassen sie nicht als elementare Funktionen darstellen.

In diesem Kapitel entwickeln wir die Technik des Integrierens für explizite Bestimmung von Integralen (wenn möglich). Diese Technik besteht aus drei Rechenregeln – Linearität, partielle Integration, und Substitution, die häufig ein gegebenes Integral auf Grundintegrale zurückzuführen helfen.

Es gibt auch spezielle Integrationsverfahren für einige Klassen von Integranden.

9.2 Linearität des unbestimmten Integrals

Satz 9.3 *Seien f und g zwei stetige Funktion auf einem Intervall J. Dann gilt*

$$\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx. \tag{9.4}$$

Auch für beliebige Konstante $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, gilt

$$\int a\,f\,dx = a \int f\,dx.$$

Beweis. Wir müssen beweisen, dass die Ableitung der rechten Seite von (9.4) gleich $f+g$ ist. Die Summenregel der Ableitung ergibt

$$\left(\int f dx + \int g dx\right)' = \left(\int f dx\right)' + \left(\int g dx\right)' = f + g,$$

was zu beweisen war. Die zweite Identität lässt sich analog beweisen:

$$\left(a \int f dx\right)' = a\left(\int f dx\right)' = af.$$

■

Beispiel. 1. Bestimmen wir $\int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$. Es gilt

$$\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x^2 + 2x\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x},$$

und somit

$$\begin{aligned}\int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx &= \int x^2 dx + 2\int x^{1/2} dx + \int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{4x^{3/2}}{3} + \ln|x| + C.\end{aligned}$$

07.05.2025 Vorlesung 8

2. Bestimmen wir $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$. Da

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)-2}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1},$$

wir erhalten

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{x^2+1} = x - 2\arctan x + C.$$

3. Bestimmen wir $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$. Bemerken wir zunächst, dass

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x},$$

woraus folgt

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C.$$

4, Bestimmen wir $\int \cos^2 x\, dx$. Dafür bemerken wir, dass

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\, dx &= \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x \cos x + C. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Hier haben wir benutzt, dass $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$ und somit

$$\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

5. Sei f ein Polynom

$$f(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\int f(x)\, dx &= \sum_{k=0}^{n}\int c_k x^k dx = \sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{k+1}x^{k+1} + C \\ &= C + c_0 x + c_1\frac{x^2}{2} + ... + c_n\frac{x^{n+1}}{n+1}.\end{aligned}$$

Die unbestimmte Konstante C lässt sich bestimmen wenn die Stammfunktion noch eine Bedingung erfüllen muss. Z.B., bestimmen wir die Stammfunktion F des Polynoms f mit der zusätzlichen *Anfangsbedingung* $F(0) = a$, wobei a gegeben ist. Für die Funktion

$$F(x) = C + c_0 x + c_1\frac{x^2}{2} + ... + c_n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

gilt $F(0) = C$, woraus folgt, dass $C = a$ und somit

$$F(x) = a + c_0 x + c_1\frac{x^2}{2} + ... + c_n\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

9.3 Partielle Integration

Seien $u(x)$ und $v(x)$ zwei Funktionen auf einem Intervall J. Ist v differenzierbar, so betrachten wir den Ausdruck

$$\int u dv \equiv \int u(x)\, dv(x) := \int u(x)\, v'(x)\, dx.$$

Satz 9.4 *Seien u, v zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einem Intervall J. Dann gilt auf diesem Intervall die Identität*

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{9.6}$$

Beweis. Die Identität (9.6) lässt sich ausführlicher wie folgt umschreiben:

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx. \tag{9.7}$$

Da die Funktionen uv' und vu' stetig sind, so die beiden Integrale in (9.7) existieren. Um (9.7) zu beweisen, es reicht zu zeigen, dass die rechte Seite eine Stammfunktion von uv' ist, d.h. die Ableitung der rechten Seite gleich uv' ist. In der Tat gilt es nach der Produktregel der Ableitung, dass

$$\begin{aligned}\left(uv - \int vu' dx\right)' &= (uv)' - vu' \\ &= (u'v + uv') - vu' \\ &= uv',\end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

Beispiel. 1. Bestimmen $\int \ln x\, dx$. Für $u = \ln x$ und $v = x$ haben wir

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x\, d \ln x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C,$$

so dass

$$\boxed{\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C}$$

2. Bestimmen $\int x^2 e^x dx$. Wir benutzen, dass $e^x dx = de^x$. Für $u = x^2$ und $v = e^x$ haben wir

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x dx^2 = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

Um $\int x e^x dx$ zu bestimmen, wir benutzen den Satz 9.4 wieder, diesmal mit $u = x$ und $v = e^x$:

$$\int x e^x dx = \int x\, de^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Somit erhalten wir

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

3. Bestimmen wir $\int e^x \cos x\, dx$. Mit Hilfe von partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos x\, dx = \int \cos x\, de^x = e^x \cos x - \int e^x d\cos x \\
= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \\
= e^x \cos x + \int \sin x\, de^x \\
e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x d \sin x \\
= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C.$$

4. Bestimmen $\int \sqrt{x^2+1}\, dx$. Für $u = \sqrt{x^2+1}$ und $v = x$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+1}\, dx &= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{(x^2+1)\, dx}{\sqrt{x^2+1}} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}\, dx + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass dasselbe Integral in den beiden Seiten erscheint. Lösen diese Gleichung bezüglich $\int \sqrt{x^2+1}\, dx$ ergibt

$$\boxed{\int \sqrt{x^2+1}\, dx = \tfrac{1}{2} x\sqrt{x^2+1} + \tfrac{1}{2} \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.}$$

Analog zeigt man, dass

$$\boxed{\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \tfrac{1}{2} x\sqrt{x^2-1} - \tfrac{1}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C}$$

auf $(1, +\infty)$ und $(-\infty, -1)$ (siehe Aufgabe 55).

9.4 Substitutionsregel

Satz 9.5 (Substitutionsregel für unbestimmtes Integral) *Sei f eine Funktion auf einem Intervall I und sei F eine Stammfunktion von f auf I, d.h.*

$$\int f(y)\, dy = F(y) + C. \tag{9.8}$$

Sei u eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J mit $u(J) \subset I$. Dann gilt auf J

$$\int f(u(x))\, du(x) = F(u(x)) + C. \tag{9.9}$$

Bemerkung. Dieser Aussage bedeutet folgendes: um das Integral in (9.9) zu berechnen, man macht die Substitution

$$y = u(x),$$

berechnet $\int f(y)dy$ und danach ersetzt y durch $u(x)$. Die Bedingung $u(J) \subset I$ gewährleistet dass die Komposition $f \circ u$ auf J definiert ist.

Dieses Verfahren von Integrieren, die auf der Identität (9.9) basiert, heißt *die Substitutionsregel.* Die Reihenfolge von Schritten ist wie folgt:

$$\int f(u(x))\, du(x) = \int f(y)\, dy = F(y) + C = F(u(x)) + C.$$

Beweis. Die beiden Funktionen $f(u(x))$ und $F(u(x))$ haben den Definitionsbereich J. Da

$$\int f(u(x))\, du(x) = \int f(u(x))\, u'(x)\, dx,$$

so ist die Identität (9.9) äquivalent zu

$$(F(u(x)))' = f(u(x))\, u'(x).$$

Diese Identität folgt aus der Kettenregel und $F' = f$ da

$$(F(u(x)))' = F'(u(x))\, u'(x) = f(u(x))\, u'(x),$$

was zu beweisen war. ■

Es ist klar aus dem Beweis, dass die Substitutionsregel eine Umkehrung der Kettenregel ist.

Beispiel. 1. Bestimmen wir $\int (ax+b)^n\, dx$ wobei $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{R}$. Da

$$d(ax+b) = adx$$

und somit

$$dx = \frac{1}{a} d(ax+b),$$

so erhalten wir mit der Substitution $y = ax + b$

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a} \int (ax+b)^n\, d(ax+b) = \frac{1}{a} \int y^n dy.$$

Da

$$\int y^n dy = \begin{cases} \dfrac{y^{n+1}}{n+1} + C, & n \neq -1, \\ \ln|y| + C, & n = -1. \end{cases}$$

so erhalten wir

$$\int (ax+b)^n\, dx = \begin{cases} \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, & n \neq -1, \\ \dfrac{1}{a} \ln|ax+b| + C, & n = -1. \end{cases} \tag{9.10}$$

2. Bestimmen wir $\int \frac{dx}{x^2+4}$. Wir haben

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+4} &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\frac{1}{4}x^2+1}\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{2d(\frac{1}{2}x)}{\left(\frac{1}{2}x\right)^2+1} \qquad (\text{Substitution} \quad y=\frac{1}{2}x)\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{2}\arctan y + C\\ &= \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}x + C. \end{aligned} \tag{9.11}$$

3. Bestimmen wir $\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$. Da

$$x\,dx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d\left(1+x^2\right),$$

so haben wir

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}.$$

Die Substitution $y = 1+x^2$ ergibt

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y| + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

4. Bestimmen wir $\int \frac{dx}{\sin x}$. Mit der Substitution $y = \cos x$ erhalten wir

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x} = \int \frac{dy}{y^2-1} \tag{9.12}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C. \tag{9.13}$$

Um die Antwort weiter zu vereinfachen, benutzen wir die trigonometrische Identität[1]

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2\frac{x}{2}, \tag{9.14}$$

was ergibt

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\tfrac{x}{2}\right| + C.}$$

Analog beweist man, dass

$$\boxed{\int \frac{dx}{\cos x} = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + C}$$

[1] In der Tat gilt

$$2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x,$$

woraus folgt

$$\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x} = \tan^2 x.$$

Ersetzen x durch $x/2$ ergibt (9.14).

(Aufgabe 62) und

$$\boxed{\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C}$$

(Aufgabe 56).

5. Bestimmen wir $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Da

$$xdx = \frac{1}{2}d(x^2) = -\frac{1}{2}d(1-x^2),$$

so erhalten wir mit Substitution $y = 1 - x^2$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int y^{-1/2}dy = -y^{1/2}+C = -\sqrt{1-x^2}+C. \tag{9.15}$$

6. Bestimmen wir $\int \arcsin x\, dx$. Wir verwenden zunächst partielle integration und danach (9.15):

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\, dx &= x \arcsin x - \int x\, d \arcsin x \qquad (u = \arcsin x,\ v = x)\\ &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

Somit gilt es

$$\boxed{\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C}$$

Analog beweist man dass

$$\boxed{\int \arccos x\, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C}$$

und

$$\boxed{\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \tfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C}$$

(siehe Aufgabe 55).

09.05.2025 Vorlesung 9

Häufig ist es unklar ob das gegebene Integral sich in der form $\int f(u(x))\, du(x)$ darstellen lässt. In diesem Fall hilft die folgende Version der Substitutionsregel.

Korollar 9.6 (Inverse Substitution) *Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall J. Sei v eine differenzierbare streng monotone Funktion auf einem Intervall I mit $v(I) = J$, so dass die inverse Funktion $v^{-1} : J \to I$ existiert. Gilt auf I*

$$\int f(v(y))\, dv(y) = G(y) + C \tag{9.16}$$

so gilt auf J

$$\int f(x)\, dx = G\left(v^{-1}(x)\right) + C. \tag{9.17}$$

Bemerkung. Diese Aussage bedeutet folgendes: um das Integral $\int f(x)\,dx$ zu berechnen, man macht die inverse Substitution $x = v(y)$, berechnet das Integral $\int f(v(y))\,dv(y)$ und dann ersetzt y durch $v^{-1}(x)$. Dieses Verfahren von Integrieren heißt die inverse Substitutionsregel. Die Reihenfolge von Schritten ist wie folgt:

$$\int f(x)\,dx = \int f(v(y))\,dv(y) = G(y) + C = G\left(v^{-1}(x)\right) + C.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f (die nach dem Satz 9.1 existiert) so dass

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Nach dem Satz 9.5 ergibt die Substitution $x = v(y)$

$$\int f(v(y))\,dv(y) = F(v(y)) + C.$$

Vergleichen mit (9.16) zeigt dass

$$F(v(y)) = G(y) + C.$$

Einsetzen $x = v(y)$ und $y = v^{-1}(x)$ ergibt die Gleichheit

$$F(x) = G\left(v^{-1}(x)\right) + C,$$

woraus (9.17) folgt. ∎

Beispiel. 1. Bestimmen wir $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ im Definitionsbereich $x \in (0,1)$. Mit der inversen Substitution

$$\begin{aligned} x &= y^2, \quad y \in (0,1) \\ dx &= 2ydy \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \int \frac{2y\,dy}{y\sqrt{1-y^2}} \\ &= 2\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\arcsin y + C \\ &= 2\arcsin\sqrt{x} + C, \end{aligned}$$

da $y = \sqrt{x}$.

2. Bestimmen wir $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ im Definitionsbereich $x \in [-1,1]$. Dafür verwenden wir die inverse Substitution

$$\begin{aligned} x &= \sin y, \qquad y \in [-\pi/2, \pi/2] \\ dx &= \cos y\,dy. \end{aligned}$$

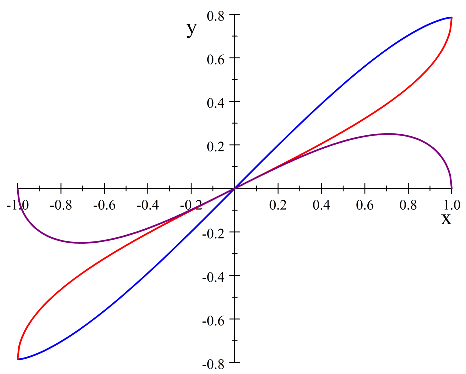
Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 y}\cos y\,dy \\ &= \int \cos y\ \cos y\,dy \qquad\qquad (\text{da }\ \cos y \ge 0) \\ &= \int \cos^2 y\ dy \qquad\qquad\qquad (\text{nach } (9.5)) \\ &= \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\sin y\cos y + C \\ &= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C,\end{aligned}$$

da $y = \arcsin x$, $\sin y = x$ und $\cos y = \sqrt{1-x^2}$. Die Antwort ist

$$\boxed{\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C}. \tag{9.18}$$

Die Identität (9.18) gilt auf $[-1,1]$.



Funktionen $\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$ (blau), $\frac{1}{2}\arcsin x$ (rot) und $\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$ (lila)

Es ist interessant, dass die einzelnen Funktionen $\arcsin x$ und $x\sqrt{1-x^2}$ nur auf $(-1,1)$ differenzierbar sind, aber ihre Summe ist auch an den Grenzen $x = \pm 1$ differenzierbar.

3. Bestimmen wir das Integral

$$\int \frac{dx}{e^x+1}$$

im Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}$. Wir benutzen die Substitution $y = e^x$, d.h. die inverse Substitution

$$\begin{aligned}x &= \ln y, \quad y \in (0,+\infty), \\ dx &= \frac{dy}{y}.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{e^x+1} &= \int \frac{dy}{y(y+1)} \\ &= \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{dy}{y} - \int \frac{d\,(y+1)}{y+1} \\ &= \ln y - \ln\,(y+1) + C \\ &= x - \ln\,(e^x+1) + C. \end{aligned}$$

9.5 Integration von rationalen Funktionen

Eine rationale Funktion $f(x)$ ist ein Quotient $\frac{P(x)}{Q(x)}$ for Polynomen $P(x)$ and $Q(x)$ mit reellen Koeffizienten. Wir besprechen hier Integrationsmethode von rationalen Funktion. Die Idee ist die Funktion f als eine Summe von einfacheren rationalen Funktionen darzustellen und die Linearität des Integrals zu benutzen. Wir fangen mit einem Beispiel an.

Beispiel. Bestimmen wir

$$\int \frac{dx}{x^2-1}.$$

Das ist ein Grundintegral, aber trotzdem zeigen wir, wie man dieses Integral direkt berechnen kann. Es gilt die Identität

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)\,(x+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right),$$

woraus folgt dass

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d\,(x-1)}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{d\,(x+1)}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C. \end{aligned}$$

Hier haben wir die Substitutionen $y = x-1$ und $y = x+1$ verwendet.

Für Integration von rationaler Funktion $f = \frac{P}{Q}$ gibt es folgendes Verfahren.

Schritt 0. Wenn $\deg P \geq \deg Q$ so dividiert man zunächst $P(x)$ durch $Q(x)$ mit Rest und schreibt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

wobei P_0 und P_1 Polynome sind und $\deg P_1 < \deg Q$. Wir nehmen weiterhin an, dass $\deg P < \deg Q$.

Schritt 1. Faktorisieren den Nenner $Q\,(x)$ in Produkt von linearen und quadratischen Funktionen wie $x-r$ und x^2+px+q, mit reellen Koeffizienten (wobei die quadratischen Polynome x^2+px+q keine reelle Nullstellen haben, d.h. $p^2-4q<0$). Eine solche

Faktorisierung ist immer möglich was aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, was wir später besprechen.

Schritt 2. Darstellung der Funktion $f = \frac{P}{Q}$ als eine Summe von (mehreren) Gliedern der Form

- $\dfrac{a}{(x-r)^k}$ – *Partialbruch* 1^{er} *Art;*
- $\dfrac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}$ – *Partialbruch* 2^{er} *Art.*

Darstellung von f als eine Summe von Partialbrüchen heißt die *Partialbruchzerlegung.*

Schritt 3. Integrieren jeden Partialbruch mit Hilfe von Substitution und partiellen Integration.

Z.B. für den Partialbruch 1^{er} Art erhalten wir mit Substitution $y = x - r$

$$\int \frac{a}{(x-r)^k}dx = a\int (x-r)^{-k}\,d(x-r) = a\begin{cases} \frac{(x-r)^{-k+1}}{-k+1}, & k \neq 1, \\ a\ln|x-r|\,, & k = 1. \end{cases}$$

Die Integration von Partialbrüchen 2^{er} Art ist komplizierter und wird in den Beispielen unterhalb durchgeführt. Eine ausführliche Beschreibung dieses Verfahrens befindet sich im nächsten Abschnitt.

Beispiel. 1. Bestimmen wir

$$\int \frac{x+1}{x^2+x-2}dx.$$

Es gilt

$$x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$$

und wir versuchen den Integrand wie folgt zerlegen:

$$\frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}, \tag{9.19}$$

wobei die Konstanten a, b noch unbekannt sind. Sie lassen sich wie folgt bestimmen.

Um a zu bestimmen, multiplizieren wir (9.19) mit $x-1$:

$$\frac{x+1}{x+2} = a + b\frac{x-1}{x+2},$$

dann setzen $x = 1$ ein und erhalten

$$a = \left.\frac{x+1}{x+2}\right|_{x=1} = \frac{2}{3}.$$

Um b zu bestimmen, multiplizieren wir (9.19) mit $x+2$:

$$\frac{x+1}{x-1} = a\frac{x+2}{x-1} + b,$$

dann setzen $x = -2$ ein und erhalten

$$b = \left.\frac{x+1}{x-1}\right|_{x=-2} = \frac{1}{3}.$$

Folglich erhalten wir

$$\int \frac{x+1}{x^2+x-2}dx = \int \frac{2/3}{x-1}dx + \int \frac{1/3}{x+2}dx = \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| + C.$$

2. Bestimmen wir

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$$

Da die Diskriminante von x^2+2x+5 negative ist, so ist die Funktion $\frac{1}{x^2+2x+5}$ schon ein Partialbruch 2^{er} Art. Mit Hilfe von quadratischer Ergänzung erhalten wir

$$x^2+2x+5 = (x+1)^2 + 4.$$

Somit ergibt die Substitution $y = x+1$, dass

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+2x+4} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} &= \int \frac{dy}{y^2+4}\\ &= \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}y + C \qquad \text{(siehe (9.11))}\\ &= \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C.\end{aligned}$$

3. Bestimmen wir

$$\int \frac{xdx}{x^2+2x+5}.$$

Die Funktion $\frac{x}{x^2+2x+5}$ ist auch ein Partialbruch 2^{er} Art. Wie oberhalb haben wir

$$\int \frac{xdx}{x^2+2x+5} = \int \frac{(x+1-1)\,d(x+1)}{(x+1)^2+4} = \int \frac{(x+1)\,d(x+1)}{(x+1)^2+4} - \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4}.$$

Das zweite Integral haben wir schon berechnet. Das erste Integral berechnen wir auch mit Hilfe von Substitution $y = x+1$:

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)\,d(x+1)}{(x+1)^2+4} = \int \frac{ydy}{y^2+4} &= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(y^2+4\right)}{y^2+4}\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(y^2+4\right) + C\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right) + C.\end{aligned}$$

Folglich erhalten wir

$$\int \frac{xdx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right) - \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C.$$

4. Bestimmen wir

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{x\left(x^2+1\right)}.$$

Für den Integrand bestimmen wir eine Partialbruchzerlegung in der Form:

$$\frac{x+1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2+1},$$

wobei a eine Konstante und $b=b(x)$ eine lineare Funktion ist. Um a zu bestimmen, multiplizieren wir diese Identität mit x:

$$\frac{x+1}{x^2+1}=a+\frac{bx}{x^2+1},$$

setzen $x=0$ ein und erhalten $a=1$. Die Funktion b erhalten wir wie folgt:

$$\frac{bx}{x^2+1}=\frac{x+1}{x^2+1}-1=\frac{x-x^2}{x^2+1}=\frac{x\left(1-x\right)}{x^2+1},$$

woraus folgt $b=1-x$. Somit erhalten wir

$$\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{x}+\frac{1-x}{x^2+1}$$

und

$$\begin{aligned}\int\frac{(x+1)dx}{x\left(x^2+1\right)}&=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{\left(1-x\right)dx}{x^2+1}=\ln|x|+\int\frac{dx}{x^2+1}-\int\frac{xdx}{x^2+1}\\&=\ln|x|+\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C.\end{aligned}$$

5. Bestimmen wir

$$\int\frac{x^4+x^3-1}{x^3-x}dx.$$

Zunächst dividieren wir durch x^3-x mit Rest wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{x^4+x^3-1}{x^3-x}&=\frac{x(x^3-x)+(x^3-x)+x^2+x-1}{x^3-x}\\&=x+1+\frac{x^2+x-1}{x^3-x}\end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4+x^3-1}{x^3-x}dx&=\int\left(x+1\right)dx+\int\frac{x^2+x-1}{x^3-x}dx\\&=\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{x^2+x-1}{x^3-x}dx.\end{aligned}$$

Weiterhin faktorisieren wir den Nenner

$$x^3-x=x\left(x+1\right)\left(x-1\right)$$

und finden die Partialbruchzerlegung von $\frac{x^2+x-1}{x^3-x}$ wie folgt:

$$\frac{x^2+x-1}{x^3-x}=\frac{x^2+x-1}{x\left(x+1\right)\left(x-1\right)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}.$$

Um a zu bestimmen, multiplizieren wir diese Identität mit x

$$\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x-1)} = a + \left(\frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}\right)x,$$

setzen $x = 0$ ein und erhalten

$$a = \left.\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x-1)}\right|_{x=0} = 1.$$

Analog bestimmen wir

$$b = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{2}$$

so dass

$$\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} &= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C\end{aligned}$$

und

$$\int \frac{x^4+x^3-1}{x^3-x}dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$$

9.6 * Integration von rationalen Funktionen - Vertiefung

Eine Funktion $f(x)$ heißt *rational* wenn f als Quotient zweier Polynome darstellbar ist, d.h.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

wobei $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome mit reellwertigen Koeffizienten sind. Der Definitionsbereich von f ist jedes Intervall wo $Q(x)$ nicht verschwindet, insbesondere, jedes Intervall zwischen aufeinanderfolgenden reellen Nullstellen von $Q(x)$.

Die rationalen Funktionen lassen sich immer in elementaren Funktionen integrieren. Nehmen wir zunächst an, dass

$$\deg P < \deg Q.$$

Das Verfahren von Berechnung des Integrals

$$\int f(x)\,dx$$

besteht dann aus drei Schritten.

(i) Faktorisieren den Nenner $Q(x)$ in Produkt von linearen und quadratischen Funktionen wie folgt:

$$Q(x) = \alpha (x - r_1)^{k_1} \dots (x - r_l)^{k_l} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{m_1} \dots \left(x^2 + p_n x + q_n\right)^{m_n}, \tag{9.20}$$

wobei $l, n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha, r_i, p_j, q_j \in \mathbb{R}$, $k_i, m_j \in \mathbb{N}$, wobei die quadratische Polynome $x^2+p_jx+q_j$ keine reellen Nullstellen haben. Darüber hinaus sind alle Zahlen r_i verschieden und die Paaren (p_j, q_j) sind auch verschieden[2]. Die Potenz k_i heißt die *Vielfachheit* von $(x - r_i)$ und m_j – die Vielfachheit von $(x^2 + p_jx + q_j)$.

(ii) Zerlegen der Funktion $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ in die Summe von *Partialbrüchen* der Form

$$\frac{a}{(x-r)^k}, \quad \frac{bx + c}{(x^2 + px + q)^m}. \tag{9.21}$$

Jeder lineare Faktor $(x - r_i)^{k_i}$ in (9.20) trägt zu solcher Zerlegung von $f(x)$ die folgende Summe bei:

$$\frac{a_1}{(x - r_i)} + \frac{a_2}{(x - r_i)^2} + \dots + \frac{a_{k_i}}{(x - r_i)^{k_i}},$$

und jeder quadratische Faktor $(x^2 + p_jx + q_j)^{m_j}$ in (9.20) trägt zur Zerlegung von $f(x)$ die folgende Summe bei:

$$\frac{b_1 x + c_1}{(x^2 + p_j x + q_j)} + \frac{b_2 x + c_2}{(x^2 + p_j x + q_j)^2} + \dots + \frac{b_{m_j} x + c_{m_j}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{m_j}}.$$

Somit erhält man eine Zerlegung

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{a_1^{(i)}}{(x - r_i)} + \frac{a_2^{(i)}}{(x - r_i)^2} + \dots + \frac{a_{k_i}^{(i)}}{(x - r_i)^{k_i}} \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{b_1^{(j)} x + c_1^{(j)}}{(x^2 + p_j x + q_j)} + \frac{b_2^{(j)} x + c_2^{(j)}}{(x^2 + p_j x + q_j)^2} + \dots + \frac{b_{m_j}^{(j)} x + c_{m_j}^{(j)}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{m_j}} \right), \end{aligned} \tag{9.22}$$

wobei r_i, p_j, q_j, k_i, m_j wie in (9.20) sind und $a_k^{(i)}, b_m^{(j)}, c_m^{(j)} \in \mathbb{R}$. Die Koeffizienten $a_k^{(i)}, b_m^{(j)}, c_m^{(j)}$ müssen noch aus dieser Identität bestimmt werden.

Die Darstellung einer rationalen Funktion f in der Form (9.22) heißt die *Partialbruchzerlegung*. Die Existenz der Partialbruchzerlegung lässt sich mit Hilfe von Division von Polynomen beweisen.

(iii) Integrieren f mit Hilfe von der Partialbruchzerlegung (9.22). Die Partialbrüche lassen sich wie folgt integrieren.

Der *Partialbruch erster Art* $\frac{a}{(x-r)^k}$ wird nach (9.10) integriert:

$$\int \frac{a}{(x-r)^k} dx = a \int (x - r)^{-k} dx = a \begin{cases} \dfrac{(x-r)^{1-k}}{1-k} + C, & k \neq 1, \\[2ex] \ln|x - r| + C, & k = 1. \end{cases}$$

[2]Existenz der Faktorisierung (9.20) für beliebiges Polynom folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra, die wir später beweisen. Allerdings brauchen wir solche Darstellung nur für einige Beispiele wo sie leicht zu bekommen ist.

Integrieren den *Partialbruch zweiter Art* $\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^m}$ ist schwieriger. Zuerst verwenden wir die quadratische Ergänzung:

$$x^2+px+q = (x+p/2)^2 + \left(q-p^2/4\right) = y^2+s^2,$$

wobei $y = x+p/2$ und $s = \sqrt{q-p^2/4} > 0$ (da x^2+px+q keine reelle Nullstelle hat, so gilt $q-p^2/4>0$). Mit der inversen Substitution $x = y-p/2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^m}dx &= \int \frac{b\,(y-p/2)+c}{(y^2+s^2)^m}dy \\ &= b\int \frac{y\,dy}{(y^2+s^2)^m} + (c-bp/2)\int \frac{dy}{(y^2+s^2)^m}.\end{aligned}$$

Somit bleibt es die folgenden Integrale zu bestimmen:

$$\int \frac{y\,dy}{(y^2+s^2)^m} \quad \text{und} \quad \int \frac{dy}{(y^2+s^2)^m}. \tag{9.23}$$

Das erste Integral ist einfach:

$$\begin{aligned}\int \frac{y\,dy}{(y^2+s^2)^m} &= \frac{1}{2}\int \frac{d\,(y^2+s^2)}{(y^2+s^2)^m} \qquad (\text{Substitution } z = y^2+s^2) \\ &= \frac{1}{2}\int z^{-m}dz = \frac{1}{2}\begin{cases}\dfrac{z^{1-m}}{1-m}+C, & m\neq 1, \\[2ex] \ln|z|+C, & m=1,\end{cases} \\ &= \frac{1}{2}\begin{cases}\dfrac{(y^2+s^2)^{1-m}}{1-m}+C, & m\neq 1, \\[2ex] \ln(y^2+s^2)+C, & m=1.\end{cases}\end{aligned}$$

Das zweite Integral in (9.23) lässt sich per Induktion nach m berechnen. Dafür setzen wir

$$F_m(y) = \int \frac{dy}{(y^2+s^2)^m}$$

und bemerken, dass

$$F_1(y) = \int \frac{dy}{y^2+s^2} = \int \frac{dy}{s^2\left((y/s)^2+1\right)} = \frac{s}{s^2}\int \frac{d\,(y/s)}{(y/s)^2+1} = \frac{1}{s}\arctan\frac{y}{s}+C,$$

d.h.

$$\boxed{\int \frac{dy}{y^2+s^2} = \frac{1}{s}\arctan\frac{y}{s}+C}.$$

Partielle Integration von F_m ergibt

$$\begin{aligned}F_m(y) &= \frac{y}{(y^2+s^2)^m} - \int y\,d\frac{1}{(y^2+s^2)^m} \\ &= \frac{y}{(y^2+s^2)^m} + 2m\int \frac{y^2dy}{(y^2+s^2)^{m+1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y}{\left(y^2+s^2\right)^m} + 2m\int \frac{y^2+s^2}{\left(y^2+s^2\right)^{m+1}}dy - 2ms^2\int \frac{dy}{\left(y^2+s^2\right)^{m+1}} \\
&= \frac{y}{\left(y^2+s^2\right)^m} + 2mF_m - 2ms^2F_{m+1}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die folgende Relation zwischen F_m und F_{m+1}

$$F_{m+1} = \frac{1}{2ms^2}\left(\frac{y}{\left(y^2+s^2\right)^m} + (2m-1)\,F_m\right),$$

so dass F_m sich per Induktion nach m bestimmen lässt.

Beispiel. 1. Bestimmen wir

$$\int \frac{dx}{x^3-x}.$$

Der Nenner lässt sich wie folgt faktorisieren:

$$x^3 - x = x\,(x-1)\,(x+1)\,.$$

Somit hat die Funktion $f\,(x) = \frac{1}{x^3-x}$ die folgende Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x\,(x-1)\,(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}, \tag{9.24}$$

wobei die Koeffizienten a, b, c noch bestimmt werden sollen. Diese Identität gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$. Um a zu bestimmen, multiplizieren wir (9.24) mit x:

$$\frac{1}{(x-1)\,(x+1)} = a + x\left(\frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}\right) \tag{9.25}$$

und bemerken, dass diese Identität für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$ gilt, genau wie (9.24). Aber die beiden Seiten von (9.25) sind auch für $x = 0$ definiert. Nach der Stetigkeit der beiden Seiten von (9.25) gilt die Gleichheit (9.25) auch für $x = 0$. Setzen wir in (9.25) $x = 0$ ein und erhalten

$$a = \left.\frac{1}{(x-1)\,(x+1)}\right|_{x=0} = -1.$$

Analog ergibt Multiplizieren von (9.24) mit $x - 1$ die folgende Identität

$$\frac{1}{x\,(x+1)} = b + (x-1)\left(\frac{a}{x} + \frac{c}{x+1}\right),$$

und für $x = 1$ erhalten wir

$$b = \left.\frac{1}{x\,(x+1)}\right|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

Multiplizieren von (9.24) mit $x + 1$ ergibt

$$\frac{1}{x\,(x-1)} = c + (x+1)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}\right),$$

woraus für $x = -1$ folgt

$$c = \left.\frac{1}{x\,(x-1)}\right|_{x=-1} = \frac{1}{2}.$$

Somit erhalten wir

$$\frac{1}{x^3-x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$$

und

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3-x} &= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{|x^2-1|}{x^2} + C.\end{aligned}$$

2. Bestimmen wir das Integral

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

Die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}$ hat die Form

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a_1}{(x-1)} + \frac{a_2}{(x-1)^2} + \frac{bx+c}{x^2+1}, \tag{9.26}$$

wobei die Koeffizienten a_i, b, c noch bestimmt werden sollen. Multiplizieren diese Identität mit $(x-1)^2$ ergibt

$$\frac{1}{x^2+1} = a_2 + a_1(x-1) + (x-1)^2 g(x),$$

wobei $g(x) = \frac{bx+c}{x^2+1}$. Für $x = 1$ erhalten wir

$$a_2 = \left.\frac{1}{x^2+1}\right|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

Subtrahieren aus (9.26) das Glied $\frac{a_2}{(x-1)^2}$ ergibt

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} - \frac{a_2}{(x-1)^2} = \frac{a_1}{x-1} + g(x),$$

wobei

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} - \frac{a_2}{(x-1)^2} &= \left(\frac{1}{(x^2+1)} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1-x^2}{(x^2+1)(x-1)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)}\end{aligned}$$

so dass

$$\frac{a_1}{x-1} + g(x) = -\frac{1}{2}\frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)}. \tag{9.27}$$

Um a_1 daraus zu bestimmen, multiplizieren wir diese Identität mit $x-1$ und erhalten

$$a_1 + (x-1)g(x) = -\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}.$$

Einsetzen $x = 1$ ergibt

$$a_1 = -\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}\bigg|_{x=1} = -\frac{1}{2}.$$

Jetzt können wir $g(x)$ aus (9.27) bestimmen wie folgt:

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{2}\frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)} - \frac{a_1}{(x-1)} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{-(x+1)+(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{x(x-1)}{(x^2+1)(x-1)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}, \end{aligned}$$

so dass $g(x)$ wirklich die Form $\frac{bx+c}{x^2+1}$ mit $b = \frac{1}{2}$ und $c = 0$ hat. Somit erhalten wir die folgende Partialbruchzerlegung von f:

$$f(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}.$$

Jetzt können wir jedes Glied von $f(x)$ integrieren:

$$\int \frac{1}{x-1}dx = \int \frac{d(x-1)}{x-1} = \ln|x-1| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + C,$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + C \\ &= \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + C \end{aligned}$$

3. Bestimmen wir

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}.$$

Das Polynom $x^2 + 2x + 5$ hat keine reelle Nullstelle, und somit ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}$ schon ein Partialbruch zweiter Art. Wir haben mit quadratischer Ergänzung

$$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4,$$

und mit Substitution $y = x + 1$ erhalten wir

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^2} = \int \frac{dy}{\left(y^2+4\right)^2} =: F_2\left(y\right).$$

Zuerst berechnen wir

$$F_1\left(y\right) := \int \frac{dy}{y^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(y/2\right)}{\left(y/2\right)^2+1} = \frac{1}{2}\arctan\frac{y}{2} + C.$$

Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} F_1\left(y\right) = \int \frac{dy}{y^2+4} &= \frac{y}{y^2+4} - \int y\, d\frac{1}{y^2+4} \\ &= \frac{y}{y^2+4} + \int y \frac{2y}{\left(y^2+4\right)^2} dy \\ &= \frac{y}{y^2+4} + 2\int \frac{y^2+4-4}{\left(y^2+4\right)^2} dy \\ &= \frac{y}{y^2+4} + 2\int \frac{dy}{y^2+4} - 8\int \frac{dy}{\left(y^2+4\right)^2} \\ &= \frac{y}{y^2+4} + 2F_1\left(y\right) - 8F_2\left(y\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$8F_2\left(y\right) = \frac{y}{y^2+4} + F_1\left(y\right)$$

und somit

$$F_2\left(y\right) = \frac{y}{8\left(y^2+4\right)} + \frac{1}{16}\arctan\frac{y}{2} + C.$$

Einsetzen $y = x + 1$ ergibt die Antwort

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^2} = \frac{x+1}{8\left(x^2+2x+5\right)} + \frac{1}{16}\arctan\frac{x+1}{2} + C.$$

Betrachten wir jetzt den Fall $\deg P \geq \deg Q$. In diesem Fall dividiert man zunächst P durch Q mit Rest

$$P = QP_0 + P_1,$$

wobei Q, P_0, P_1 Polynome sind und $\deg P_1 < \deg Q$. Es folgt dass

$$f = \frac{P}{Q} = P_0 + \frac{P_1}{Q}.$$

Da die Integration des Polynoms P_0 trivial ist, muss man die Funktion $\frac{P_1}{Q}$ mit Hilfe von Partialbruchzerlegung wie oben weiter integrieren.

Beispiel. Bestimmen wir das Integral

$$\int \frac{x^9-2}{x^4-1} dx.$$

Zunächst dividieren wir $x^9 - 2$ durch $x^4 - 1$ mit Rest:

$$\begin{aligned} x^9 - 2 &= x^5 \left(x^4 - 1\right) + x^5 - 2 \\ &= x^5 \left(x^4 - 1\right) + x \left(x^4 - 1\right) + x - 2 \\ &= \left(x^5 + x\right) \left(x^4 - 1\right) + x - 2 \end{aligned}$$

so dass

$$\frac{x^9 - 2}{x^4 - 1} = x^5 + x + \frac{x - 2}{x^4 - 1}.$$

Weiter zerlegen wir die Funktion $\frac{x-2}{x^4-1}$ in Partialbrüche. Der Nenner lässt sich wie folgt faktorisieren:

$$x^4 - 1 = \left(x^2 - 1\right) \left(x^2 + 1\right) = (x - 1)(x + 1) \left(x^2 + 1\right)$$

so dass

$$\frac{x - 2}{x^4 - 1} = \frac{x - 2}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{a_1}{x - 1} + \frac{a_2}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}.$$

Multiplizieren mit $x - 1$ und Einsetzen $x = 1$ ergibt:

$$a_1 = \left.\frac{x - 2}{(x + 1)(x^2 + 1)}\right|_{x=1} = -\frac{1}{4}.$$

Multiplizieren mit $x + 1$ und Einsetzen $x = -1$ ergibt:

$$a_2 = \left.\frac{x - 2}{(x - 1)(x^2 + 1)}\right|_{x=-1} = \frac{3}{4}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{bx + c}{x^2 + 1} &= \frac{x - 2}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} - \frac{a_1}{x - 1} - \frac{a_2}{x + 1} \\ &= \frac{x - 2}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} + \frac{1}{4}\frac{1}{x - 1} - \frac{3}{4}\frac{1}{x + 1} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{x - 2}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

so dass

$$\frac{x - 2}{x^4 - 1} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x - 1} + \frac{3}{4}\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{2}\frac{x - 2}{x^2 + 1}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int \frac{x^9 - 2}{x^4 - 1} dx &= \int \left(x^5 + x\right) dx - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x - 1} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{x - 2}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \ln|x - 1| + \frac{3}{4} \ln|x + 1| - \frac{1}{4} \int \frac{d\left(x^2 + 1\right)}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \ln|x - 1| + \frac{3}{4} \ln|x + 1| - \frac{1}{4} \ln\left(x^2 + 1\right) + \arctan x + C \\ &= \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \ln\left|\frac{(x + 1)^3}{(x - 1)(x^2 + 1)}\right| + \arctan x + C. \end{aligned}$$

9.7 * Berechnen von unbestimmten Integralen mit Hilfe von Software

Viele Programme ermöglichen die Berechnung unbestimmter Integrale. Als Beispiel geben wir ein Python-Programm, das in Google Colab ausgeführt werden kann:

```
import sympy as sp
# Variable von Integration
x = sp.Symbol('x')
# Der Integrand
expr_str = input("Funktion angeben:  ")
expr = sp.sympify(expr_str)
integral = sp.integrate(expr, x)
print(f"Int {expr} dx = {integral} + C")
```

Zum Beispiel, geben wir in das Dialogfeld die Funktion sin(x) $**4$ an, d.h. $\sin^4 x$, und erhalten die Antwort

$$\mathrm{Int}\ \sin(\mathrm{x}) * *4\,\mathrm{dx} = 3 * \mathrm{x}/8 - \sin(\mathrm{x}) * *3 * \cos(\mathrm{x})/4 - 3 * \sin(\mathrm{x}) * \cos(\mathrm{x})/8 + \mathrm{C}$$

d.h.

$$\int \sin^4 x dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin^3 x \cos x - \frac{3}{8}\sin x \cos x + C.$$

Zum Vergleichen, die Lösung von Aufgabe 70 ergibt

$$\int \sin^4 x dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Man kann zeigen, dass diese zwei Antworten identisch sind.

Chapter 10

Integralrechnung: bestimmtes Integral

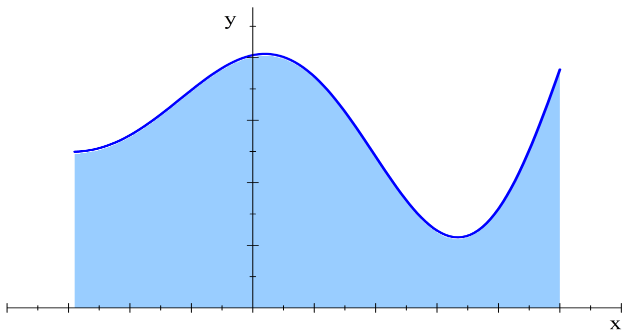
14.05.2025 **Vorlesung 10**

10.1 Riemann-Integral

Sei $f(x)$ eine reellwertige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Wir definieren hier den Begriff von *bestimmten Integral*

$$\int_a^b f(x)\, dx \tag{10.1}$$

("Integral von a bis b von f von x dx"). Die Zahlen a und b heißen die *Grenzen* des Integrals. Der Ausdruck (10.1) hat einen reellen Wert. Im Fall $f \geq 0$ lässt sich (10.1) als der Flächeninhalt unter dem Graph der Funktion f betrachten werden.



Der Untergraph einer Funktion f

Das Integral (10.1) heißt auch das *Riemann-Integral* oder *Riemannsches Integral.* Die Idee der folgenden Konstruktion stammt aus (9.2) – Wiederherstellung einer Funktion F durch Ihre Ableitung F'. Mit Hilfe davon werden wir auch die Existenz von Stammfunktion einer stetigen Funktion beweisen.

Definition. Eine *Zerlegung* von einem Intervall $[a, b]$ ist eine endliche streng monoton steigende Folge $\{x_k\}_{k=0}^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = a$ und $x_n = b$, d.h.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Wir bezeichnen eine Zerlegung mit Z, d.h. Z bezeichnet die ganze Folge $\{x_k\}_{k=0}^n$.

Gegeben sei eine Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von $[a, b]$, betrachten wir noch eine Folge $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ von Zahlen ξ_k mit $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, d.h.

$$x_0 \le \xi_1 \le x_1, ..., \; x_{k-1} \le \xi_k \le x_k, ..., \; x_{n-1} \le \xi_n \le x_n.$$

Dann heißen ξ_k die *Zwischenstellen* von Z. Wir bezeichnen $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$.

Definition. Für jede Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ mit den Zwischenstellen ξ definieren wir die *Riemann-Summe* mit

$$S(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\, \Delta x_k,$$

wobei

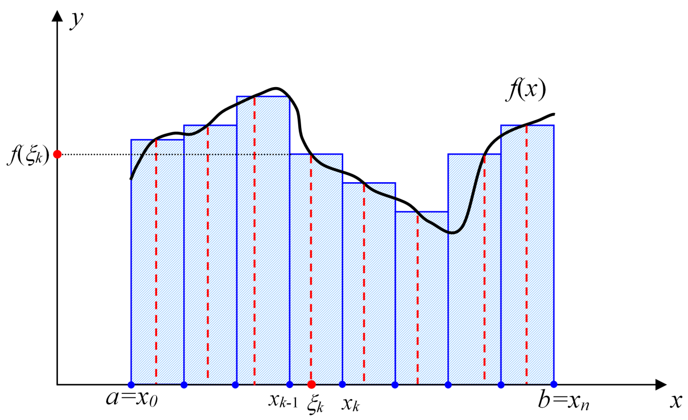
$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$$

die Differenz der Folge $\{x_k\}$ ist.

Geometrische Bedeutung der Summe $S(f, Z, \xi)$ ist wie folgt. Ist f auf $[a, b]$ nichtnegativ, so heißt die folgende Menge

$$U_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \; 0 \le y \le f(x)\right\}$$

der *Untergraph* von f. Die Riemann-Summe $S(f, Z, \zeta)$ ist gleich die Summe von Flächeninhalten von Rechtecken mit der Basis $[x_{k-1}, x_k]$ und der Höhe $f(\xi_k)$, was eine Annäherung von dem Flächeninhalt von U_f ist.



Der Approximationsfehler dieser Annäherung wird fallen wenn die Feinheit der Zerlegung Z gegen 0 geht.

Definition. Für jede Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ definieren wir die *Feinheit* von Z mit

$$\varphi(Z) = \max_{1 \le k \le n} \{\Delta x_k\}.$$

Der Grenzwert von Riemann-Summen $S(f, Z, \xi)$ für $\varphi(Z) \to 0$ wird wie folgt definiert.
Definition. Wir schreiben

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f, Z, \xi) = A$$

mit einem $A \in \mathbb{R}$, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ mit $\varphi(Z) < \delta$ und für jede Folge ξ von Zwischenstellen von Z gilt

$$|S(f, Z, \xi) - A| < \varepsilon. \tag{10.2}$$

Kurz gesagt:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ s.d. } \forall Z \text{ mit } \varphi(Z) < \delta \text{ und } \forall\xi \text{ gilt } (10.2).$$

Definition. Eine reellwertige Funktion f auf $[a, b]$ heißt *Riemann-integrierbar* wenn der Grenzwert

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f, Z, \xi)$$

existiert. Der Wert des Grenzwertes heißt das Riemann-Integral (=bestimmtes Integral) von f und wird wie folgt bezeichnet:

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

d.h.

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f, Z, \xi) = \lim_{\varphi(Z)\to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\, \Delta x_k, \tag{10.3}$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert.

Die Notation $\int_a^b f(x)\, dx$ wurde von Leibniz vorgeschlagen und bezieht sich auf die Summe $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\, \Delta x_k$. Die Zahlen a und b heißen *untere* bzw *obere Grenzen* des Integrals $\int_a^b f(x)\, dx$.

Definition. Sei f eine nicht-negative Riemann-integrierbare Funktion auf $[a, b]$. Dann definieren wir den *Flächeninhalt* des Untergraphes U_f von f we folgt:

$$F(U_f) := \int_a^b f(x)\, dx.$$

In diesem Kapitel besprechen wir wie man das Riemann-Integral berechnet. Insbesondere welche Beziehung gibt es zwischen bestimmten und unbestimmten Integralen.

Wir fangen mit Beispielen an.

Beispiel. 1. Sei $f(x) \equiv c$ eine Konstantefunktion. Dann gilt für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ mit Zwischenstellen ξ

$$S(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\, \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b - a),$$

woraus folgt, dass

$$\int_a^b c\,dx = c\,(b-a)\,. \tag{10.4}$$

Insbesondere ist f Riemann-integrierbar. Da der Untergraph von f der Rechteck $[a,b]\times[0,c]$ ist, so beschließen wir, dass der Flächeninhalt dieses Rechteckes gleich $c\,(b-a)$ ist, wie erwartet.

2. Sei f die *Dirichlet-Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{10.5}$$

Zeigen wir, dass f auf jedem Intervall $[a,b]$ nicht Riemann-integrierbar ist. Gegeben sei eine Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von $[a,b]$, wählen wir alle Zwischenstellen ξ_k irrational. Dann gilt $f(\xi_k) = 0$ und somit

$$S(f,Z,\xi) = 0.$$

Andererseits, für dieselbe Zerlegung wählen wir jetzt die anderen Zwischenstellen ξ_k so dass alle ξ_k rational sind. Dann gilt $f(\xi_k) = 1$ und somit

$$S(f,Z,\xi) = b-a.$$

Wir sehen, dass $\lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f,Z,\xi)$ nicht existiert.

Der folgende Satz gibt uns viele Beispiele von integrierbaren Funktionen.

Satz 10.1 (Hinreichende Bedingungen für Integrierbarkeit)
(*a*) *Jede stetige Funktion f auf $[a,b]$ ist auf diesem Intervall integrierbar.*
(*b*) *Jede monotone Funktion f auf $[a,b]$ ist auf diesem Intervall integrierbar.*

Wir beweisen diesen Satz später.

10.2 Fundamentalsatz der Analysis, 1

Der nächste Satz etabliert eine Beziehung zwischen bestimmten und unbestimmten Integralen.

Hauptsatz 10.2 (Fundamentalsatz der Analysis: Newton-Leibniz-Formel) *Sei $f(x)$ eine Riemann-integrierbare Funktion auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ mit $a<b$. Hat f auf $[a,b]$ eine Stammfunktion F, so gilt die Identität*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}. \tag{10.6}$$

Führen wir die folgende Notation ein:

$$[F]_a^b := F(b) - F(a)\,.$$

Da $F = \int f(x)\,dx$, so lässt sich die *Newton-Leibniz-Formel* (10.6) wie folgt umschreiben:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F]_a^b = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b.$$

In dieser Form liefert die Newton-Leibniz-Formel eine direkte Beziehung zwischen bestimmten und unbestimmten Integralen.

Bemerken wir, dass die Voraussetzungen des Satzes 10.2 – die Riemann-Integrierbarkeit und Existenz von Stammfunktion – für alle stetigen Funktionen f erfüllt sind.

Beweis von dem Satz 10.2. Nach Definition von Riemann-Integral gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f, Z, \xi).$$

Fixieren wir eine Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von $[a,b]$ und wählen die Zwischenstellen $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$ wie folgt. Nach dem Mittelwertsatz, es gibt ein $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ mit

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Für dieses ξ_k erhalten wir

$$\begin{aligned} S(f, Z, \xi) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) \\ &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

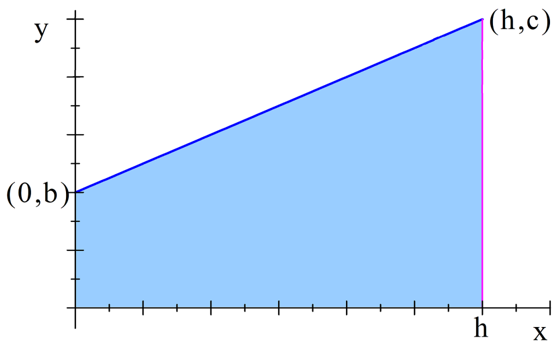
Somit muss der Grenzwert $\lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f, Z, \xi)$ gleich $F(b) - F(a)$ sein, woraus (10.6) folgt. ■

Mit Hilfe von der Newton-Leibniz-Formel kann man die Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ effektiv berechnen. Ist $f \geq 0$, so bestimmt man auf diese Weise den Flächeninhalt $F(U_f)$ des Untergraphes U_f von f.

Beispiel. 1. Betrachten wir die Funktion $f(x) = ax + b$ auf einem Intervall $[0, h]$ mit $h > 0$. Es gilt

$$\int_0^h (ax+b)\,dx = \left[\int (ax+b)\,dx\right]_0^h = \left[a\frac{x^2}{2} + bx\right]_0^h = a\frac{h^2}{2} + bh = \frac{ah+2b}{2}h = \frac{b+c}{2}h,$$

wobei $c = ah + b = f(h)$. Der Graph der Funktion $f(x) = ax + b$ ist eine Gerade zwischen den Punkten $(0, b)$ und (h, c).

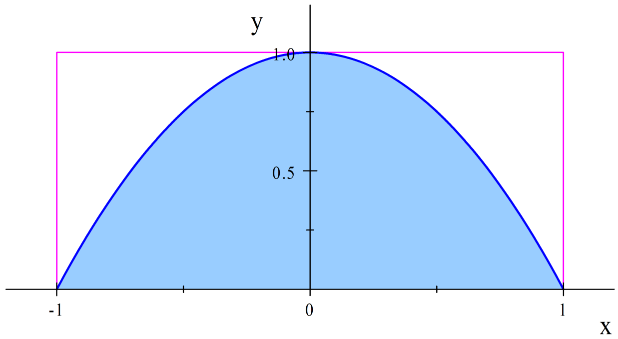


Im Fall $f \geq 0$ ist der Untergraph von f ein Trapez mit der Höhe h und den Grundseiten b and c. Somit erhalten wir: der Flächeninhalt von dem Trapez ist gleich $\frac{b+c}{2}h$.

2. Für die Funktion $f(x) = 1 - x^2$ erhalten wir

$$\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx = \left[\int \left(1 - x^2\right) dx\right]_{-1}^{1} = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

Geometrisch bedeutet dies, dass der Flächeninhalt zwischen der Parabel $y = 1 - x^2$ und der Achse x gleich $4/3$ ist.

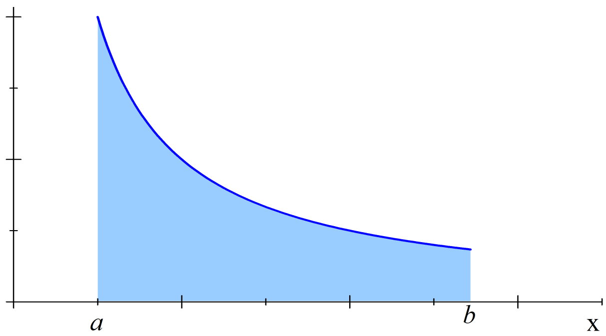


Insbesondere beträgt dieser Flächeninhalt genau $2/3$ von den Flächeninhalt von dem umgeschriebenen Rechteck $[-1, 1] \times [0, 1]$. Diese Regel von $\frac{2}{3}$ wurde erst von Archimedes entdeckt. Er konnte den Flächeninhalt unter der Parabel direkt als der Grenzwert von Riemann-Summen berechnen, ohne Newton-Leibniz-Formel zu wissen.

3. Sei $f(x) = \frac{1}{x}$. Für alle $0 < a < b$ erhalten wir

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \left[\int \frac{dx}{x}\right]_a^b = [\ln x]_a^b = \ln \frac{b}{a}. \tag{10.7}$$

Der Graph der Funktion $y = \frac{1}{x}$ ist eine Hyperbel, und der Flächeninhalt unter der Hyperbel auf $[a, b]$ ist gleich $\ln \frac{b}{a}$.



Insbesondere gilt

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln e = 1.$$

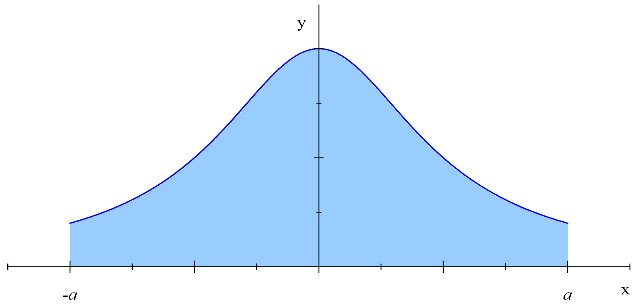
4. Die Existenz der Stammfunktion in (10.6) auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ ist wichtig. Hier ist ein Gegenbeispiel, wie man falsches Ergebnis erhält:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \left[\int \frac{dx}{x}\right]_{-1}^{1} = [\ln |x|]_{-1}^{1} = 0.$$

Warum ist diese Berechnung falsch? Die Stammfunktion $\ln|x|$ ist nicht auf dem ganzen Intervall $[-1,1]$ definiert wie die Newton-Leibniz-Formel anfordert, sondern auf zwei disjunkten Intervallen $(0,+\infty)$ und $(-\infty,0)$. Somit gilt diese Formel für $\int_a^b \frac{dx}{x}$ nur dann wenn entweder $[a,b]\subset(0,\infty)$ oder $[a,b]\subset(-\infty,0)$.

5. Für die Funktion $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ haben wir

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\left[\int\frac{dx}{1+x^2}\right]_{-1}^{1}=[\arctan x]_{-1}^{1}=2\arctan 1=\frac{\pi}{2}.$$

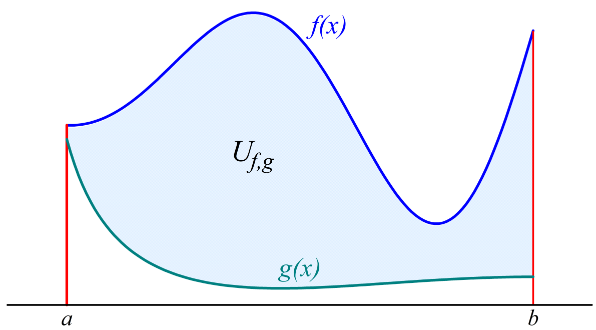


16.05.2025 Vorlesung 11

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei integrierbare Funktionen auf einem Intervall $[a,b]$ mit $f(x)\geq g(x)$. Betrachten wir die Menge

$$U_{f,g}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\leq x\leq b,\ g(x)\leq y\leq f(x)\right\}$$

zwischen den Graphen von f und g. Im Fall $g\equiv 0$ haben wir $U_{f,0}=U_f$.



Definieren den Flächeninhalt von $U_{f,g}$ mit

$$F(U_{f,g}):=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)dx.$$

Unterhalb beweisen wir, dass die rechte Seite hier gleich $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$ ist.

Bemerken wir auch dass $F(U_{f,g}) \geq 0$ da für alle Riemann-Summen gilt

$$S(f, Z, \xi) \geq S\,(g, Z, \xi)$$

und somit $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
Beispiel. Bestimmen wir den Flächeninhalt der Kreisscheibe von Radius 1:

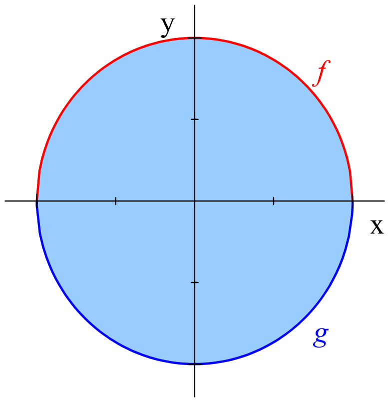
$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Wir haben

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1,\; -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\} = U_{f,g},$$

wobei

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{und} \quad g(x) = -\sqrt{1-x^2}, \qquad x \in [-1, 1]\,.$$



Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} F(K) &= \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{-1}^{1} g(x)dx \\ &= \left[\int \sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} - \left[-\int \sqrt{1-x^2}dx\right]_{-1}^{1} \\ &= 2\left[\int \sqrt{1-x^2}\,dx\right]_{-1}^{1} \\ &= \left[\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} = \pi. \end{aligned}$$

Genau so erhalten wir für die Kreisscheibe

$$K_r = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\right\}$$

von Radius $r > 0$ dass

$$F(K_r) = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx = \pi r^2$$

da

$$\begin{aligned}
2\int\sqrt{r^2-x^2}dx &= 2r^2\int\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\,d\left(\frac{x}{r}\right) \\
&= r^2\left(\arcsin\frac{x}{r}+\frac{x}{r}\sqrt{1-\frac{x}{r}^2}\right)+C \\
&= r^2\arcsin\frac{x}{r}+x\sqrt{r^2-x^2}+C.
\end{aligned}$$

10.3 Linearität und partielle Integration

Satz 10.3 (Linearität für bestimmtes Integral) *Sind die Funktionen f und g integrierbar auf einem Intervall $[a,b]$, so ist auch $f+g$ integrierbar und*

$$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx. \tag{10.8}$$

Auch für jedes $c\in\mathbb{R}$ ist cf integrierbar und

$$\int_a^b (cf)\,dx = c\int_a^b f dx. \tag{10.9}$$

Beweis. Seien $Z=\{x_k\}_{k=0}^n$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $\xi=\{\xi_k\}_{k=1}^n$ eine Folge von Zwischenstellen von Z. Dann

$$\begin{aligned}
S\left(f+g,Z,\xi\right) &= \sum_{k=0}^n (f+g)\left(\xi_k\right)\Delta x_k \\
&= \sum_{k=0}^n f\left(\xi_k\right)\Delta x_k + \sum_{k=0}^n g\left(\xi_k\right)\Delta x_k \\
&= S\left(f,Z,\xi\right)+S\left(g,Z,\xi\right).
\end{aligned}$$

Für $\varphi(Z)\to 0$ konvergiert die rechte Seite gegen

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\ .$$

Somit ist $f+g$ Riemann-integrierbar und (10.8) gilt. Analog beweist man die Integrierbarkeit von cf und (10.9). ■

Satz 10.4 (Partielle Integration für bestimmtes Integral) *Für stetig differenzierbare Funktionen u,v auf einem Intervall $[a,b]$ gilt*

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{10.10}$$

Beweis. Mach dem Satz 9.4 gilt

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

woraus folgt dass

$$\int_a^b u\,dv = \left[\int u\,dv\right]_a^b = [uv]_a^b - \left[\int v\,du\right]_a^b = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$$

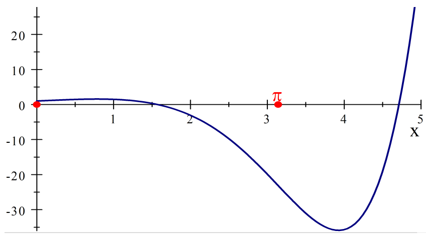
was zu beweisen war. ■

Beispiel. Bestimmen wir $\int_0^\pi e^x \cos x\,dx$. Da $e^x dx = de^x$, so erhalten wir nach (10.10) mit $u = \cos x$ und $v = e^x$:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^x \cos x\,dx &= \int_0^\pi \cos x\,de^x \\ &= [e^x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x d\cos x \\ &= -e^\pi - 1 + \int_0^\pi e^x \sin x\,dx \\ &= -(e^\pi + 1) + \int_0^\pi \sin x\,de^x \\ &= -(e^\pi + 1) + [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x\,dx,\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\int_0^\pi e^x \cos x\,dx = -\frac{e^\pi + 1}{2}.$$



Funktion $e^x \cos x$

Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall J. Das Riemann-Integral $\int_a^b f(x)dx$ ist dann für alle $a, b \in J$ mit $a < b$ definiert. Erweitern wir diese Definition auf alle Paaren $a, b \in J$ wie folgt.

Definition. Im Fall $a > b$ setzen wir

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx$$

und im Fall $a = b$ setzen wir

$$\int_a^a f((x)dx := 0.$$

Behauptung. *Die Newton-Leibniz-Formel bleibt gültig für beliebige $a, b \in J$.*

Beweis. In der Tat, ist F eine Stammfunktion von f, so erhalten wir im Fall $a > b$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = -[F]_b^a = [F]_a^b$$

und im Fall $a = b$

$$\int_a^a f((x)dx = 0 = [F]_a^a.$$

■

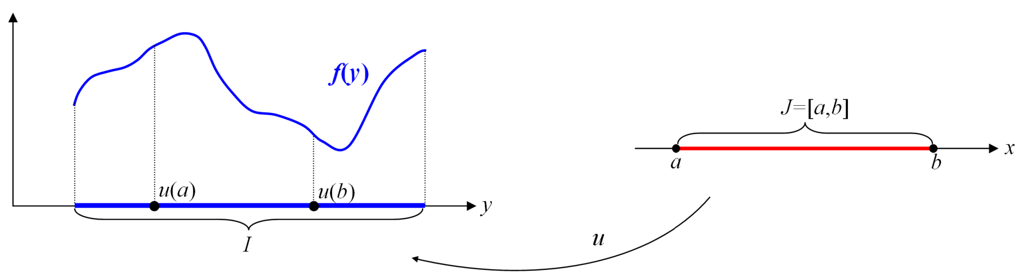
Auch Linearität und partielle Integration für bestimmtes Integral gelten im Fall $a \leq b$.

10.4 Substitutionsregel

Satz 10.5 (Substitutionsregel für bestimmtes Integral) *Seien f eine stetige Funktion auf einem Intervall I und u eine stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall $J = [a, b]$ mit $u(J) \subset I$ so dass die Komposition $f(u(x))$ auf $[a, b]$ definiert ist. Dann gilt*

$$\boxed{\int_a^b f(u(x))\, du(x) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)dy.} \tag{10.11}$$

Die Identität (10.11) lässt sich als eine Substitution $y = u(x)$ betrachten. Im Unterschied zur Substitutionsregel für unbestimmte Integrale muss die Substitution auch in den Grenzen der Integration erfolgen: die Grenze a für x führt zur Grenze $u(a)$ von y, und die Grenze b für x führt zur Grenze $u(b)$ für y.



Beweis. Die beiden Funktionen $f(y)$ und $f(u(x))u'(x)$ sind stetig und somit auch Riemann-integrierbar. Da f auf I stetig ist, so hat f nach dem Satz 9.1 eine Stammfunktion F auf I, d.h.

$$\int f(y)\, dy = F(y) + C.$$

Nach dem Satz 9.5 gilt auch

$$\int f(u(x))\, du(x) = F(u(x)) + C.$$

Nach dem der Newton-Leibniz-Formel des Satzes 10.2 gelten die Identitäten

$$\int_a^b f(u(x))\, du(x) = [F(u(x))]_a^b = F(u(b)) - F(u(a))$$

und

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(y)dy = [F(y)]_{u(a)}^{u(b)} = F(u(b)) - F(u(a)),$$

woraus (10.11) folgt. ■

Beispiel. 1. Bestimmen wir

$$\int_1^2 \frac{dx}{e^x - 1}.$$

Wir haben

$$\int_1^2 \frac{dx}{e^x-1} = \int_1^2 \frac{e^x dx}{e^x(e^x-1)} = \int_1^2 \frac{de^x}{e^x(e^x-1)},$$

und die Substitution $y = u(x) = e^x$ ergibt

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{e^x-1} &= \int_{u(1)}^{u(2)} \frac{dy}{y(y-1)} \\ &= \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy \\ &= [\ln(y-1)]_e^{e^2} - [\ln y]_e^{e^2} \\ &= \ln \frac{e^2-1}{e-1} - 1 = \ln(e+1) - \ln e = \ln\left(1+e^{-1}\right).\end{aligned}$$

2. Bestimmen wir

$$\int_0^{5\pi} (2+\cos x)^2 \sin x\, dx.$$

Wir erhalten mit Hilfe von der Substitution $y = u(x) = 2 + \cos x$:

$$\begin{aligned}\int_0^{5\pi} (2+\cos x)^2 \sin x\, dx &= -\int_0^{5\pi} (2+\cos x)^2\, d(2+\cos x) \\ &= -\int_{u(0)}^{u(5\pi)} y^2 dy = -\int_3^1 y^2 dy \\ &= \int_1^3 y^2 dy = \left[\frac{y^3}{3}\right]_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}.\end{aligned}$$

In diesem Beispiel ist die Substitution $y = u(x)$ nicht monoton (und muss nicht monoton sein).

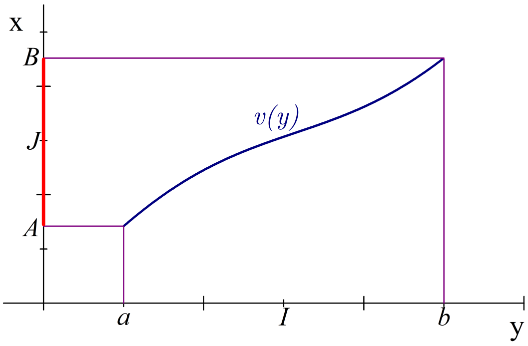
Korollar 10.6 (Inverse Substitution) *Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $J = [A, B]$. Sei v eine stetig differenzierbare streng monotone Funktion auf einem Intervall I mit $v(I) = J$, so dass die inverse Funktion $v^{-1} : J \to I$ existiert. Dann gilt*

$$\boxed{\int_A^B f(x)dx = \int_{v^{-1}(A)}^{v^{-1}(B)} f(v(y))\, dv(y).} \tag{10.12}$$

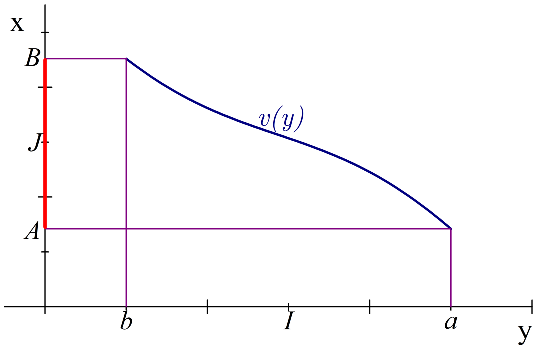
Man betrachtet die Identität (10.12) als die inverse Substitution $x = v(y)$ im bestimmten Integral. Da $y = v^{-1}(x)$, die Grenze A für x wird zur Grenze $v^{-1}(A)$ für y, und die Grenze B für x wird zur Grenze $v^{-1}(B)$ für y.

Beweis. Die inverse Funktion v^{-1} existiert auf J nach dem Satz über Existenz der inversen Funktion. Die Komposition $f(v(y))$ ist wohldefiniert, da $v(y) \in J$. Die beiden Funktionen $f(x)$ und $f(v(y))v'(y)$ sind stetig und somit Riemann-integrierbar.

Setzen wir $a = v^{-1}(A)$ und $b = v^{-1}(B)$.



Monoton steigende Funktion v



Monoton fallende Funktion v

Nach der Substitutionsregel (10.11) erhalten wir mit der Substitution $x = v(y)$

$$\int_{v^{-1}(A)}^{v^{-1}(B)} f(v(y))\, dv(y) = \int_a^b f(v(y))\, dv(y) = \int_{v(a)}^{v(b)} f(x)dx = \int_A^B f(x)dx,$$

was zu beweisen war. ■

Beispiel. 1. Bestimmen wir

$$\int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\, dx$$

mit Hilfe von der inversen Substitution $x = \sin y$. Die Funktion $v(y) = \sin y$ ist auf $[-\pi/2, \pi/2]$ invertierbar mit der inversen Funktion $v^{-1}(x) = \arcsin x$, die auf $[-1, 1]$ definiert ist. Da $dx = \cos y$, wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\, dx &= \int_{v^{-1}(\sqrt{3}/2)}^{v^{-1}(1)} \frac{\sqrt{1-\sin^2 y}}{\sin y} \cos y dy \\
&= \int_{\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}}^{\arcsin 1} \frac{\cos^2 y}{\sin y} dy \\
&= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 y}{\sin y} dy \\
&= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dy}{\sin y} - \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin y dy \\
&= \left[\ln\left|\tan\frac{y}{2}\right|\right]_{\pi/3}^{\pi/2} + [\cos y]_{\pi/3}^{\pi/2} \\
&= \left(\ln\tan\frac{\pi}{4} - \ln\tan\frac{\pi}{6}\right) + \left(0 - \frac{1}{2}\right) \\
&= -\ln\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2} = 0.0493...
\end{aligned}$$

2. Bestimmen wir
$$\int_0^{a^2} \frac{dx}{\cos^2 \sqrt{x}}$$
wobei $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Die inverse Substitution $x = y^2$ im Definitionsbereich $y \in [0, a]$ ergibt $dx = 2ydy$, $y = \sqrt{x}$ und
$$\begin{aligned}\int_0^{a^2} \frac{dx}{\cos^2 \sqrt{x}} &= 2\int_0^a \frac{ydy}{\cos^2 y} = 2\int_0^a yd\tan y \\ &= 2\left[y\tan y\right]_0^a - 2\int_0^a \tan ydy \\ &= 2a\tan a + 2\left[\ln|\cos y|\right]_0^a \\ &= 2a\tan a + 2\ln\cos a.\end{aligned}$$

21.05.2025 **Vorlesung 12**

10.5 Länge von Kurve

Koordinatenvektorraum. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den Raum
$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n \text{ mal}}.$$
Elemente von $\mathbb{R}^n$ sind die Folgen
$$x = \{x_k\}_{k=1}^n = (x_1, ..., x_n)$$
von n reellen Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$. Die Zahlen x_k heißen die Komponenten (oder Koordinaten) von x, die Folgen x heißen auch Punkte oder Vektoren von $\mathbb{R}^n$.

Die Menge $\mathbb{R}^n$ heißt der *n-dimensionale Koordinatenvektorraum.* Die Menge $\mathbb{R}^n$ ist auch ein linearer Raum mit den Operationen
$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$
und
$$c\,(x_1, ..., x_n) = (cx_1, ..., cx_n)\,, \quad c \in \mathbb{R}.$$
Der physikalische Raum ist 3-dimensional, aber in Anwendungen braucht man auch höherdimensionale Räume die nicht unbedingt physikalisch sind. Zum Beispiel, die Folge $(x_1, ..., x_n)$ kann Ergebnisse von bestimmten Messungen darstellen, wo die Anzahl n beliebig gross sein kann.

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir den Betrag $|x|$ von x (wird auch die *Norm* genannt) wie folgt:
$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}. \tag{10.13}$$
Zum Beispiel, die Elemente von $\mathbb{R}^2$ sind die Paare $x = (x_1, x_2)$, und der Betrag von x ist
$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$
was mit dem Betrag der komplexen Zahl $x_1 + ix_2$ übereinstimmt. Für zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt $|x - y|$ der *Abstand* zwischen x und y.

Parametrisierte Kurve und ihre Länge. Sei J ein Intervall in $\mathbb{R}$. Jede Abbildung $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ hat der Form

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)), \quad t \in J,$$

wobei die Komponenten $\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)$ reellwertige Funktion von $t \in J$ sind.

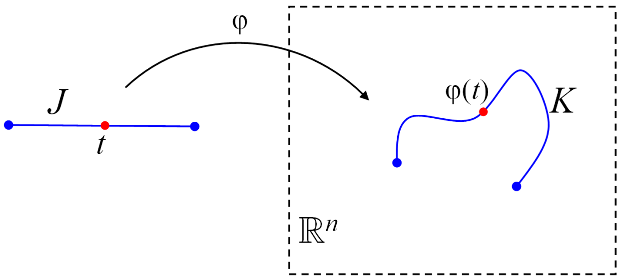
Definition. Die Abbildung φ heißt stetig wenn alle Komponenten $\varphi_j(t)$ stetig sind, und stetig differenzierbar wenn alle Komponenten $\varphi_j(t)$ stetig differenzierbar sind. Im letzten Fall definieren wir die Ableitung φ' von φ mit

$$\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), ..., \varphi_n'(t)),$$

so dass φ' auch eine Abbildung von J nach $\mathbb{R}^n$ ist.

Definition. Das Bild $K = \varphi(J)$ einer stetigen Abbildung $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ heißt *Kurve.* Die Abbildung φ heißt die *Parametrisierung* der Kurve K, und das Paar (K, φ) heißt *parametrisierte Kurve* oder *ein Weg.* Die Variable t heißt der Parameter.

Das Intervall J kann man als ein Zeitintervall betrachten und $\varphi(t)$ – als die Position eines bewegenden Körpers in $\mathbb{R}^n$ um Zeit t. Die Kurve $K = \varphi(J)$ ist die Spur des Körpers. Die Parametrisierung $\varphi(t)$ lässt sich als der Fahrplan der Bewegung des Körpers betrachten.



Eine Kurve in $\mathbb{R}^n$

Definition. Seien $J = [\alpha, \beta]$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall mit $\alpha < \beta$ und $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parametrisierung. Definieren wir die *Länge* $L(K, \varphi)$ der parametrisierten Kurve (K, φ) mit

$$\boxed{L(K, \varphi) = \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + ... + \varphi_n'(t)^2} dt}. \tag{10.14}$$

Die Ableitung $\varphi'(t)$ ist der Geschwindigkeitsvektor des Körpers und der Betrag $|\varphi'(t)|$ ist die skalare Geschwindigkeit um Zeitpunkt t. Die Integration von $|\varphi'(t)|$ über $[\alpha, \beta]$ ergibt den ganzen zurückgelegten Weg des Körpers im Zeitintervall J, was genau die Länge der Spur $\varphi(J)$ ist.

Beispiel. Fixieren wir zwei verschiedene Punkte $a, b \in \mathbb{R}^n$ und betrachten die Parametrisierung

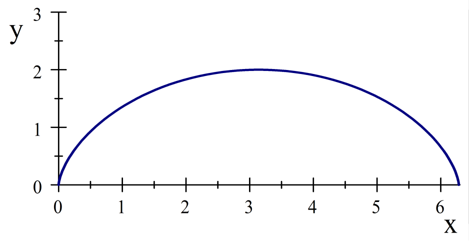
$$\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$$
$$\varphi(t) = (1 - t) a + tb = a + t(b - a).$$

Das Bild $K = \varphi(J)$ ist eine gerade Strecke zwischen a und b. Dann gilt $\varphi' = b - a$ und

$$L(K, \varphi) = \int_0^1 |\varphi'(t)|\, dt = |b - a|\,.$$

Beispiel. Die *Zykloide* ist eine Kurve K mit der Parametrisierung

$$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\varphi(t) = (t - \sin t,\, 1 - \cos t)\,.$$



Die Zykloide

Es gilt

$$\varphi'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$$

und

$$|\varphi'| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t} = 2\sin\frac{t}{2},$$

woraus folgt, dass die Länge der Zykloide wie folgt ist:

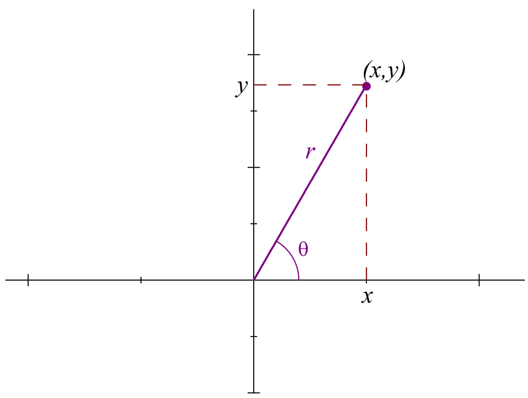
$$L(K, \varphi) = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2} dt = 4\int_0^{\pi} \sin s\; ds = -4\left[\cos s\right]_0^{\pi} = 8.$$

Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$. Vor dem nächsten Beispiel führen wir die *Polarkoordinaten* auf der Ebene ein.

Satz 10.7 *Für jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $r > 0$ und ein $\theta \in (-\pi, \pi]$ mit*

$$x = r\cos\theta \quad \text{und} \quad y = r\sin\theta. \tag{10.15}$$

Die Zahl r heißt der Polarradius von (x, y) und θ heißt der Polarwinkel von (x, y). Das Paar (r, θ) heißt die Polarkoordinaten von (x, y).



Beweis. Da $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, so folgt es aus (10.15) dass r die folgende Identität erfüllen muss:

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

so dass r eindeutig bestimmt ist:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

d.h. r ist der Abstand zwischen den Punkten (x, y) und $(0, 0)$.

Um die Existenz und Eindeutigkeit von dem Polarwinkel θ zu beweisen, betrachten wir zwei Fälle.

Fall 1: sei $y \ge 0$. Dann gilt $\sin\theta \ge 0$ und somit $\theta \in [0, \pi]$. Bestimmen wir θ aus der Gleichung

$$\cos\theta = \frac{x}{r}.$$

Im Definitionsbereich $\theta \in [0, \pi]$ hat cos die inverse Funktion arccos mit Definitionsbereich $[-1, 1]$. Da $\frac{x}{r} \in [-1, 1]$, so ist die obige Gleichung äquivalent zu

$$\theta = \arccos\frac{x}{r}$$

Insbesondere ist θ eindeutig bestimmt und $\theta \in [0, \pi]$. Für dieses θ gilt offensichtlich $r\cos\theta = x$ und

$$r\sin\theta = r\sqrt{1-\cos^2\theta} = r\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}} = \sqrt{r^2 - x^2} = y,$$

da $\sin\theta$ und y nichtnegativ sind. Somit erfüllt dieses θ die beiden Gleichungen (10.15).

Fall 2: sei $y < 0$. Die Gleichungen (10.15) sind äquivalent zu

$$x = r\cos(-\theta) \qquad \text{und} \qquad -y = r\sin(-\theta).$$

Verwenden wir den Fall 1 mit $-y$ statt y, lösen diese Gleichungen bezüglich $-\theta$ und erhalten

$$-\theta = \arccos\frac{x}{r} \in [0, \pi].$$

Da $\sin(-\theta) > 0$, so gilt die Inklusion $-\theta \in (0, \pi)$, d.h. $\theta \in (-\pi, 0)$.

In den beiden Fällen erhalten wir $\theta \in (\pi, \pi]$ und die folgende Formel für den Polarwinkel:

$$\theta = \begin{cases} \arccos\frac{x}{r}, & y \ge 0 \\ -\arccos\frac{x}{r}, & y < 0 \end{cases}$$

■

Beispiel. Fixieren wir ein $r > 0$ und betrachten die Parametrisierung

$$\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\varphi(t) = (r\cos t, r\sin t),$$

Da $|\varphi(t)| = r$, so liegt $\varphi(t)$ auf dem Kreis K von Radius r und Zentrum 0. Umgekehrt, es folgt aus dem Satz 10.7 dass jeder Punkt $z \in K$ die Form $z = (r\cos t, r\sin t)$ hat wobei (r, t) die Polarkoordinaten von z sind. Somit ist das Bild $\varphi([-\pi, \pi])$ gleich K. Da

$$\varphi' = (-r\sin t, r\cos t)$$

und

$$|\varphi'| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r,$$

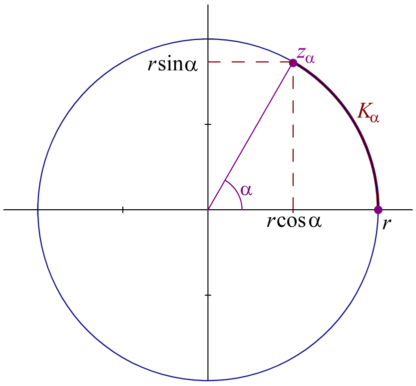
so erhalten wir

$$L(K, \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(t)|\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} r\, dt = 2\pi r.$$

Fixieren wir jetzt ein $\alpha \in (0, \pi]$ und betrachten die folgenden Parametrisierung

$$\varphi : [0, \alpha] \to \mathbb{R}^2$$
$$\varphi(t) = (r \cos t, r \sin t).$$

Das Bild $K_\alpha = \varphi([0, \alpha]) \subset K$ ist der *Kreisbogen* zwischen den Punkten $z_\alpha = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ und $z_0 = (r, 0)$ auf K.



Der Kreisbogen K_α von Radius r

Es folgt

$$L(K_\alpha, \varphi) = \int_0^\alpha |\varphi'(t)|\, dt = \int_0^\alpha r\, dt = \alpha r.$$

Funktionsgraphen als Kurven. Betrachten wir den Graph

$$G = \{(x, y) : x \in [\alpha, \beta],\ y = f(x)\}$$

einer Funktion $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Der Graph lässt sich betrachten als eine Kurve mit Parametrisierung

$$\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$$
$$\varphi(x) = (x, f(x))$$

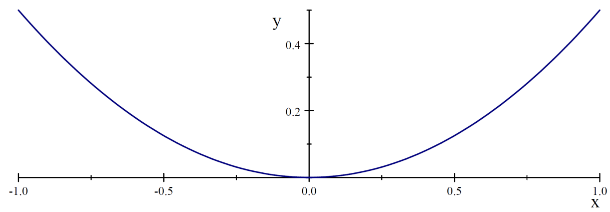
Ist f stetig differenzierbar, so erhalten wir

$$\varphi' = (1, f'(x)) \quad \text{und} \quad |\varphi'| = \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

woraus folgt

$$\boxed{L(G, \varphi) = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + f'(x)^2} dx}. \tag{10.16}$$

Beispiel. Berechnen wir die Länge der Parabel $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ auf $[-1,1]$.



Die Parabel

Nach (10.16) erhalten wir die Länge der Parabel:

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ &= \ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2} \approx 2,296, \end{aligned}$$

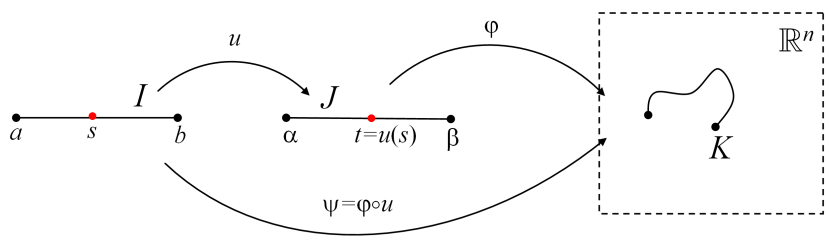
wobei wir benutzt haben dass

$$\sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

Unabhängigkeit der Länge von der Parametrisierung. Jetzt besprechen wir den Wechsel von Parameter einer Parametrisierung. Sei $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parametrisierung wobei $J = [\alpha, \beta]$. Sei $u : I \to J$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall $I = [a, b]$ so dass die Komposition

$$\psi := \varphi \circ u : I \to \mathbb{R}^n$$

wohldefiniert ist und auch eine stetig differenzierbare Parametrisierung ist.



Wenn u surjektiv ist, d.h. $u(I) = J$, dann bestimmen die Parametrisierungen φ und ψ dieselbe Kurve K, da

$$\psi(I) = (\varphi \circ u)(I) = \varphi(u(I)) = \varphi(J). \tag{10.17}$$

Somit erhalten wir eine Kurve K mit zwei Parametrisierungen φ und ψ, die zwei alternative Fahrpläne der Bewegung entlang der Kurve K darstellen. Der folgende Satz besagt, dass unter natürlichen Voraussetzungen die Längen $L(K,\varphi)$ und $L(K,\psi)$ übereinstimmen. In anderen Wörter, die Länge der Kurve ist unabhängig von dem Fahrplan.

Satz 10.8 *Sei $u : I \to J$ stetig differenzierbar, surjektiv und monoton. Dann bestimmen die Parametrisierungen*

$$\varphi : J \to \mathbb{R}^n \quad \textit{und} \quad \psi = \varphi \circ u : I \to \mathbb{R}^n$$

dieselbe Kurve $K = \varphi(J) = \psi(I)$, und die parametrisierten Kurven (K, φ) und (K, ψ) haben die gleichen Längen, d.h.

$$L(K, \varphi) = L(K, \psi). \tag{10.18}$$

Beweis. Die Identität $\psi(I) = \varphi(J)$ haben wir schon in (10.17) bewiesen.

Beweisen wir (10.18). Die Funktion u ist monoton steigend oder fallend. Sei u zunächst monoton steigend. Wie oben, seien $I = [a, b]$ und $J = [\alpha, \beta]$ wobei $\alpha < \beta$ und $a < b$. Da $u : I \to J$ monoton steigend und surjektiv ist, so erhalten wir

$$u(a) = \alpha \quad \text{und} \quad u(b) = \beta.$$

Für jedes $k = 1, ..., n$ haben wir nach der Kettenregel

$$\psi_k'(s) = (\varphi_k(u(s)))' = \varphi_k'(u(s))\, u'(s),$$

woraus folgt

$$\psi'(s) = \varphi'(u(s))\, u'(s)$$

und somit

$$|\psi'(s)| = |\varphi'(u(s))|\, |u'(s)| = |\varphi'(u(s))|\, u'(s),$$

wobei wir benutzt haben, dass $u'(s) \geq 0$ (da u monoton steigend ist).

Nach der Definition der Länge (10.14) und mit Hilfe von Substitution $t = u(s)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} L(K, \psi) &= \int_a^b |\psi'(s)|\, ds = \int_a^b |\varphi'(u(s))|\, u'(s)\, ds \\ &= \int_a^b |\varphi'(u(s))|\, du(s) \\ &= \int_{u(a)}^{u(b)} |\varphi'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\, dt = L(K, \varphi), \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Sei u monoton fallend. Dann gelten $u(a) = \beta$, $u(b) = \alpha$ und

$$|\psi'(s)| = |\varphi'(u(s))|\, |u'(s)| = -|\varphi'(u(s))|\, u'(s),$$

da $u'(s) \leq 0$. Es folgt dass

$$\begin{aligned} L(K, \psi) &= \int_a^b |\psi'(s)|\, ds = -\int_a^b |\varphi'(u(s))|\, u'(s)\, ds \\ &= -\int_a^b |\varphi'(u(s))|\, du(s) \\ &= -\int_{u(a)}^{u(b)} |\varphi'(t)|\, dt = \int_{u(b)}^{u(a)} |\varphi'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\, dt = L(K, \varphi), \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

23.05.2025 **Vorlesung 13**

10.6 Darboux-Integrierbarkeit

Ab diesem Abschnitt entwickeln wir eine Theorie von integrierbaren Funktionen die uns zu den Beweisen von den Sätzen 9.1 und 10.1 führt, d.h. zur Existenz von Stammfunktion einer stetigen Funktion und zur Integrierbarkeit von stetigen und monotonen Funktionen.

Um die Integrierbarkeit von Funktionen untersuchen zu können, brauchen wir den folgenden Begriff.

Definition. Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von $[a, b]$, definieren wir die *obere Darboux-Summe* von f und Z mit

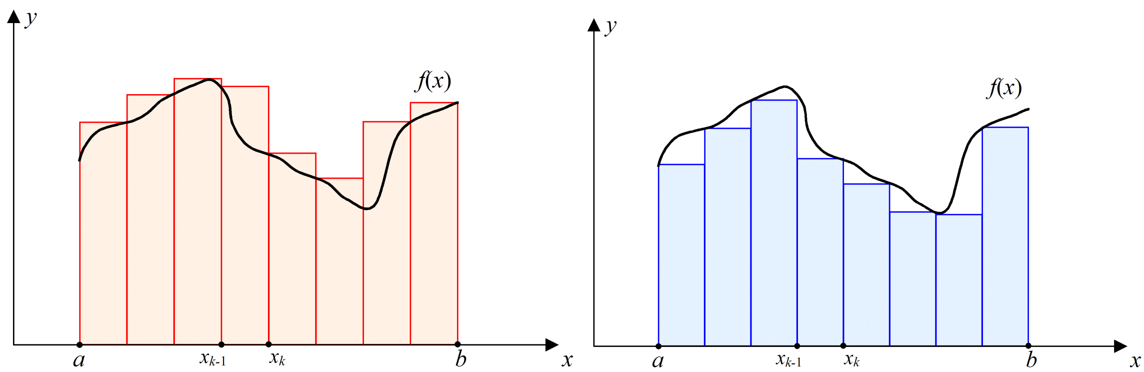
$$S^*(f, Z) = \sum_{k=1}^n \Big(\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \Big) \Delta x_k$$

und die *untere Darboux-Summe* mit

$$S_*(f, Z) = \sum_{k=1}^n \Big(\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \Big) \Delta x_k.$$

Bemerken wir, dass man für die Darboux-Summen keine Zwischenstellen braucht und dass $S^*(f, Z) \in (-\infty, +\infty]$ und $S_*(f, Z) \in [-\infty, +\infty)$.

Sei $f \geq 0$. Die obere Summe $S^*(f, Z)$ ist dann die Summe der Flächeninhalte von Rechtecken, die den Untergraph U_f von f überdecken, und die untere Summe $S_*(f, Z)$ ist gleich die Summe der Flächeninhalte von Rechtecken, die im U_f enthalten werden.



Obere Darboux-Summe Untere Darboux-Summe

Sei $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$ eine Folge von Zwischenstellen von Z. Da $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ so gilt

$$\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \leq f(\xi_k) \leq \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f,$$

woraus folgt dass

$$S_*(f, Z) \leq S(f, Z, \xi) \leq S^*(f, Z). \tag{10.19}$$

Definition. Eine reellwertige Funktion f auf $[a,b]$ heißt *Darboux-integrierbar* wenn

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0}\left(S^*(f,Z)-S_*(f,Z)\right)=0, \tag{10.20}$$

d.h.

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall Z\ \text{ mit }\ \varphi(Z)<\delta\ \text{ gilt }\ \left|S^*(f,Z)-S_*(f,Z)\right|<\varepsilon.$$

Die Differenz $S^*(f,Z)-S_*(f,Z)$ heißt *Darboux-Differenz*. Sie ist wohldefiniert da $S^*(f,Z)$ und $S_*(f,Z)$ nicht gleichzeitig $+\infty$ oder $-\infty$ sein können.

Beispiel. Für die Dirichlet-Funktion (10.5) gilt auf jedem Intervall $[x_{k-1},x_k]$

$$\sup_{[x_{k-1},x_k]} f=1\ \text{ und }\ \inf_{[x_{k-1},x_k]} f=0$$

woraus folgt

$$S^*(f,Z)=b-a\quad\text{und}\quad S_*(f,Z)=0.$$

Die Bedingung (10.20) ist somit nicht erfüllt und f ist nicht Darboux-integrierbar.

Hauptsatz 10.9 (Darboux-Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit) *Sei f eine reellwertige Funktion auf $[a,b]$. Die folgenden drei Eigenschaften sind äquivalent:*

(a) *Funktion f ist Riemann-integrierbar.*

(b) *Funktion f ist Darboux-integrierbar.*

(c) *Die Grenzwerte $\lim_{\varphi(Z)\to 0}S_*(f,Z)$ und $\lim_{\varphi(Z)\to 0}S^*(f,Z)$ existieren (in $\mathbb{R}$) und sind gleich.*

Darüber hinaus gelten unter jeder von den Bedingungen $(a),(b),(c)$ die Identitäten:

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0}S^*(f,Z)=\lim_{\varphi(Z)\to 0}S_*(f,Z)=\int_a^b f(x)\,dx=\sup_Z S_*(f,Z)=\inf_Z S^*(f,Z). \tag{10.21}$$

Definition. Eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt *integrierbar* auf $[a,b]$ wenn f eine ($\Leftrightarrow$jede) von den Bedingungen $(a),(b),(c)$ erfüllt.

Beweis. Wir bewiesen die Implikationen

$$(a)\Rightarrow(c)\Rightarrow(b)\Rightarrow(a).$$

Beweis von $(a)\Rightarrow(c)$. Sei $Z=\{x_k\}_{k=0}^n$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Zunächst zeigen wir, dass

$$\sup_\xi S(f,Z,\xi)=S^*(f,Z), \tag{10.22}$$

wobei das Supremum über alle Folgen von Zwischenstellen $\xi=\{\xi_k\}_{k=1}^n$ genommen wird. Da $S(f,Z,\xi)\le S^*(f,Z)$ so reicht es zu beweisen dass mit der Wahl von ξ die Riemann-Summe $S(f,Z,\xi)$ beliebig nah zu $S^*(f,Z)$ gemacht werden kann. Dafür setzen wir

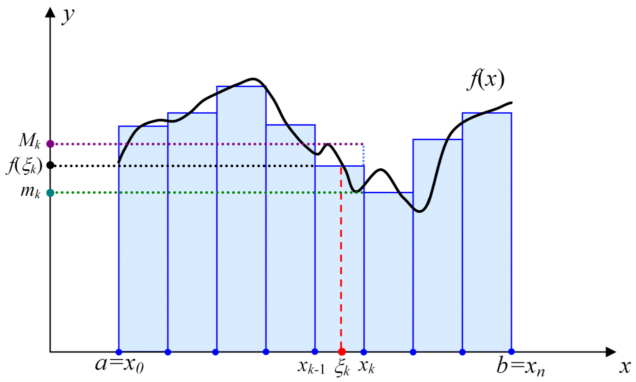
$$M_k=\sup_{\xi\in[x_{k-1},x_k]} f(\xi)$$

so dass

$$S^*(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

und fixieren ein $\varepsilon > 0$. Für jedes k kann eine Zwischenstelle $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ so gewählt werden, dass

$$f(\xi_k) > M_k - \varepsilon.$$



Es folgt dass

$$\begin{aligned} S(f,Z,\xi) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} (M_k - \varepsilon)\,\Delta x_k \\ &= S^*(f,Z) - \varepsilon\,(b-a)\,. \end{aligned}$$

Da ε beliebig ist, so (10.22) folgt. Ebenso gilt

$$\inf_{\xi} S\,(f,Z,\xi) = S_*\,(f,Z)\,. \tag{10.23}$$

Setzen wir

$$A := \int_a^b f\,(x)\,dx = \lim_{\varphi(Z)\to 0} S\,(f,Z,\xi)\,.$$

Nach Definition des Limes haben wir: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.d. $\forall Z$ mit $\varphi\,(Z) < \delta$ und $\forall \xi$ gilt

$$A - \varepsilon < S\,(f,Z,\xi) < A + \varepsilon. \tag{10.24}$$

Nehmen wir heir das Supremum über alle ξ und erhalten mit Hilfe von (10.22) dass

$$A - \varepsilon \leq S^*\,(f,Z) \leq A + \varepsilon.$$

Genau so folgt es aus (10.24) und (10.23) das

$$A - \varepsilon \leq S_*\,(f,Z) \leq A + \varepsilon$$

so dass $\lim\limits_{\varphi(Z)\to 0} S^*\,(f,Z) = \lim\limits_{\varphi(Z)\to 0} S_*\,(f,Z) = A$, was die Aussage (c) beweist.

Beweis von $(c) \Rightarrow (b)$. Diese Implikation ist trivial: gilt

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S_*(f,Z) = \lim_{\varphi(Z)\to 0} S^*(f,Z),$$

so gilt auch

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} \left(S^*(f,Z) - S_*(f,Z)\right) = 0.$$

Beweis von $(b) \Rightarrow (a)$. Betrachten wir zwei Zerlegungen $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ und $Z' = \{y_i\}_{i=0}^N$ von $[a,b]$. Man sagt dass Z eine *Verfeinerung* von Z' ist und schreibt $Z' \subset Z$ wenn Z' als Menge eine Teilmenge von Z ist, d.h. wenn $\{y_i\} \subset \{x_k\}$.

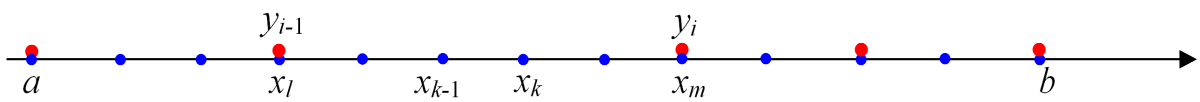
Behauptung 1. *Für $Z' \subset Z$ gelten die Ungleichungen*

$$S_*(f,Z') \le S_*(f,Z) \le S^*(f,Z) \le S^*(f,Z'). \tag{10.25}$$

Die mittlere Ungleichung ist bereits bekannt. Die linke Ungleichung besagt, dass die untere Darboux-Summe nach der Verfeinerung steigt, und die rechte Ungleichung besagt, dass die obere Darboux-Summe nach der Verfeinerung fällt. Es folgt, dass die obere und untere Darboux-Summen nach der Verfeinerung näher beieinander liegen.

Wir beweisen die linke Ungleichung in (10.21) (und die rechte Ungleichung ist analog). Da $Z' \subset Z$, jedes Intervall $[y_{i-1}, y_i]$ von Z' stimmt mit einem Intervall $[x_l, x_m]$ überein so dass

$$y_{i-1} = x_l < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_m = y_i.$$



Daraus folgt, dass

$$y_i - y_{i-1} = \sum_{k=l+1}^{m} (x_k - x_{k-1})$$

und somit

$$\begin{aligned}\left(\inf_{[y_{i-1},y_i]} f\right)(y_i - y_{i-1}) &= \sum_{k=l+1}^{m} \left(\inf_{[y_{i-1},y_i]} f\right)(x_k - x_{k-1}) \\ &\le \sum_{k=l+1}^{m} \left(\inf_{[x_{k-1},x_k]} f\right)(x_k - x_{k-1}).\end{aligned}$$

Addieren diese Ungleichungen für alle i ergibt $S_*(f,Z') \le S_*(f,Z)$, was zu beweisen war.

Behauptung 2. *Für zwei beliebige Zerlegungen Z' und Z'' von $[a,b]$ gilt*

$$S_*(f,Z') \le S^*(f,Z''). \tag{10.26}$$

Betrachten wir die Vereinigung $Z = Z' \cup Z''$, die auch eine Zerlegung von $[a, b]$ ist. Offensichtlich ist Z eine Verfeinerung von Z' und Z''. Da $Z' \subset Z$ und $Z'' \subset Z$, so erhalten wir nach Behauptung 1, dass

$$S_* (f, Z') \le S_* (f, Z) \le S^* (f, Z) \le S^* (f, Z'') ,$$

woraus (10.26) folgt.

Jetzt können wir beweisen, dass eine Darboux-integrierbare Funktion f auch Riemann-integrierbar ist. Setzen wir

$$A = \sup_Z S_* (f, Z) \quad \text{und} \quad B = \inf_Z S^* (f, Z) . \tag{10.27}$$

Es folgt aus der Behauptung 2, dass

$$A \le B. \tag{10.28}$$

Nach (10.27) und (10.28) gilt für jede Zerlegung Z

$$S_* (f, Z) \le A \le B \le S^* (f, Z) . \tag{10.29}$$

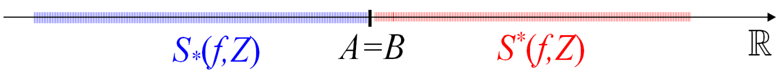
Nach der Darboux-Integrierbarkeit haben wir

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} (S^* (f, Z) - S_* (f, Z)) \to 0. \tag{10.30}$$

Da nach (10.29) gilt

$$0 \le B - A \le S^* (f, Z) - S_* (f, Z) ,$$

so folgt es aus (10.30) dass $A = B$.



Nach (10.29) gilt auch

$$0 \le S^* (f, Z) - A \le S^* (f, Z) - S_* (f, Z) ,$$

woraus folgt

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S^*(f, Z) = A \tag{10.31}$$

und analog

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S_*(f, Z) = A. \tag{10.32}$$

Für jede Folge ξ von Zwischenstellen von Z haben wir nach (10.19)

$$S_*(f, Z) \le S(f, Z, \xi) \le S^*(f, Z),$$

woraus folgt dass auch

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S (f, Z, \xi) = A. \tag{10.33}$$

Somit ist f Riemann-integrierbar und $A = \int_a^b f(x)dx$.

Alle Identitäten in (10.21) gelten nach (10.27), (10.31), (10.32) und (10.33). ■

Korollar 10.10 (Notwendige Bedingung für Integrierbarkeit) *Ist eine Funktion f auf $[a,b]$ integrierbar, so ist f auf $[a,b]$ beschränkt.*

Beweis. Wir beweisen folgendes: ist f auf $[a,b]$ unbeschränkt, d.h. $\sup_{[a,b]}|f| = \infty$ so ist f nicht Darboux-integrierbar. Für unbeschränkte Funktion f gilt

$$\sup_{[a,b]} f = +\infty \quad \text{oder} \quad \inf_{[a,b]} f = -\infty.$$

Nehmen wir an dass $\sup_{[a,b]} f = +\infty$ (der zweite Fall ist analog). Für jede Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von $[a,b]$ gibt es ein Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ wo

$$\sup_{[x_{k-1},x_k]} f = +\infty$$

woraus folgt

$$S^*(f,Z) = +\infty.$$

Da immer $S_*(f,Z) < +\infty$, so erhalten wir

$$S^*(f,Z) - S_*(f,Z) = +\infty,$$

woraus folgt, dass f nicht Darboux-integrierbar ist, was zu beweisen war. ∎

28.05.2025 Vorlesung 14

10.7 Integrierbarkeit von stetigen und monotonen Funktionen

Hier beweisen wir den Satz 10.1:

(a) Jede stetige Funktion $f(x)$ auf $[a,b]$ ist auf diesem Intervall Riemann-integrierbar.

(b) Jede monotone Funktion $f(x)$ auf $[a,b]$ ist auf diesem Intervall Riemann-integrierbar.

Für dem Beweis von (a) brauchen wir den Begriff von *gleichmäßiger Stetigkeit.*

Definition. Eine Funktion f auf einem Intervall J heißt *gleichmäßig* stetig auf J wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x, y \in J \;\; \text{mit} \;\; |x-y| < \delta \text{ gilt } \; |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{10.34}$$

Vergleichen wir (10.34) mit der Definition von Stetigkeit von f an einer Stelle $x \in J$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad \forall y \in J \;\; \text{mit} \;\; |x-y| < \delta \text{ gilt } \; |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{10.35}$$

In (10.35) hängt δ von x ab, wobei in (10.34) δ gleich für alle x ist, was das Wort “gleichmäßig” erklärt.

Offensichtlich ist jede gleichmäßig stetige Funktion auch stetig an allen Stellen $x \in J$, aber die Umkehrung gilt es nicht immer: eine Funktion kann stetig an allen Stellen $x \in J$ sein, aber nicht gleichmäßig stetig auf J.

Beispiel. Die Funktion $f(x) = x^2$ ist gleichmäßig stetig auf dem Intervall $[1, 2]$ da

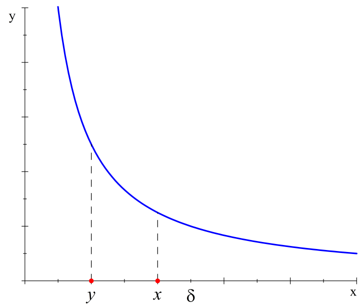
$$\left|x^2 - y^2\right| = |x + y|\,|x - y| \leq 4\,|x - y|$$

und man in (10.34) $\delta = \varepsilon/4$ wählen kann: $|x - y| < \varepsilon/4$ impliziert $|x^2 - y^2| < \varepsilon$.

Beispiel. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig auf $(0, 1]$ aber nicht gleichmäßig stetig auf J ist. Die Negation von (10.34) ist die folgende Aussage:

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x, y \in J \;\; \text{mit} \;\; |x - y| < \delta \;\; \text{und} \;\; |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon. \tag{10.36}$$

Um (10.36) für $f(x) = \frac{1}{x}$ zu beweisen, setzen wir $\varepsilon = 1$ und, für jedes $\delta > 0$, wählen wir ein $x \in (0, 1]$ so dass $x < \delta$, und setzen $y = x/2$.



Dann gilt $|x - y| < \delta$, aber

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\right| = \frac{1}{x} \geq 1 = \varepsilon,$$

d.h. (10.36) ist erfüllt.

Lemma 10.11 (Gleichmäßige Stetigkeit) *Sei J ein beschränktes abgeschlossenes Intervall. Dann jede stetige Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig auf J.*

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an, dass f auf J nicht gleichmäßig stetig ist, d.h. (10.36) mit ein $\varepsilon > 0$ erfüllt ist. Wählen wir $\delta = \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und somit bekommen nach (10.36) ein Paar $x_n, y_n \in J$ mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \tag{10.37}$$

und

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon. \tag{10.38}$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 4.8) hat die Folge $\{x_n\}$ eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}$:

$$x_{n_k} \to x \in J \;\; \text{für } k \to \infty.$$

Nach (10.37) gilt auch $y_{n_k} \to x$. Nach der Stetigkeit von f in x erhalten wir

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}),$$

was im Widerspruch zu (10.38) steht. ■

Beweis von Satz 10.1(a)**.** Sei f eine stetige Funktion auf $[a, b]$. Um zu beweisen, dass f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar ist, reicht es zu beweisen, dass f Darboux-integrierbar ist (Satz 10.9), d.h.

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0}\left(S^*(f, Z) - S_*(f, Z)\right) = 0$$

wobei Z eine Zerlegung von $[a.b]$ ist.

Nach Lemma 10.11 ist die Funktion f gleichmäßig stetig auf $[a, b]$, d.h. die Bedingung (10.34) ist erfüllt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x, y \in J \ \ \text{mit} \ \ |x - y| < \delta \ \ \text{gilt} \ \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{10.39}$$

Fixieren wir ein $\varepsilon > 0$, wählen $\delta > 0$ wie in (10.39), und betrachten eine beliebige Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von $[a, b]$ mit $\varphi(Z) < \delta$.

Für jedes Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ und für alle $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ gilt $|x - y| < \delta$. Nach (10.39) erhalten wir

$$f(x) - f(y) < \varepsilon,$$

woraus folgt, dass

$$\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) - \inf_{y\in[x_{k-1},x_k]} f(y) \le \varepsilon.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
S^*(f, Z) - S_*(f, Z) &= \sum_{k=1}^n \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \ \Delta x_k - \sum_{k=1}^n \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \ \Delta x_k \\
&= \sum_{k=1}^n \Big(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f - \inf_{[x_{k-1},x_k]} f\Big)\Delta x_k \\
&\le \sum_{k=1}^n \varepsilon \, \Delta x_k = \varepsilon (b - a).
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon(b - a)$ beliebig klein sein kann, so erhalten wir

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0}\left(S^*(f, Z) - S_*(f, Z)\right) = 0,$$

was zu beweisen war. ■

Beweis von Satz 10.1(b)**.** Sei f eine monoton steigende Funktion auf $[a, b]$ (der Fall von fallenden Funktionen ist analog). Für jede Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von $[a, b]$ gilt

$$\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = f(x_k) \quad \text{und} \quad \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = f(x_{k-1})$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
S^*(f, Z) - S_*(f, Z) &= \sum_{k=1}^n \left(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f - \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \right) \Delta x_k \\
&= \sum_{k=1}^n \left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right) \Delta x_k
\end{aligned}$$

$$\leq \max_{1\leq k\leq k} \Delta x_k \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(x_k\right) - f\left(x_{k-1}\right)\right)$$
$$= \varphi\left(Z\right)\left(f\left(b\right) - f\left(a\right)\right).$$

Somit erhalten wir

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} \left(S^*\left(f, Z\right) - S_*\left(f, Z\right)\right) = 0,$$

woraus die Integrierbarkeit von f folgt. ■

Unser nächstes Ziel ist die Existenz von Stammfunktionen stetiger Funktionen. Dazu besprechen wir zunächst die Ungleichungen von Integralen und Additivität.

10.8 Integration und Ungleichungen

Wir besprechen hier Ungleichungen zwischen Integralen.

Satz 10.12 *Seien f und g integrierbare Funktionen auch einem Intervall $[a, b]$, $a < b$.*

(a) (Monotonie) *Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ so gilt auch*

$$\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx. \tag{10.40}$$

(b) (LM-Ungleichung) *Es gilt*

$$(b - a) \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b - a) \sup_{[a,b]} f. \tag{10.41}$$

Beweis. (a) Für die Riemann-Summen haben wir

$$S\left(f, Z, \xi\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} g\left(\xi_k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right) = S\left(g, Z, \xi\right).$$

Für $\varphi\left(Z\right) \to 0$ erhalten wir (10.40).

(b) Setzen wir $M = \sup_{[a,b]} f$ und $L = b - a$. Dann gilt $f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$, und nach (a) erhalten wir

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx = M\left(b - a\right) = LM,$$

was die rechte Ungleichung in (10.41) beweist und die Bezeichnung *LM-Ungleichung* erklärt (*Länge mal Maximum*). Die linke Ungleichung in (10.41) wird analog bewiesen. ■

Insbesondere erhalten wir aus (10.40):

$$f \leq 0 \;\Rightarrow \int_a^b f dx \leq 0 \quad \text{und} \quad f \geq 0 \;\Rightarrow \int_a^b f dx \geq 0.$$

Korollar 10.13 *Ist f stetig auf $[a,b]$, $a<b$, dann gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{10.42}$$

Beweis. Bemerken wir dass $|f|$ auch stetig ist so dass die beiden Integrale in (10.42) existieren. Da für alle $x \in [a,b]$ gilt

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|\,,$$

so folgt es aus dem Satz 10.12 dass

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx,$$

was äquivalent zu (10.42) ist ∎

Bemerkung. Die Ungleichung (10.42) gilt auch für jede integrierbare Funktion f auf $[a,b]$. Dafür muss man zunächst beweisen, dass die Funktion $|f|$ auch integrierbar ist (siehe Aufgaben).

Satz 10.14 (Mittelwertsatz für Integration) *Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a,b]$. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)\,. \tag{10.43}$$

Beweis. Setzen wir

$$m = \inf_{[a,b]} f \quad \text{und} \quad M = \sup_{[a,b]} f\ .$$

Nach Korollar 6.14 (Folgerung von dem Extremwertsatz und Zwischenwertsatz) haben wir $f([a,b]) = [m,M]$. Da nach (10.41)

$$m(b-a) \leq \int_a^b f dx \leq M(b-a)$$

und somit

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f dx \leq M,$$

so gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f dx,$$

was äquivalent zu (10.43) ist. ∎

10.9 Additivität von Integral

Ein Intervall I heißt *kompakt* wenn es abgeschlossen und beschränkt ist, d.h. wenn $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Definition. Eine Funktion f auf einem Intervall J heißt *lokal integrierbar* wenn f auf jedem kompakten Teilintervall von J integrierbar ist.

Zum Beispiel, alle stetige und monotone Funktionen auf J sind lokal integrierbar. Man kann auch folgendes beweisen (siehe Aufgaben).

- Ist f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar so ist f auf $[a, b]$ auch lokal integrierbar.
- Ist f auf $[a, b]$ beschränkt und auf (a, b) lokal integrierbar so ist f auf $[a, b]$ integrierbar.

Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem Intervall J. Dann für alle $a, b \in J$ mit $a < b$ ist das Integral $\int_a^b f(x)dx$ wohldefiniert (da f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar ist). Erinnern wir uns an die Definition von $\int_a^b f(x)dx$ für den Fall $a \geq b$.

Definition. Seien $a, b \in J$. Im Fall $a > b$ setzen wir

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx, \tag{10.44}$$

und im Fall $a = b$:

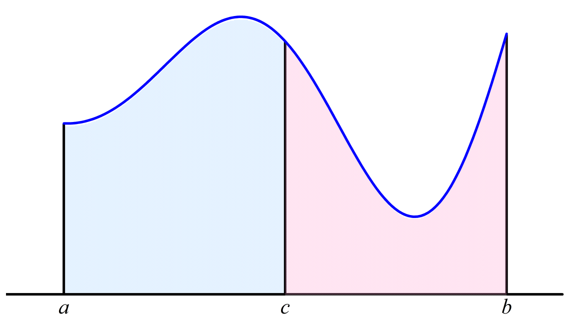
$$\int_a^a f(x)dx := 0. \tag{10.45}$$

Satz 10.15 (Additivität) *Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem Intervall J. Dann für alle $a, b, c \in J$ gilt die Identität*

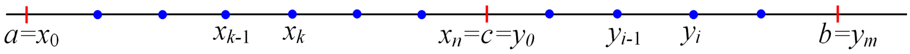
$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx. \tag{10.46}$$

Bemerken wir dass alle Integrale in (10.46) wohldefiniert nach der lokalen Integrierbarkeit von f.

Insbesondere im Fall $f \geq 0$ und $a < c < b$ bedeutet (10.46) die Additivität von dem Flächeninhalt des Untergraphes von f bezüglich waagerechter Teilung.



Beweis. Betrachten wir zunächst den Fall $a < c < b$. Seien $X = \{x_k\}_{k=0}^n$ und $Y = \{y_i\}_{i=0}^m$ beliebige Zerlegungen von $[a, c]$ bzw $[c, b]$.



Dann ist $Z = X \cup Y$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Es gilt

$$\varphi(Z) = \max(\varphi(X), \varphi(Y))$$

woraus folgt dass

$$\varphi(X) \to 0 \text{ und } \varphi(Y) \to 0 \Leftrightarrow \varphi(Z) \to 0.$$

Offensichtlich gilt die Identitäten

$$S^*(f, Z) = S^*(f, X) + S^*(f, Y) \tag{10.47}$$

Für $\varphi(X) \to 0$ und $\varphi(Y) \to 0$ erhalten wir aus (10.21) und (10.47)

$$\begin{aligned} \int_a^c f dx + \int_c^b f dx &= \lim_{\varphi(X)\to 0} S^*(f, X) + \lim_{\varphi(Y)\to 0} S^*(f, Y) \\ &= \lim_{\varphi(Z)\to 0} S^*(f, Z) \\ &= \int_a^b f dx, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Betrachten wir jetzt allgemeine $a, b, c \in J$. Für $a = b$ ist (10.46) äquivalent zu

$$0 = \int_a^c f dx + \int_c^a f dx,$$

was nach (10.44) gilt. Seien jetzt a, b, c verschieden. Dann gibt es 6 Fälle wie folgt :

1. $a < c < b$
2. $a < b < c$
3. $b < a < c$
4. $b < c < a$
5. $c < a < b$
6. $c < b < a$

Im Fall $a < c < b$ haben wir (10.46) schon bewiesen. Im Fall $a < b < c$ haben wir nach dem 1. Fall

$$\int_a^c f dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx,$$

woraus folgt

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx - \int_b^c f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx.$$

Die anderen Fälle werden analog betrachtet. ∎

Bemerkung. Hat f eine Stammfunktion F auf $[a, b]$ so kann man (10.46) sehr einfach wie folgt beweisen:

$$\begin{aligned}\int_a^b f dx &= F(b) - F(a) \\ &= (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) \\ &= \int_a^c f dx + \int_c^b f dx.\end{aligned}$$

Allerdings wird die Additivität verwendet um die Existenz der Stammfunktion von stetigen Funktionen zu beweisen.

10.10 Fundamentalsatz der Analysis, 2

Hauptsatz 10.16 (Fundamentalsatz der Analysis: Existenz der Stammfunktion) *Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Für jedes $c \in J$ ist die Funktion*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt, \quad x \in J, \tag{10.48}$$

eine Stammfunktion von f auf J. Insbesondere hat jede stetige Funktion eine Stammfunktion.

Somit ist auch der Satz 9.1 bewiesen.

Beweis. Da f stetig ist, so ist das Integral in (10.48) für alle $x, c \in J$ wohldefiniert. Wir müssen beweisen, dass $F'(x) = f(x)$ für jedes $x \in J$, d.h.

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(x). \tag{10.49}$$

Nach der Additivität des Integrals gilt folgendes:

$$\begin{aligned}F(y) - F(x) &= \int_c^y f(t)\, dt - \int_c^x f(t)\, dt \\ &= \int_x^c f(t)\, dt + \int_c^y f(t)\, dt = \int_x^y f(t)\, dt.\end{aligned}$$

Ist $y > x$ so gibt es nach dem Satz 10.14 (Mittelwertsatz für Integration) ein $\xi \in [x, y]$ mit

$$\int_x^y f(t)\, dt = f(\xi)(y - x). \tag{10.50}$$

Ist $y < x$ so gibt es analog ein $\xi \in [y, x]$ mit

$$\int_y^x f(t)\, dt = f(\xi)(x - y),$$

was wieder äquivalent zu (10.50) ist. In den beiden Fällen erhalten wir ein $\xi = \xi(y)$ zwischen x und y mit (10.50), woraus folgt

$$F(y) - F(x) = f(\xi)(y - x)$$

und somit

$$\frac{F(y)-F(x)}{y-x}=f(\xi).$$

Fixieren wir eine beliebige Folge $\{y_n\}\in J\setminus\{x\}$ mit $y_n\to x$. Der entsprechende Punkt $\xi_n=\xi(y_n)$ liegt zwischen x und y_n so dass $\xi_n\to x$. Es folgt aus der Stetigkeit von f, dass

$$\frac{F(y_n)-F(x)}{y_n-x}=f(\xi_n)\to f(x),$$

woraus (10.49) folgt. ∎

Die Sätze 10.2 (die Newton-Leibniz-Formel) und 10.16 ergeben zusammen folgendes.

Korollar 10.17 (Fundamentalsatz der Analysis I+II) *Für jede stetige Funktion f auf dem Intervall $[a,b]$ existiert eine Stammfunktion F auf $[a,b]$ und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

10.11 Taylorformel mit Integralrestglied

Hauptsatz 10.18 *Sei f eine $(n+1)$-fach stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall J, wobei $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Dann gilt für alle $a,x\in J$ die Identität*

$$f(x)=T_n(x)+\int_a^x\frac{f^{(n+1)}(y)(x-y)^n}{n!}dy,\tag{10.51}$$

wobei $T_n(x)$ das Taylor-Polynom von f an der Stelle a ist, d.h. ,

$$T_n(x)=f(a)+f'(a)\frac{(x-a)}{1!}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+...+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Bemerkung. Nach (10.51) lässt sich das Restglied

$$R_n(x)=f(x)-T_n(x)$$

in der Integralform darstellen:

$$R_n(x)=\int_a^x\frac{f^{(n+1)}(y)(x-y)^n}{n!}dy.\tag{10.52}$$

Die Taylorformel mit Lagrange-Restglied (Satz 8.20) ergibt in diesem Fall

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\tag{10.53}$$

wobei c ein Mittelpunkt zwischen a und x ist Die Identität (10.53) lässt sich aus (10.52) herleiten da

$$\int_a^x\frac{f^{(n+1)}(y)(x-y)^n}{n!}dy=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

für ein c zwischen a und x (Aufgabe 92).

30.05.2025 Vorlesung 15

Beweis. Wir beweisen (10.51) per Induktion nach n.

Induktionsanfang für $n = 0$. In diesem Fall gilt $T_0(x) = f(a)$, und (10.51) sieht wie folgt aus:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)\,dy,$$

was nach der Newton-Leibniz-Formel gilt da f eine Stammfunktion von f' ist.

Induktionsschritt von $n-1$ nach n. Nach der Induktionsvoraussetzung haben wir die Identität

$$f(x) = T_{n-1}(x) + \int_a^x \frac{f^{(n)}(y)\,(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}dy. \tag{10.54}$$

In der rechten Seite verwenden wir die partielle Integration. Dafür bemerken wir zunächst, dass bezüglich der Variable y

$$d\,(x-y)^n = -n\,(x-y)^{n-1}\,dy.$$

Dividieren durch $n!$ ergibt

$$d\frac{(x-y)^n}{n!} = -\frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}dy.$$

Einsetzen in die rechte Seite von (10.54) und Anwendung von partiellen Integration (10.10) mit

$$u(y) = f^{(n)}(y) \quad \text{und} \quad v(y) = \frac{(x-y)^n}{n!}$$

ergibt

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{f^{(n)}(y)\,(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}dy &= -\int_a^x f^{(n)}(y)\; d\frac{(x-y)^n}{n!}\\ &= -\left[f^{(n)}(y)\,\frac{(x-y)^n}{n!}\right]_{y=a}^{y=x} + \int_a^x \frac{(x-y)^n}{n!}f^{(n+1)}(y)\,dy\\ &= f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x \frac{(x-y)^n}{n!}f^{(n+1)}(y)\,dy.\end{aligned}$$

Somit gilt die Identität

$$f(x) = T_{n-1}(x) + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x \frac{(x-y)^n}{n!}f^{(n+1)}(y)\,dy.$$

Da

$$T_{n-1}(x) + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} = T_n(x),$$

so erhalten wir daraus (10.51). ■

10.12 Uneigentliches Integral

Wir haben das Riemann-Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ für Funktionen auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall $[a,b]$ definiert. In diesem Abschnitt wird diese Definition auf anderen Typen von Intervallen erweitert insbesondere wenn f auf einem rechtsoffenen Intervall $[a,b)$ definiert ist. In diesem Fall kann das Intervall unbeschränkt sein, d.h. $b=+\infty$, oder Funktion f kann unbeschränkt sein auch wenn f stetig ist.

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem rechtsoffenen Intervall $[a,b)$ mit $-\infty<a<b\leq+\infty$. Dann definieren wir das *uneigentliche* Integral von f auf $[a,b)$ mit

$$\int_a^{b-} f(x)\,dx := \lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,dx, \tag{10.55}$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert. Die Notation $c\to b-$ bedeutet $c\to b$ und $c<b$.

Da $[a,c]$ ein kompaktes Teilintervall von $[a,b)$ ist und f auf $[a,b)$ lokal integrierbar ist, so f ist auf $[a,c]$ Riemann-integrierbar und das Integral $\int_a^c f(x)\,dx$ ist wohldefiniert.

Ist der Grenzwert in (10.55) endlich, so sagt man, dass das Integral $\int_a^{b-} f(x)\,dx$ an der Grenze b konvergiert. Ist der Grenzwert in (10.55) unendlich, so sagt man, dass das Integral an der Grenze b bestimmt divergiert. Existiert der Grenzwert nicht, so sagt man, dass das Integral an der Grenze b unbestimmt divergiert. Im letzten Fall ist der Wert des Ausdrucks $\int_a^{b-} f(x)\,dx$ nicht definiert.

Die Grenze b für das uneigentliche Integral in (10.55) heißt *kritisch*.

Ist f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar, so ist f auch local integrierbar und das uneigentliche Integral $\int_a^{b-} f(x)dx$ stimmt mit dem Riemann-Integral $\int_a^b f(x)dx$ überein (siehe Aufgabe 109).

Das Riemann-Integral wird auch als *eigentliches* Integral bezeichnet um es vom uneigentlichen Integral zu unterscheiden.

Wenn das uneigentliche Integral (10.55) existiert (konvergiert oder bestimmt divergiert) so benutzt man für das uneigentliche Integral die folgende Schreibweise:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{b-} f(x)\,dx, \tag{10.56}$$

ohne explizite Kennzeichnung der kritischen Grenze b.

Beispiel. Zum Beispiel, im Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ auf dem Intervall $[0,1)$ definiert so dass 1 die kritische Grenze ist und dieses Integral als uneigentliches verstanden werden muss.

Im Integral

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$$

ist der Definitionsbereich $[1, +\infty)$ so dass $+\infty$ eine kritische Grenze ist (die Unendlichkeit ist immer eine kritische Grenze).

Man kann beweisen dass für *nichtnegative* lokal integrierbare Funktion f das uneigentliche Integral (10.56) immer existiert, d.h. konvergiert oder bestimmt divergiert (siehe unterhalb). In diesem Fall definiert man den Flächeninhalt des Untergraphes U_f der Funktion f auf $[a, b)$ mit

$$F(U_f) = \int_a^b f(x)dx$$

so dass $F(U_f) \in [0, +\infty]$.

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem linksoffenen Intervall $(a, b]$ mit $-\infty \le a < b < +\infty$. Dann definieren wir das uneigentliche Integral mit

$$\int_{a+}^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx, \tag{10.57}$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert. Die Notation $c \to a+$ bedeutet $c \to a$ und $c > a$. Die Grenze a für das uneigentliche Integral (10.57) heißt kritisch.

Man definiert analog die Begriffe von Konvergenz, bestimmte Divergenz und unbestimmte Divergenz, und benutzt die einfachere Notation

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+}^b f(x)\,dx.$$

Die Eigenschaften von Riemann-Integral lassen sich auf uneigentliche Integrale verallgemeinern. Erweitern wir zunächst die Notation $[F]_a^b$ auf den Fall wenn F auf $[a, b)$ definiert ist wie folgt:

$$[F]_a^b = [F]_a^{b-} = F(b-) - F(a), \tag{10.58}$$

wobei

$$F(b-) = \lim_{x\to b-} F(x),$$

vorausgesetzt, dass der Limes existiert, endlich oder unendlich. In diesem Fall ist $[F]_a^b$ wohldefiniert.

Ist F auf $(a, b]$ definiert, so setzen wir analog

$$[F]_a^b = [F]_{a+}^b = F(b) - F(a+)$$

wobei

$$F(a+) = \lim_{x\to a+} F(x).$$

Satz 10.19 (Newton-Leibniz-Formel für uneigentliches Integral) *Sei $f(x)$ eine lokal integrierbare Funktion auf einem halboffenen Intervall $J = [a, b)$ oder $J = (a, b]$. Sei F eine Stammfunktion von f auf J. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F]_a^b,$$

vorausgesetzt, dass die rechte Seite wohldefiniert ist.

Beweis. Betrachten wir den Fall $J = [a, b)$. Nach Definition von dem uneigentlichen Integral und Newton-Leibniz-Formel für eigentliches Integral gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^{b-} f(x)\,dx \\ &= \lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,dx \\ &= \lim_{c\to b-}\left(F(c) - F(a)\right) \\ &= F(b-) - F(a) = [F]_a^b\,.\end{aligned}$$

Der Fall $J = (a, b]$ ist analog. ■

Auch Linearität, partielle Integration und Substitution gelten für uneigentliches Integral.

Beispiel. 1. Bestimmen wir das uneigentliche $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ wobei die kritische Grenze 1 ist. Mit Hilfe von Newton-Leibniz-Formel erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]_0^1 = [\arcsin x]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Somit ist das Integral konvergent.

2. Betrachten wir das uneigentliche Integral $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ mit der kritischen Grenze $+\infty$. Es gilt

$$\int_0^{+\infty} \sin x\,dx = -\left[\cos x\right]_0^{+\infty} = -\lim_{x\to+\infty}\cos x + 1.$$

Allerdings existiert der Grenzwert $\lim_{x\to\infty}\cos x$ nicht. Somit beschließen wir, dass $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ unbestimmt divergiert und keinen Wert hat.

3. Bestimmen wir das uneigentliche Integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, wobei $p \in \mathbb{R}$ und die kritische Grenze $+\infty$ ist. Im Fall $p \neq 1$ haben wir

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} x^{-p}dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

Im Fall $p < 1$ gilt $x^{1-p} \to +\infty$ für $x \to +\infty$, woraus folgt

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = +\infty,$$

d.h. das Integral bestimmt divergent ist.

Im Fall $p > 1$ gilt $x^{1-p} \to 0$ für $x \to +\infty$, woraus folgt

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1},$$

d.h. das Integral konvergent ist. Insbesondere gilt

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

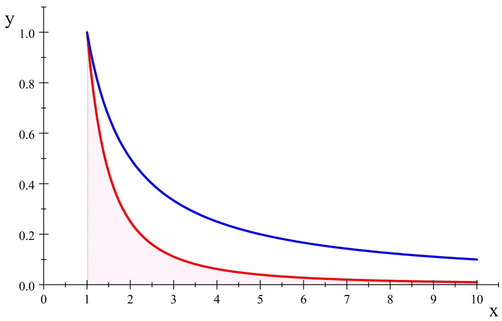
Im Fall $p = 1$ haben wir

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \ln x \to +\infty,$$

woraus folgt

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty.$$

Somit ist das Integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ konvergent für $p > 1$ und bestimmt divergent für $p \leq 1$.



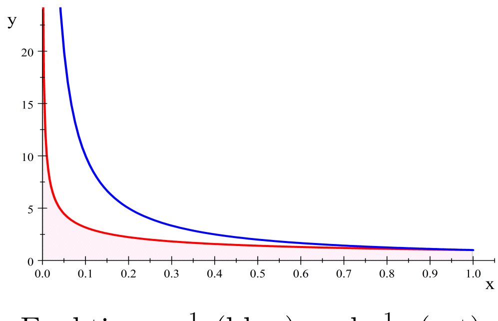
Funktionen $\frac{1}{x}$ (blau) und $\frac{1}{x^2}$ (rot)

4. Bestimmen wir $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Hier ist 0 die kritische Grenze. Nach der Newton-Leibniz-Formel erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[\int x^{-1/2} dx\right]_0^1 = \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_0^1 = 2.$$

Analog erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \left[\int \frac{dx}{x}\right]_0^1 = [\ln x]_0^1 = \ln 1 - \ln(0+) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$



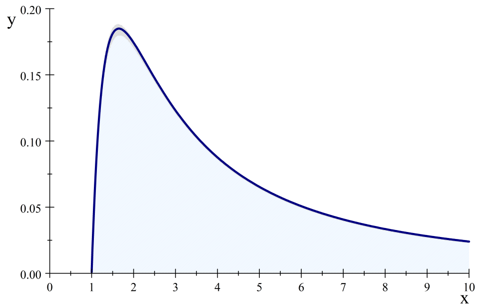
Funktionen $\frac{1}{x}$ (blau) und $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (rot)

5. Bestimmen wir $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$, wobei die kritische Grenze $+\infty$ ist. Wir erhalten mit Hilfe von der partiellen Integration

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx = -\int_1^{\infty} \ln x\, d\frac{1}{x} = \left[-\frac{1}{x} \ln x\right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x} d \ln x$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = 1,$$

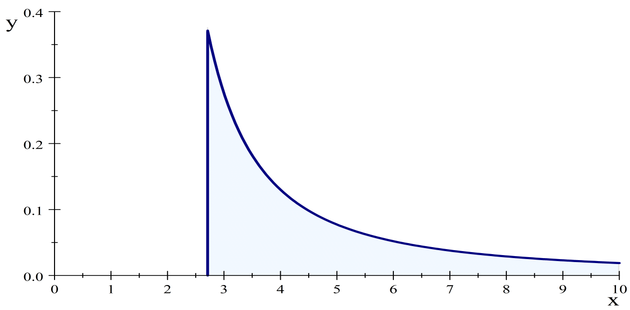
wobei wir benutzt haben, das $\frac{\ln x}{x} \to 0$ für $x \to +\infty$.



Funktion $\frac{\ln x}{x^2}$ auf $[1, +\infty)$

6. Bestimmen wir $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$ mit der kritischen Grenze $+\infty$. Mit Hilfe von Substitution $y = u(x) = \ln x$ erhalten wir

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_e^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = \int_{u(e)}^{u(\infty)} \frac{dy}{y^2} = \left[-\frac{1}{y} \right]_1^{\infty} = 1.$$



Funktion $\frac{1}{x \ln^2 x}$ auf $[e, +\infty)$

Betrachten wir jetzt uneigentliches Integral mit den beiden kritischen Grenzen.

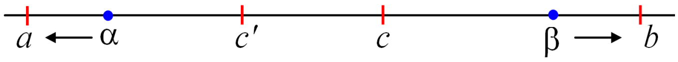
Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem offenen Intervall (a, b) mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Definieren wir das uneigentliche Integral mit zwei kritischen Grenzen a, b wie folgt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+}^{b-} f(x)\, dx := \int_{a+}^{c} f(x)\, dx + \int_c^{b-} f(x)\, dx, \tag{10.59}$$

wobei $c \in (a, b)$, vorausgesetzt, dass die beiden Integrale in der rechten Seite existieren als uneigentliche Integrale und deren Summe auch wohldefiniert ist.

Behauptung. *Der Wert von* $\int_a^b f(x)\, dx$ *in* (10.59) *ist unabhängig von der Wahl von* $c \in (a, b)$.

Beweis. Sei c' noch ein Punkt in (a, b). Seien α und β so nah zu a bzw b dass $c, c' \in (\alpha, \beta)$.



Mit Hilfe von dem Satz 10.15 (Additivität) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{a+}^{c} f dx + \int_{c}^{b-} f dx &= \lim_{\alpha\to a+} \int_{\alpha}^{c} f dx + \lim_{\beta\to b-} \int_{c}^{\beta} f dx \\
&= \lim_{\alpha\to a+} \left(\int_{\alpha}^{c'} f dx + \int_{c'}^{c} f dx \right) + \lim_{\beta\to b-} \left(\int_{c}^{c'} f dx + \int_{c'}^{\beta} f dx \right) \\
&= \lim_{\alpha\to a+} \int_{\alpha}^{c'} f dx + \lim_{\beta\to b-} \int_{c'}^{\beta} f dx + \left(\int_{c'}^{c} f dx + \int_{c}^{c'} f dx \right) \\
&= \int_{a+}^{c'} f dx + \int_{c'}^{b-} f dx,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war. Wir haben hier benutzt dass

$$\int_{c'}^{c} f dx + \int_{c}^{c'} f dx = 0.$$

■

Alle Eigenschaften von uneigentlichen Integralen gelten auch für den Fall von zwei kritischen Grenzen. In diesem Fall wird die Notation $[F]_a^b$ noch weiter verallgemeinert wie folgt:

$$[F]_a^b = [F]_{a+}^{b-} = F(b-) - F(a+), \tag{10.60}$$

vorausgesetzt, dass die beiden Werte $F(b-)$ und $F(a+)$ existiert und deren Differenz auch wohldefiniert ist. Bemerken wir, dass $[F]_a^b$ nicht definiert ist falls die rechte Seite von (10.60) ein unbestimmter Ausdruck der Form $\infty - \infty$ ist.

Zum Beispiel, beweisen wir die Newton-Leibniz-Formel in diesem Fall.

Satz 10.20 (Newton-Leibniz-Formel für uneigentliches Integral mit zwei kritischen Grenzen) *Seien $f(x)$ eine lokal integrierbare Funktion auf (a, b) mit $-\infty \le a < b \le +\infty$ und F eine Stammfunktion von f auf (a, b). Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F]_a^b,$$

vorausgesetzt, dass die rechte Seite wohldefiniert ist.

Beweis. Es folgt aus der Definition (10.59) und dem Satz 10.19, dass für $c \in (a, b)$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\, dx &= \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \\
&= (F(c) - F(a+)) + (F(b-) - F(c)) \\
&= F(b-) - F(a+),
\end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

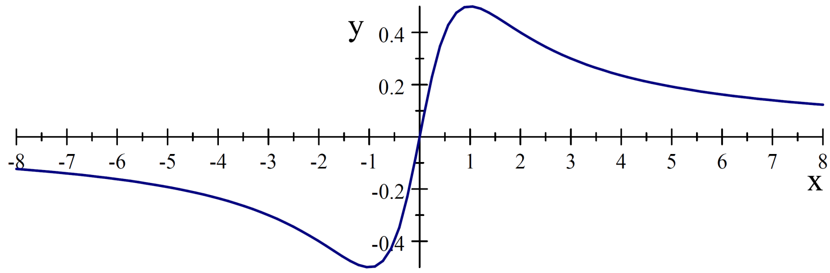
Beispiel. 1. Betrachten wir $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$, wobei die beiden Grenzen $\pm\infty$ kritisch sind. Da

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C,$$

so erhalten wir nach der Newton-Leibniz-Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty - (+\infty),$$

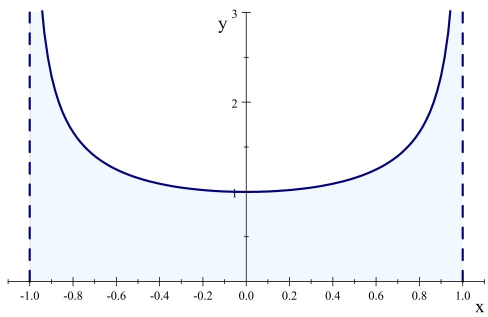
was unbestimmter Ausdruck ist. Somit ist das Integral nicht wohldefiniert.



Funktion $\frac{x}{1+x^2}$

2. Bestimmen wir $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Die beiden Grenzen ± 1 sind kritisch. Nach de Newton-Leibniz-Formel erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \left[\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]_{-1}^{1} \\ &= [\arcsin x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.\end{aligned}$$



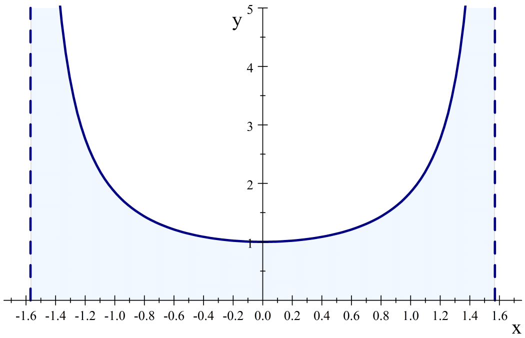
Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Bestimmen wir $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$. Die beiden Grenzen $\pm\pi/2$ sind kritisch da $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Da

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + C,$$

so erhalten wir

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x} = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left(+\infty\right) - \ln 0\right) = \frac{1}{2}\left(+\infty - \left(-\infty\right)\right) = +\infty.$$



Funktion $\frac{1}{\cos x}$ auf $(-\pi/2, \pi/2)$

04.06.2025 **Vorlesung 16**

10.13 Konvergenzkriterien von uneigentlichen Integralen

Integrale von nichtnegativen Funktionen. Wir fangen mit der folgenden Beobachtung an.

Satz 10.21 *Sei f eine nichtnegative lokal integrierbare Funktion auf einem Intervall (a, b) mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Dann ist das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ entweder konvergent oder bestimmt divergent, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \in [0, +\infty].$$

In anderen Wörter, es gibt nur zwei Möglichkeiten:

1. entweder das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiert und $\int_a^b f(x)\,dx \in [0, +\infty)$;
2. oder das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ bestimmt divergiert und $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$.

Der Satz 10.21 ähnelt der analogen Eigenschaft von Reihen: für jede nichtnegative Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ entweder konvergent oder bestimmt divergent, und ihre Summe liegt in $[0, +\infty]$.

Beweis von dem Satz 10.21. Fixieren wir ein $c \in (a,b)$ und betrachten die Funktion

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \quad x \in (a,b). \tag{10.61}$$

Es gilt nach der Definition der uneigentlichen Integrale, dass

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &= \int_{a+}^{b-} f(t)\,dt \\ &= \int_{a+}^{c} f(t)\,dt + \int_c^{b-} f(t)\,dt \\ &= \lim_{x\to a+}\int_x^c f(t)\,dt + \lim_{x\to b-}\int_c^x f(t)\,dt \\ &= \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x) \\ &= F(b-) - F(a+).\end{aligned} \tag{10.62}$$

Somit reicht es zu beweisen dass $F(b-)$ und $F(a+)$ existieren und dass ihre Differenz (10.62) wohldefiniert ist.

Bemerken wir, dass die Funktion $F(x)$ monoton steigend ist, da $f \geq 0$ und für alle $y > x$ aus (a,b) gilt

$$F(y) - F(x) = \int_c^y f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt = \int_x^c f(t)\,dt + \int_c^y f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt \geq 0.$$

Behauptung. *Der Grenzwert* $\lim_{x\to b-} F(x)$ *existiert für jede monoton steigende Funktion* F *auf* (a,b).

Für den Beweis setzen wir

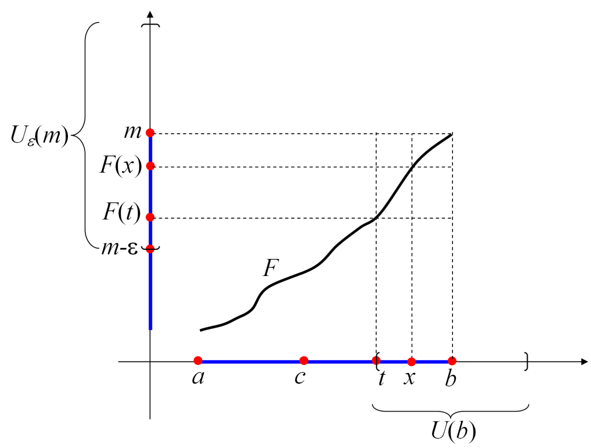
$$m := \sup_{(a,b)} F$$

und zeigen dass

$$\lim_{x\to b-} F(x) = m. \tag{10.63}$$

Sei $m < +\infty$(der Fall $m = +\infty$ ist analog). Dann für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $t \in (a,b)$ mit $F(t) > m - \varepsilon$. Da F monoton steigend ist, so erhalten wir dass für alle $x \in (t,b)$

$$F(x) \geq F(t) > m - \varepsilon.$$



Da auch $F(x) \leq m$ so gilt $F(x) \in (m - \varepsilon, m + \varepsilon)$ für alle $x \in (t, b)$, woraus (10.63) folgt.

Die Funktion (10.61) ist monoton steigend so dass der Grenzwert $F(b-)$ existiert nach der Behauptung. Da $F(x) \geq 0$ für $x > c$, so gilt $F(b-) \in [0, +\infty]$.

Analog existiert der Grenzwert $F(a+) = \inf_{(a,b)} F$. Da $F(x) \leq 0$ für $x < c$ so gilt $F(a+) \in [-\infty, 0]$.

Folglich ist die Differenz

$$F(b-) - F(a+)$$

wohldefiniert und hat den Wert in $[0, +\infty]$, was zu beweisen war. ■

Integralkriterium für Konvergenz von Reihen. Der folgende Satz etabliert eine direkte Beziehung zwischen Konvergenz von Reihen und Integralen.

Satz 10.22 (Integralkriterium für Konvergenz von Reihen) *Sei $f(x)$ eine nichtnegative monoton fallende Funktion auf $[m, +\infty)$, wobei $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt die Äquivalenz*

$$\int_m^{+\infty} f(x)\, dx < \infty \iff \sum_{k=m}^{\infty} f(k) < \infty. \tag{10.64}$$

Beweis. Da f nichtnegativ und lokal integrierbar ist, so existieren $\int_m^{+\infty} f(x)\, dx$ und $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ als Elemente von $[0, +\infty]$. Wir beweisen, dass die beiden Werte gleichzeitig entweder endlich oder unendlich sind.

Fixieren wir ein $n > m$ und betrachten die folgende Zerlegung des Integrals $[m, n]$:

$$Z = \{m, m+1, ..., n\} = \{k\}_{k=m}^{n}.$$

Da $f(x)$ monoton fallend ist, so gilt auf jedem Intervall $[k-1, k] \subset [m, n]$

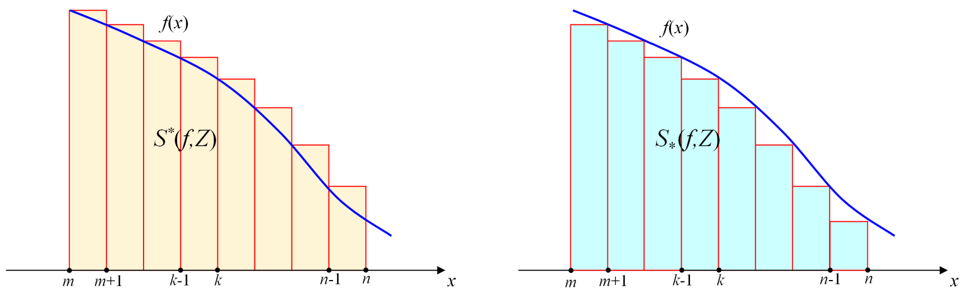
$$\sup_{[k-1,k]} f = f(k-1) \text{ und } \inf_{[k-1,k]} f = f(k).$$

Bestimmen wir die Darboux-Summen dieser Zerlegung:

$$S_*(f, Z) = \sum_{k=m+1}^{n} (\inf_{[k-1,k]} f)(k - (k-1)) = \sum_{k=m+1}^{n} f(k) = f(m+1) + ... + f(n)$$

und

$$S^*(f, Z) = \sum_{k=m+1}^{n} (\sup_{[k-1,k]} f)(k - (k-1)) = \sum_{k=m+1}^{n} f(k-1) = \sum_{l=m}^{n-1} f(l) = f(m) + ... + f(n-1)$$



Da nach dem Satz 10.9

$$S_*(f,Z) \le \int_m^n f(x)\,dx \le S^*(f,Z),$$

so erhalten wir

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \le \int_m^n f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{n-1} f(k) \tag{10.65}$$

Für $n \to \infty$ ergeben diese Ungleichungen, dass

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} f(k) \le \int_m^\infty f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{\infty} f(k). \tag{10.66}$$

Gilt $\sum_{k=m}^{\infty} f(k) < \infty$ so folgt es aus der rechten Seite von (10.66) dass auch

$$\int_m^\infty f(x)\,dx < \infty. \tag{10.67}$$

Umgekehrt gilt: ist (10.67) erfüllt so folgt es aus der linken Seite von (10.66) dass $\sum_{k=m+1}^{\infty} f(k) < \infty$ und somit auch $\sum_{k=m}^{\infty} f(k) < \infty$, woraus die Äquivalenz (10.64) folgt. ■

Beispiel. Untersuchen wir die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

wobei $p \in \mathbb{R}$. Im Fall $p \le 0$ konvergiert die Folge $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ gegen 0 nicht, und somit ist die Reihe divergent. Sei $p > 0$. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^p}$ ist dann monoton fallend auf $[1, +\infty)$. Nach dem Satz 10.22 gilt die Äquivalenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} < \infty. \tag{10.68}$$

Wir haben früher schon gesehen, dass das Integral in (10.68) genau dann konvergiert wenn $p > 1$. Es folgt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ genau dann konvergiert wenn $p > 1$.

Absolute Konvergenz.

Definition. Sei f eine stetige Funktion auf (a,b). Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ heißt *absolut konvergent* wenn $\int_a^b |f(x)|\,dx$ konvergent ist, d.h. wenn

$$\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty.$$

Bemerkung. Da $|f| \ge 0$, so existiert das Integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ nach dem Satz 10.21.

Bemerkung. Diese Definition lässt auch auf lokal integrierbare Funktionen f erweitern. Dafür braucht man die folgende Aussage: ist f lokal integrierbar so ist auch $|f|$ lokal integrierbar, was aus der Aufgabe 110 folgt.

Satz 10.23 *Sei f eine stetige Funktion auf (a,b). Ist das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ absolut konvergent, so ist es auch konvergent und es gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{10.69}$$

Beweis. Wählen wir ein $c \in (a,b)$ und setzen für alle $x \in (a,b)$

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \quad \text{und} \quad G(x) = \int_c^x |f(t)|\,dt.$$

Da $|f| \geq 0$, so ist $G(x)$ monoton steigend, die beiden Grenzwerte $G(a+)$ und $G(b-)$ existieren und es gilt

$$\int_a^b |f(t)|\,dt = G(b-) - G(a+) \tag{10.70}$$

(siehe (10.62) im Beweis des Satzes 10.21). Da $\int_a^b |f(t)|\,dt$ konvergent ist, so sind die Werte $G(b-)$ und $G(a+)$ endlich.

Beweisen wir dass auch der Grenzwert

$$F(b-) = \lim_{x\to b-} F(x) \tag{10.71}$$

existiert und endlich ist. Dafür brauchen wir die folgende Aussage.

Behauptung. *Nehmen wir an dass für jede Folge $x_n \to b-$ die Folge $\{F(x_n)\}$ konvergent ist. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{x\to b-} F(x)$.*

Der Satz 6.1 aus Analysis 1 besagt folgendes: gilt $F(x_n) \to \alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und für jede Folge $x_n \to b-$, so gilt auch $F(x) \to \alpha$ für $x \to b-$. Beweisen wir folgendes: wenn die Folge $\{F(x_n)\}$ konvergent für alle Folgen $x_n \to b-$ ist, so stimmen alle Grenzwerte $\lim F(x_n)$ überein, so dass d.o.g. Satz verwendbar ist und die Existenz von $\lim_{x\to b-} F(x)$ ergibt. In der Tat, gilt $\lim F(x_n) \neq \lim F(y_n)$ für zwei Folgen $x_n \to b-$ und $y_n \to b-$ so betrachten wir die gemischte Folge

$$z_n = \begin{cases} x_n, & n \text{ gerade}, \\ y_n, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

die offensichtlich keinen Grenzwert hat, obwohl $z_n \to b-$.

Nach diese Behauptung reicht es folgendes zu zeigen: für jede Folge $x_n \to b-$ ist die Folge $\{F(x_n)\}$ konvergent. Dafür zeigen wir, dass $\{F(x_n)\}$ eine Cauchy-Folge ist. In der Tat für $x_n > x_m$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |F(x_n) - F(x_m)| &= \left|\int_c^{x_n} f(t)\,dt - \int_c^{x_m} f(t)\,dt\right| \\ &= \left|\int_{x_m}^{x_n} f(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_{x_m}^{x_n} |f(t)|\,dt = G(x_n) - G(x_m), \end{aligned} \tag{10.72}$$

wo wir Korollar 10.13 benutzt haben. Im Fall $x_n \leq x_m$ erhalten wir analog

$$|F(x_n) - F(x_m)| \leq G(x_m) - G(x_n),$$

woraus folgt, dass in den beiden Fällen

$$|F(x_n) - F(x_m)| \leq |G(x_n) - G(x_m)|.$$

Da $G(x_n) - G(x_m) \to 0$ für $n, m \to \infty$, so folgt es $|F(x_n) - F(x_m)| \to 0$. Somit gibt es einen endlichen Grenzwert $F(b-)$. Analog ist $F(a+)$ wohldefiniert und endlich. Es folgt dass uneigentliches Integral

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b-) - F(a+) \tag{10.73}$$

konvergiert.

Um die Ungleichung (10.69) zu beweisen, bemerken wir, dass nach (10.72) für alle $a < x < y < b$ gilt

$$|F(y) - F(x)| \leq G(y) - G(x),$$

woraus folgt für $x \to a+$ und $y \to b-$, dass

$$|F(b-) - F(a+)| \leq G(b-) - G(a+).$$

Einsetzen in (10.70) und (10.73) ergibt (10.69). ■

06.06.2025 Vorlesung 17

Landau-Symbol O.

Definition. Seien f, g zwei Funktionen auf (a, b) und $g(x) > 0$. Man schreibt

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to b- \tag{10.74}$$

und sagt "$f(x)$ ist groß O von $g(x)$ für $x \to b-$" wenn es ein $c \in (a, b)$ und ein $C > 0$ gibt mit

$$|f(x)| \leq C g(x) \quad \text{für alle } x \in (c, b).$$

Die Funktion g aus der Bedingung (10.74) heißt eine *Majorante* von f.

Man kann zeigen dass (10.74) äquivalent zur folgenden Bedingung ist:

$$\limsup_{x \to b-} \frac{|f(x)|}{g(x)} < +\infty$$

Die ähnliche Definition gilt für $x \to a+$.

Beispiel. Wir haben

$$x^2 \cos x + x\sqrt{x} = O\left(x^2\right) \quad \text{für } x \to +\infty,$$

da für $x > 1$

$$\frac{|x^2 \cos x + x\sqrt{x}|}{x^2} \leq |\cos x| + \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 2.$$

Satz 10.24 (Majorantenkriterium) *Seien $f(x)$ und $g(x)$ stetige Funktionen auf $[a,b)$ und $g(x)>0$. Nehmen wir an, dass*

$$f(x)=O(g(x)) \text{ für } x\to b- \tag{10.75}$$

und

$$\int_a^b g(x)\,dx<\infty.$$

Dann ist das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ absolut konvergent.

Beweis. Da $f(x)=O(g(x))$ für $x\to b-$, so existieren $C>0$ and $c\in(a,b)$ mit

$$|f(x)|\le Cg(x) \quad \text{für alle } c\le x<b. \tag{10.76}$$

Wir haben

$$\int_a^b |f(x)|\,dx=\int_a^c |f(x)|\,dx+\int_c^b |f(x)|\,dx.$$

Die Funktion f ist auf $[a,c]$ integrierbar, so dass $\int_a^c |f(x)|\,dx<\infty$. Wir schätzen das zweite Integral mit Hilfe von (10.76) wie folgt ab:

$$\int_c^b |f(x)|\,dx\le C\int_c^b g(x)\,dx<+\infty.$$

Daraus folgt $\int_a^b |f(x)|\,dx<\infty$ d.h. das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ absolut konvergent ist. ■

Beispiel. Untersuchen wir die Konvergenz von

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x+2}\,\sin x}{x^2}dx. \tag{10.77}$$

Da $|\sin x|\le 1$ und $\sqrt{x+2}\le\sqrt{2x}$ für $x\ge 2$, so gilt

$$\left|\frac{\sqrt{x+2}\,\sin x}{x^3}\right|\le\sqrt{2}\frac{\sqrt{x}}{x^2}=Cx^{-\frac{3}{2}} \quad \text{für } x\ge 2$$

und somit

$$\frac{\sqrt{x+2}\,\sin x}{x^2}=O(x^{-\frac{3}{2}}) \text{ für } x\to+\infty.$$

Da $\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}dx<+\infty$, so folgt es dass das Integral (10.77) absolut konvergent ist.

Äquivalenz von Funktionen.

Definition. Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen auf (a,b), die in einer Umgebung von b nicht verschwinden. Man sagt, dass $f(x)$ äquivalent zu $g(x)$ für $x\to b-$ ist und schreibt

$$f(x)\sim g(x) \text{ für } x\to b-$$

wenn

$$\frac{f(x)}{g(x)}\to 1 \text{ für } x\to b-.$$

Analog definiert man die Äquivalenz für $x\to a+$.

Zum Beispiel, es gilt $\sin x\sim x$ für $x\to 0-$ und für $x\to 0+$ da $\frac{\sin x}{x}\to 1$.

Die Äquivalenz $f\sim g$ impliziert offensichtlich $f=O(g)$ und $g=O(f)$.

Lemma 10.25 *Die Äquivalenz hat die folgenden Eigenschaften.*

(a) *Die Relation $f \sim g$ für $x \to b-$ ist eine Äquivalenzrelation.*

(b) *Gelten $f_1 \sim g_1$ und $f_2 \sim g_2$ für $x \to b-$ so gelten auch $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ und $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$ für $x \to b-$.*

(c) *Die Äquivalenz $f \sim g$ gilt genau dann wenn $f(x) = g(x) + o(g(x))$ für $x \to b-$.*

Beweis. (a) Nach Definition, soll eine Äquivalenzrelation reflexiv, symmetrisch und transitiv sein.

1. (Reflexivität) Es gilt $f \sim f$ da $\frac{f}{f} = 1 \to 1$ für $x \to b-$.
2. (Symmetrie) $f \sim g \Rightarrow g \sim f$ da $\frac{g}{f} = \frac{1}{f/g} \to \frac{1}{1} = 1$ für $x \to b-$.
3. (Transitivität) $f \sim g$ und $g \sim h \Rightarrow f \sim h$ da $\frac{f}{h} = \frac{f}{g}\frac{g}{h} \to 1 \cdot 1 = 1$ für $x \to b-$.

(b) Die Äquivalenz $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ folgt aus

$$\frac{f_1 f_2}{g_1 g_2} = \frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2} \to 1 \cdot 1 = 1 \text{ für } x \to b-$$

und $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$ folgt aus

$$\frac{f_1}{f_2} \Big/ \frac{g_1}{g_2} = \frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{g_2}{f_2} \to 1 \text{ für } x \to b-.$$

(c) Wir haben

$$\frac{f}{g} = \frac{f-g}{g} + 1,$$

woraus folgt, dass $\frac{f}{g} \to 1$ genau dann gilt wenn $\frac{f-g}{g} \to 0$, d.h. $f - g = o(g)$ und somit $f = g + o(g)$. ■

Beispiel. 1. Es gilt

$$x^2 + x \sim x^2 \quad \text{für } x \to +\infty$$

da

$$\frac{x^2 + x}{x^2} = 1 + \frac{1}{x} \to 1 \text{ für } x \to +\infty.$$

Andererseits, wir haben

$$x^2 + x \sim x \quad \text{für } x \to 0$$

da

$$\frac{x^2 + x}{x} = x + 1 \to 1 \text{ für } x \to 0.$$

2. Es gilt

$$\ln(1 + x) \sim x \text{ für } x \to 0$$

da nach der Taylorformel

$$\ln(1 + x) = x + o(x).$$

Es folgt, dass für $x \to 0$

$$\left(x^2 + x\right) \ln(1 + x) \sim x \cdot x = x^2.$$

Satz 10.26 (Vergleichskriterium) *Seien f und g positive stetige Funktionen auf $[a,b)$. Gilt*

$$f(x) \sim g(x) \text{ für } x \to b-$$

so sind die Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ und $\int_a^b g(x)\,dx$ gleichzeitig konvergent oder bestimmt divergent.

Beweis. Da f und g positiv sind, so ist jedes Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergent oder bestimmt divergent. Die Relation $f(x) \sim g(x)$ ergibt $f(x) = O(g(x))$ und somit nach dem Satz 10.24

$$\int_a^b g(x)\,dx < +\infty \implies \int_a^b f(x)\,dx < +\infty.$$

Die umgekehrte Implikation folgt analog aus $g(x) \sim f(x)$. ∎

Beispiel. 1. Untersuchen wir die Konvergenz von

$$\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^6}}$$

an der kritischen Grenze $+\infty$. Wir haben

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^6}} = \frac{x}{x^3\sqrt{x^{-6}+1}} \sim \frac{x}{x^3} = x^{-2} \text{ für } x \to +\infty,$$

d.h. $f(x) \sim x^{-2}$ für $x \to +\infty$. Da

$$\int_1^{+\infty} x^{-2}dx < +\infty,$$

so beschließen wir nach dem Satz 10.26, dass auch

$$\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^6}} < +\infty.$$

2. Untersuchen wir die Konvergenz von

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}} \tag{10.78}$$

wobei $0 < a < \pi/2$. Da $\cos x$ in $[0,\pi/2]$ streng monoton fallend ist, so gilt $\cos x - \cos a > 0$ für $0 \le x < a$. Die Grenze a ist kritisch da der Nenner an $x = a$ verschwindet. Nach der Differenzierbarkeit von $\cos x$ gilt es für $x \to a-$

$$\cos x - \cos a = -(\sin a)(x-a) + o(x-a) \sim (\sin a)(a-x),$$

woraus folgt

$$\sqrt{\cos x - \cos a} \sim \sqrt{(\sin a)(a-x)} \text{ für } x \to a$$

und somit

$$\frac{1}{\sqrt{\cos x - \cos a}} \sim \frac{1}{\sqrt{\sin a}\sqrt{a-x}} \text{ für } x \to a$$

Mit Hilfe von Substitution $y = a - x$ erhalten wir

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = -\int_a^0 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{y}} = [2\sqrt{y}]_0^a = 2\sqrt{a} < \infty,$$

woraus folgt, dass das Integral (10.78) konvergent ist.

10.14 * Wallis-Produkt

Zwei Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen heißen *äquivalent* wenn

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1.$$

Schreibweise: $a_n \sim b_n$ für $n\to\infty$. Diese Relation heißt *Äquivalenz* oder *asymptotische Identität.* Sie besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. $a_n \sim a_n$ (Reflexivität)
2. $a_n \sim b_n$ impliziert $b_n \sim a_n$ (Symmetrie)
3. $a_n \sim b_n$ und $b_n \sim c_n$ implizieren $a_n \sim c_n$ (Transitivität).

Satz 10.27 *Es gelten die Äquivalenzen*

$$\int_0^\pi \sin^n x\,dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \quad \text{für } n\to\infty \tag{10.79}$$

und

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sim \sqrt{\pi n} \quad \text{für } n\to\infty \tag{10.80}$$

(Wallis-Produkt).

Die äquivalenten Formulierungen von (10.80):

$$\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)} \sim \sqrt{\pi n}$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n)^2}{(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1))^2\, n}=\pi.$$

Beweis. Bezeichnen wir für $n\in\mathbb{Z}_+$

$$I_n=\int_0^\pi \sin^n x\,dx.$$

Wir beweisen Eigenschaften von I_n in einer Reihenfolge von Schritten.

(a) $I_{n-1}\ge I_n>0$. Da für $0<x<\pi$ gilt $0<\sin x\le 1$, so folgt es

$$0<\sin^n x\le \sin^{n-1}x,$$

woraus $0<I_n\le I_{n-1}$ folgt.

(b) $I_0=\pi$ und $I_1=2$, da

$$I_0=\int_0^\pi dx=\pi \quad \text{und} \quad I_1=\int_0^\pi \sin x\,dx=-\left[\cos x\right]_0^\pi=2.$$

(c) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ für $n \geq 2$, da

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi \sin^n x\, dx = -\int_0^\pi \sin^{n-1} x\, d\cos x \\ &= -\left[\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\, d\sin^{n-1} x \\ &= (n-1) \int_0^\pi \cos^2 x \sin^{n-2} x\, dx \\ &= (n-1) \int_0^\pi \left(1 - \sin^2 x\right) \sin^{n-2} x\, dx \\ &= (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right), \end{aligned}$$

woraus $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ folgt.

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$. In der Tat folgt es aus (c) und (a), dass

$$\frac{n-1}{n} = \frac{I_n}{I_{n-2}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1.$$

Da $\frac{n-1}{n} \to 1$, so erhalten wir $\frac{I_n}{I_{n-1}} \to 1$ für $n \to \infty$.

(e) Für alle $k \in \mathbb{Z}_+$ gelten die Identitäten:

$$I_{2k+1} = 2\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} \quad \text{und} \quad I_{2k} = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)}. \tag{10.81}$$

Induktion nach k. Für $k = 0$ gelten (10.81) nach (b).

Induktionsschritt von $k-1$ nach k. Angenommen

$$I_{2k-1} = 2\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-2)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)},$$

so erhalten wir nach (c)

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = 2\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-2) \cdot (2k)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)}.$$

Analog beweist man die zweite Identität in (10.81).

(f) $I_{n-1} I_n = \frac{2\pi}{n}$. Es folgt aus (e), dass für $n = 2k+1$

$$I_{n-1} I_n = I_{2k} I_{2k+1} = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)} \cdot 2\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} = \frac{2\pi}{2k+1} = \frac{2\pi}{n}.$$

Im Fall $n = 2k$ erhalten wir analog

$$I_{n-1} I_n = I_{2k-1} I_{2k} = 2\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-2)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)} \cdot \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)} = \frac{2\pi}{2k} = \frac{2\pi}{n}.$$

(g) Jetzt beweisen wir (10.79), d.h. $I_n \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$. Nach (f) haben wir

$$I_n^2 = I_n I_{n-1} \frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{2\pi}{n} \frac{I_n}{I_{n-1}},$$

woraus folgt nach (d)

$$\frac{I_n^2}{2\pi/n} = \frac{I_n}{I_{n-1}} \to 1 \text{ für } n \to \infty,$$

und somit $I_n^2 \sim \frac{2\pi}{n}$, was äquivalent zu (10.79) ist.

(h) Beweisen wir (10.80). Für $n = 2k+1$ haben wir nach (e) und (g)

$$2\frac{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2k)}{3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k+1)} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{2k+1}} \text{ für } k \to \infty,$$

woraus folgt

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2k)}{3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k-1)} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}(2k+1)} \sim \sqrt{\pi k}.$$

Die linke Seite ist gleich

$$\frac{(2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2k))^2}{3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot ... \cdot 2k} = \frac{\left(2^k k!\right)^2}{(2k)!},$$

woraus (10.80) folgt. ■

10.15 * Stirling-Formel

Hauptsatz 10.28 *Es gilt*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ für } n \to \infty. \tag{10.82}$$

Beweis. Die asymptotische Identität (10.82) ist äquivalent zu

$$\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} \to 1 \text{ für } n \to \infty,$$

d.h. zu

$$\ln \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

was äquivalent zu

$$\left(\frac{1}{2}\ln n + n \ln \frac{n}{e}\right) - (\ln 1 + \ln 2 + ... + \ln n) \to \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ für } n \to \infty$$

ist. Zunächst beweisen wir, dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(n \ln \frac{n}{e} - \left(\ln 2 + \ln 3 + ... + \ln(n-1) + \frac{1}{2}\ln n\right)\right) \tag{10.83}$$

existiert und endlich ist. Danach bestimmen wir den Grenzwert.

Betrachten wir die folgende Funktion $f(x)$ auf $[1, \infty)$:

1. $f(n) = \ln n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

2. für $x \in [n, n+1]$ ist $f(x)$ eine lineare Funktion, d.h.

$$f(x) = (n+1-x)\ln n + (x-n)\ln(n+1).$$

Da $\ln x$ konkav ist, so gilt

$$f(x) \le \ln x \quad \text{für alle } x \ge 1.$$

Setzen wir

$$a_n := \int_1^n (\ln x - f(x))\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt, dass die Folge $\{a_n\}_{n\in N}$ nicht negative und monoton steigend ist. Es gilt

$$\int_1^n \ln x\,dx = n\ln n - n + 1 = n\ln\frac{n}{e} + 1$$

und

$$\begin{aligned}\int_1^n f(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(k)+f(k+1)}{2}\\ &= \ln 2 + \ln 3 + ... + \ln(n-1) + \frac{1}{2}\ln n\;.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$a_n = \int_1^n \ln x\,dx - \int_1^n f(x)\,dx = n\ln\frac{n}{e} + 1 - \left(\ln 2 + \ln 3 + ... + \ln(n-1) + \frac{1}{2}\ln n\right).$$

Somit ist der Grenzwert (10.83) gleich $\lim a_n + 1$. Da die Folge $\{a_n\}$ monoton steigend ist, so existiert der Grenzwert $\lim a_n$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\lim a_n$ endlich ist. Es gilt

$$\begin{aligned}a_n &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}(\ln x - f(x))\,dx\\ &\le \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}(\ln x - f(x))\,dx\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left((k+1)\ln\frac{k+1}{e} - k\ln\frac{k}{e} - \frac{\ln k + \ln(k+1)}{2}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left((k+1)\ln(k+1) - k\ln k - \frac{1}{2}\ln k - \frac{1}{2}\ln(k+1) - 1\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)(\ln(k+1) - \ln k) - 1\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - 1\right).\end{aligned}$$

Die Taylorformel ergibt

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{3k^3}+o\left(\frac{1}{k^3}\right) \text{ für } k\to\infty,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-1 &= \left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{3k^3}+o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)-1\\ &= \left(1-\frac{1}{2k}+\frac{1}{3k^2}\right)+\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{4k^2}\right)-1+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\\ &= \frac{1}{12k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\\ &\sim \frac{1}{12k^2} \text{ as } k\to\infty.\end{aligned}$$

Somit ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right)$$

konvergent da sie äquivalent zur konvergenten Reihe $\sum \frac{1}{k^2}$ ist. Somit ist die Folge $\{a_n\}$ beschränkt und $\lim a_n$ ist endlich.

Folglich der Grenzwert (10.83) existiert und ist endlich. Es folgt, dass auch der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!}$$

existiert und eine positive Zahl ist, sei $1/c$ wobei $c>0$. Dann gilt

$$n!\sim c\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{10.84}$$

Um c zu bestimmen, berechnen wir

$$\frac{\left(2^n n!\right)^2}{(2n)!}\sim\frac{\left(2^n c\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}{c\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}=\frac{c^2 2^{2n} n\, n^{2n}e^{-2n}}{c\sqrt{2n}\,2^{2n}n^{2n}e^{-2n}}=c\sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Andererseits es gilt nach dem Satz 10.27

$$\frac{\left(2^n n!\right)^2}{(2n)!}\sim\sqrt{\pi n},$$

woraus folgt

$$c\sqrt{\frac{n}{2}}\sim\sqrt{\pi n},$$

und somit $c=\sqrt{2\pi}$. Einsetzen c in (10.84) ergibt (10.82). ■

Chapter 11

Metrische Räume und stetige Abbildungen

In diesem Kapitel entwickeln wir die Grundlagen für Analysis in $\mathbb{R}^n$ und somit auch Analysis der Funktionen von mehreren Variablen. Wir definieren und untersuchen die Konvergenz von Folgen und Funktionen in $\mathbb{R}^n$ und sogar in allgemeineren *metrischen* Räumen, die mit Hilfe von *Abstandsfunktion* definiert werden.

11.1 Abstandsfunktion

Definition. Sei X eine beliebige Menge. Eine *Metrik* (=Abstandsfunktion) auf X ist eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ die die folgenden Axiome erfüllt:

1. Positivität: $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (somit $d(x, y) > 0$ für alle $x \neq y$).

2. Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.

3. Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$.

Ist d eine Metrik auf X, so heißt das Paar (X, d) ein *metrischer Raum.*

Die Dreiecksungleichung impliziert, dass für alle $x, y, z \in X$

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z). \tag{11.1}$$

Beispiel. 1. Sei $X = \mathbb{R}$. Dann ist $d(x, y) = |x - y|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$.
2. Sei $X = \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Dann ist $d(z, w) = |z - w|$ eine Metrik auf $\mathbb{C}$.
3. Für beliebige Menge X ist die folgende Funktion

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

eine Metrik. Diese Metrik heißt *diskrete Metrik* auf X.

Für uns sind wichtig die Metriken in Vektorräumen, insbesondere in $\mathbb{R}^n$. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Nach Definition sind in V zwei lineare Operationen definiert: Vektoraddition

$$x, y \in V \mapsto x + y \in V$$

und Skalarmultiplikation

$$\lambda \in \mathbb{R}, \ x \in V \mapsto \lambda x \in V.$$

Definition. Eine Funktion $N : V \to \mathbb{R}$ auf einem Vektorraum V heißt eine *Norm* wenn sie die folgenden Axiome erfüllt:

1. Positivität: $N(x) \geq 0$ und $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (somit $N(x) > 0$ für alle $x \in V \setminus \{0\}$).

2. Absolute Homogenität: $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

3. Dreiecksungleichung: $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Das Paar (V, N) heißt ein *normierter* Vektorraum.
Die übliche Notation von der Norm ist $\|x\|$ anstatt $N(x)$.

Beispiel. 1. Die Funktion $N(x) = |x|$ auf $\mathbb{R}$ ist eine Norm.
2. Die Funktion $N(z) = |z|$ auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist eine Norm.
3. Sei $V = \mathbb{R}^n$. Für jeden Vektor $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die 1-Norm

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \tag{11.2}$$

und die ∞-Norm

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\|x\|_1$ und $\|x\|_\infty$ die Normen sind.

11.06.2025 Vorlesung 18

Beispiel. Sei S eine beliebige Menge. Bezeichnen wir mit $B(S)$ die Menge von allen *beschränkten* reellwertigen Funktionen auf S. Die Menge $B(S)$ ist offensichtlich ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Vektoraddition

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

und Skalarmultiplikation

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Definieren wir die sup-Norm (=die ∞-Norm) auf $B(S)$ wie folgt:

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

Es ist einfach zu beweisen dass die sup-Norm eine Norm ist (siehe Aufgabe 130).

Behauptung. *Ist (V, N) ein normierter Vektorraum, so ist die Funktion*

$$d(x,y) := N(x-y)$$

eine Metrik auf V. Die Metrik d heißt die induzierte Metrik *der Norm N.*

Beweis. Zeigen wir dass die Axiome der Metrik aus den Axiome der Norm folgen.

Positivität: $d(x,y) = N(x-y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow N(x-y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Symmetrie:

$$d(y,x) = N(y-x) = N((-1)(x-y)) = N(x-y) = d(x,y).$$

Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(x,y) = N(x-y) &= N((x-z)+(z-y)) \\ &\leq N(x-z) + N(z-y) = d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

■

Jeder normierte Vektorraum (V, N) ist somit auch ein metrischer Raum (V, d) mit der induzierten Metrik d.

Beispiel. Für $V = \mathbb{R}^n$ erhalten wir die 1-Metrik

$$d_1(x,y) = \|x-y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

und die ∞-Metrik

$$d_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} \{|x_k - y_k|\}.$$

Für $V = B(S)$ erhalten wir die sup-Metrik:

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{x\in S} |f(x) - g(x)|.$$

11.2 Die p-Norm in $\mathbb{R}^n$

Definition. Für jedes $1 \leq p < \infty$ definieren wir die *p-Norm* in $\mathbb{R}^n$ wie folgt: für jedes $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}. \tag{11.3}$$

Zum Beispiel, für $p = 1$ stimmt diese Definition mit (11.2) überein. Für $p = 2$ erhalten wir

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

so dass $\|x\|_2 = |x|$ (wobei der Betrag $|x|$ eines Vektors x in (10.13) definiert wurde).

Wir beweisen unterhalb, dass die p-Norm eine Norm ist. Die ersten zwei Axiome von Norm sind offensichtlich:

Positivität. Es ist klar aus (11.3), dass $\|x\|_p \geq 0$ und

$$\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x_k = 0 \text{ für alle } k = 1, ..., n \Leftrightarrow x = 0.$$

Absolute Homogenität: für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda|^p |x_k|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \, \|x\|_p.$$

Die Dreiecksungleichung für die p-Norm wird später bewiesen.

Man kann beweisen dass

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max_{1\leq k\leq n} \{|x_k|\} = \|x\|_\infty ,$$

was die Notation $\|x\|_\infty$ rechtfertigt (siehe Satz 11.11 unterhalb).

Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir das *Skalarprodukt*

$$x \cdot y := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

(nicht mit der Skalarmultiplikation zu vermischen). Bemerken wir, dass $x \cdot y$ eine reelle Zahl ist. Das Skalarprodukt erfüllt offensichtlich die folgenden Eigenschaften:

1. Positivität: $x \cdot x \geq 0$ und $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2. Symmetrie: $x \cdot y = y \cdot x$

3. Linearität:
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$
und
$$(\lambda x) \cdot y = \lambda (x \cdot y)$$
und für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Diese drei Eigenschaften sind die Axiome von Skalarprodukt in beliebigen Vektorräumen. Ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt ein *Euklidischer Raum.*

Satz 11.1 (Hölder-Ungleichung) *Für alle reellen Zahlen $p, q > 1$ mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{11.4}$$

gilt die folgende Ungleichung

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_q \tag{11.5}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Die (11.4) erfüllenden Zahlen heißen die *konjugierten Hölder-Exponenten.* Die Identität (11.4) ist äquivalent zu $p = \frac{q}{q-1}$ und $q = \frac{p}{p-1}$.

Bemerkung. Da $p = 2$ und $q = 2$ konjugierte Hölder-Exponenten sind, so erhalten wir nach der Hölder-Ungleichung

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Dieser spezielle Fall der Hölder-Ungleichung heißt die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung.* Bemerken wir auch, dass

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{x \cdot x}.$$

Man kann beweisen dass in jedem Euklidischen Raum mit Skalarprodukt $x \cdot y$, die Funktion $\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$ eine Norm ist und die allgemeine Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt:

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\| .$$

Beweis von dem Satz 11.1. Gilt $x = 0$ oder $y = 0$ so ist (11.5) trivial. Nehmen wir an, dass $x, y \neq 0$. Die Ungleichung (11.5) ändert sich nicht wenn x durch λx ersetzt wird. Somit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\|x\|_p = 1$. Analog nehmen wir an, dass $\|y\|_q = 1$.

Weiterhin benutzen wir die Young-Ungleichung[1]

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab,$$

die unter der Bedingung (11.4) für alle $a, b \geq 0$ gilt. Für $a = |x_k|$ und $b = |y_k|$ erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{|x_k|^p}{p} + \frac{|y_k|^q}{q} \right) \geq \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,|y_k| \geq |x \cdot y|\,. \tag{11.6}$$

Mit Hilfe von $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$ und (11.4) erhalten wir, dass die linke Seite von (11.6) ist gleich

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = \frac{1}{p} \|x\|_p^p + \frac{1}{q} \|y\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \|y\|_q,$$

woraus (11.5) folgt. ∎

Bemerken wir, dass $p = \infty$ und $q = 1$ auch konjugierte Hölder-Exponenten sind, da $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{1} = 1$. Die Hölder-Ungleichung gilt auch für $p = \infty$ und $q = 1$ wie folgt:

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1$$

(siehe Aufgabe 127).

Satz 11.2 (Minkowski-Ungleichung) *Die p-Norm erfüllt die Dreiecksungleichung*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \tag{11.7}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $p \in [1, \infty]$. Folglich ist die p-Norm eine Norm in $\mathbb{R}^n$ für alle $p \in [1, \infty]$.

Beweis. Die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ wurden schon oberhalb erwähnt, sei jetzt $1 < p < \infty$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_k \geq 0$ und $y_k \geq 0$. Wir haben

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p = \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)(x_k + y_k)^{p-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k (x_k + y_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} y_k (x_k + y_k)^{p-1}\,. \end{aligned} \tag{11.8}$$

Setzen wir $z_k = (x_k + y_k)^{p-1}$ und bemerken, dass nach der Hölder-Ungleichung gilt

$$\sum_{k=1}^{n} x_k (x_k + y_k)^{p-1} = \sum_{k=1}^{n} x_k z_k \leq \|x\|_p \|z\|_q\,,$$

[1] Die Young-Ungleichung wurde in Analysis 1 als eine Folgerung der Konkavität von $\ln x$ bewiesen.

wobei $q = \frac{p}{p-1}$ der zu p konjugierte Hölder-Exponent ist. Es gilt

$$\|z\|_q = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{p}\right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{q}} = \|x + y\|_p^{p/q},$$

wobei wir die Identität $(p-1)\,q = p$ benutzt haben. Somit erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} x_k (x_k + y_k)^{p-1} \le \|x\|_p \|x + y\|_p^{p/q}$$

und analog

$$\sum_{k=1}^{n} y_k (x_k + y_k)^{p-1} \le \|y\|_p \|x + y\|_p^{p/q}.$$

Addieren diese Ungleichungen und Einsetzen in (11.8) ergibt

$$\|x + y\|_p^p \le \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \|x + y\|_p^{p/q}.$$

Daraus folgt, dass

$$\|x + y\|_p^{p-p/q} \le \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Da

$$p - \frac{p}{q} = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) = p \cdot \frac{1}{p} = 1,$$

so erhalten wir (11.7). ■

Folglich erhalten wir in $\mathbb{R}^n$ die folgende Familie von Metriken: für jedes $p \in [1, +\infty]$

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p.$$

11.3 Metrische Kugel

In einem metrischen Raum (X, d) definieren wir die *metrischen Kugeln* wie folgt.

Definition. Für jedes $z \in X$ und $r > 0$ definieren wir die *offene Kugel* $U_r(z)$ mit Zentrum z und Radius r wie folgt:

$$U_r(z) = \{x \in X : d(x, z) < r\}.$$

Definieren wir auch die *abgeschlossene Kugel* mit

$$\overline{U}_r(z) = \{x \in X : d(z, x) \le r\}.$$

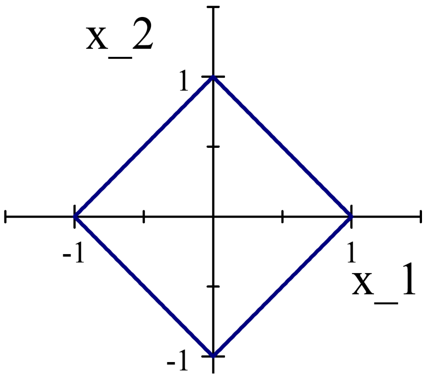
Beispiel. In $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ die Kugel $U_r(z)$ ist das offene Intervall $(z - r, z + r)$ und $\overline{U}_r(z) = [z - r, z + r]$.

Beispiel. Betrachten wir $\mathbb{R}^2$ mit der Metrik d_p $(1 \le p \le \infty)$ und beschreiben wir die entsprechende Kugel $U_r(0)$ abhängig von p.

Für $p = 1$ haben wir

$$U_r(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 < r\right\} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < r\right\}$$

Somit ist $U_r(0)$ ein Rhombus wie auf dem Bild:

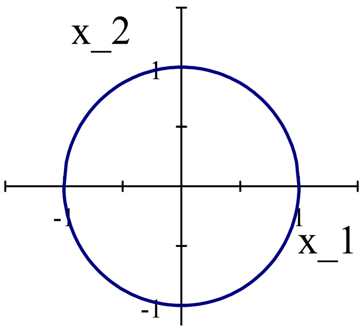


Die metrische Kugel $U_1(0)$ im Fall $p = 1$

Für $p = 2$ haben wir

$$U_r(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < r\right\} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < r^2\right\},$$

und die Kugel ist eine Kreisscheibe

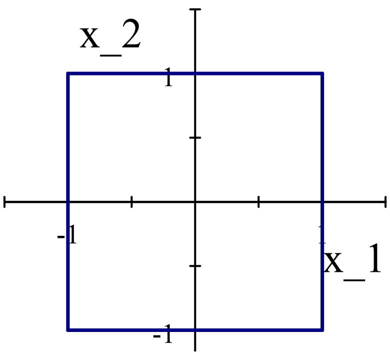


Die metrische Kugel $U_1(0)$ im Fall $p = 2$

Für $p = \infty$ haben wir

$$U_r(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty < r\right\} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} < r\right\},$$

was ein Quadrat ist

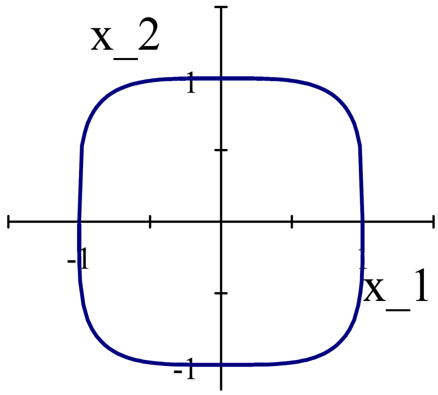


Die metrische Kugel $U_1(0)$ im Fall $p = \infty$

Für $p = 4$ haben wir

$$U_r(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_4 < r\right\} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^4 + x_2^4 < r^4\right\},$$

was auf dem Bild gezeigt ist:



Die metrische Kugel $U_1(0)$ im Fall $p = 4$

Beweisen wir die folgenden Eigenschaften von metrischen Kugeln.

Lemma 11.3 *Seien $U_r(x)$ und $U_s(y)$ zwei Kugeln in einem metrischen Raum (X, d).*

(a) *Gilt $d(x, y) \geq r + s$ so sind die Kugeln $U_r(x)$ und $U_s(y)$ disjunkt.*

(b) *Gilt $d(x, y) \leq r - s$, so gilt $U_s(y) \subset U_r(x)$.*

Beweis. (a) Sei z ein Punkt aus dem Schnitt $U_r(x) \cap U_s(y)$. Dann gelten $d(x, z) < r$ und $d(y, z) < s$ woraus folgt nach der Dreiecksungleichung

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < r + s,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Somit ist der Schnitt $U_r(x) \cap U_s(y)$ leer.

(b) Sei z ein Punkt aus der Differenz $U_s(y) \setminus U_r(x)$. Dann gelten $d(x, z) \geq r$ und $d(y, z) < s$ woraus folgt

$$d(x, y) \geq d(x, z) - d(y, z) > r - s,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Somit ist die Differenz $U_s(y) \setminus U_r(x)$ leer und folglich $U_s(y) \subset U_r(x)$. ■

Bemerkung. Ähnliche Aussagen gelten when eine oder beide Kugeln abgeschlossen sind. Zum Beispiel:

- im Fall $d(x, y) \geq r + s$ gilt $\overline{U}_r(x) \cap U_s(y) = \emptyset$;
- im Fall $d(x, y) \leq r - s$ gilt $\overline{U}_s(y) \subset \overline{U}_r(x)$.

13.06.2025 **Vorlesung 19**

11.4 Konvergenz in metrischen Räumen

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Punkten aus X *konvergiert* gegen ein $a \in X$ wenn

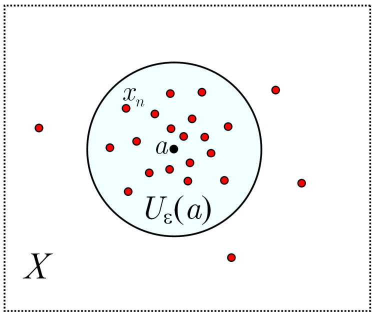
$$d(x_n, a) \to 0 \ \text{ für } \ n \to \infty.$$

Der Punkt a heißt der Grenzwert (=Limes) der Folge $\{x_n\}$. Schreibweise: $x_n \xrightarrow{d} a$ oder

$$d\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Die Bedingung $x_n \xrightarrow{d} a$ ist offensichtlich äquivalent zu jeder der folgenden Bedingungen:

1. $\forall \varepsilon > 0$ gilt $d(x_n, a) < \varepsilon$ für fast alle n;
2. $\forall \varepsilon > 0$ gilt $x_n \in U_\varepsilon(a)$ für fast alle n.



Beispiel. In $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ ist die Konvergenz $x_n \xrightarrow{d} a$ äquivalent zu $|x_n - a| \to 0$ und somit zur üblichen Konvergenz $x_n \to a$. Gleiches gilt in $\mathbb{C}$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y| = \|x - y\|_2$.

Bemerkung. In der Notation $d\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und $x_n \xrightarrow{d} a$ lässt man häufig “d” ausfallen wenn es klar ist, welche Metrik benutzt wird.

Behauptung. *Der Grenzwert einer Folge $\{x_n\}$ im metrischen Raum (X, d) ist eindeutig bestimmt (wenn er existieren).*

Beweis. Gilt $x_n \to a$ und $x_n \to b$ so erhalten wir

$$d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

woraus $d(a, b) = 0$ und somit $a = b$ folgt. ■

11.5 Stetige Abbildungen

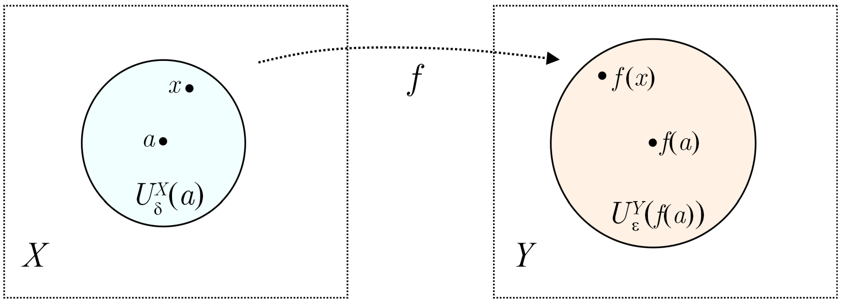
Definition. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung von X nach Y. Die Abbildung f heißt stetig in einem Punkt $a \in X$ wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \text{s.d. } \forall x \in X \text{ mit } \; d_X(x, a) < \delta \; \text{ gilt } \; d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon. \tag{11.9}$$

Die Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig wenn sie in allen Punkten $a \in X$ stetig ist.

Bezeichnen wir mit U^X und U^Y die metrischen Kugeln in X bzw Y. Dann ist (11.9) äquivalent zu folgendes:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \text{s.d. } \forall x \in U_\delta^X(a) \;\; \text{gilt} \;\; f(x) \in U_\varepsilon^Y(f(a)). \tag{11.10}$$



Lemma 11.4 *Die folgenden zwei Bedingungen sind äquivalent.*

(*i*) *Die Abbildung* $f : X \to Y$ *ist stetig in* $a \in X$.

(*ii*) *Für jede Folge* $\{x_n\} \subset X$ *mit* $x_n \to a$ *gilt* $f(x_n) \to f(a)$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Nach Voraussetzung gilt (11.10). Fixieren wir ein $\varepsilon > 0$ und zeigen dass für jede Folge $x_n \to a$ gilt

$$f(x_n) \in U_\varepsilon^Y(f(a)) \;\; \text{für fast alle } n, \tag{11.11}$$

woraus $f(x_n) \to f(a)$ folgen wird. Wählen wir $\delta > 0$ nach (11.10). Da $x_n \to a$ so gilt

$$x_n \in U_\delta^X(a) \;\; \text{für fast alle } n,$$

und nach (11.10) erhalten wir (11.11).

$(ii) \Rightarrow (i)$ Nehmen wir an, dass f in a unstetig ist. Die Negation von (11.10) laut:

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \; \exists x \in U_\delta^X(a) \;\; \text{mit} \; f(x) \notin U_\varepsilon^Y(f(a)). \tag{11.12}$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ verwenden wir (11.12) mit $\delta = \frac{1}{k}$ und erhalten ein $x_k \in U_{1/k}^X(a)$ mit

$$f(x_k) \notin U_\varepsilon^Y(f(a)).$$

Für die Folge $\{x_k\}$ gilt $x_k \to a$ da $d(x_k, a) < \frac{1}{k}$, aber $f(x_k) \not\to f(a)$, was im Widerspruch zur Voraussetzung (ii) steht. ■

Korollar 11.5 *Sind die Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$ (oder $f, g : X \to \mathbb{C}$) stetig in $a \in X$ so sind $f + g$, fg, f/g auch stetig in a sind (im Fall f/g vorausgesetzt, dass $g \neq 0$).*

Beweis. Zeigen wir, z.B., dass $f + g$ stetig in a ist. Für jede Folge $x_n \to a$ gilt nach dem Lemma 11.4 $f(x_n) \to f(a)$ und $g(x_n) \to g(a)$. Daraus folgt, dass $f(x_n) + g(x_n) \to f(a) + g(a)$, und nach dem Lemma 11.4 beschließen wir, dass $f + g$ in a stetig ist. ■

Beispiel. Fixieren wir einen Punkt $c \in X$ und betrachten die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ die mit $f(x) = d(x, c)$ definiert ist. Zeigen wir, dass diese Funktion stetig in jedem Punkt $a \in X$ ist. Sei $x_n \to a$. Es gilt nach (11.1)

$$|f(x_n) - f(a)| = |d(x_n, c) - d(a, c)| \leq d(x_n, a) \to 0,$$

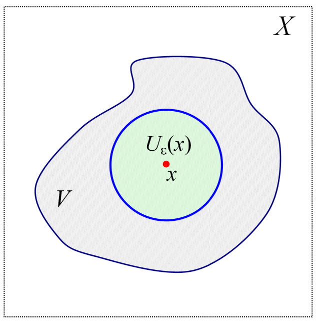
woraus folgt, dass $f(x_n) \to f(a)$ für $n \to \infty$.

Siehe auch Aufgabe 131 für eine Verallgemeinerung dieser Eigenschaft.

11.6 Offene und abgeschlossene Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition. Eine Menge $V \subset X$ heißt *offen* wenn $\forall x \in V \; \exists \varepsilon > 0$ s.d. $U_\varepsilon(x) \subset V$.



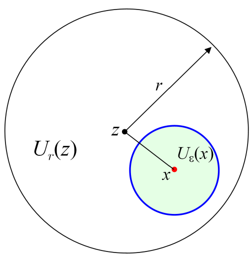
Eine offene Menge V

Beispiel. 1. Die leere Menge $\emptyset$ und die ganze Menge X sind offensichtlich offen.

2. Zeigen wir, dass jede offene metrische Kugel $U_r(z)$ eine offene Menge ist. Es reicht für jedes $x \in U_r(z)$ ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset U_r(z)$ zu finden. Nach dem Lemma 11.3 ist diese Bedingung erfüllt vorausgesetzt dass

$$d(x, z) \leq r - \varepsilon,$$

und diese Bedingung gilt mit $\varepsilon := r - d(x, z) > 0$.



Definition. Eine Menge $F \subset X$ heißt *abgeschlossen* wenn das Komplement $F^c := X \setminus F$ offen ist.

Beispiel. 1. Die Mengen $X = \emptyset^c$ und $\emptyset = X^c$ sind abgeschlossen.

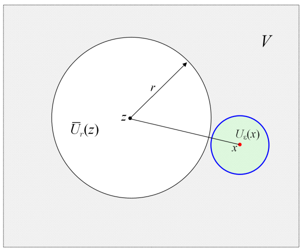
2. Zeigen wir, dass die abgeschlossene Kugel $\overline{U}_r(z)$ eine abgeschlossene Menge ist. Dafür reicht es zu zeigen, dass das Komplement

$$V := \overline{U}_r(z)^c = \{x \in X : d(x,z) > r\}$$

offen ist. Es reicht für jedes $x \in V$ ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset V$ zu finden, was äquivalent dazu, dass $U_\varepsilon(x)$ und $\overline{U}_r(z)$ disjunkt sind. Nach dem Lemma 11.3, die Kugeln $U_\varepsilon(x)$ und $\overline{U}_r(z)$ sind disjunkt wenn

$$d(x,z) \geq r + \varepsilon,$$

und diese Bedingung gilt mit $\varepsilon := d(x,z) - r > 0$.



Beispiel. In $\mathbb{R}$ ist jedes offenes Intervall $J = (a,b)$ eine offene Menge. In der Tat, im Fall $a, b \in \mathbb{R}$ stimmt J mit der offenen Kugel $U_r(c)$ überein wobei $c = \frac{a+b}{2}$ und $r = \frac{b-a}{2}$. Für unbeschränktes J beweist man die Offenheit von J direkt wie oberhalb. Jedes abgeschlossenes Intervall $J = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ist eine abgeschlossene Menge da $J = \overline{U}_r(c)$.

Satz 11.6 *Die folgenden Eigenschaften gelten für Teilmengen eines metrischen Raums X.*

(a) *Die Vereinigung von einem beliebigen Mengensystem von offenen Mengen ist offen.*

(b) *Der Schnitt von einem endlichen Mengensystem von offenen Mengen ist offen.*

(c) *Die Vereinigung von einem endlichen Mengensystem von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

(d) *Der Schnitt von einem beliebigen Mengensystem von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

Beweis. (a) Sei $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ein Mengensystem von offenen Mengen, wobei I eine beliebige Indexmenge ist. Zeigen wir, dass die Vereinigung

$$V = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha = \{x \in X : x \in V_\alpha \text{ für ein } \alpha \in I\}$$

offen ist, d.h. für jedes $x \in V$ existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset V$. In der Tat liegt x in einem V_α. Da V_α offen ist, so existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset V_\alpha$. Somit gilt auch $U_\varepsilon(x) \subset V$.

(b) Sei $V_1, V_2, ..., V_n$ eine endliche Folge von offenen Mengen. Zeigen wir, dass der Schnitt

$$V = \bigcap_{k=1}^{n} V_k = \{x \in X : x \in V_k \text{ für alle } k \in \{1, ..., n\}\}$$

offen ist. Jedes $x \in V$ liegt in allen V_k. Somit existiert für jedes $k = 1, ..., n$ ein $\varepsilon_k > 0$ mit $U_{\varepsilon_k}(x) \subset V_k$. Setzen wir

$$\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) > 0.$$

Dann gilt $U_\varepsilon(x) \subset V_k$ für alle $k = 1, ..., n$, woraus $U_\varepsilon(x) \subset V$ folgt.

Bemerkung. Der Schnitt unendlich vieler offenen Mengen muss nicht offen sein. Zum Beispiel, der Schnitt von allen offenen Intervallen $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist gleich $\{0\}$, was nicht offen ist.

(c) Sei $F_1, ..., F_n$ eine endliche Folge von abgeschlossenen Mengen in X. Dann sind alle Mengen F_k^c offen, und nach (b) ist die Menge

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} F_k^c$$

auch offen. Somit ist die Vereinigung $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ abgeschlossen.

(d) Ist $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ein Mengensystem von abgeschlossenen Mengen. Dann sind alle Mengen F_α^c offen, und nach (a) die folgende Menge

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha^c$$

ist auch offen. Somit ist der Durchschnitt $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ abgeschlossen. ∎

Satz 11.7 *Die folgenden Eigenschaften gelten für Teilmengen eines metrischen Raums X.*

(a) *Eine Menge $V \subset X$ ist offen genau dann, wenn V eine Vereinigung von offenen metrischen Kugeln ist.*

(b) *Eine Menge $F \subset X$ ist abgeschlossen genau dann, wenn für jede konvergente Folge aus F der Grenzwert auch in F liegt.*

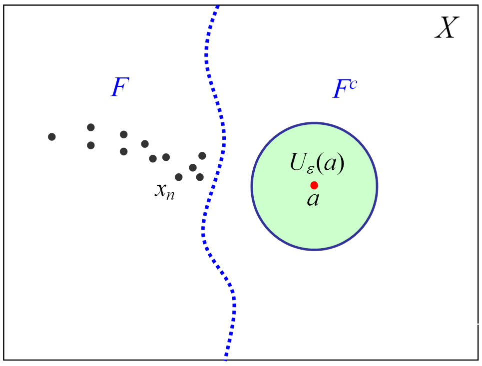
Beweis. (a) Sei V offen. Dann für jedes $x \in V$ existiert ein $\varepsilon_x > 0$ mit $U_{\varepsilon_x}(x) \subset V$. Es ist klar, dass

$$V = \bigcup_{x \in V} U_{\varepsilon_x}(x),$$

so dass V eine Vereinigung von offenen Kugeln ist. Umgekehrt, jede Vereinigung von offenen Kugeln ist nach dem Satz 11.6 eine offene Menge, da alle Kugeln offen sind.

18.06.2025 **Vorlesung 20**

(b) Sei F abgeschlossen. Sei $\{x_n\}$ eine konvergente Folge aus F mit $x_n \to a$. Zeigen wir, dass $a \in F$. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $a \notin F$ und somit $a \in F^c$. Da F^c offen ist, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subset F^c$.



Da $x_n \in F$, so erhalten wir, dass $x_n \notin U_\varepsilon(a)$, was im Widerspruch zu $x_n \to a$ steht.

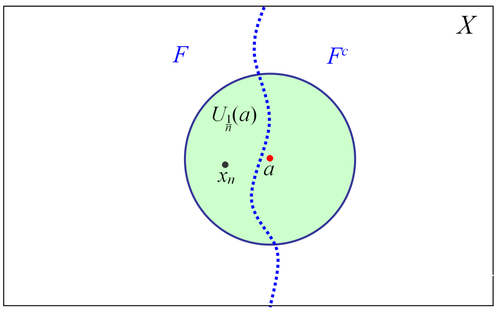
Beweisen wir jetzt die Umkehrung: enthält F die Grenzwerte von allen konvergenten Folgen aus F, dann ist F abgeschlossen. Dafür zeigen wir, dass F^c offen ist, d.h.

$$\forall a \in F^c \;\; \exists \varepsilon > 0 \;\text{ s.d. }\; U_\varepsilon(a) \subset F^c.$$

Nehmen wir das Gegenteil an:

$$\exists a \in F^c \; \forall \varepsilon > 0 \;\text{ gilt }\; U_\varepsilon(a) \not\subset F^c \quad \text{d.h.} \;\; U_\varepsilon(a) \cap F \neq \emptyset.$$

Insbesondere ist die Menge $U_\varepsilon(a) \cap F$ nicht-leer für jedes $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.



Somit gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in U_{1/n}(a) \cap F$. Dann ist $\{x_n\}$ eine Folge von Elementen von F mit $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$, woraus folgt $x_n \to a$. Somit soll auch a in F liegen, was im Widerspruch zu $a \in F^c$ steht. ■

Beispiel. Es folgt aus dem Satz 11.7(b) dass jede Menge $F = \{a\}$ die aus einem Punkt $a \in X$ besteht, abgeschlossen ist. Es folgt aus dem Satz 11.6(c) dass jede endliche Menge $F \subset X$ abgeschlossen ist.

11.7 Stetigkeit und offene Mengen

Stetigkeit von Abbildungen kann mit Hilfe des Begriffes von offenen/abgeschlossenen Mengen wie folgt charakterisiert werden.

Satz 11.8 *Seien X, Y zwei metrischen Räumen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.*

(a) *f ist stetig genau dann, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(V)$ eine offene Menge in X ist.*

(b) *f ist stetig genau dann, wenn für jede abgeschlossene Menge $F \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(F)$ eine abgeschlossene Menge in X ist.*

Hier bezeichnet f^{-1} die Urbildabbildung von f, d.h. $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$.

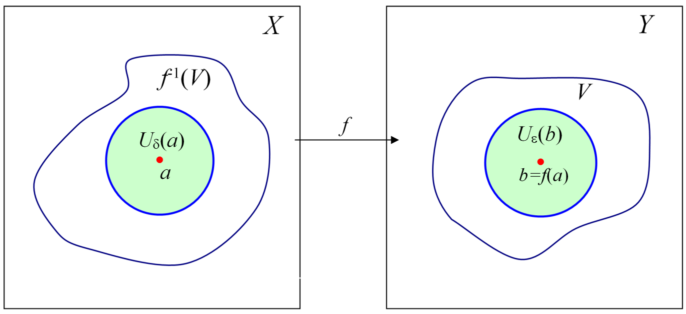
Kurz kann man den Satz 11.8 wie folgt umformulieren: stetige Urbilder von offenen (bzw abgeschlossen) Mengen sind offen (bzw abgeschlossen).

Beweis. (a) Sei f stetig. Beweisen wir, dass für jede offene Menge $V \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(V)$ offen ist. Fixieren wir ein $a \in f^{-1}(V)$ und setzen $b := f(a) \in V$. Da V offen, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$U_\varepsilon^Y(b) \subset V. \tag{11.13}$$

Nach der Stetigkeit von f in a gibt es ein $\delta > 0$ so dass

$$\forall x \in U_\delta^X(a) \text{ gilt } f(x) \in U_\varepsilon^Y(b). \tag{11.14}$$



Es folgt aus (11.13) und (11.14) dass

$$f\left(U_\delta^X(a)\right) \subset U_\varepsilon^Y(b) \subset V,$$

woraus folgt

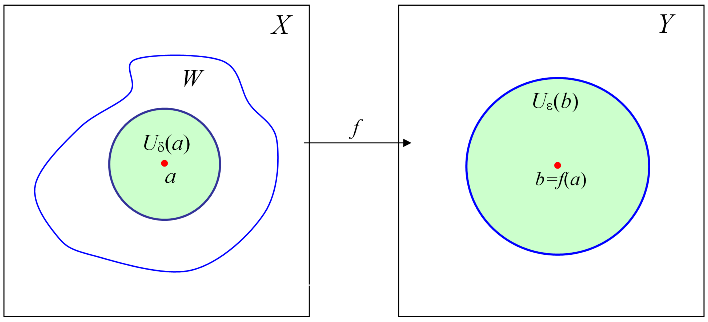
$$U_\delta^X(a) \subset f^{-1}(V),$$

und $f^{-1}(V)$ ist offen.

Sei $f^{-1}(V)$ offen für jede offene Menge $V \subset Y$. Beweisen wir, dass f stetig an jeder Stelle $a \in X$. Setzen wir $b = f(a)$ und zeigen dass

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \text{ s.d. } \ f\left(U_\delta^X(a)\right) \subset U_\varepsilon^Y(b),$$

was äquivalent zur Stetigkeit von f in a. Die Kugel $U_\varepsilon^Y(b)$ ist eine offene Menge in Y. Somit ist ihres Urbild $W = f^{-1}\left(U_\varepsilon^Y(b)\right)$ eine offene Menge in X.



Da $a \in W$, so existiert ein $\delta > 0$ mit

$$U_\delta^X(a) \subset W,$$

woraus folgt

$$f\left(U_\delta^X(a)\right) \subset f(W) \subset U_\varepsilon^Y(b).$$

(b) Für jede Menge $F \subset Y$ gilt

$$\left(f^{-1}(F)\right)^c = f^{-1}(F^c) = f^{-1}(V),$$

wobei $V = F^c$. Die Menge F ist abgeschlossen genau dass, wenn V offen ist, und $f^{-1}(F)$ ist abgeschlossen genau dann, wenn das Komplement $f^{-1}(V)$ offen ist. Somit ist die Bedingung

$$F \text{ ist abgeschlossen} \Rightarrow f^{-1}(F) \text{ ist abgeschlossen}$$

äquivalent zu

$$V \text{ ist offen} \Rightarrow f^{-1}(V) \text{ ist offen},$$

und die zweite Bedingung ist nach (a) äquivalent zur Stetigkeit von f. ■

Bemerkung. Das Mengensystem von allen offenen Mengen in metrischen Raum (X, d) heißt eine *Topologie* von X. Nach dem Satz 11.8 bestimmt die Topologie den Begriff der Stetigkeit der Abbildungen von X. Man kann zeigen dass auch Konvergenz von Folgen von der Topologie bestimmt ist (siehe Aufgabe128). Topologie ist auch die Bezeichnung für den Bereich von Mathematik, der sich mit den Begriffen Stetigkeit und Konvergenz befasst.

Korollar 11.9 *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei stetige Abbildungen von metrischen Räumen. Dann ist die Verkettung $g \circ f : X \to Z$ stetig.*

Beweis. Wir haben

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$

Da $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, so gilt für jede Menge $V \subset Z$

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right).$$

Betrachten wir das folgende Diagramm von Urbildabbildungen:

$$\begin{array}{ccccc}
f^{-1}(g^{-1}(V)) & \leftarrow & g^{-1}(V) & \leftarrow & V \\
\cap & & \cap & & \cap \\
X & & Y & & Z
\end{array}$$

Ist V offen in Z, so $g^{-1}(V)$ ist offen in Y und somit $f^{-1}(g^{-1}(V))$ ist offen in X. Wir beschließen, dass $(g \circ f)^{-1}(V)$ offen in X ist, und die Abbildung $g \circ f$ ist stetig nach dem Satz 11.8. ■

11.8 Äquivalente Metriken

Hier vergleichen wir verschiedene Metriken in einer Menge X.

Definition. Seien d_1 und d_2 zwei Metriken in X. Man sagt, dass d_1 und d_2 *äquivalent* sind und schreibt $d_1 \sim d_2$, wenn es positive Konstanten c, C gibt s.d. für alle $x, y \in X$

$$c d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C d_1(x, y). \tag{11.15}$$

Die Bedingung (11.16) ist äquivalent zu

$$c \leq \frac{d_2(x, y)}{d_1(x, y)} \leq C$$

für alle verschiedene $x, y \in X$. Es ist offensichtlich, dass die Äquivalenz von Metriken eine Äquivalenzrelation ist, d.h. reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Satz 11.10 *Seien d_1 und d_2 zwei äquivalente Metriken in X. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(a) *Die Begriffe von der Konvergenz von Folgen in X bezüglich d_1 und d_2 stimmen überein, d.h. $x_n \xrightarrow{d_1} a \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d_2} a$*

(b) *Die Begriffe von offenen und abgeschlossenen Mengen in X bezüglich d_1 und d_2 stimmen überein.*

(c) *Die Begriffe von stetigen Abbildung von X bezüglich d_1 und d_2 stimmen überein.*

Beweis. (a) Für eine Folge $\{x_k\}$ aus X gilt nach (11.15):

$$x_k \xrightarrow{d_1} a \Leftrightarrow d_1(x_k, a) \to 0 \Leftrightarrow d_2(x_k, a) \to 0 \Leftrightarrow x_k \xrightarrow{d_2} a,$$

was zu beweisen war.

(b) Die abgeschlossen Mengen lassen sich mit Hilfe von Konvergenz formulieren (Satz 11.7(b)). Somit folgt (b) aus (a).

(c) Die Stetigkeit lässt sich auch mit Hilfe von Konvergenz definieren (Lemma 11.4), so dass (c) aus (a) folgt. ∎

Bemerkung. Der Satz 11.10 bedeutet dass die Topologien von (X, d_1) und (X, d_2) übereinstimmen.

Definition. Zwei Normen N_1 und N_2 in einem Vektorraum V heißen äquivalent when wenn es positive Konstanten c, C gibt s.d. für alle $x \in V$

$$c N_1(x) \leq N_2(x) \leq C N_1(x). \tag{11.16}$$

Es folgt aus (11.16) dass auch die Metriken $d_1(x, y) = N_1(x - y)$ und $d_2(x, y) = N_2(x - y)$ äquivalent sind.

Satz 11.11 *Alle p-Normen in $\mathbb{R}^n$ für $p \in [1, +\infty]$ sind äquivalent.*

Es folgt dass die Topologien von allen p-Normen in $\mathbb{R}^n$ identisch sind. Man kann beweisen dass dass *alle* Normen in $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind (siehe Aufgabe 135).

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass jede p-Norm zur ∞-Norm äquivalent ist. Für jede $p \in [1, \infty)$ gilt

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \geq (\max \{|x_k|\}^p)^{1/p} = \|x\|_\infty$$

und

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \leq (n \max \{|x_k|\}^p)^{1/p} = n^{1/p} \|x\|_\infty$$

woraus folgt

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty. \tag{11.17}$$

Somit sind $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent. ■

Bemerkung. Da $n^{1/p} \to 1$ für $p \to \infty$ so folgt aus (11.17) dass $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$ für $p \to \infty$, was die Notation $\|x\|_\infty$ rechtfertigt.

11.9 Vollständigkeit

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $\{x_n\} \subset X$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn

$$d(x_n, x_m) \to 0 \text{ für } n, m \to \infty.$$

Behauptung *Jede konvergente Folge $\{x_n\}$ ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. In der Tat, gilt $x_n \to a$, so erhalten wir

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) \to 0 \text{ für } n, m \to \infty.$$

■

Die Umgekehrte Aussage (d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert) gilt in $\mathbb{R}$, aber nicht für beliebige metrische Räume.

Beispiel. Jede Teilmenge $Y \subset X$ eines metrischen Raum (X, d) lässt sich als metrischer Raum (Y, d) betrachten. Dann heißt (Y, d) *Unterraum* von (X, d).

Z.B. Betrachten wir die Menge $Y = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ als ein metrischer Raum. Die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ ist eine Cauchy-Folge in Y, aber diese Folge ist in Y nicht konvergent.

Definition. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig* wenn jede Cauchy-Folge in X konvergent ist.

Z.B. $\mathbb{R}$ ist vollständig während die Menge $(0, +\infty)$ als metrischer Raum unvollständig ist.

Definition. Ein normierter Vektorraum (V, N) heißt vollständig wenn der metrische Raum (V, d) mit der induzierten Metrik $d(x, y) = N(x - y)$ vollständig ist. Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt *Banachraum*.

Zum Beispiel, $\mathbb{R}$ ist ein Banachraum.

Satz 11.12 *Sei S beliebige nicht-leere Menge. Der normierte Vektorraum $B(S)$ von allen beschränkten reellwertigen Funktionen auf S mit der* sup*-Norm ist ein Banachraum.*

20.06.2025 Vorlesung 21

Bemerkung. Erinnern wir uns an die Definition der sup-Norm: für alle $f \in B(S)$

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)| .$$

Die entsprechende Metrik ist

$$d(f, g) = \|f - g\| .$$

Die Konvergenz $f_n \xrightarrow{d} f$ ist äquivalent zu $\|f_n - f\| \to 0$. Diese Konvergenz heißt *gleichmäßige* Konvergenz und wird mit $f_n \rightrightarrows f$ bezeichnet.

Beweis. Sei $\{f_n\}$ eine Cauchy-Folge in $B(S)$, so dass

$$\|f_n - f_m\| \to 0 \text{ für } n, m \to \infty. \tag{11.18}$$

Zeigen wir, dass die Folge $\{f_n\}$ in $B(S)$ konvergiert. Für jedes $x \in S$ haben wir

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup |f_n - f_m| = \|f_n - f_m\| \to 0 \text{ für } n, m \to \infty,$$

woraus folgt, dass für jedes $x \in S$ die Folge $\{f_n(x)\}$ von reellen Zahlen eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Dann ist die Folge $\{f_n(x)\}$ konvergent für jedes $x \in S$. Setzen wir

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x) , \tag{11.19}$$

d.h. $f_k \to f$ punktweise.

Zeigen wir, dass die Funktion f auf S beschränkt ist. Nach der Dreiecksungleichung für Norm gilt

$$|\|f_n\| - \|f_m\|| \leq \|f_n - f_m\| \to 0 \text{ für } n, m \to \infty.$$

Folglich ist die Folge $\{\|f_n\|\}$ konvergent und somit beschränkt, sei

$$\|f_n\| \leq C \text{ für alle } n.$$

Es folgt aus (11.19) dass auch $\sup |f| \leq C$ so dass $f \in B(S)$.

Es bleibt zu beweisen dass $\|f_n - f\| \to 0$ für $n \to \infty$ (d.h. $f_n \rightrightarrows f$). Nach (11.18) haben wir:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall n, m > N \text{ gilt } \sup_S |f_n - f_m| < \varepsilon.$$

Es folgt, dass für jedes $x \in S$ und alle $n, m > N$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Für $m \to \infty$ erhalten wir aus (11.19), dass für jedes $x \in S$ und alle $n > N$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

woraus folgt $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ für alle $n > N$ und somit $\|f_n - f\| \to 0$. ∎

Korollar 11.13 *Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist ein Banachraum bezüglich jeder p-Norm, $p \in [1, \infty]$.*

Beweis. Bemerken wir, dass $\mathbb{R}^n = B(\mathcal{E}_n)$ mit $\mathcal{E}_n = \{1, 2, ..., n\}$, da jede Funktion $f : \mathcal{E}_n \to \mathbb{R}$ mit der Folge $x = (f(1), ..., f(n)) \in \mathbb{R}^n$ identifiziert werden kann. Es gilt auch

$$\|f\| = \sup_{\mathcal{E}_n} |f| = \max_{1 \le k \le n} \{f(k)\} = \|x\|_\infty .$$

Nach dem Satz 11.12 ist $B(\mathcal{E}_n)$ vollständig bezüglich der sup-Norm, woraus folgt dass $\mathbb{R}^n$ vollständig bezüglich der ∞-Norm ist. Es folgt aus dem Satz 11.11, dass $\mathbb{R}^n$ vollständig auch bezüglich der p-Norm ist. ■

11.10 Unterraum

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für beliebige Teilmenge Y von X ist dann (Y, d) auch ein metrischer Raum der als ein metrischer *Unterraum* von X bezeichnet ist.

Satz 11.14 *Sei (X, d) vollständig. Dann (Y, d) ist vollständig genau dann wenn Y eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.*

Beweis. Sei Y abgeschlossen. Beweisen wir, dass jede Cauchy-Folge $\{x_n\} \subset Y$ in Y konvergiert. Da X vollständig ist so konvergiert die Folge $\{x_n\}$ in X, z.B. gegen ein $a \in X$. Da $\{x_n\} \subset Y$ und Y abgeschlossen ist, so gilt $a \in Y$, was zu beweisen war.

Sei jetzt (Y, d) vollständig. Beweisen wir, dass Y eine abgeschlossene Teilmenge von X ist. Sei $\{x_n\}$ eine Folge aus Y die gegen ein $a \in X$ konvergiert. Dann ist $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge in X und somit auch in Y. Folglich konvergiert $\{x_n\}$ in Y woraus folgt dass $a \in Y$. Daher ist Y eine abgeschlossene Teilmenge von X. ■

Beispiel. Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist somit ein vollständiger metrischer Raum.

Bezeichnen wir mit $C[a, b]$ die Menge von allen stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Da alle stetigen Funktionen auf $[a, b]$ beschränkt sind, so gilt $C[a, b] \subset B[a, b]$. Es ist klar dass $C[a, b]$ ein linearer Unterraum von $B[a, b]$ ist. Wir betrachten $C[a, b]$ als ein normierter Vektorraum mit der sup-Norm. Bemerken wir, dass $C[a, b]$ *unendlich* dimensional ist.

Satz 11.15 *Der Vektorraum $C[a, b]$ ist ein Banachraum bezüglich der* sup*-Norm.*

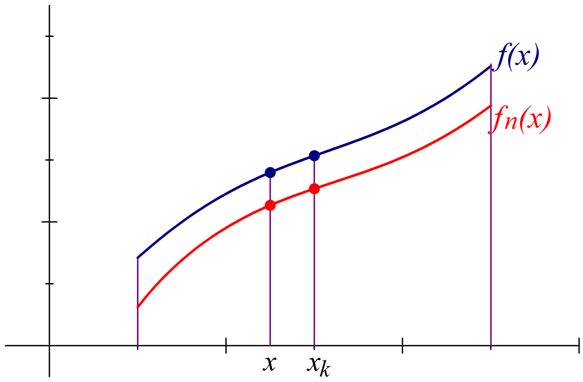
Beweis. Um die Vollständigkeit von $C[a, b]$ zu beweisen, reicht es nach dem Satz 11.14 zu zeigen, dass $C[a, b]$ eine abgeschlossene Teilmenge von $B[a, b]$ ist. Sei $\{f_n\}$ eine Folge aus $C[a, b]$ und nehmen wir an dass $f_n \rightrightarrows f$ wobei $f \in B[a, b]$. Wir müssen beweisen, dass $f \in C[a, b]$.

Fixieren wir einen Punkt $x \in [a, b]$ und beweisen, dass f in x stetig ist. Dafür reicht es zu beweisen, dass für jede Folge $\{x_k\} \subset [a, b]$ mit $x_k \to x$ gilt $f(x_k) \to f(x)$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } |f(x_k) - f(x)| < \varepsilon \text{ für fast alle } k.$$

Bemerken wir, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ nach der Dreiecksungleichung gilt

$$|f(x_k) - f(x)| \le |f(x_k) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| . \tag{11.20}$$



Da $\|f_n - f\| \to 0$ für $n \to \infty$, so gibt es n mit

$$\|f_n - f\| < \varepsilon/3,$$

woraus folgt, dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \quad \text{und} \quad |f_n(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon/3 \quad \text{für alle } k.$$

Da f_n stetig ist, so gilt

$$|f_n(x_k) - f_n(x)| < \varepsilon/3 \quad \text{für fast alle } k.$$

Einsetzen in (11.20) ergibt $|f(x_k) - f(x)| < \varepsilon$ für fast alle k, was zu beweisen war. ■

11.11 Fixpunktsatz von Banach

Definition. Sei X eine Menge und $f : X \to X$ eine Selbstabbildung. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Fixpunkt* von f wenn $f(x) = x$.

In diesem Abschnitt betrachten wir die Bedingungen für Existenz eines Fixpunktes.

Beispiel. Zeigen wir, dass jede stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ einen Fixpunkt hat. In der Tat ist die Funktion $f(x) - x$ nichtnegativ an $x = 0$ und nichtpositiv an $x = 1$. Nach dem Zwischenwertsatz hat die Funktion $f(x) - x$ eine Nullstelle, die ein Fixpunkt von f ist.

Andererseits es gibt viele Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ohne Fixpunkt, z.B. $f(x) = x + 1$.

Beispiel. Betrachten wir die Gleichung $P(x) = 0$ wobei P eine reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist. Jede Nullstelle x von P erfüllt offensichtlich die Gleichung

$$x = x - cP(x)$$

für beliebige Konstante $c \neq 0$. Folglich stimmen die Nullstellen von P mit den Fixpunkten der Funktion $f(x) = x - cP(x)$ überein. Berechnen der Nullstelle einer Funktion ist somit äquivalent zum Berechnen des Fixpunktes einer anderen Funktion.

Definition. Eine Selbstabbildung $f : X \to X$ eines metrischen Raums (X, d) heißt *Kontraktionsabbildung* wenn es eine Konstante $q \in (0,1)$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \le q\, d(x,y) \quad \forall x, y \in X. \tag{11.21}$$

Hauptsatz 11.16 (Fixpunktsatz von Banach) *Seien (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $f: X \to X$ eine Kontraktionsabbildung. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt.*

Zuerst beweisen wir ein Lemma.

Lemma 11.17 *Gilt für eine Folge $\{x_n\}$ in einem metrischen Raum (X,d)*

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq Cq^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{11.22}$$

für ein $q \in (0,1)$ und $C > 0$, so ist $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge.

Beweis. In der Tat, für jede $m > n$ erhalten wir aus (11.22) mit Hilfe von der Dreiecksungleichung, dass

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq C\left(q^n + q^{n+1} + ... + q^{m-1}\right) \\ &\leq Cq^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k \\ &= \frac{Cq^n}{1-q} \to 0 \text{ für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $d(x_m, x_n) \to 0$ für $n, m \to \infty$, d.h. $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist. ■

Beweis von dem Satz 11.16. Wählen wir einen beliebigen Punkt $x_0 \in X$ und definieren per Induktion eine Folge $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ durch

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Wir beweisen, dass die Folge $\{x_n\}$ konvergiert in X und der Grenzwert ein Fixpunkt von f ist.

Bemerken wir, dass

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq qd(x_n, x_{n-1}).$$

Per Induktion erhalten wir, dass

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_0).$$

Nach dem Lemma 11.17 mit $C = d(x_1, x_0)$ erhalten wir, dass die Folge $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist.

Nach der Vollständigkeit von (X,d) konvergiert die Folge $\{x_n\}$ gegen einen Punkt $a \in X$. Daraus folgt

$$f(x_n) \to f(a),$$

für $n \to \infty$ da

$$d(f(x_n), f(a)) \leq qd(x_n, a) \to 0.$$

Andererseits gilt

$$f(x_n) = x_{n+1} \to a$$

für $n \to \infty$, woraus folgt $f(a) = a$. Also, a ist ein Fixpunkt.

Sind a, b zwei Fixpunkte, so gilt es nach (11.21)

$$d(a,b) = d(f(a), f(b)) \le q d(a,b),$$

woraus folgt $d(a,b) = 0$ und somit $a = b$. ∎

Bemerkung. Der Beweis des Fixpunktsatzes ergibt die folgende Methode um den Fixpunkt zu bestimmen bzw zu approximieren. Man fängt mit einem beliebigen Punkt x_0 an und bildet induktiv die Folge von *Näherungslösungen* wie folgt:

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{11.23}$$

die gegen einen Fixpunkt konvergiert. Die Folge $\{x_n\}$ heißt die *Fixpunktiteration*.

Beispiel. Fixieren ein $a > 0$ und betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Man kann zeigen, dass f auf $X = [\sqrt{a}, \infty)$ eine Selbstabbildung ist und sogar eine Kontraktionsabbildung ist, was aus der Ungleichung

$$\sup_X |f'| < 1$$

folgt (siehe Aufgabe 129). Die Menge $X \subset \mathbb{R}$ ist ein vollständiger metrischer Raum da X eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Somit konvergiert die Fixpunktiteration $\{x_n\}$ gegen einen Fixpunkt x. Der Gleichung $f(x) = x$ hat eine positive Lösung $x = \sqrt{a}$ woraus folgt dass $x_n \to \sqrt{a}$. Insbesondere lassen sich x_n als Annäherungen von $\sqrt{a}$ betrachten. Nach (11.23) haben wir

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

und x_0 kann beliebig in X gewählt werden. Zum Beispiel, sei $a = 2$. Setzen wir $x_0 = 2$ und

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Dann gilt $x_1 = f(2) = \frac{3}{2}$, $x_2 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{17}{12}$, $x_3 = f\left(\frac{17}{12}\right) = \frac{577}{408}$, $x_4 = f\left(\frac{577}{408}\right) = \frac{665\,857}{470\,832}$ und

$$x_5 = f\left(\frac{665\,857}{470\,832}\right) = \frac{886\,731\,088\,897}{627\,013\,566\,048} = 1.41421356237309505...,$$

was schon eine gute Annäherung von $\sqrt{2}$ mit 17 richtigen Nachkommastellen ist.

25.06.2025 Vorlesung 22

11.12 Kompakte Mengen und Extremwertsatz

Ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$ heißt kompakt when J beschränkt und abgeschlossen ist. Wir kennen die folgenden zwei wichtigen Eigenschaften von kompakten Intervallen.

1. Satz von Bolzano-Weierstraß: jede beschränkte Folge von reellen Zahlen hat eine Konvergente Teilfolge, was sich wie folgt umformulieren lässt: für jede Folge aus einem kompakten Intervall J gibt es konvergente Teilfolge mit dem Grenzwert in J.

2. Extremwertsatz: jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall J hat Maximum- und Minimumstellen. Zusammen mit dem Zwischenwertsatz ergibt sich daraus folgendes Korollar: das Bild eines kompakten Intervalls unter einer stetigen Funktion ist wiederum ein kompaktes Intervall.

In diesem Abschnitt definieren wir den Begriff von kompakten Teilmengen eines metrischen Raums und beweisen die ähnlichen Eigenschaften. Darüber hinaus beweisen wir dass eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ genau dann kompakt ist wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Seien (X, d) ein metrischer Raum space und K eine Teilmenge von X.

Definition. Eine *Überdeckung* von K ist ein Mengensystem $\{V_\alpha\}_{\alpha\in S}$ von Teilmengen von X (wobei S eine beliebige Indexmenge ist), die K überdeckt, d.h.

$$K \subset \bigcup_{\alpha\in S} V_\alpha,$$

Die Überdeckung $\{V_\alpha\}_{\alpha\in S}$ heißt *offen* wenn alle V_α offene Teilmengen von X sind.

Definition. Sei T eine Teilmenge von S. Die Familie $\{V_\alpha\}_{\alpha\in T}$ heißt *Teilüberdeckung* von $\{V_\alpha\}_{\alpha\in S}$ wenn sie auch K überdeckt.

Definition. Eine Menge $K \subset X$ heißt *kompakt* wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung enthält. Eine kompakte Menge K heißt auch ein *Kompaktum*.

Es ist offensichtlich, dass jede endliche Menge K kompakt ist. Unterhalb beweisen wir, dass jedes abgeschlossenes beschränktes Intervall eine kompakte Menge ist. Andererseits, ein offenes oder halboffenes Intervall ist nicht kompakt. Zum Beispiel, das offene Intervall $K = (0, 1)$ hat eine Überdeckung $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $V_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right)$ die keine endliche Teilüberdeckung enthält

Eine von wichtigsten Eigenschaften von Kompaktheit ist die folgende Beziehung zur Stetigkeit.

Satz 11.18 *Seien X und Y zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Ist $K \subset X$ kompakt so ist auch das Bild $f(K) \subset Y$ kompakt.*

Kurz: stetiges Bild einer kompakten Menge ist kompakt.

Beweis. Sei $\{V_\alpha\}_{\alpha\in S}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$, so dass

$$f(K) \subset \bigcup_{\alpha\in S} V_\alpha.$$

Anwendung von Urbildabbildung f^{-1} ergibt

$$K \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in S} V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in S} f^{-1}(V_\alpha).$$

Nach dem Satz 11.8 ist $f^{-1}(V_\alpha)$ eine offene Menge in X und somit ist $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha\in S}$ eine offene Überdeckung von K in X. Nach der Kompaktheit von K gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha\in T}$ von K, d.h.

$$K \subset \bigcup_{\alpha\in T} f^{-1}(V_\alpha)$$

woraus folgt

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{\alpha\in T} f^{-1}(V_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha\in T} f\left(f^{-1}(V_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha\in T} V_\alpha.$$

Somit ist $\{V_\alpha\}_{\alpha\in T}$ eine endliche Teilüberdeckung von $f(K)$, was die Kompaktheit von $f(K)$ beweist. $\blacksquare$

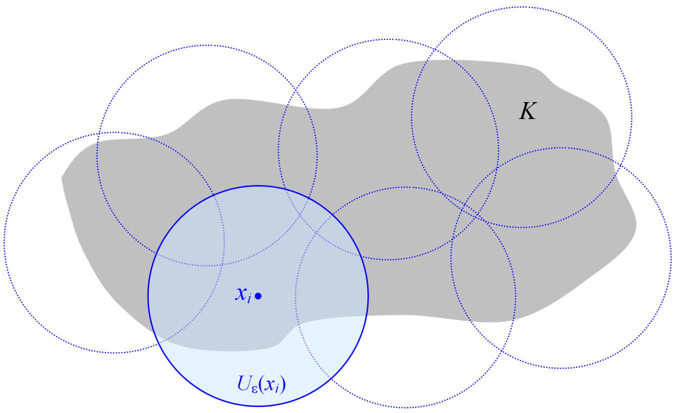
Unser nächstes Ziel ist eine Beschreibung von kompakten Mengen in vollständigen metrischen Räumen, insbesondere in $\mathbb{R}^n$.

Definition. Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt *beschränkt* wenn sie in einer metrischen Kugel liegt.

Jede Kugel ist somit immer beschränkt. Auch jedes beschränktes Intervall in $\mathbb{R}$ ist eine beschränkte Teilmenge von X.

Definition. Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt *totalbeschränkt* wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung von K mit Kugeln von Radius ε gibt.

Die letzte Bedingung bedeutet folgendes: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Folge $\{x_i\}_{i=1}^n$ von Punkten in X so dass $\{U_\varepsilon(x_i)\}_{i=1}^n$ eine Überdeckung von K ist.



Definition. Sei K eine Teilmenge von X. Eine endliche Folge $\{x_i\}_{i=1}^n$ von Punkten von X heißt ε-*Netz* von K wenn die Folge von Kugeln $\{U_\varepsilon(x_i)\}_{i=1}^n$ eine Überdeckung von K ist.

Somit ist K totalbeschränkt genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein ε-Netz $\{x_i\}_{i=1}^n$ von K gibt. Ein ε-Netz lässt sich als eine endliche Approximation von K mit dem Approximationsfehler $< \varepsilon$ betrachten wie folgt: für jedes $x \in K$ gibt es ein x_i mit $d(x, x_i) < \varepsilon$.

Man kann zeigen, dass die Punkte x_i in Definition von totalbeschränkter Menge K immer aus K gewählt werden können (siehe Aufgabe 131).

Die folgenden Aussagen folgen direkt nach Definition.

- Jede Teilmenge einer beschränkten Menge ist beschränkt.
- Jede Teilmenge einer totalbeschränkten Menge ist totalbeschränkt.

Es gelten auch die folgenden Eigenschaften von beschränkten und totalbeschränkten Mengen (siehe Aufgabe 137)

- Vereinigung endlich vieler beschränkten Mengen ist auch beschränkt.
- Vereinigung endlich vieler totalbeschränkten Mengen ist auch totalbeschränkt.
- Jede totalbeschränkte Menge ist beschränkt.

Es gibt beschränkte Mengen die nicht totalbeschränkt sind, z.B. eine Kugel im Raum $C[a,b]$ ist nicht totalbeschränkt obwohl offensichtlich beschränkt ist (siehe Aufgabe 137).

Im nächsten Satz beweisen wir, dass in $\mathbb{R}^n$ die Beschränktheit und Totalbeschränktheit äquivalent sind.

Satz 11.19 *In $\mathbb{R}^n$ mit beliebiger p-Metrik sind Beschränktheit und Totalbeschränktheit äquivalent.*

Beweis. Da die p-Metrik und die ∞-Metrik äquivalent sind, so reicht es diese Aussage für $p=\infty$ zu beweisen. Da jede totalbeschränkte Menge immer beschränkt ist, so bleibt es zu zeigen, dass jede beschränkte Menge $K\subset\mathbb{R}^n$ auch totalbeschränkt ist. Dafür reicht es zu beweisen dass jede Kugel $U_r^{\mathbb{R}^n}(0)$ in $\mathbb{R}^n$ (bezüglich der ∞-Norm) totalbeschränkt ist.

Beweis per Induktion nach n. Induktionsanfang für $n=1$: zeigen wir, dass jedes beschränktes Intervall J in $\mathbb{R}$ totalbeschränkt ist. Dafür betrachten wir für jedes $\varepsilon>0$ die Folge von Intervallen

$$U_\varepsilon(\varepsilon k)=(\varepsilon(k-1),\varepsilon(k+1)),\quad k\in\mathbb{Z}$$

die offensichtlich eine Überdeckung von $\mathbb{R}$ ist. Das beschränkte Intervall J hat nicht leeren Schnitt mit endlich vieler Intervallen $U_\varepsilon(\varepsilon k)$, die somit eine endliche Überdeckung von J ergeben.

Für den Induktionsschritt beweisen wir zuerst die folgenden Aussagen.

Behauptung. *Für $x\in\mathbb{R}^k$ und $y\in\mathbb{R}^l$ betrachten wir das Paar (x,y) als Element von $\mathbb{R}^{k+l}$. Dann gilt*

$$\|(x,y)\|_\infty=\max\left(\|x\|_\infty,\|y\|_\infty\right). \tag{11.24}$$

Sei $x=(x_1,...,x_k)$ und $y=(y_1,...,y_l)$ so dass

$$(x,y)=(x_1,...,x_k,y_1,...,y_l).$$

Dann gilt

$$\|x\|_\infty=\max(|x_1|,...,|x_k|),\qquad \|y\|_\infty=\max(|y_1|,...,|y_l|)$$

und somit

$$\|(x,y)\|_\infty=\max(|x_1|,...,|x_k|,|y_1|,...,|y_l|)=\max\left(\|x\|_\infty,\|y\|_\infty\right).$$

Behauptung. *Bezeichnen wir mit $U_r^{\mathbb{R}^n}$ die Kugel in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der ∞-norm von radius r mit dem Zentrum 0. Dann gilt für $k+l=n$*

$$U_r^{\mathbb{R}^n} = U_r^{\mathbb{R}^k} \times U_r^{\mathbb{R}^l}.$$

Die Kugel $U_r^{\mathbb{R}^n}$ besteht aus den Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^n$, wobei $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^l$, mit $\|(x,y)\|_\infty < r$ was nach (11.24) äquivalent zu

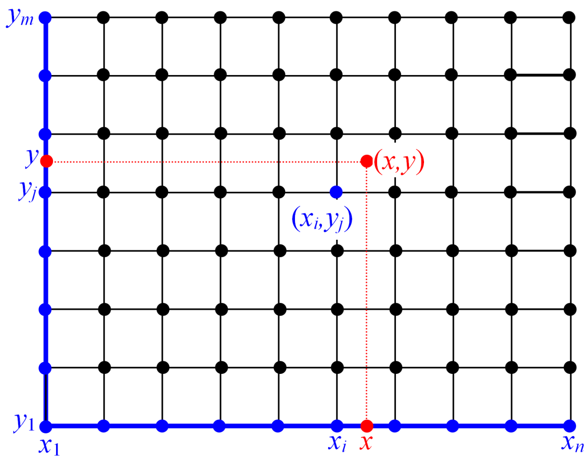
$$\|x\|_\infty < r \quad \text{und} \quad \|y\|_\infty < r$$

ist. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} U_r^{\mathbb{R}^n} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^n : \|(x,y)\|_\infty < r\} \\ &= \left\{(x,y) : x \in \mathbb{R}^k,\ y \in \mathbb{R}^l \text{ mit } \|x\|_\infty < r \quad \text{und} \quad \|y\|_\infty < r\right\} \\ &= \left\{(x,y) : x \in U_r^{\mathbb{R}^k},\ y \in U_r^{\mathbb{R}^l}\right\} \\ &= U_r^{\mathbb{R}^k} \times U_r^{\mathbb{R}^l}. \end{aligned}$$

Behauptung. *Seien $X \subset \mathbb{R}^k$ und $Y \subset \mathbb{R}^l$ totalbeschränkte Mengen. Dann ist das Produkt $X \times Y \subset \mathbb{R}^{k+l}$ auch totalbeschränkt.*

Fixieren ein $\varepsilon > 0$. Seien $\{x_i\}_{i=1}^n$ und $\{y_j\}_{j=1}^m$ die ε-Netze von X bzw Y. Für jedes $x \in X$ gibt es ein $x_i \in \mathbb{R}^k$ mit $d_\infty(x, x_i) < \varepsilon$ und für jedes $y \in Y$ gibt es ein $y_j \in \mathbb{R}^l$ mit $d_\infty(y, y_j) < \varepsilon$. Wie behaupten, dass die Doppelfolge $\{(x_i, y_j)\}$ von nm Punkten in $\mathbb{R}^{k+l}$ ein ε-Netz von $X \times Y$ ist.



In der Tat, für jedes $(x,y) \in X \times Y$ wählen wir x_i und y_j wie oberhalb und erhalten

$$d_\infty((x,y),(x_i,y_j)) = \|(x,y) - (x_i,y_j)\|_\infty = \max\left(\|x - x_i\|_\infty, \|y - y_j\|_\infty\right) < \varepsilon.$$

Jetzt können wir den Induktionsschritt von n nach $n+1$ durchführen. Da $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, so gilt

$$U_r^{\mathbb{R}^{n+1}} = U_r^{\mathbb{R}^n} \times U_r^{\mathbb{R}}.$$

Da $U_r^{\mathbb{R}^n}$ und $U_r^{\mathbb{R}}$ totalbeschränkt sind, so ist $U_r^{\mathbb{R}^{n+1}}$ auch totalbeschränkt. ∎

Definition. Eine Menge $K \subset X$ heißt *folgenkompakt* wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge mit dem Grenzwert in K enthält.

Zum Beispiel, jedes abgeschlossenes beschränktes Intervall $[a, b]$ ist folgenkompakt nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass, während ein offenes Intervall (a, b) nicht folgenkompakt ist.

Hauptsatz 11.20 (Äquivalente Bedingungen für Kompaktheit) *Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und K eine Teilmenge von X. Die folgenden drei Bedingungen sind äquivalent.*

(i) K ist kompakt.

(ii) K ist folgenkompakt.

(iii) K ist totalbeschränkt und abgeschlossen.

Bemerkung. Sei $J = [a, b]$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall. Dann erfüllt J die Bedingung (iii). Die Implikation $(iii) \Rightarrow (ii)$ ergibt, dass J folgenkompakt ist, was äquivalent zum Satz von Bolzano-Weierstrass. Die Implikation $(iii) \Rightarrow (i)$ ergibt, dass J eine kompakte Menge ist, was *Überdeckungssatz* heißt.

Beweis. Wir beweisen die Implikationen $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

Beweis von $(ii) \implies (iii)$. Zeigen wir zuerst, dass K abgeschlossen ist. Dafür beweisen wir dass für jede Folge $\{x_n\}$ in K, die einen Grenzwert $a \in X$ hat, gilt $a \in K$.Nach der Folgenkompaktheit von K besitzt $\{x_n\}$ eine konvergente Teilfolge mit dem Grenzwert in K. Da der Grenzwert der Teilfolge auch gleich a ist, so erhalten wir $a \in K$.

Beweisen wir jetzt, dass K totalbeschränkt ist, d.h. es für jedes $\varepsilon > 0$ ein ε-Netz von K gibt. Nehmen wir das Gegenteil an, dass es für ein $\varepsilon > 0$ kein ε-Netz gibt. Definieren wir dann induktiv eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ wie folgt. Sei $x_1 \in K$ beliebig. Sind $x_1, ..., x_n$ schon bestimmt, so wählen wir x_{n+1} wie folgt. Die Kugeln $\{U_\varepsilon (x_i)\}_{i=1}^{n}$ überdecken K nicht, da sonst $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ ein ε-Netz wäre. Somit gibt es einen Punkt in K, der in keiner Kugel $U_\varepsilon (x_i)$, $i = 1, ..., n$ liegt, so bezeichnen wir diesen Punkt mit x_{n+1}.

Nach Konstruktion gilt $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ für beliebige zwei Indizes $n \neq m$. Daraus folgt, dass $\{x_n\}$ keine Cauchy-Folge ist und darüber hinaus keine Teilfolge von $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist. Somit ist keine Teilfolge von $\{x_n\}$ konvergent, was in Widerspruch zur Folgenkompaktheit von X ist.

27.06.2025 Vorlesung 23

Beweis von $(i) \implies (ii)$. Wir benutzen die folgende Terminologie. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* einer Folge $\{x_n\}$ aus X wenn x der Grenzwert einer Teilfolge von $\{x_n\}$ ist. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Verdichtungspunkt* von $\{x_n\}$ wenn jede Kugel $U_r(x)$ mit $r > 0$ unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$ enthält.

Behauptung. *Ein $x \in X$ ist ein Häufungspunkt einer Folge $\{x_n\}$ aus X genau dann, wenn x ein Verdichtungspunkt von $\{x_n\}$ ist.*

In der Tat, ist x ein Häufungspunkt, so enthält jeder Kugel $U_r(x)$ fast alle Glieder einer Teilfolge von $\{x_n\}$ und somit unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$. Ist x ein Verdichtungspunkt, so gibt es eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ mit $x_{n_k} \in U_{1/k}(x)$, die somit gegen

x konvergiert, so dass x ein Häufungspunkt ist. In der Tat, wählen wir n_1 so dass $x_{n_1} \in U_1(x)$. Ist n_{k-1} schon gewählt, so wählen wir ein $n_k > n_{k-1}$ so dass $x_{n_k} \in U_{1/k}(x)$ (solches n_k existiert da $U_{1/k}(x)$ unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$ enthält).

Sei K kompakt und sei $\{x_n\}$ eine Folge in K. Zeigen wir, dass $\{x_n\}$ einen Verdichtungspunkt enthält. Nehmen wir das Gegenteil an, dass jedes $z \in K$ kein Verdichtungspunkt der Folge $\{x_n\}$ ist. Somit gibt es für jedes $z \in K$ ein $\varepsilon_z > 0$ so dass die Kugel $U_{\varepsilon_z}(z)$ nur endlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$ enthält. Die Familie $\{U_{\varepsilon_z}(z)\}_{z\in K}$ ist eine offene Überdeckung von K, woraus folgt, dass sie eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{\varepsilon_k}(z_k)\}_{k=1}^N$ enthält. Da jede Kugel $U_{\varepsilon_k}(z_k)$ nur endlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$ enthält, so beschließen wir, dass die Folge $\{x_n\}$ endlich viele Glieder enthält, was ein Widerspruch ist.

Beweis von $(iii) \implies (i)$. Angenommen, dass K totalbeschränkt und abgeschlossen ist, beweisen wir, dass jede offene Überdeckung $\{V_\alpha\}$ von K eine endliche Teilüberdeckung von K besitzt. Nehmen wir das Gegenteil an: es gibt in $\{V_\alpha\}$ keine endliche Teilüberdeckung von K.

Wir werden eine Folge $\{K_n\}_{n=0}^\infty$ von Mengen mit den folgenden Eigenschaften aufbauen:

(a) $K_0 = K$ und $K_n \subset K_{n-1}$ für $n \geq 1$;

(b) K_n liegt in einer Kugel von Radius 2^{-n} für jedes $n \geq 1$;

(c) K_n lässt keine endliche Teilüberdeckung von $\{V_\alpha\}$ zu.

Induktionsanfang für $n = 1$. Bestimmen wir K_1. Nach Totalbeschränktheit von K gibt es ein $\frac{1}{2}$-Netz $\{x_i\}$ von K so dass

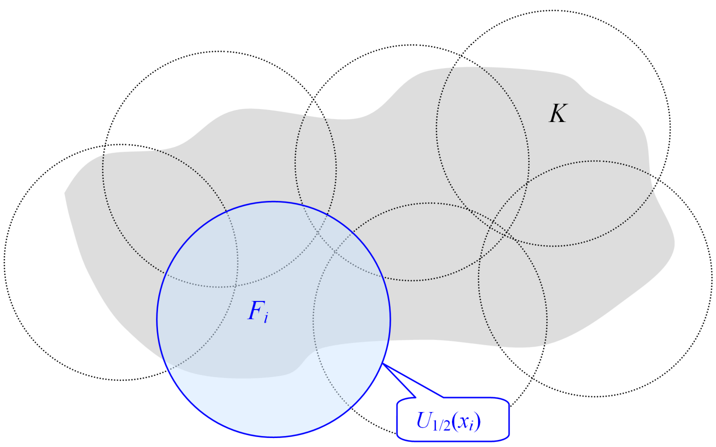
$$K \subset \bigcup_i U_{\frac{1}{2}}(x_i).$$

Setzen wir

$$F_i = U_{\frac{1}{2}}(x_i) \cap K$$

und bemerken folgendes:

- $F_i \subset K$;
- F_i liegt in einer Kugel von Radius $\frac{1}{2}$;
- $\bigcup_i F_i = K$.

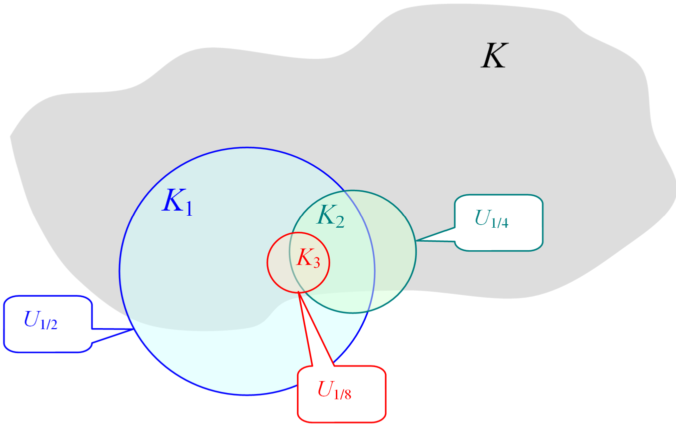


Gibt es für jedes F_i eine endliche Teilüberdeckung von $\{V_\alpha\}$, so liefert die Vereinigung der Teilüberdeckungen von allen F_i eine endliche Teilüberdeckung von K. Somit gibt es ein F_i ohne endliche Teilüberdeckung von $\{V_\alpha\}$. Setzen wir $K_1 = F_i$ für dieses i. Offensichtlich erfüllt K_1 alle Bedingungen (a)-(d) mit $n = 1$.

Induktionsschritt von $n-1$ nach n. Ist K_{n-1} schon bestimmt, so konstruieren wir K_n mit der gleichen Methode. Da $K_{n-1} \subset K$ so ist K_{n-1} totalbeschränkt. Dann gibt es ein 2^{-n}-Netz $\{x_i\}$ von K_{n-1}, und eine von Mengen

$$F_i = U_{2^{-n}}(x_i) \cap K_n$$

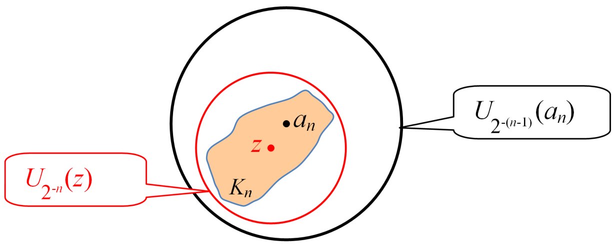
keine endliche Teilüberdeckung von $\{V_\alpha\}$ zulässt. Setzen wir $K_n = F_i$ mit diesem i.



Für jedes $n \geq 1$ wählen und fixieren wir einen Punkt $a_n \in K_n$. Da K_n nach (b) in einer Kugel $U_{2^{-n}}(z)$ von Radius 2^{-n} liegt so gilt

$$K_n \subset U_{2^{-n}}(z) \subset U_{2^{-(n-1)}}(a_n), \tag{11.25}$$

da $d(z, a_n) < 2^{-n} = 2^{(n-1)} - 2^{-n}$.



Da

$$a_{n+1} \in K_{n+1} \subset K_n \subset U_{2^{-(n-1)}}(a_n)$$

so folgt es

$$d(a_n, a_{n+1}) < 2^{-(n-1)}.$$

Nach dem Lemma 11.17 ist $\{a_n\}$ eine Cauchy-Folge, und nach der Vollständigkeit von X ist die Folge $\{a_n\}$ konvergent, sei $a = \lim a_n$.

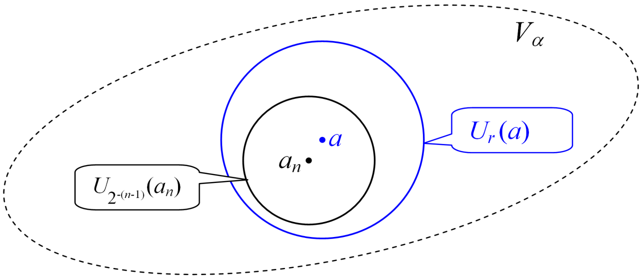
Da K abgeschlossen ist und alle $a_n \in K$, so liegt a in K. Folglich gilt $a \in V_\alpha$ für ein α. Da V_α offen ist, so existiert ein $r > 0$ mit $U_r(a) \subset V_\alpha$. Da $a_n \to a$ so gilt für hinreichend großes n auch

$$U_{2^{-(n-1)}}(a_n) \subset U_r(a), \tag{11.26}$$

da für großes n

$$d(a, a_n) \leq r - 2^{-(n-1)}$$

(siehe Lemma 11.3).



Es folgt aus (11.25) und (11.26), dass

$$K_n \subset U_r(a) \subset V_\alpha.$$

Somit ist K_n nur von einer Menge V_α überdeckt, was im Widerspruch zur (c) steht. ■

Bemerkung. Die Implikationen $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ des Satzes 11.20 gelten ohne die Voraussetzung von Vollständigkeit von X, was man aus dem Beweis sieht.

Korollar 11.21 *Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist vollständig nach Korollar 11.13. Nach dem Satz 11.19 ist K totalbeschränkt genau dann, wenn K beschränkt ist. Somit folgt die Aussage aus dem Satz 11.20. ■

Satz 11.22 (Extremwertsatz) *Seien K eine kompakte Teilmenge von einem metrischen Raum (X, d) und $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existieren die beiden Werten $\max_K f$ und $\min_K f$. Insbesondere gilt diese Aussage wenn K eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.*

Beweis. Da K kompakt ist, so ist $f(K)$ auch kompakt nach dem Satz 11.18. Nach dem Korollar 11.21 ist $f(K)$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Insbesondere sind $\sup_K f = \sup f(K)$ und $\inf_K f = \inf f(K)$ endlich. Da $\sup_K f$ und $\inf_K f$ die Grenzwerte von Folgen aus $f(K)$ sind, so liegen sie in $f(K)$ nach der Abgeschlossenheit von $f(K)$. Somit existieren die beiden Werte $\max f(K)$ und $\min f(K)$.

Ist K eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ so ist K kompakt nach dem Korollar 11.21 so dass die erste Aussage verwendbar ist. ■

Korollar 11.23 *Alle Normen in $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.*

Beweis in Aufgabe 135.

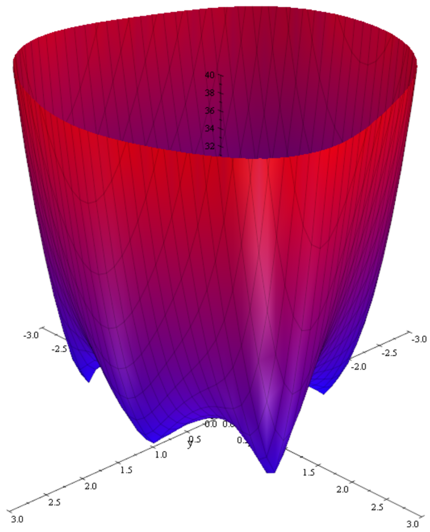
11.13 Fundamentalsatz der Algebra

Hauptsatz 11.24 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$$

des Grades $n \geq 1$ *mit komplexwertigen Koeffizienten* $a_0, a_1, ..., a_n$, *wobei* $a_n \neq 0$, *hat mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Beweis. Wir beweisen, dass die reellwertige Funktion $z \mapsto |P(z)|$ eine Minimumstelle in $\mathbb{C}$ besitzt und $\min |P(z)| = 0$ ist, woraus folgt, dass die Minimumstelle von $|P(z)|$ auch eine Nullstelle von $P(z)$ ist.



Der Graph der Funktion $|z^5 + 2z^2 - 4|$

Bemerken wir zunächst, dass

$$|P(z)| \to \infty \text{ für } |z| \to \infty,$$

da

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |a_n z^n| - \left|a_{n-1} z^{n-1}\right| - \left|a_{n-2} z^{n-2}\right| - ... - |a_0| \\ &= |z^n| \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \frac{|a_{n-2}|}{|z|^2} - ... \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) \\ &\sim |a_n| \, |z|^n \text{ für } |z| \to \infty, \end{aligned}$$

und $|z|^n \to \infty$ für $|z| \to \infty$.

Wählen wir $R > 0$ so groß, dass

$$|P(z)| > |a_0| \quad \text{für alle} \quad |z| > R,$$

und betrachten eine abgeschlossene Kugel in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:

$$K := \overline{U}_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}.$$

Da die Funktion $z \mapsto |P(z)|$ offensichtlich stetig ist, so nimmt die Funktion $|P(z)|$ nach dem Satz 11.22 den minimalen Wert in K an einer Stelle $z_0 \in K$ an. Dann gilt

$$|P(z_0)| \le |P(0)| = |a_0| < |P(z)| \text{ für alle } z \in K^c.$$

Somit ist z_0 die Minimumstelle von $|P(z)|$ nicht nur in K sondern auch in $\mathbb{C}$.

02.07.2025 Vorlesung 24

Zeigen wir, dass $|P(z_0)| = 0$ und somit z_0 eine Nullstelle ist. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $|P(z_0)| > 0$, und zeigen, dass es ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|P(z)| < |P(z_0)|$ gibt was ein Widerspruch ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $z_0 = 0$ (sonst stellen wir $P(z)$ als ein Polynom von $(z - z_0)$ dar und benennen $z - z_0$ in z um). Dann gilt $P(0) = a_0 \neq 0$. Auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $a_0 = 1$, d.h.

$$P(z) = 1 + a_1 z + ... + a_n z^n.$$

Wir finden ein z mit $|P(z)| < |P(0)| = 1$. Sei $k \ge 1$ der minimale Index mit $a_k \neq 0$, so dass

$$P(z) = 1 + a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + ... + a_n z^n.$$

Wir wählen ein $z \in \mathbb{C}$ so dass die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(a) $a_k z^k$ ist eine negative reelle Zahl;

(b) $\left|a_k z^k\right| < 1$;

(c) $\left|a_{k+1} z^{k+1} + ... + a_n z^n\right| < \frac{1}{2}\left|a_k z^k\right|$.

Gelten (a)-(c), so erhalten wir

$$\begin{aligned}
|P(z)| &\le \left|1 + a_k z^k\right| + \left|a_{k+1} z^{k+1} + ... + a_n z^n\right| \\
&\le \left|1 + a_k z^k\right| + \frac{1}{2}\left|a_k z^k\right| \\
&= 1 + a_k z^k - \frac{1}{2} a_k z^k \qquad (\text{da } 1 + a_k z^k > 0 \text{ und } a_k z^k < 0) \\
&= 1 + \frac{1}{2} a_k z^k \\
&< 1,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Es bleibt ein z mit (a)-(c) zu finden. Dafür verwenden wir die *Polarform* der komplexen Zahlen. Nach dem Satz 10.7, für jede komplexe Zahl $z = x + iy \neq 0$ gibt es Polarkoordinaten (r, θ) mit

$$x = r\cos\theta \quad \text{und} \quad y = r\sin\theta,$$

wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ der Polarradius ist und θ der Polarwinkel. Mit Hilfe der Eulerformel erhalten wir die Darstellung

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta},$$

die *die Polarform* von z heißt. Der Polarwinkel θ heißt auch das *Argument* von z.

Wir werden eine Zahl z mit Eigenschaften (a)-(c) in der Polarform $z = re^{\,i\theta}$ bestimmen. Dafür verwenden wir die Polarform von a_k:

$$a_k = \rho e^{i\varphi},$$

wobei ρ, φ gegeben sind und r, θ zu bestimmen. Es gilt

$$a_k z^k = \left(\rho e^{i\varphi}\right)\left(r^k e^{ik\theta}\right) = \rho r^k e^{i(\varphi+k\theta)}.$$

Die Zahl $a_k z^k$ muss reell und negativ sein, und das ist der Fall wenn

$$\varphi + k\theta = \pi,$$

da in diesem Fall $e^{i(\varphi+k\theta)} = e^{i\pi} = -1$. Somit (a) gilt wenn

$$\theta = \frac{\pi - \varphi}{k}. \tag{11.27}$$

Jetzt wählen wir r um (b) und (c) zu sichern. Da

$$\left|a_k z^k\right| = \rho r^k,$$

so gilt die Bedingung (b), d.h. $\left|a_k z^k\right| < 1$, für alle klein genug r. Die Bedingung (c) gilt auch für reichend kleine Werte von $r = |z|$ da

$$\frac{\left|a_{k+1}z^{k+1} + ... + a_n z^n\right|}{\left|a_k z^k\right|} = \frac{\left|a_{k+1}z + ... + a_n z^{n-k}\right|}{|a_k|} \to 0 \text{ für } z \to 0.$$

Somit erfüllt $z = re^{i\theta}$ die Bedingungen (a)-(c) wenn θ nach (11.27) bestimmt ist und $r > 0$ klein genug ist. ■

Jump to Chapter 12

11.14 * Gleichmäßige Stetigkeit

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und K Teilmenge von X. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt *gleichmäßig stetig* auf K wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x, y \in K \text{ mit } d_X(x, y) < \delta \ \text{ gilt } d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Satz 11.25 *Sei $f : X \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset X$.*

Beweis. Fixieren wir ein $\varepsilon > 0$. Nach der Stetigkeit von f, für jedes $x \in K$ gibt es ein $\delta_x > 0$ so dass

$$\forall y \in X \text{ mit } d_X(x, y) < \delta_x \ \text{ gilt } \ d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon/2.$$

Das Mengensystem von Kugeln $\left\{U_{\frac{1}{2}\delta_x}(x)\right\}_{x \in K}$ ist eine offene Überdeckung von K. Sei $\left\{U_{\frac{1}{2}\delta_{x_k}}(x_k)\right\}_{k=1}^{n}$ eine endliche Teilüberdeckung. Setzen wir

$$\delta := \frac{1}{2} \min_{1 \le k \le n} \delta_{x_k} > 0.$$

Seien jetzt x, y beliebige Punkte in K mit $d_X(x, y) < \delta$. Der Punkt x liegt in einer Kugel $U_{\frac{1}{2}\delta_{x_k}}(x_k)$, d.h.

$$d_X(x, x_k) < \frac{1}{2}\delta_{x_k}$$

Da

$$d_X(x, y) < \delta \le \frac{1}{2}\delta_{x_k},$$

so erhalten wir nach der Dreiecksungleichung

$$d_X(y, x_k) < \delta_{x_k}.$$

Es folgt nach der Definition von δ_{x_k} dass

$$d_Y(f(x), f(x_k)) < \varepsilon/2 \text{ und } \ d_Y(f(y), f(x_k)) < \varepsilon/2,$$

was nach der Dreiecksungleichung ergibt

$$d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

was zu beweisen war. ■

11.15 * Zusammenhängende Mengen und Zwischenwertsatz

Definition. Eine Teilmenge K von einem metrischen Raum X heißt *zusammenhängend* wenn für jede Überdeckung $K \subset U \sqcup V$ von K mit zwei disjunkten offenen Mengen U, V gilt $K \subset U$ oder $K \subset V$.

Satz 11.26 (Zwischenwertsatz) *Seien X und Y zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Ist K eine zusammenhängende Teilmenge von X so ist $f(K)$ auch zusammenhängend.*

Beweis. Sei $f(K) \subset U \sqcup V$ eine Überdeckung von $f(K)$ mit disjunkten offenen Mengen. Daraus folgt

$$K \subset f^{-1}(U \sqcup V) = f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(V).$$

Da nach dem Satz 11.8 $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offen sind, so ergibt der Zusammenhang von K, dass $K \subset f^{-1}(U)$ oder $K \subset f^{-1}(V)$, woraus folgt, dass $f(K) \subset U$ oder $f(K) \subset V$, was zu beweisen war. ■

Satz 11.27 *Jedes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend. Umgekehrt, jede zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist ein Intervall.*

Beweis. Zeigen wir, dass beliebiges Intervall J zusammenhängend ist. Sei $J \subset U \sqcup V$ eine Überdeckung von J mit disjunkten offenen Mengen U, V. Definieren wir eine Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in U \cap J, \\ 0, & x \in V \cap J. \end{cases}$$

Beweisen wir, dass f stetig auf J ist. Für jedes $x \in U \cap J$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U,$$

woraus folgt, dass $f \equiv 1$ in $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap J$. Insbesondere ist f stetig an x. Analog ist f stetig an alle Stellen $x \in V \cap J$ und somit auf J.

Sind $U \cap J$ und $V \cap J$ nicht leer, so nimmt f auf J die Werte 0 und 1 an und somit nach dem Zwischenwertsatz aus Analysis 1 soll f auch alle Werte in $[0, 1]$ annehmen, was nicht der Fall ist. Somit ist $U \cap J$ oder $V \cap J$ leer, woraus folgt, dass $J \subset V$ oder $J \subset U$.

Sei K eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$. Beweisen wir, dass K ein Intervall ist. Für $a, b \in K$ soll auch das ganze Intervall $[a, b]$ in K liegen, da es sonst einen Punkt $c \in (a, b) \setminus K$ gibt und somit eine offene Überdeckung von K

$$K \subset (-\infty, c) \sqcup (c, +\infty),$$

mit $K \not\subset (-\infty, c)$ und $K \not\subset (c, \infty)$, was im Widerspruch zum Zusammenhang von K steht. Es folgt, dass K ein Intervall mit den Grenzen $\inf K$ und $\sup K$ ist. ■

Bemerkung. Als eine Folgerung aus den Sätzen 11.26 und 11.27 erhalten wir, dass das Bild der stetigen Abbildung $f : J \to \mathbb{R}$ wieder ein Intervall ist, was aus Analysis 1 schon bekannt ist.

Für jede zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $[x, y]$ die Menge

$$[x, y] := \{(1 - \lambda) x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Die Menge $[x, y]$ ist die gerade Strecke zwischen x und y.

Definition. Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Sterngebiet*, wenn es einen Punkt $a \in K$ gibt mit

$$x \in K \Rightarrow [a, x] \in K.$$

Der Punkt a heißt ein *Sternzentrum*.

Beispiel. Zeigen wir, dass jede offene oder abgeschlossene Kugel in $\mathbb{R}^n$ bezüglich einer Norm immer ein Sterngebiet ist. Sei K eine (offene oder abgeschlossene) Kugel mit Zentrum a und Radius r, d.h.

$$K = U_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\} \quad \text{oder} \quad K = \overline{U}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}.$$

Zeigen wir, dass a ein Sternzentrum von K ist, d.h. für jedes $x \in K$ gilt $[a, x] \subset K$. Jeder Punkt $y \in [a, x]$ lässt sich wie folgt darstellen:

$$y = (1 - \lambda) a + \lambda x \quad \text{für ein } \lambda \in [0, 1],$$

woraus folgt, dass

$$\|y - a\| = \|\lambda x - \lambda a\| = |\lambda| \|x - a\| \leq \|x - a\|$$

und somit $y \in K$ und $[a, x] \subset K$.

Satz 11.28 *Jedes Sterngebiet K in $\mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend. Insbesondere sind alle Kugeln in $\mathbb{R}^n$ zusammenhängend.*

Beweis. Sei a ein Sternzentrum von K, so dass für jedes $x \in K$ gilt $[a, x] \subset K$. Sei $K \subset U \sqcup V$ eine Überdeckung von K mit offenen Mengen. Nehmen wir an, dass $a \in U$. Es folgt, dass U, V auch eine Überdeckung von $[a, x]$ für jedes $x \in K$ ist, d.h.

$$[a, x] \subset U \sqcup V.$$

Die Strecke $[a, x]$ ist das Bild von $[0, 1]$ unter der Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi &: [0, 1] \to \mathbb{R}^n \\ \varphi(\lambda) &= (1 - \lambda) a + \lambda x. \end{aligned}$$

Da φ offensichtlich stetig ist, so ist $[a, x] = \varphi([0, 1])$ zusammenhängend nach dem Satz 11.26. Somit soll $[a, x]$ in einer von U, V enthalten. Da $a \in U$, so folgt es, dass $[a, x] \subset U$, und somit $x \in U$ und $K \subset U$. ■

Beispiel. Bestimmen wir das Bild der Funktion

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x + y + z)^2}$$

auf der Menge

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0\right\}.$$

Die Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ ist offensichtlich stetig. Da K Sterngebiet ist und somit zusammenhängend, so ist das Bild $f(K)$ zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ und somit ein Intervall. Bestimmen wir die Grenzen des Intervalls, d.h. $\sup f$ und $\inf f$, und ob diese dem Intervall gehören. Wir haben

$$x^2 + y^2 + z^2 < x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = (x + y + z)^2$$

so dass $f(x,y,z) < 1$ und $\sup f \leq 1$. In der Tat gilt $\sup f = 1$ da für $y \to 0$ und $z \to 0$ erhalten wir $f(x,y,z) \to 1$. Offensichtlich liegt $\sup f = 1$ nicht in $f(K)$.

Andererseits, nach der Ungleichung zwischen arithmetischen und quadratischen Mittelwerten gilt[2]

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2, \tag{11.28}$$

woraus folgt

$$f(x,y,z) \geq \frac{1}{3}$$

und somit $\inf f \geq \frac{1}{3}$. Da $f(1,1,1) = \frac{1}{3}$, so erhalten wir $\inf f = \frac{1}{3} \in f(K)$. Es folgt, dass

$$f(K) = [\frac{1}{3}, 1).$$

11.16 * Topologie

Der Begriff von offenen Mengen lässt sich axiomatisch definieren wie folgt. Betrachten wir eine Menge X und ein Mengensystem $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X (d.h. $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$). Das Mengensystem $\mathcal{O}$ heißt eine *Topologie* in X und die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen *offene Mengen*, wenn $\mathcal{O}$ die folgenden *Axiome von Topologie* erfüllt:

1. $\emptyset \in \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{O}$.

2. Beliebige Vereinigung von Elementen von $\mathcal{O}$ ist wieder ein Element von $\mathcal{O}$.

3. Der Schnitt endlich vieler Elemente von $\mathcal{O}$ ist auch Element von $\mathcal{O}$.

Das Paar $(X, \mathcal{O})$ heißt ein *topologischer Raum*. Die Komplemente in X von offenen Mengen heißen abgeschlossene Mengen. Die Topologie in X lässt auch die Begriffe von Konvergenz von Folgen, stetigen Funktionen usw. definieren. Dafür benutzt man statt der Kugeln $U_r(x)$ die beliebigen offenen Mengen U die x enthalten (sie heißen *offene Umgebungen* von x).

Beispiel. 1. Für jede Menge X ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ immer eine Topologie.

2. Sei $X = \{a,b,c,d\}$ eine Menge von 4 Elementen. Dann das folgende Mengensystem

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c,d\}\}$$

erfüllt alle Axiome von Topologie und somit ist eine Topologie in X. Im Gegenteil ist das Mengensystem

$$\mathcal{O}' = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b,c,d\}\}$$

keine Topologie, da die Vereinigung $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\}$ nicht in $\mathcal{O}'$ liegt.

---

[2] Es gilt die Identität

$$3\left(x^2 + y^2 + z^3\right) = (x+y+z)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 + (x-y)^2,$$

woraus (11.28) folgt.

3. Für jeden metrischen Raum (X, d) haben wir oberhalb den Begriff von offenen Mengen mit Hilfe von Metrik d definiert. Das Mengensystem von diesen offenen Mengen ist eine Topologie nach dem Satz 11.6(a)-(b). Sie heißt eine *metrische* Topologie. Die Aussage des Satzes 11.7(b) gilt für eine metrische Topologie aber nicht für allgemeine Topologie.

In diesem Kapitel betrachten wir nur die metrischen Topologien.

11.17 * Vervollständigung von metrischen Räumen

In diesem Abschnitt beweisen wir, dass für jeden metrischen Raum es eine vollständige Erweiterung gibt.

Definition. Zwei metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) heißen *isometrisch* wenn es eine bijektive[3] Abbildung $\Phi : X \to Y$ gilt so dass

$$d_Y\left(\Phi\left(x_1\right), \Phi\left(x_2\right)\right) = d_X\left(x_1, x_2\right) \text{ für alle } x_1, x_2 \in X. \tag{11.29}$$

Die Abbildung Φ heißt dann *Isometrie*.

Sind zwei metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) isometrisch, so sind alle Eigenschaften dieser Räume identisch, so häufig identifiziert man (X, d_X) und (Y, d_Y).

Zum Beispiel, we haben gesehen, dass $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ isometrisch zu $B(\mathcal{E}_n)$ ist und zwar mit der Isometrie

$$\begin{aligned} \Phi &: B\left(\mathcal{E}_n\right) \to \mathbb{R}^n \\ \Phi(f) &= \left(f(1), ..., f(n)\right) \end{aligned}$$

für beliebige Funktion $f \in B(\mathcal{E}_n)$. Somit können wir $\mathbb{R}^n$ mit $B(\mathcal{E}_n)$ identifizieren und sagen, dass jede Funktion $f \in B(\mathcal{E}_n)$ ein Element von $\mathbb{R}^n$ ist.

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für jede Teilmenge $A \subset X$ definieren wir den *Abschluss* $\overline{A}$ von A als die Teilmenge von X die aus allen Grenzwerten von allen konvergenten Folgen aus A besteht.

Insbesondere gilt immer $A \subset \overline{A}$. Die Identität $A = \overline{A}$ gilt genau dann, wenn A abgeschlossen ist.

Definition. Man sagt, dass die Menge $A \subset X$ *dicht* in X liegt wenn $\overline{A} = X$.

Zum Beispiel, $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, da jede reelle Zahl der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen ist.

Jeder metrische Raum (X, d) lässt sich vervollständigen wie folgt.

Satz 11.29 *Für jeden metrischen Raum (X, d) gibt es einen anderen metrischen Raum $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- *$(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ ist vollständig*

[3] Es reicht zu erfordern, dass Φ surjektiv ist, da es aus (11.29) folgt, dass Φ injektiv ist:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow d_X\left(x_1, x_2\right) \neq 0 \Rightarrow d_Y\left(\Phi\left(x_1\right), \Phi\left(x_2\right)\right) \neq 0 \Rightarrow \Phi\left(x_1\right) \neq \Phi\left(x_2\right).$$

- *Es gibt eine Teilmenge $Y \subset \widetilde{X}$ so dass Y dicht in $\widetilde{X}$ liegt und $(Y, \widetilde{d})$ isometrisch zu (X, d) ist.*

Der Raum $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ heißt die *Vervollständigung* von (X, d). Man kann (X, d) mit $\left(Y, \widetilde{d}\right)$ identifizieren und dann sagen, dass $\widetilde{X}$ eine vollständige Erweiterung von X ist.

Zum Beispiel, $\mathbb{R}$ ist die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich der Metrik $d(x, y) = |x - y|$, was wir unterhalb erklären.

Beweis. Bezeichnen wir mit F die Menge von allen Cauchy-Folgen in X. Die Elementen von F werden mit f, g usw. bezeichnet. Ist f ein Element von F so werden die Glieder der Folge f wie üblich mit f_k bezeichnet so dass $f = \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Zwei Folgen f und g aus F heißen äquivalent wenn $d(f_k, g_k) \to 0$ für $k \to \infty$. In diesem Fall schreibt man $f \sim g$. Es ist klar, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Die Äquivalenzklasse der Folge $f = \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ wird mit $[f]$ oder $\left[\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}\right]$ bezeichnet. Bezeichnen wir mit $[F]$ die Menge von allen Äquivalenzklassen von Elementen von F. Für $[f], [g] \in [F]$ definieren wir

$$\widetilde{d}([f], [g]) = \lim_{k \to \infty} d(f_k, g_k). \tag{11.30}$$

Da $\{f_k\}$ und $\{g_k\}$ Cauchy-Folgen sind, so ist $\{d(f_k, g_k)\}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, da

$$|d(f_n, g_n) - d(f_m, g_m)| \leq d(f_n, f_m) + d(g_n, g_m) \to 0 \text{ für } n, m \to \infty.$$

Da jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert, so existiert der Grenzwert in (11.30). Auch ist der Grenzwert unabhängig von der Wahl von f aus der Klasse $[f]$. In der Tat, gilt $f' \sim f$ so erhalten wir

$$|d(f'_k, g_k) - d(f_k, g_k)| \leq d(f'_k, f_k) \to 0 \text{ für } k \to \infty$$

so dass

$$\lim_{k \to \infty} d(f_k, g_k) = \lim_{k \to \infty} d(f'_k, g_k).$$

Somit ist die Funktion $\widetilde{d}$ wohldefiniert auf $[F] \times [F]$.

Behauptung. *Die Funktion $\widetilde{d}$ ist eine Metrik auf $[F]$.*

Die Symmetrie und Dreiecksungleichung von $\widetilde{d}$ folgen direkt aus (11.30). Auch es ist klar, dass $\widetilde{d} \geq 0$. Beweisen wir dass

$$\widetilde{d}([f], [g]) = 0 \Leftrightarrow [f] = [g].$$

In der Tat haben wir

$$\widetilde{d}([f], [g]) = 0 \Leftrightarrow d(f_k, g_k) \to 0 \Leftrightarrow f \sim g \Leftrightarrow [f] = [g].$$

Somit ist $\widetilde{d}$ eine Metrik.

Behauptung. *Für jedes $x \in X$ betrachten wir die konstante Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{x, x, ...\}$ mit $x_k = x$ für alle k. Diese Folge ist Cauchy-Folge in X und somit bestimmt ein Element von $[F]$ das mit $[x]$ bezeichnet wird. Bezeichnen wir mit $[X]$ die Teilmenge von $[F]$ die aus allen Elementen $[x]$ besteht. Dann ist $([X], \widetilde{d})$ isometrisch zu (X, d).*

Die Abbildung $x \mapsto [x]$ ist offensichtlich eine Bijektion von X nach $[X]$. Es gilt für alle $x, y \in X$

$$\widetilde{d}([x], [y]) = \lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k) = \lim_{k\to\infty} d(x, y) = d(x, y),$$

woraus folgt, dass die Abbildung $x \mapsto [x]$ eine Isometrie ist.

Behauptung. *$[X]$ liegt dicht in $[F]$.*

Für jedes $f \in F$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die konstante Folge

$$\{f_n\}_{k\in\mathbb{N}} = \{f_n, f_n, ...\}.$$

Diese Folge bestimmt die Äquivalenzklasse $[f_n] \in [X]$. Zeigen wir, dass

$$[f_n] \to [f] \text{ für } n \to \infty,$$

woraus es folgen wird, dass $[X]$ dicht in $[F]$ liegt. Wir haben

$$\widetilde{d}([f_n], [f]) = \lim_{k\to\infty} d(f_n, f_k)$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{d}([f_n], [f]) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} d(f_n, f_k) = 0,$$

da $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Behauptung. *$([F], \widetilde{d})$ ist vollständig.*

Sei $\{[y_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von Elementen von $[F]$ (wobei jedes y_n selbst eine Cauchy-Folge $\{y_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von Elementen von X ist). Fa $[X]$ dicht in $[F]$ liegt, so gibt es für jedes $[y_n] \in [F]$ ein $[x_n] \in [X]$ (wobei $x_n \in X$) mit

$$\widetilde{d}([x_n], [y_n]) < \frac{1}{n},$$

Es folgt, dass die Folge $\{[x_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ auch Cauchy-Folge in $[F]$ ist.

Da (X, d) und $([X], \widetilde{d})$ isometrisch sind, so ist die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X. Somit bestimmt diese Folge ein Element $f \in F$ mit $f_n = x_n$. Wir haben schon oberhalb gesehen, dass

$$\widetilde{d}([x_n], [f]) = \widetilde{d}([f_n], [f]) \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

woraus folgt, dass auch

$$\widetilde{d}([y_n], [f]) \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Somit gilt $[y_n] \to [f]$ und die Folge $\{[y_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Es bleibt nur zu setzen $\widetilde{X} = [F]$ und $Y = [X]$. ■

Sei X ein normierter Vektorraum mit der Norm N und Metrik $d(x, y) = N(x - y)$. Dann ist der Raum $\widetilde{X}$ auch ein normierter Vektorraum mit den linearen Operationen

$$[f] + [g] = \left[\{f_k + g_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right], \quad \lambda [f] = \left[\{\lambda f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right]$$

und der Norm

$$\widetilde{N}([f]) = \lim_{k\to\infty} N(f_k).$$

Es folgt, dass

$$\widetilde{d}([f], [g]) = \lim_{k\to\infty} d(f_k, g_k) = \lim_{k\to\infty} N(f_k - g_k) = \widetilde{N}([f] - [g]),$$

so dass die Metrik $\widetilde{d}$ von der Norm $\widetilde{N}$ erzeugt ist. Somit ist $(\widetilde{X}, \widetilde{N})$ ein Banachraum, und X lässt sich als ein dicht liegender Unterraum von $\widetilde{X}$ identifizieren.

Beispiel. Sei $X = \mathbb{Q}$ und $d(x, y) = |x - y|$. Der Raum $\mathbb{Q}$ von rationalen Zahlen ist nicht vollständig, da jede Folge $\{f_k\}$ von rationalen Zahlen, die gegen eine irrationale Zahl in $\mathbb{R}$ konvergiert, ist offensichtlich Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ aber ohne den Grenzwert in $\mathbb{Q}$.

Die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ ist der Raum $\widetilde{\mathbb{Q}}$ von allen Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen aus $\mathbb{Q}$. Jede Cauchy-Folge $f = \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von rationalen Zahlen hat den Grenzwert in $\mathbb{R}$ den wir mit $\overline{f}$ bezeichnen, d.h.

$$\overline{f} = \lim_{k\to\infty} f_k.$$

Gilt $f \sim g$ so erhalten wir

$$\left|\overline{f} - \overline{g}\right| = \lim |f_k - g_k| = 0$$

so dass $\overline{f} = \overline{g}$. Somit ist die folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Q} & \to & \mathbb{R} \\ [f] & \mapsto & \overline{f} \end{array} \tag{11.31}$$

Diese Abbildung ist offensichtlich surjektiv da jede reelle Zahl der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen sit. Es gilt für zwei Cauchy-Folgen f, g von rationalen Zahlen

$$\widetilde{d}([f], [g]) = \lim_{k\to\infty} |f_k - g_k| = \left|\overline{f} - \overline{g}\right| = d\left(\overline{f}, \overline{g}\right),$$

so dass die Abbildung (11.31) eine Isometrie ist. Somit ist die Vervollständigung $\widetilde{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$ isometrisch zu $\mathbb{R}$.

In anderen Wörtern, die Menge $\mathbb{R}$ von reellen Zahlen lässt sich mit der Menge von Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen von rationalen Zahlen identifizieren.

11.18 * p-adische Zahlen

Betrachten wir in $X = \mathbb{Q}$ eine andere Metrik. Fixieren wir eine Primzahl p und definieren in $\mathbb{Q}$ eine *p-adische Norm* wie folgt. Jedes $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ lässt sich eindeutig darstellen wie folgt:

$$x = p^n \frac{a}{b},$$

wobei $a, b, n \in \mathbb{Z}$ und a, b durch p nicht teilbar sind. Dann setzen wir

$$\|x\|_p := p^{-n}.$$

Für $x = 0$ setzen wir $\|0\|_p = 0$. Zum Beispiel, es gilt

$$\|10,8\|_3 = \left\|\frac{54}{5}\right\|_3 = \left\|3^3 \frac{2}{5}\right\|_3 = 3^{-3} = \frac{1}{27}.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass die p-adische Norm die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$\|xy\|_p = \|x\|_p \|y\|_p \tag{11.32}$$

und

$$\|x+y\|_p \leq \max\left(\|x\|_p, \|y\|_p\right). \tag{11.33}$$

Definieren wir den *p-adischen Abstand* zwischen $x, y \in \mathbb{Q}$ wie folgt:

$$d_p(x,y) := \|x-y\|_p.$$

Es folgt aus (11.33), dass für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$ gilt

$$d_p(x,y) \leq \max\left(d_p(x,z), d_p(y,z)\right). \tag{11.34}$$

Somit erfüllt d_p die Dreiecksungleichung[4] und auch die anderen Axiome von Metrik.

Definition. Die Metrik d_p in $\mathbb{Q}$ heißt die *p-adische Metrik*.

Es folgt aus (11.32) und (11.33), dass der Grenzwert in $(\mathbb{Q}, d_p)$ die folgenden Eigenschaften erfüllt: gelten

$$x_n \xrightarrow{d_p} x \quad \text{und} \quad y_n \xrightarrow{d_p} y \tag{11.35}$$

so gelten auch

$$x_n + y_n \xrightarrow{d_p} x + y \quad \text{und} \quad x_n y_n \xrightarrow{d_p} xy. \tag{11.36}$$

Definition. Die Vervollständigung $\widetilde{\mathbb{Q}}$ von $(\mathbb{Q}, d_p)$ wird mit $\mathbb{Q}_p$ bezeichnet, und die Elemente von $\mathbb{Q}_p$ heißen *p-adische Zahlen*.

Wir betrachten $\mathbb{Q}$ als dichte Teilmenge von $\mathbb{Q}_p$. Man definiert die Operationen $x+y$ und xy auf p-adischen Zahlen x, y mit Hilfe von (11.36), wobei $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ jetzt die Folgen von rational Zahlen mit (11.35) sind. Es folgt, dass $\mathbb{Q}_p$ ein Körper ist.

Analog erweitert man den Begriff von p-Norm auf $\mathbb{Q}_p$ und zeigt, dass die p-Norm in $\mathbb{Q}_p$ auch (11.32) und (11.33) erfüllt. Somit ist $\mathbb{Q}_p$ ein normierter Körper.

Um zu verstehen wie die p-adischen Zahlen aussehen, betrachten wir zuerst eine Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k,$$

wobei a_k die p-adische Ziffern sind, d.h. $a_k \in \{0, ..., p-1\}$. Seien

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k$$

die Partialsummen der Reihe. Wir behaupten, dass die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{Q}, d_p)$ ist. In der Tat, es gilt für $m > n$

$$x_m - x_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k p^k = p^{n+1} \sum_{k=n+1}^{m} a_k p^{k-(n+1)}.$$

[4] Die Ungleichung (11.34) ist stärker als die Dreiecksungleichung, und sie heißt *ultrametrische* Dreiecksungleichung. Jede Metrik die ultrametrische Dreiecksungleichung erfüllt heißt *Ultrametrik*. Somit ist d_p eine Ultrametrik.

Da die Summe hier eine ganze Zahl ist, so folgt es, dass

$$\|x_m - x_n\|_p \le p^{-(n+1)} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Somit ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Folglich hat die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert $x \in \mathbb{Q}_p$ so dass immer

$$d_p\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k = d_p\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{Q}_p.$$

Gleiches gilt für die Summen der Form

$$d_p\text{-}\sum_{k=-N}^{\infty} a_k p^k \tag{11.37}$$

wobei $N \in \mathbb{Z}_+$. Darüber hinaus kann man zeigen, dass jede p-adische Zahl der Form (11.37) hat.

Beispiel. Setzen wir $a_k = 1$ für alle k, so dass

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} p^k = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}.$$

Da $\|p^{n+1}\| = p^{-(n+1)} \to 0$ für $n \to \infty$ und somit

$$p^{n+1} \xrightarrow{d_p} 0,$$

so folgt es, dass

$$x_n \xrightarrow{d_p} -\frac{1}{p-1}$$

und somit

$$d_p\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} p^k = -\frac{1}{p-1}.$$

So, in diesem Fall ist die Summe der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} p^k$ eine rationale Zahl. Zum Beispiel, in $\mathbb{Q}_2$ gilt

$$d_2\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = -1.$$

Allerdings für beliebige Folgen $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ von p-adischen Ziffern liegt die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$ *nicht immer* in $\mathbb{Q}$ (d.h. $(\mathbb{Q}, d_p)$ nicht vollständig ist). Um dies zu beweisen, bemerken wir zuerst, dass

$$d_p\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k \neq 0, \tag{11.38}$$

vorausgesetzt, dass mindestens ein a_k nicht Null ist. In der Tat, sei l der minimale Index mit $a_l \neq 0$ so dass für $n \geq l$ gilt

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k = p^l \left(a_l + a_{l+1} p + \dots + a_n p^{n-l}\right).$$

Da a_l nicht durch p teilbar ist, so folgt es, dass $\|x_n\|_p = p^{-l}$ und somit

$$d_p(x_n, 0) = \|x_n\|_p = p^{-l} \not\to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

woraus (11.38) folgt.

Folglich erhalten wir, dass für zwei Folgen $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ und $\{b\}_{k=0}^{\infty}$ von p-adischen Ziffern immer gilt

$$d_p\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k \neq d_p\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k,$$

vorausgesetzt, dass $a_k \neq b_k$ für mindestens ein k. Es folgt, dass die Menge von den Werten der Summe $d_p\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$ überabzählbar ist, wie die Menge von allen Folgen $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$. Somit ist auch die Menge $\mathbb{Q}_p$ überabzählbar, während $\mathbb{Q}$ abzählbar ist. Es folgt, dass $\mathbb{Q}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{Q}_p$ ist. Folglich ist $(\mathbb{Q}, d_p)$ nicht vollständig.

Man erhält ein explizites Beispiel von der Zahl $x \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Q}$ wenn man in der Summe

$$x = d_p\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$$

eine nicht-periodische Folge $\{a_k\}$ wählt.

11.19 * Lebesgue-integrierbare Funktionen

Betrachten wir den Raum $X = C[a,b]$ von stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall $[a,b]$ mit der 1-Norm wie folgt.

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Wir wissen, dass $C[a,b]$ vollständig bezüglich der sup-Norm ist, aber jetzt betrachten wir die 1-Norm in $C[a,b]$. Es ist leicht zu beweisen, dass die 1-Norm eine Norm ist.

Die Vervollständigung von $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ wird mit $L^1[a,b]$ bezeichnet. Nach Konstruktion ist $L^1[a,b]$ ein Banachraum wo $C[a,b]$ dicht liegt. Die Elemente von $L^1[a,b]$ heißen *Lebesgue-integrierbare* Funktionen.

Bezeichnen wir mit $R[a,b]$ den Raum von allen Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ und zeigen, dass jede Funktion $f \in R[a,b]$ sich als Element von $L^1[a,b]$ identifizieren lässt.

Lemma 11.30 *Für jede Funktion $f \in R[a,b]$ gibt es eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus $C[a,b]$ mit*

$$\int_a^b |f - f_n|\, dx \to 0 \text{ für } n \to \infty. \tag{11.39}$$

Beweis. Nach Aufgabe 113 gibt es eine Folge $\{g_n\}$ von Treppenfunktionen mit

$$\int_a^b |f - g_n|\, dx \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Jede Treppenfunktion g_n lässt sich offensichtlich mit einer stetigen Funktion f_n approximieren so dass

$$\int_a^b |f_n - g_n| \, dx < \frac{1}{n},$$

woraus (11.39) folgt. ■

Es folgt aus (11.39), dass die Folge $\{f_n\}$ eine Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_1$ ist. Somit ergibt die Folge $\{f_n\}$ ein Element $[\{f_n\}]$ von $L^1[a,b]$, was wir jetzt zu f zuweisen. Es folgt auch, dass

$$\int_a^b |f| \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n| \, dx = \lim \|f_n\|_1 = \|[\{f_n\}]\|_1 \,. \tag{11.40}$$

Es existieren Riemann-integrierbare Funktionen $f \neq 0$ mit

$$\int_a^b |f| \, dx = 0.$$

Zum Beispiel, die Funktion f die nur an einer Stelle $c \in (a,b)$ nicht verschwindet, hat diese Eigenschaft. Es folgt aus (11.40) dass das zu f entsprechende Element $[\{f_n\}]$ von $L^1[a,b]$ gleich 0 ist. Somit ist die oberhalb definierte Abbildung $R[a,b] \to L^1[a,b]$ nicht injektiv.

Lemma 11.31 *Zwei Funktionen $f, g \in R[a,b]$ entsprechen einem Element von $L^1[a,b]$ genau dann, wenn*

$$\int_a^b |f - g| \, dx = 0. \tag{11.41}$$

Beweis. Seien $\{f_n\}$ und $\{g_n\}$ die Folgen von stetigen Funktionen auf $[a,b]$ mit

$$\int_a^b |f - f_n| \, dx \to 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b |g - g_n| \, dx \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Es folgt, dass

$$\|f_n - g_n\|_1 = \int_a^b |f_n - g_n| \, dx \to \int_a^b |f - g| \, dx.$$

Somit gilt

$$\{f_n\} \sim \{g_n\} \Leftrightarrow d_1(f_n, g_n) \to 0 \Leftrightarrow \|f_n - g_n\|_1 \to 0 \Leftrightarrow (11.41),$$

was zu beweisen war. ■

Zwei Funktionen aus $R[a,b]$ heißen äquivalent wenn sie (11.41) erfüllen. Somit enthält $L^1[a,b]$ neben stetigen Funktionen auch Äquivalenzklassen von Riemann-integrierbaren Funktionen. Es gibt jedoch Elemente von $L^1[a,b]$ die nicht von Riemann-integrierbaren Funktionen erzeugt werden.

Chapter 12

Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

12.1 Partielle und totale Differenzierbarkeit

Seien Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Wir benutzen die folgende Notation für die Komponenten von x und $f(x)$:

$$x = (x_1, ..., x_n)$$

und

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x)),$$

wobei jedes $f_k(x)$ eine reellwertige Funktion auf Ω ist. Man schreibt $f_k(x)$ auch in der Form $f_k(x_1, ..., x_n)$ so dass f_k sich als eine reellwertige Funktion von n reellen Variablen betrachten lässt.

Fixieren wir ein $j = 1, ..., n$ und ein $k = 1, ..., m$ und betrachten die Funktion

$$x_j \mapsto f_k(x_1, ..., x_j, ..., x_n),$$

wobei alle x_i mit $i \neq j$ als Konstanten betrachtet werden. Ist diese Funktion differenzierbar, so betrachten wir ihre Ableitung.

Definition. Die Ableitung von f_k bezüglich x_j heißt *partielle Ableitung* 1-er Ordnung von f und wird mit $\partial_{x_j} f_k$ bezeichnet, d.h.

$$\boxed{\partial_{x_j} f_k(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f_k(x_1, ..., x_j + t, ..., x_n) - f_k(x_1, ..., x_j, ..., x_n)}{t}}.$$

Die Ableitung heißt partiell da es nur eine Variable x_j von n Variablen benutzt wird. Es gibt noch andere Notation für partielle Ableitungen wie folgt:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \partial_{x_j} f_k = (f_k)_{x_j} = \partial_j f_k = f_{k;j}.$$

In dieser Notation wird im Gegenteil zum geraden d für die gewöhnliche Ableitung $\frac{df}{dx}$ein rundes ∂ benutzt.

Definition. Existieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ für alle k und j, so heißt die Abbildung f *partiell differenzierbar* in x. In diesem Fall lässt sich die Menge von allen partiellen Ableitungen von f in einer $m \times n$ Matrix anordnen wie folgt:

$$J_f := (\partial_j f_k) = (f_{k;j}) = \begin{pmatrix} f_{1;1} & f_{1;2} & \cdots & f_{1;n} \\ f_{2;1} & f_{2;2} & \cdots & f_{2;n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{m;1} & f_{m;2} & \cdots & f_{m;n} \end{pmatrix}, \tag{12.1}$$

wobei $k = 1, ..., m$ ein Zeilenindex ist und $j = 1, ..., n$ ein Spaltenindex. Die Matrix $J_f = J_f(x)$ heißt die *Jacobi-Matrix von* f an der Stelle x.

Beispiel. Betrachten wir eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$. Wir bezeichnen die Koordinaten in $\mathbb{R}^2$ mit x, y. Die Jacobi-Matrix J_f ist eine 1×2 Matrix, d.h. die Zeile

$$J_f = (\partial_1 f_1, \partial_2 f_1) = (\partial_x f, \partial_y f).$$

Zum Beispiel, betrachten wir die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \tag{12.2}$$

Diese Funktion ist in jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ partiell differenzierbar und es gilt

$$\partial_x f = \frac{y(x^2 + y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - yx^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

und analog

$$\partial_y f = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

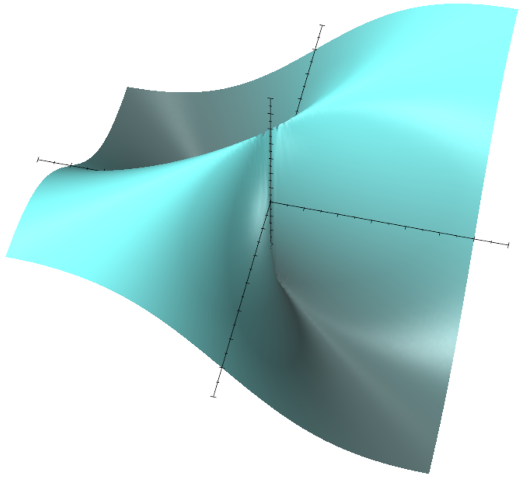
Zeigen wir, dass f auch in $(0, 0)$ partiell differenzierbar. In der Tat haben wir nach Definition

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0$$

da $f(t, 0) = 0$, und analog $\partial_y f(0, 0) = 0$. Somit ist f partiell differenzierbar in allen Punkten von $\mathbb{R}^2$.

Allerdings ist die Funktion f *unstetig* im Punkt $(0, 0)$, da für jedes $t \neq 0$ gilt $f(t, t) = \frac{1}{2}$ und somit

$$\lim_{t \to 0} f(t, t) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0).$$



Funktion $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

Beispiel. In $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ betrachten wir die Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ wie folgt:

$$f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right),$$

was eine Transformation von Kartesischen Koordinaten nach Polarkoordinaten darstellt. In diesem Fall ist J_f eine 2×2 Matrix:

$$J_f = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \partial_x f_1 &= \partial_x\left(\left(x^2+y^2\right)^{1/2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \partial_y f_1 &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_x f_2 &= \partial_x\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \\ \partial_y f_2 &= \partial_y\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix ist somit

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Erinnern wir uns daran, dass die Differenzierbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Stetigkeit ergibt, aber eine partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nicht unbedingt stetig ist. Wir definieren jetzt einen stärkeren Begriff von Differenzierbarkeit – die *totale* Differenzierbarkeit.

Definition. Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt *total differenzierbar* in $x \in \Omega$ wenn es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$f(x+h) = f(x) + Ah + o(h) \text{ für } h \to 0. \tag{12.3}$$

Die lineare Abbildung A heißt die *totale Ableitung* von f in x und wird mit $f'(x)$ oder $\frac{df}{dx}(x)$ bezeichnet, so dass

$$\boxed{f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + o(h) \quad \text{für } h \to 0.} \tag{12.4}$$

Aus Linearer Algebra ist es bekannt, dass jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sich als eine $m \times n$ Matrix darstellen lässt, die auch mit A bezeichnet wird. Man versteht Ah auch als das Produkt von der $m \times n$ Matrix A und den $n \times 1$ Spaltenvektor h, was einen Spaltenvektor $m \times 1$ ergibt:

$$Ah = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ ... \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}h_1 + a_{12}h_2 + ... + a_{1n}h_n \\ a_{21}h_1 + a_{22}h_2 + ... + a_{2n}h_n \\ ... \\ a_{m1}h_1 + a_{m2}h_2 + ... + a_{mn}h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Ah)_1 \\ (Ah)_2 \\ ... \\ (Ah)_m \end{pmatrix}.$$

Insbesondere kann die totale Ableitung $f'(x)$ als eine $m \times n$ Matrix betrachtet werden.

Fixieren wir eine Norm $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^n$ und bezeichnen mit $U_r(x)$ die metrische Kugel bezüglich der induzierten Metrik $\|x-y\|$. Da die Menge Ω offen ist, so gibt es für jedes $x \in \Omega$ eine Kugel $U_r(x)$ mit $r > 0$ die in Ω liegt. Folglich für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| < r$ liegt $x + h$ in Ω und $f(x+h)$ wohldefiniert ist.

Das Landau-Symbol $o(h)$ bezeichnet in (12.3) und (12.4) eine Funktion $\varphi(h)$ mit den Werten in $\mathbb{R}^m$ und mit

$$\frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} \to 0 \text{ für } h \to 0, \tag{12.5}$$

wobei im Zähler eine Norm in $\mathbb{R}^m$ steht. Da alle Normen in $\mathbb{R}^n$ (und in $\mathbb{R}^m$) äquivalent sind, so ist die Richtigkeit von (12.5) (und (12.3)) unabhängig von der Wahl von den Normen in $\mathbb{R}^n$ bzw $\mathbb{R}^m$.

Definition. Die Variable h in (12.3) heißt das *Differential* von x und wird auch mit dx bezeichnet. Der Ausdruck

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

heißt das *Differential* der Funktion f in x.

Es folgt aus (12.4), dass

$$f(x+dx) = f(x) + df(x) + o(dx) \quad \text{für } dx \to 0,$$

d.h. das Differential $df(x)$ ist ein *linearer* Teil der Differenz $f(x+dx) - f(x)$.

Beispiel. Seien B eine $m \times n$ Matrix und C eine $m \times 1$ Spalte. Betrachten wir eine *affine* Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad f(x) = Bx + C,$$

wobei x als eine $n \times 1$ Spalte betrachtet wird. Dann gilt

$$f(x+h) - f(x) = (B(x+h) + C) - (Bx + C) = Bh,$$

woraus folgt, dass f in jedem Punkt x differenzierbar ist und $f'(x) = B$.

Jetzt besprechen wir Folgerungen (= die notwendigen Bedingungen) der totalen Differenzierbarkeit.

Satz 12.1 *Sei ein Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ in einem Punkt $x \in \Omega$ total differenzierbar. Dann ist f stetig in x.*

Beweis. Fixieren wir die Normen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$. Wir benutzen den Begriff von *Operatornorm* einer linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\|A\| := \sup_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ah\|}{\|h\|}. \tag{12.6}$$

Zeigen wir dass $\|A\| < \infty$. Es reicht dies für die 1-norm in $\mathbb{R}^n$ zu beweisen. Sei $e_1, ..., e_n$ die kanonische Basis in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$h = h_1 e_1 + ... + h_n e_n$$

und

$$Ah = h_1 Ae_1 + ... + h_n Ae_n.$$

Aus der Dreiecksungleichung und der absoluten Homogenität der Norm erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \|Ah\| &\leq |h_1| \|Ae_1\| + ... + |h_n| \|Ae_n\| \\ &\leq C(|h_1| + ... + |h_n|) = C \|h\|_1 = C \|h\|, \end{aligned}$$

wobei

$$C := \max_{1 \leq k \leq n} \|Ae_k\| < \infty,$$

und somit $\|A\| \leq C < \infty$. Es folgt aus (12.6), dass

$$\boxed{\|Ah\| \leq \|A\| \|h\|} \text{ für alle } h \in \mathbb{R}^n. \tag{12.7}$$

Da

$$f(x+h) - f(x) = Ah + o(h) \text{ für } h \to 0$$

so erhalten wir

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \|Ah\| + \|o(h)\| \leq \|A\| \|h\| + o(\|h\|) \to 0$$

für $h \to 0$, woraus die Stetigkeit von f in x folgt. ∎

Satz 12.2 *Sei eine Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ an einem Punkt $x \in \Omega$ total differenzierbar. Dann ist f an der Stelle x partiell differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) = J_f(x). \tag{12.8}$$

Bemerken wir, dass $f'(x)$ und $J_f(x)$ die $m \times n$ Matrizen sind. Es folgt aus (12.8), dass die totale Ableitung $f'(x)$ eindeutig bestimmt ist, wenn sie existiert.

Wir betonen, dass aus der partiellen Differenzierbarkeit die totale Differenzierbarkeit *nicht* folgt, was das Beispiel der Funktion (12.2) zeigt.

Beweis. Sei $f'(x) = A = (a_{kj})$ wobei k der Zeilenindex ist und j der Spaltenindex. In der Identität

$$f(x+h) - f(x) = Ah + o(h) \text{ für } h \to 0 \tag{12.9}$$

fixieren wir einen Index j und setzen

$$h = (0, ..., \underset{\widehat{j}}{t}, ..., 0)$$

d.h. $h_j = t \in \mathbb{R}$ und $h_i = 0$ für $i \neq j$. Dann gilt

$$Ah = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & ... & a_{kj} & ... & a_{kn} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mj} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ t \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j}t \\ ... \\ a_{kj}t \\ ... \\ a_{mj}t \end{pmatrix}.$$

Die Identität von k-en Komponenten in (12.9) ergibt

$$f_k(x+h) - f_k(x) = (Ah)_k + o(t) = a_{kj}t + o(t) \quad \text{für } t \to 0,$$

d.h.

$$f_k(x_1, ..., x_j + t, ..., x_n) - f_k(x_1, ..., x_n) = a_{kj}t + o(t) \quad \text{für } t \to 0,$$

woraus folgt, dass

$$\partial_{x_j} f_k(x) = f_{k;j}(x) = a_{kj}.$$

Da die Einträge von $J_f(x)$ gleich $f_{k;j}(x)$ sind, so erhalten wir $J_f(x) = A = f'(x)$. ∎

Jetzt beweisen wir eine hinreichende Bedingung der totalen Differenzierbarkeit.

Definition. Eine Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt *stetig differenzierbar* wenn f partiell differenzierbar in Ω ist und alle partielle Ableitungen $\partial_j f_k$ stetig in Ω sind.

Satz 12.3 *Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar so ist f total differenzierbar in jedem Punkt $x \in \Omega$.*

Somit erhalten wir die folgenden Implikationen:

$$\begin{array}{ccccc} \text{stetige Differenzierbarkeit} & \overset{\text{S.12.3}}{\Longrightarrow} & \text{totale Differenzierbarkeit} & \overset{\text{S.12.2}}{\Longrightarrow} & \text{partielle Differenzierbarkeit} \\ & & \Downarrow^{\text{S.12.1}} & & \\ & & \text{Stetigkeit} & & \end{array}$$

Beweis. Betrachten wir zunächst den Fall $m = 1$, d.h. eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Die Jacobi-Matrix J_f ist in diesem Fall eine Zeile

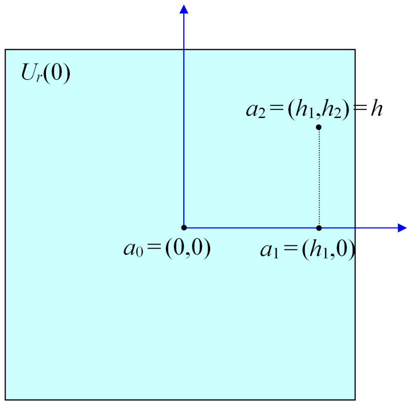
$$J_f = (\partial_1 f, ..., \partial_n f).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $x = 0$. Um die totale Differenzierbarkeit von f in 0 zu beweisen, wir zeigen dass

$$f(h) - f(0) = J_f(0)\,h + o(h) \text{ für } h \to 0. \tag{12.10}$$

Wählen wir in $\mathbb{R}^n$ die Norm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$. Sei $r > 0$ so klein, dass $U_r(0) \subset \Omega$. Fixieren wir einen Vektor $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| < r$ so dass $h \in \Omega$, und betrachten eine Folge $\{a_j\}_{j=0}^n$ von Punkten in $\mathbb{R}^n$ wie folgt:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= (0, ..., 0) = 0\\
a_1 &= (h_1, 0, ..., 0)\\
a_2 &= (h_1, h_2, 0, ..., 0)\\
&...\\
a_j &= (h_1, ..., h_j, 0, ..., 0)\\
&\dots\\
a_n &= (h_1, ..., h_n) = h
\end{aligned}
$$



Die Punkte a_j im Fall $n = 2$

Alle Punkte a_j liegen in $U_r(0)$ und somit auch in Ω, da $\|a_j\| \le \|h\| < r$. Wir haben dann

$$f(h) - f(0) = f(a_n) - f(a_0) = \sum_{j=1}^{n} \left(f(a_j) - f(a_{j-1})\right). \tag{12.11}$$

Fixieren wir einen Index j und betrachten die Funktion

$$\Phi(t) := f(h_1, ..., h_{j-1}, t, 0, ..., 0)$$

die für alle t zwischen 0 und h_j definiert und differenzierbar ist. Der Mittelwertsatz für Φ ergibt

$$\Phi(h_j) - \Phi(0) = \Phi'(\xi)\,h_j$$

für ein $\xi = \xi(h)$ zwischen 0 und h_j ist. Es folgt dass

$$
\begin{aligned}
f(a_j) - f(a_{j-1}) &= f(h_1, ..., h_{j-1}, \boxed{h_j}, 0, ..., 0) - f(h_1, ..., h_{j-1}, \boxed{0}, 0, ..., 0)\\
&= \Phi(h_j) - \Phi(0) = \Phi'(\xi)\,h_j\\
&= \partial_j f(h_1, ..., h_{j-1}, \boxed{\xi}, 0, ..., 0) h_j\\
&= \partial_j f(c_j),
\end{aligned} \tag{12.12}
$$

wobei $c_j = c_j(h) = (h_1, ..., h_{j-1}, \xi, 0, ..., 0)$. Es gilt offensichtlich $\|c_j\| \le \|h\|$ und somit $c_j \to 0$ für $h \to 0$.

Es folgt aus (12.11) und (12.12), dass

$$f(h) - f(0) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(c_j)\,h_j.$$

Bemerken wir dass für $h \to 0$

$$\partial_j f(c_j) - \partial_j f(0) \to 0$$

da auch $c_j \to 0$ und $\partial_j f$ stetig ist. Es folgt dass

$$\partial_j f(c_j) h_j - \partial_j f(0) h_j = (\partial_j f(c_j) - \partial_j f(0)) h_j = o(\|h\|) \quad \text{für } h \to 0$$

und somit

$$\partial_j f(c_j) h_j = \partial_j f(0) h_j + o(\|h\|)$$

und

$$\begin{aligned} f(h) - f(0) &= \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(0) h_j + o(\|h\|) \\ &= J_f(0) h + o(\|h\|) \end{aligned}$$

was (12.10) im Fall $m = 1$ beweist.

Sei m beliebig. Da jede Komponente f_k eine reellwertige Funktion auf Ω ist, so ergibt der erste Fall die totale Differenzierbarkeit von f_k in jedem $x \in \Omega$, d.h.

$$f_k(x+h) - f_k(x) = A_k h + o(h) \text{ für } h \to 0, \tag{12.13}$$

wobei A_k eine Zeile $1 \times n$ ist. Sei A die $m \times n$ Matrix mit der k-ten Zeile A_k für $k = 1, ..., m$. Es folgt aus (12.13), dass

$$f(x+h) - f(x) = Ah + o(h) \quad \text{für } h \to 0,$$

d.h. f ist total differenzierbar in x. ∎

04.07.2025 Vorlesung 25

Satz 12.4 (Linearität der totalen Ableitung) *Seien die Abbildungen $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar in einem Punkt $x \in \Omega$.*

(a) *Die Summe $f + g$ ist total differenzierbar in x und es gilt*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

(b) *Für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ ist cf total differenzierbar in x und es gilt*

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$

Beweis. (a) Nach Definition gelten für $h \to 0$ die Identitäten

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) h + o(h)$$

und

$$g(x+h) - g(x) = g'(x) h + o(h).$$

Addieren diese Identitäten ergibt

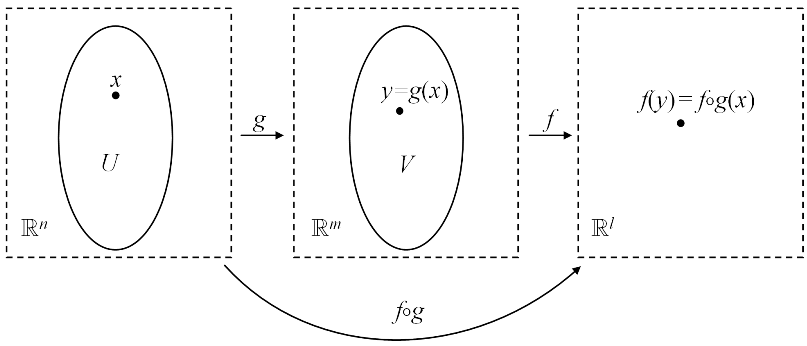
$$(f+g)(x+h) - (f+g)(x) = (f'(x) + g'(x)) h + o(h)$$

woraus $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ folgt. Der Beweis von (b) ist analog. ∎

12.2 Kettenregel für totale Ableitung

Satz 12.5 (Kettenregel) *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen. Betrachten wir zwei Abbildungen $g : U \to \mathbb{R}^m$ und $f : V \to \mathbb{R}^l$, und nehmen wir an dass die Komposition $f \circ g : U \to \mathbb{R}^l$ wohldefiniert ist (d.h. $g(U) \subset V$). Sei g total differenzierbar in einem Punkt $x \in U$ und f total differenzierbar im Punkt $y = g(x) \in V$. Dann ist die Komposition $f \circ g$ total differenzierbar in x und es gilt*

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(y)\, g'(x)} = f'(g(x))\, g'(x)\,. \tag{12.14}$$



Bemerken wir, dass $g'(x)$ und $f'(y)$ lineare Abbildungen wie folgt sind:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{g'(x)} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f'(y)} \mathbb{R}^l.$$

Somit ist das Produkt (=Komposition) $f'(y)\, g'(x)$ wohldefiniert und ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^l$, genauso, wie die totale Ableitung $(f \circ g)'(x)$. Nach (12.14) stimmen diese zwei lineare Abbildungen überein.

Beweis. Fixieren wir beliebige Normen in $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^l$. Wir haben

$$g(x + a) - g(x) = g'(x)\, a + \varphi(a)\,,$$

wobei $\varphi(a) = o(a)$ für $a \to 0$, und

$$f(y + b) - f(y) = f'(y)\, b + \psi(b)\,,$$

wobei $\psi(b) = o(b)$ für $b \to 0$. Wir müssen beweisen, dass

$$(f \circ g)(x + a) - (f \circ g)(x) = f'(y)\, g'(x)\, a + o(a) \quad \text{für } a \to 0. \tag{12.15}$$

Wir haben

$$(f \circ g)(x + a) - (f \circ g)(x) = f(g(x + a)) - f(g(x))\,.$$

Setzen wir $y = g(x)$ und

$$b := g(x + a) - g(x) = g'(x)\, a + \varphi(a)\,. \tag{12.16}$$

Es folgt, dass

$$(f \circ g)(x + a) - (f \circ g)(x) = f(y + b) - f(y)$$

$$\begin{aligned}&= f'(y)\, b + \psi(b)\\ &= f'(y)\left(g'(x)\, a + \varphi(a)\right) + \psi(b)\\ &= f'(y)\, g'(x)\, a + f'(y)\, \varphi(a) + \psi(b)\,.\end{aligned}$$

Wir beweisen jetzt dass

$$f'(y)\, \varphi(a) + \psi(b) = o(a) \text{ für } a \to 0, \tag{12.17}$$

woraus (12.15) folgen wird. Dafür bemerken wir, dass nach (12.7)

$$\|f'(y)\, \varphi(a)\| \leq \|f'(y)\|\, \|\varphi(a)\| = o(\|a\|) \quad \text{für } a \to 0,$$

so dass

$$f'(y)\, \varphi(a) = o(a) \text{ für } a \to 0.$$

Auch folgt es aus (12.16), dass

$$\|b\| \leq \|g'(x)\, a\| + \|\varphi(a)\| \leq \|g'(x)\|\, \|a\| + \|\varphi(a)\| = O(\|a\|)\,,$$

und somit

$$\|\psi(b)\| = o(\|b\|) = o(O\,\|a\|) = o(\|a\|)\,,$$

woraus (12.17) folgt. ■

Korollar 12.6 *Unter den Bedingungen des Satzes 12.5 gilt die Identität*

$$\boxed{(f \circ g)_{k;j}(x) = \sum_{i=1}^{m} f_{k;i}(y)\, g_{i;j}(x)}. \tag{12.18}$$

wobei $y = f(x)$.

Beweis. Für jede Matrix A bezeichnen wir mit A_{kj} den (k,j)-Eintrag dieser Matrix, wobei k der Zeilenindex ist und j der Spaltenindex. Da

$$(f \circ g)'(x) = f'(y)\, g'(x)\,,$$

erhalten wir nach der Regel von Matrizenmultiplikation dass

$$(f \circ g)'_{kj} = \left(f'(y)\, g'(x)\right)_{kj} = \sum_{i=1}^{m} f'(y)_{ki}\, g'(x)_{ij}\,.$$

Da die totale Ableitung mit der Jacobi-Matrix übereinstimmt (Satz 12.2)), so gelten die Gleichheiten

$$(f')_{ki} = f_{k;i}, \quad (g')_{ij} = g_{i;j} \text{ und } (f \circ g)'_{kj} = (f \circ g)_{k;j}\,,$$

woraus (12.18) folgt. ■

Sei $l = 1$, d.h. $f : V \to \mathbb{R}$. Dann gibt es in (12.18) nur eine Komponente $f_k = f_1 = f$, und wir erhalten

$$\boxed{\partial_{x_j} f\left(g_1(x), ..., g_i(x), ..., g_m(x)\right) = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f)(y)\, \partial_{x_j} g_i(x)} \tag{12.19}$$

wobei $y = (g_1(x), ..., g_m(x))$. Die Identität (12.19) bedeutet folgendes: um die partielle Ableitung ∂_{x_i} der Komposition $f(g_1, .., g_m)$ zu bestimmen, man muss für jedes $i = 1, ..., m$ die partielle Ableitung $\partial_i f$ bestimmen, sie mit der Ableitung $\partial_{x_j} g_i$ multiplizieren und alles addieren.

Beispiel. Sei $m = 2$ und $g(x) = (u(x), v(x))$. Dann gilt nach (12.19)

$$\partial_{x_j} f(u(x), v(x)) = \partial_1 f\ \partial_{x_j} u + \partial_2 f\ \partial_{x_j} v.$$

Zum Beispiel, für die Funktion $f(u, v) = uv$ haben wir

$$\partial_1 f = \partial_u f = v, \quad \partial_2 f = \partial_v f = u$$

und somit

$$\partial_{x_j}(uv) = v\partial_{x_j} u + u\partial_{x_j} v$$

d.h. die Produktregel.

Beispiel. Bestimmen wir die partiellen Ableitungen ∂_x und ∂_y der Funktion

$$F(x, y) = \left(x^2 + y\right)^{xy^2}$$

im Bereich $x > 0$, $y > 0$. Bemerken wir dass

$$F(x, y) = u^v =: f(u, v)$$

wobei

$$u = x^2 + y \ \text{ und } \ v = xy^2,$$

Somit gilt

$$\partial_x F = \partial_x f(u, v) = \partial_1 f\, \partial_x u + \partial_2 f\, \partial_x v.$$

Da

$$\partial_1 f = \partial_u f = vu^{v-1} \ \text{ und } \ \partial_2 f = \partial_v f = u^v \ln u.$$

und

$$\partial_x u = 2x \ \text{ und } \ \partial_x v = y^2,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}\partial_x F &= \left(vu^{v-1}\right) \cdot 2x + (u^v \ln u) \cdot y^2 \\ &= 2x^2y^2 \left(x^2 + y\right)^{xy^2-1} + y^2 \left(x^2 + y\right)^{xy^2} \ln\left(x^2 + y\right).\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\begin{aligned}\partial_y F &= \partial_y f(u, v) = \partial_1 f\, \partial_y u + \partial_2 f\, \partial_y v \\ &= vu^{v-1} \cdot 1 + (u^v \ln u) \cdot 2xy \\ &= xy^2 \left(x^2 + y\right)^{xy^2-1} + 2xy \left(x^2 + y\right)^{xy^2} \ln\left(x^2 + y\right).\end{aligned}$$

Korollar 12.7 (Ableitung der inversen Funktion) *Seien U und V zwei offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Sei $g : U \to V$ eine bijektive Abbildung die in einem Punkt $x \in U$ total differenzierbar ist. Sei die inverse Abbildung $f = g^{-1}$ im Punkt $y = g(x)$ total differenzierbar. Dann gilt*

$$f'(y) = g'(x)^{-1}. \tag{12.20}$$

Die beiden totalen Ableitungen $f'(y)$ und $g'(x)$ sind $n \times n$ Matrizen, und nach (12.20) ist $f'(y)$ die inverse Matrix von $g'(x)$.

Beweis. Die Komposition $f \circ g$ ist die identische Abbildung $I : U \to U$, d.h. $I(x) = x$. Dann gilt $I'(x) = \mathrm{Id}$ wobei Id die identische $n \times n$ Matrix ist. Somit haben wir nach der Kettenregel

$$\mathrm{Id} = I'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(y)\, g'(x),$$

woraus (12.20) folgt. ■

Beispiel. Betrachten wir die kartesischen Koordinaten (x, y) in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ als Funktionen von den Polarkoordinaten (r, θ), d.h.

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) =: g(r, \theta).$$

Die totale Ableitung von $g(r, \theta)$ existiert und stimmt mit der Jacobi-Matrix überein

$$g' = J_g = \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{12.21}$$

da J_g stetig bezüglich (r, θ) ist.

Sei f die inverse Abbildung von g, d.h. f ergibt die Polarkoordinaten durch die kartesischen Koordinaten,

$$f(x, y) = (r, \theta).$$

Wir erhalten nach (12.20)

$$f' = (g')^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix},$$

wobei wir die folgende Formel für inverse Matrix verwendet haben:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

mit $D = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Andererseits gilt

$$f' = \begin{pmatrix} \partial_x r & \partial_y r \\ \partial_x \theta & \partial_y \theta \end{pmatrix}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \partial_x r &= \cos\theta = \frac{x}{r}, & \partial_y r &= \sin\theta = \frac{y}{r} \\ \partial_x \theta &= -\tfrac{1}{r}\sin\theta = -\frac{y}{r^2}, & \partial_y \theta &= \tfrac{1}{r}\cos\theta = \frac{x}{r^2} \end{aligned}$$

Natürlich erhält man diese Identitäten auch direct aus $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\tan\theta = y/x$.

Beispiel. Sei h eine total differenzierbare Funktion von (x, y) in einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Einsetzen x und y als Funktionen von r, θ ergibt uns h als Funktion von r, θ. Mit Hilfe von (12.21) erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_r h &= \partial_x h \, \partial_r x + \partial_y h \, \partial_r y \\ &= \partial_x h \, \cos\theta + \partial_y h \, \sin\theta \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_\theta h &= \partial_x h \, \partial_\theta x + \partial_y h \, \partial_\theta y \\ &= r \left(-\partial_x h \, \sin\theta + \partial_y h \, \cos\theta\right). \end{aligned}$$

Zum Beispiel, für die Funktion

$$h(x, y) = xe^y$$

erhalten wir

$$\partial_r h = e^y \cos\theta + xe^y \sin\theta = e^{r\sin\theta} \cos\theta + re^{r\sin\theta} \sin\theta \cos\theta$$

und

$$\partial_\theta h = r\left(-e^y \sin\theta + xe^y \cos\theta\right) = -re^{r\sin\theta} \sin\theta + r^2 e^{r\sin\theta} \cos^2\theta.$$

09.07.2025 Vorlesung 26

12.3 Partielle Ableitungen höherer Ordnung und Satz von Schwarz

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und und f eine reellwertige Funktion auf Ω. Existiert die partielle Ableitung $\partial_j f$ in Ω, so man kann diese Funktion weiter ableiten und die partielle Ableitung 2-ter Ordnung betrachten:

$$\partial_i \left(\partial_j f\right).$$

Existiert diese Ableitung, so bezeichnet man sie wie folgt:

$$\partial_i \left(\partial_j f\right) = \partial_{ij} f = \partial_{x_i x_j} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Im Fall $i \neq j$ heißt $\partial_{ij} f$ eine *gemischte* Ableitung.

Analog definiert man die partiellen Ableitungen höherer Ordnung:

$$\partial_{i_1}\left(\partial_{i_2}\left(\ldots\left(\partial_{i_k} f\right)\right)\right) = \partial_{i_1 i_2 \ldots i_k} f = \partial_{x_{i_1} \ldots x_{i_k}} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}.$$

Die Zahl k hier heißt die *Ordnung* der Ableitung. Die Ableitung der Ordnung 0 ist die Funktion f selbst.

Satz 12.8 (Satz von Hermann Schwarz) *Nehmen wir an, dass die Funktion $f:\Omega\to\mathbb{R}$ in Ω die beiden gemischten partiellen Ableitungen $\partial_{ij}f$ und $\partial_{ji}f$ hat. Sind $\partial_{ij}f$ und $\partial_{ji}f$ in einem Punkt $x\in\Omega$ stetig, so gilt $\partial_{ij}f(x)=\partial_{ji}f(x)$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $x=0$ und $i=1$, $j=2$. Im Beweis werden die Variablen $x_3,...,x_n$ konstant sein. Somit können wir die Funktion f als eine Funktion nur von x_1,x_2 betrachten, d.h. wir können auch annehmen, dass $n=2$. Bezeichnen wir die Koordinaten in $\mathbb{R}^2$ mit (x,y) statt (x_1,x_2).

Da die Funktion $f=f(x,y)$ in einer Umgebung von $(0,0)$ definiert ist, so gibt es ein $\varepsilon>0$ so dass das Quadrat

$$Q=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|<\varepsilon,\ |y|<\varepsilon\right\}$$

in Ω liegt und somit f in Q definiert ist. Angenommen, dass die Ableitungen $\partial_{xy}f$ und $\partial_{yx}f$ in Q existieren und in $(0,0)$ stetig sind, beweisen wir, dass

$$(\partial_{xy}f)(0,0)=(\partial_{yx}f)(0,0).$$

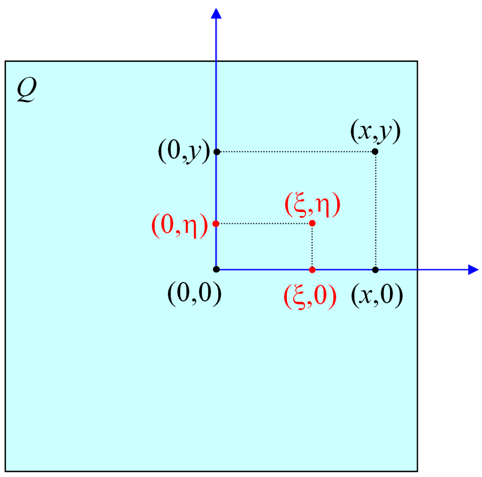
Betrachten wir in Q die Funktion

$$F(x,y)=f(x,y)-f(x,0)-f(0,y)+f(0,0)$$

und beweisen die folgende Aussage, die analog zum Mittelwertsatz fur die zweite Ableitung ist.

Behauptung. *Für jedes $(x,y)\in Q$ mit $x>0,\ y>0$ existieren $\xi\in[0,x]$ und $\eta\in[0,y]$ mit*

$$F(x,y)=(\partial_{yx}f)(\xi,\eta)\,xy. \tag{12.22}$$



Dafür fixieren wir ein (x,y) wie oberhalb und betrachten die Funktion

$$\varphi(t)=f(t,y)-f(t,0)\ \text{ für } t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

so dass

$$F(x,y)=f(x,y)-f(x,0)-(f(0,y)-f(0,0))$$

$$= \varphi(x) - \varphi(0).$$

Nach Voraussetzung ist φ differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in [0, x]$ mit

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)\, x = ((\partial_x f)(\xi, y) - (\partial_x f)(\xi, 0))\, x. \tag{12.23}$$

Die Funktion

$$\psi(s) = \partial_x f(\xi, s) \quad \text{für } s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

ist differenzierbar und somit existiert ein $\eta \in [0, y]$ mit

$$\psi(y) - \psi(0) = \psi'(\eta)\, y = \partial_y (\partial_x f)(\xi, \eta)\, y$$

d.h.

$$\partial_x f(\xi, y) - \partial_x f(\xi, 0) = (\partial_{yx} f)(\xi, \eta)\, y. \tag{12.24}$$

Einsetzen in (12.23) ergibt

$$\varphi(x) - \varphi(0) = (\partial_{yx} f)(\xi, \eta)\, xy,$$

woraus (12.22) folgt.

Analog beweist man, dass

$$F(x, y) = (\partial_{xy} f)(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}) xy, \tag{12.25}$$

für ein $\widetilde{\xi} \in [0, x]$ und ein $\widetilde{\eta} \in [0, y]$. Dafür stellen wir F in der Form

$$\begin{aligned} F(x, y) &= f(x, y) - f(0, y) - (f(x, 0) - f(0, 0)) \\ &= \varphi(y) - \varphi(0) \end{aligned}$$

dar, wobei jetzt

$$\varphi(t) = f(x, t) - f(0, t),$$

und verwenden wieder zwei mal den Mittelwertsatz, zuerst mit ∂_y und danach mit ∂_x.

Beim Vergleichen von (12.22) und (12.25) erhalten wir, dass

$$(\partial_{yx} f)(\xi, \eta) = (\partial_{xy} f)(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}). \tag{12.26}$$

Wählen wir jetzt eine beliebige Folge $\{(x_n, y_n)\}$ mit $x_n \to 0$ und $y_n \to 0$. Die entsprechenden Mittelwerte $\xi_n, \eta_n, \widetilde{\xi}_n, \widetilde{\eta}_n$ konvergieren auch gegen 0. Da $\partial_{yx} f$ und $\partial_{xy} f$ in $(0,0)$ stetig sind, so erhalten wir aus (12.26) dass

$$(\partial_{yx} f)(0, 0) = (\partial_{xy} f)(0, 0),$$

was zu beweisen war. ■

Ohne die Voraussetzung von Stetigkeit können Sie die gemischten Ableitungen $\partial_{ij} f$ und $\partial_{ji} f$ verschieden sein, wie im nächsten Beispiel.

Beispiel. Betrachten wir die folgende Funktion in $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

und zeigen, dass $\partial_{12} f(0,0)$ und $\partial_{21} f(0,0)$ verschieden sind. Nach Definition gilt

$$\partial_{12} f(0,0) = \partial_1 (\partial_2 f)(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\partial_2 f(x,0) - \partial_2 f(0,0)}{x}.$$

So, berechnen wir zuerst $\partial_2 f(x,0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\partial_2 f(x,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = \lim_{y \to 0} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = x,$$

woraus folgt

$$\partial_{12} f(0,0) = \partial_1 (\partial_2 f)(0,0) = 1.$$

Analog haben wir

$$\partial_1 f(0,y) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \lim_{x \to 0} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -y$$

und

$$\partial_{21} f(0,0) = \partial_2 (\partial_1 f)(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{\partial_1 f(0,y) - \partial_1 f(0,0)}{y} = -1.$$

Somit gilt $\partial_{12} f(0,0) \neq \partial_{21} f(0,0)$.

Definition. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *k-fach (partiell) stetig differenzierbar* wenn alle partielle Ableitungen von f der Ordnung $\leq k$ existieren und stetig in Ω sind. Die Menge von allen k-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω wird mit $C^k(\Omega)$ bezeichnet. Insbesondere wird mit $C(\Omega) = C^0(\Omega)$ die Menge von allen stetigen Funktionen auf Ω bezeichnet.

Es ist klar aus der Definition, dass $C^k(\Omega) \subset C^{k-1}(\Omega)$.

Korollar 12.9 *Für jede Funktion $f \in C^k(\Omega)$ ist der Wert von jeder partiellen Ableitung $\partial_{i_1 \ldots i_m} f$ der Ordnung $m \leq k$ unabhängig von der Reihenfolge von Ableiten ∂_{i_l}. D.h., für jede Folge $i_1, \ldots, i_m$ von $m \leq k$ Indizes und für jede Permutation $j_1, \ldots, j_m$ von $i_1, \ldots, i_m$ gilt in Ω*

$$\partial_{i_1 \ldots i_m} f = \partial_{j_1 \ldots j_m} f.$$

Beweis. Nach dem Satz 12.8 gilt folgendes: jede zwei aufeinanderfolgende Indizes in der Folge $i_1, \ldots i_m$, z.B. i_l und i_{l+1}, lassen sich vertauschen ohne den Wert von $\partial_{i_1 \ldots i_m} f$ zu ändern, da

$$\begin{aligned} \partial_{i_1 \ldots i_l i_{l+1} \ldots i_m} f &= \partial_{i_1 \ldots i_{l-1}} \left(\partial_{i_l} \partial_{i_{l+1}} \right) \partial_{i_{l+2} \ldots i_m} f \\ &= \partial_{i_1 \ldots i_{l-1}} \left(\partial_{i_{l+1}} \partial_{i_l} \right) \partial_{i_{l+2} \ldots i_m} f \\ &= \partial_{i_1 \ldots i_{l+1} i_l \ldots i_m} f. \end{aligned}$$

Da jede Permutation $j_1, \ldots, j_m$ von $i_1, \ldots, i_m$ sich als eine Reihe von Vertauschen von aufeinanderfolgenden Indizes darstellen lässt, so gilt $\partial_{i_1 \ldots i_m} f = \partial_{j_1 \ldots j_m} f$. ■

Nach Korollar 12.9, für jede Funktion $f \in C^k(\Omega)$ lässt sich jede partielle Ableitung $\partial_{i_1 \ldots i_m} f$ mit $m \leq k$ wie folgt darstellen:

$$\partial_{i_1 \ldots i_m} f = \partial_{\underbrace{1 \ldots 1}_{\alpha_1} \underbrace{2 \ldots 2}_{\alpha_2} \ldots \underbrace{n \ldots n}_{\alpha_n}} f \quad ,$$

wobei α_1 die Anzahl von 1 in der Folge $i_1....i_m$ ist, α_2 – die Anzahl von 2, usw., so dass

$$\alpha_1 + ... + \alpha_n = m.$$

Diese Ableitung wird auch wie folgt bezeichnet:

$$\partial_{i_1....i_m} f = \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = D^\alpha f, \tag{12.27}$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ ein *Multiindex* heißt. Man definiert den Betrag von α mit

$$|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n$$

so dass die Ordnung der Ableitung D^α gleich $|\alpha|$ ist.

Es folgt aus dem Korollar 12.9, dass für jede Funktion $f \in C^k(\Omega)$ und für beliebige Multiindizes α, β mit $|\alpha| + |\beta| \leq k$ gilt

$$D^{\alpha+\beta} f = D^\alpha \left(D^\beta f\right) = D^\beta \left(D^\alpha f\right).$$

12.4 Lokale Extrema

Seien Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Definition. Ein Punkt $a \in \Omega$ heißt *lokale Maximumstelle* von f wenn es eine Kugel $U_\varepsilon(a) \subset \Omega$ mit $\varepsilon > 0$ gibt so dass a eine Maximumstelle von f in $U_\varepsilon(a)$ ist, d.h.

$$f(a) \geq f(x) \text{ für alle } x \in U_\varepsilon(a).$$

Analog definiert man *lokale Minimumstelle*. Der Punkt a heißt *lokale Extremumstelle* von f, wenn a lokale Maximum- oder Minimumstelle ist.

In diesem Abschnitt besprechen wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für lokale Extrema. Wir fangen mit der Verallgemeinerung des Satzes von Fermat an.

Satz 12.10 *Sei $a \in \Omega$ eine lokale Extremumstelle von f in Ω. Ist f in a total differenzierbar, so gilt $f'(a) = 0$.*

Die Bedingung $f'(a) = 0$ ist äquivalent zu $\partial_1 f(a) = \partial_2 f(a) = ... = \partial_n f(a) = 0$.

Beweis. Sei a eine Maximumstelle von f in $U_\varepsilon(a) \subset \Omega$. Fixieren wir ein $u \in \mathbb{R}^n$ mit $|u| = 1$ und betrachten die folgende Funktion

$$\varphi(t) = f(a + tu), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

so dass $a + tu \in U_\varepsilon(a)$. Die Funktion $\varphi(t)$ hat in $t = 0$ eine Maximumstelle da

$$\varphi(0) = f(a) \geq f(a + tu) \quad \text{für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Die Funktion φ ist differenzierbar da nach der Kettenregel

$$\varphi'(t) = \partial_t f(a + tu) = \sum_{j=1}^n \partial_j f(a + tu) u_j \tag{12.28}$$

und folglich

$$\varphi'(0) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a) u_j.$$

Nach dem Satz 8.5 von Fermat erhalten wir $\varphi'(0) = 0$, d.h.

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a) u_j = 0.$$

Da diese Gleichung für alle Einheitsvektoren $u \in \mathbb{R}^n$ gilt und somit auch für alle $u \in \mathbb{R}^n$, so folgt es $\partial_j f(a) = 0$ und somit $f'(a) = 0$. ■

Definition. Sei f in Ω total differenzierbar. Die Punkte $x \in \Omega$ mit $f'(x) = 0$ heißen die *kritischen Punkte* von f.

Um die lokalen Extremumstellen von f zu bestimmen, man soll zuerst alle kritische Punkte finden und danach jeden kritischen Punkt weiter untersuchen.

Beispiel. Betrachten wir die Funktion

$$f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$

im Bereich $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Es gilt

$$\partial_x f = y - \frac{50}{x^2} \quad \text{und} \quad \partial_y f = x - \frac{20}{y^2}.$$

Die Gleichungen für die kritischen Punkte sind

$$\partial_x f(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad \partial_y f(x, y) = 0,$$

d.h.

$$\begin{cases} y - \frac{50}{x^2} = 0 \\ x - \frac{20}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = 50 \\ xy^2 = 20. \end{cases}$$

Es folgt

$$x^3 = \frac{(x^2 y)^2}{xy^2} = \frac{2500}{20} = 125 \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

und

$$y^3 = \frac{(xy^2)^2}{x^2 y} = \frac{400}{50} = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 2.$$

Somit gibt es einen einzigen kritischen Punkt $(5, 2)$.

Sei x ein kritischer Punkt von f. Um zu bestimmen ob x eine lokale Extremumstelle ist, verwenden wir die Ableitungen 2-ter Ordnung.

Definition. Für eine Funktion $f \in C^2(\Omega)$ definieren wir die *totale zweite Ableitung* $f''(x)$ als die folgende $n \times n$ Matrix:

$$f''(x) = (\partial_{ij} f(x))_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(x) & \partial_{12} f(x) & \ldots & \partial_{1n} f(x) \\ \partial_{21} f(x) & \partial_{22} f(x) & \ldots & \partial_{2n} f(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_{n1} f(x) & \partial_{n2} f(x) & \ldots & \partial_{nn} f(x) \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix heißt auch die *Hesse-Matrix* von f.

Nach dem Satz 12.8 gilt $\partial_{ij} f = \partial_{ji} f$ so dass die Hesse-Matrix symmetrisch ist.

Jede symmetrische $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ mit reellen Einträgen bestimmt eine *quadratische Form*

$$Q(u) = Q_A(u) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j$$

als eine Funktion von $u \in \mathbb{R}^n$.

Definition. Eine symmetrische $n \times n$ Matrix A (und ihre quadratische Form Q) heißt

- *positive definit* wenn $Q(u) > 0$ für alle $u \neq 0$ (Schreibweise $A > 0$);
- *positiv semidefinit* wenn $Q(u) \geq 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ (Schreibweise $A \geq 0$);
- *negativ definit* wenn $Q(u) < 0$ für alle $u \neq 0$ (Schreibweise $A < 0$);
- *negativ semidefinit* wenn $Q(u) \leq 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ (Schreibweise $A \leq 0$);
- *indefinit* wenn $Q(u)$ positive und negative Werte annimmt.

11.07.2025 Vorlesung 27

Bemerken wir, dass $Q(0) = 0$. Somit ist 0 eine Minimumstelle von Q genau dann, wenn $Q(u) \geq 0$ für alle $u \geq 0$, d.h. wenn $A \geq 0$. Analog ist 0 eine Maximumstelle von Q genau dann, wenn $A \leq 0$.

Beispiel. Die identische Matrix $A = \mathrm{id}$ erzeugt die quadratische Form $Q(u) = u_1^2 + ... + u_n^2$, die offensichtlich positiv definit ist, so dass $A > 0$.

Im Fall $n = 2$ betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit der quadratischen Form

$$Q(u) = 2u_1u_2.$$

Da $Q(u)$ positive und negative Werte annimmt, so ist A in diesem Fall indefinit.

Satz 12.11 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und f eine Funktion von $C^2(\Omega)$. Sei a ein kritischer Punkt von f, d.h. $f'(a) = 0$.*

(a) (Notwendige Bedingung für lokales Extremum) *Ist a eine lokale Maximumstelle von f, so gilt $f''(a) \leq 0$. Ist a eine lokale Minimumstelle von f so gilt $f''(a) \geq 0$.*

(b) (Hinreichende Bedingung für lokales Extremum) *Gilt $f''(a) < 0$ so ist a eine lokale Maximumstelle von f. Gilt $f''(a) > 0$ so ist a eine lokale Minimumstelle von f.*

Als eine Folgerung von (a) erhalten wir folgendes: ist $f''(a)$ indefinit so ist a keine Extremumstelle.

Beweis. Wir betrachten nur den Fall von Maximumstelle da der Fall von Minimumstelle analog ist.

Es gibt ein $\varepsilon > 0$ so dass $U_\varepsilon(a) \subset \Omega$. Fixieren wir ein $u \in \mathbb{R}^n$ mit $|u| = 1$ und betrachten die Funktion

$$\varphi(t) := f(a + tu) \tag{12.29}$$

die für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert ist. Wir haben nach der Kettenregel

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a + tu) u_j$$

(cf. (12.28)) und

$$\varphi''(t) = \sum_{j=1}^{n} \partial_t (\partial_j f(a + tu)) u_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \partial_i \partial_j f(a + tu) u_i \right) u_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_{ij} f(a + tu) u_i u_j. \tag{12.30}$$

Insbesondere gilt in $t = 0$

$$\varphi'(0) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a) u_j = 0$$

und

$$\varphi''(0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_{ij} f(a) u_i u_j = Q(u), \tag{12.31}$$

wobei Q die quadratische from der Hesse-Matrix $f''(a) = (\partial_{ij} f(a))$ ist.

(a) Sei a eine lokale Maximumstelle von f. Wählen wir $\varepsilon > 0$ so klein dass a eine Maximumstelle von f in $U_\varepsilon(a)$ ist. Dann $t = 0$ ist eine Maximumstelle von $\varphi(t)$ im Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Nach der Taylor-Formel mit dem Restglied nach Peano gilt

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} t^2 + o(t^2) \quad \text{für } t \to 0.$$

Da $\varphi(t) \le \varphi(0)$ und $\varphi'(0) = 0$ so folgt es

$$\frac{\varphi''(0)}{2} t^2 + o(t^2) \le 0.$$

Wir dividieren durch t^2, lassen $t \to 0$ und erhalten $\varphi''(0) \le 0$. Es folgt dass $Q(u) \le 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ gilt, d.h. $f''(a) \le 0$.

(b) Nehmen wir an dass $f''(a) < 0$.

Behauptung. *Es gibt ein $\varepsilon > 0$ so dass $f''(x) < 0$ für alle $x \in U_\varepsilon(a)$.*

Beweis erfolgt unterhalb. Jetzt beweisen wir, dass a eine Maximumstelle von f in $U_\varepsilon(a)$ ist. Wir verwenden wieder die Funktion φ von (12.29). Es folgt aus (12.31) dass dass $\varphi''(t) < 0$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Wir besagen, dass φ auf dem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ das Maximum in $t = 0$ hat. Dafür benutzen wir die Taylor-Formel mit dem Restglied nach Lagrange:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0) t + \frac{\varphi''(\xi)}{2} t^2$$

wobei ξ zwischen 0 und t liegt. Da $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ so gilt $\xi \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und $\varphi''(\xi) < 0$. Da $\varphi'(0) = 0$ so erhalten wir

$$\varphi(t) < \varphi(0) \text{ für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}.$$

Für jeden Punkt $x \in U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ gilt

$$x = a + (x - a) = a + |x - a| \frac{x - a}{|x - a|} = a + tu,$$

wobei $u = \frac{b-a}{|b-a|}$ und $t = |b - a|$. Da $|u| = 1$ und $0 < t < \varepsilon$ so beschließen wir dass

$$f(x) = \varphi(t) < \varphi(0) = f(a)$$

was zu beweisen war.

Beweis von der Behauptung. Setzen wir für alle $x \in \Omega$ und $u \in \mathbb{R}^n$

$$Q_x(u) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_{ij} f(x) u_i u_j.$$

Bezeichnen wir mit $\mathbb{S}^n$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$\mathbb{S}^n = \{u \in \mathbb{R}^n : |u| = 1\}$$

und betrachten die Funktion $u \mapsto Q_a(u)$ mit dem Definitionsbereich $u \in \mathbb{S}^n$, die stetig und negative ist. Da $\mathbb{S}^n$ kompakt ist, so hat diese Funktion das Maximum, das negative ist. Bezeichnen wir $\max_{u \in \mathbb{S}^n} Q_a(u) = -m$ wobei $m > 0$ so dass

$$Q_a(u) \leq -m \quad \forall u \in \mathbb{S}^n.$$

Da alle Funktionen $\partial_{ij} f(x)$ stetig sind, für jedes $\eta > 0$ gibt es $\varepsilon > 0$ so dass für alle i, j

$$\forall x \in U_\varepsilon(a) \quad |\partial_{ij} f(x) - \partial_{ij} f(x)| < \eta.$$

Daraus folgt, dass

$$|Q_x(u) - Q_a(u)| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\partial_{ij} f(x) - \partial_a f(a)| |u_i u_j| \leq \eta \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i| \right)^2 \leq \eta n^2,$$

wobei wir benutzt haben dass $|u_i| \leq 1$. Wählen wir η so klein dass $\eta n^2 < m$, woraus folgt dass für alle $x \in U_\varepsilon(a)$

$$Q_x(u) \leq Q_a(u) + \eta n^2 < 0,$$

was zu beweisen war. ■

Bemerkung. Die Definitheit von einer symmetrischen Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ lässt sich mit Hilfe von Eigenwerten wie folgt bestimmen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynom $\det(A - \lambda \operatorname{Id})$. Da A symmetrisch ist, so sind alle Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ von A reell. Die quadratische Form $Q(u)$ von A lässt sich mit Hilfe von einer bijektiven linearen Transformation $v = v(u)$ zur Diagonalform führen:

$$Q(u) = \lambda_1 v_1^2 + ... + \lambda_n v_n^2.$$

Somit erhalten wir die äquivalenten Bedingungen:

1. $A > 0 \Leftrightarrow$ alle $\lambda_i > 0$

2. $A \geq 0 \ \Leftrightarrow$ alle $\lambda_i \geq 0$

3. $A < 0 \ \Leftrightarrow$ alle $\lambda_i < 0$

4. $A \leq 0 \ \Leftrightarrow$ alle $\lambda_i \leq 0$

5. A ist indefinit $\Leftrightarrow$ es gibt i, j mit $\lambda_i > 0$ und $\lambda_j < 0$.

Im Fall $n = 2$, für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

die Vorzeichen von λ_1 und λ_2 lassen sich leicht bestimmen ohne die Werte von λ_1 und λ_2 zu berechnen. Es ist bekannt, dass

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \operatorname{Spur} A = a_{11} + a_{22} \\ \lambda_1 \lambda_2 &= \det A = a_{11} a_{22} - a_{12}^2. \end{aligned}$$

Im Fall $\det A < 0$ haben die Eigenwerte verschiedene Vorzeichen und somit ist die Matrix A indefinit. Im Fall $\det A > 0$ und $\operatorname{Spur} A > 0$ sind die beiden Eigenwerte positiv und somit $A > 0$. Im Fall $\det A > 0$ und $\operatorname{Spur} A < 0$ sind die beiden Eigenwerte negativ und somit $A < 0$.

Es gibt auch andere Methoden um die Definitheit von A zu bestimmen. Zum Beispiel, das Sylvester-Kriterium besagt folgendes: $A > 0$ genau dann, wenn alle führende Hauptminoren von A positiv sind, d.h. für alle $1 \leq k \leq n$,

$$\det \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{k} > 0.$$

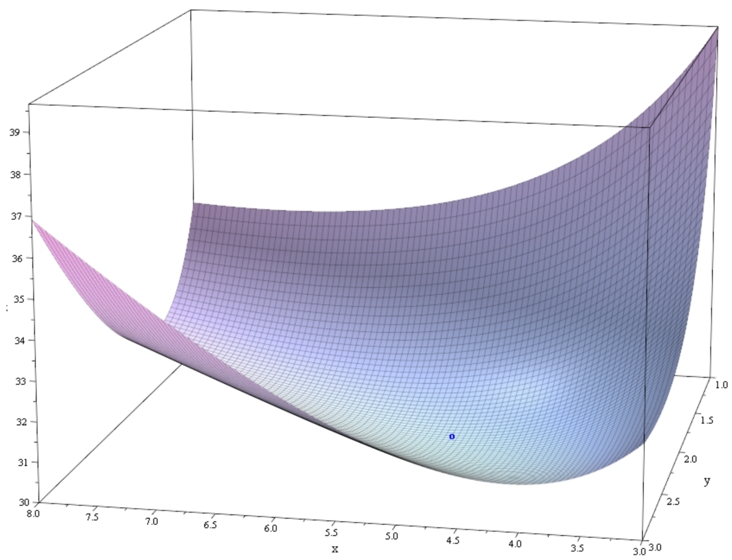
Beispiel. Betrachten wir wieder die Funktion

$$f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$

im Bereich $\{x, y > 0\}$. Wir wissen schon, dass diese Funktion den einzigen kritischen Punkt $(5, 2)$ hat. Die Hesse-Matrix in diesem Punkt ist

$$\begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{100}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{40}{y^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Da det und Spur positiv sind, so ist die Hesse-Matrix positiv definit und $(5, 2)$ eine lokale Minimumstelle.



Die lokale Minimumstelle von $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

Beispiel. Bestimmen wir die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$$

in $\mathbb{R}^2$. Wir haben

$$\partial_x f = 8x^3 - 2x \ \text{ und } \ \partial_y f = 4y^3 - 4y$$

so dass die Gleichungen für die kritischen Punkte sind

$$\begin{cases} 8x^3 - 2x = 0, \\ 4y^3 - 4y = 0. \end{cases}$$

Es folgt $x = 0, \pm\frac{1}{2}$ und $y = 0, \pm 1$, insgesamt 9 kritische Punkte. Die Hesse-Matrix ist

$$f'' = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{xy} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Im Punkt $(0,0)$ ist die Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

negativ definit, so dass $(0,0)$ eine lokale Maximumstelle. In den Punkten $(0,\pm 1)$ ist die Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

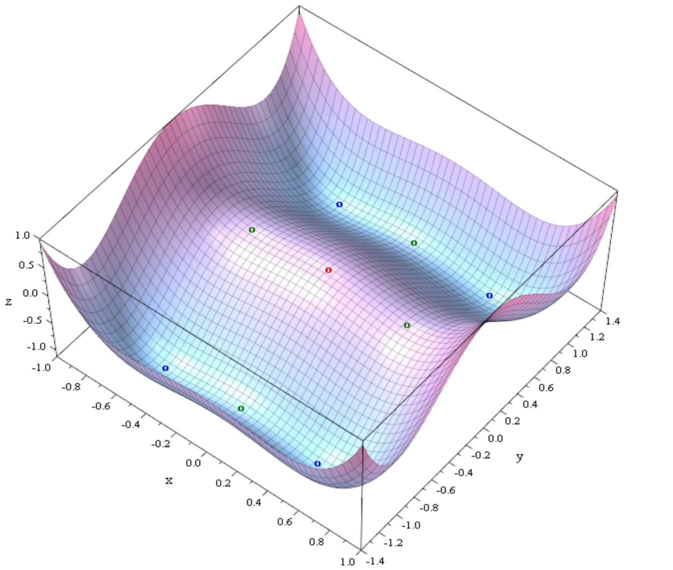
indefinit, so dass $(0,\pm 1)$ keine lokale Extremumstellen sind. In den Punkten $\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right)$ ist die Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

indefinit, so dass $\left(\pm\frac{1}{2},0\right)$ keine lokale Extremumstellen sind. In den Punkten $\left(\pm\frac{1}{2},\pm 1\right)$ ist die Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

positiv definit, so dass diese Punkte lokale Minimumstellen sind.



Die kritischen Punkten von $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

Somit hat f es eine lokale Maximumstelle in $(0,0)$ und vier lokale Minimumstellen in den Punkten $\left(\pm\frac{1}{2},\pm 1\right)$. Die kritischen Punkte $(0,\pm 1)$ und $\left(\pm\frac{1}{2},0\right)$ sind keine lokale Extremumstellen. In der Nähe von diesen Punkten sieht der Graph der Funktion f wie ein Sattel aus.

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x,y) = \sin x \cos y$ in $\Omega = (-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)$. Da

$$\partial_x f = \cos x \cos y \quad \text{und} \quad \partial_y f = -\sin x \sin y,$$

so erfüllen die kritischen Punkte das System

$$\begin{cases} \cos x \cos y = 0 \\ \sin x \sin y = 0, \end{cases}$$

d.h. entweder $\cos x = 0$ und $\sin y = 0$ oder $\cos y = 0$ und $\sin x = 0$. Somit erhalten wir die folgenden kritischen Punkte:

$$\left(\frac{\pi}{2},0\right), \left(-\frac{\pi}{2},0\right), \left(0,\frac{\pi}{2}\right), \left(0,-\frac{\pi}{2}\right).$$

Bereichen wir die Hesse-Matrix von f:

$$f''(x) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ -\cos x \sin y & -\sin x \cos y \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$f''(\frac{\pi}{2},0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} < 0,$$

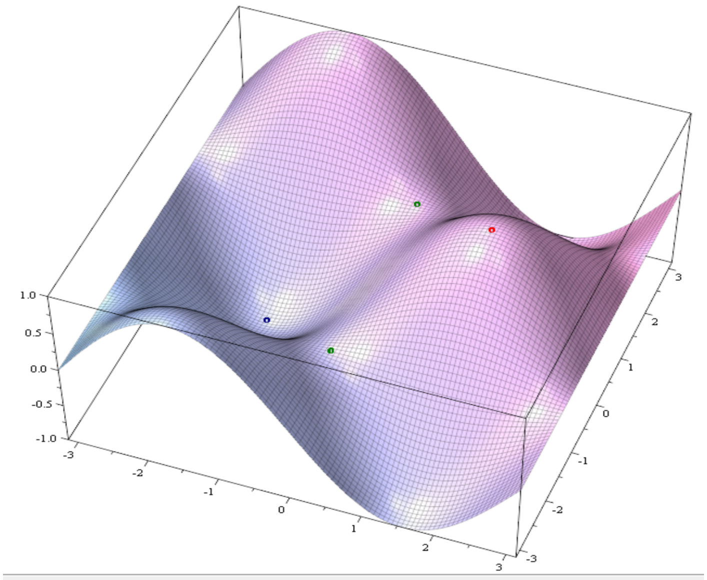
so dass $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ eine lokale Maximumstelle ist;

$$f''(-\frac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0,$$

so dass $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ eine lokale Minimumstelle ist;

$$f''(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } f''(0, -\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sind indefinit, so dass weder $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ noch $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ lokale Extremumstelle ist. In der Nähe von diesen Punkten sieht der Graph der Funktion wie ein Sattel aus.



Die Funktion $f\,(x, y) = \sin x \cos y$

12.5 * Richtungsableitung

Definition. Sei f eine reellwertige Funktion auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Für jedes $x \in \Omega$ und für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die Richtungsableitung

$$\partial_v f(x) = \frac{\partial f}{\partial v}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t},$$

vorausgesetzt, dass der Limes existiert (wobei t eine reelle Variable ist).

In anderen Wörtern, $\partial_v f(x) = g'(0)$ wobei $g(t) = f(x+tv)$.

Die partielle Ableitung $\partial_j f$ ist ein spezieller Fall der Richtungsableitung. In der Tat betrachten wir den Basisvektor

$$e_j = (0, ..., 0, \underset{\widehat{j}}{1}, 0, .., 0)$$

wobei die Eins an der Position j steht. Dann gilt

$$\partial_j f = \partial_{e_j} f,$$

da

$$\begin{aligned} \partial_{e_j} f &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x+te_j) - f(x)}{t} = \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_j + t, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{t} = \partial_j f. \end{aligned}$$

Satz 12.12 *Ist die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ total differenzierbar in x dann existiert die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$ für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ und es gilt*

$$\partial_v f(x) = f'(x)\, v = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x)\, v_i.$$

Beweis. Es folgt aus der Definition von totaler Differenzierbarkeit, dass

$$f(x+tv) - f(x) = f'(x)(tv) + o(t) \quad \text{für } t \to 0$$

Dividieren durch t ergibt

$$\partial_v f = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \left(f'(x)\, v + \frac{o(t)}{t} \right) = f'(x)\, v.$$

■

Insbesondere sehen wir, dass die Abbildung $v \mapsto \partial_v f(x)$ linear ist, was aus der Definition nicht offensichtlich ist.

Im nächsten Satz benutzen wir die Strecke $[x, y]$ zwischen zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^n$, d.h.

$$[x, y] = \{(1-t)\, x + ty : 0 \le t \le 1\}.$$

Satz 12.13 (Mittelwertsatz) *Sei f eine reellwertige total differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Seien x, y zwei Punkte in Ω mit $[x, y] \subset \Omega$. Dann es gibt einen Punkt $\xi \in [x, y]$ mit*

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x). \tag{12.32}$$

Man kann (12.32) wie folgt umschreiben:

$$f(y) - f(x) = (\partial_{y-x} f)(\xi).$$

Beweis. Setzen wir $v = y - x$ und betrachten die Funktion

$$g(t) = f(x + tv) \quad \text{für} \quad t \in [0, 1],$$

so dass $g(0) = f(x)$ und $g(1) = f(y)$. Die Funktion g ist in $[0, 1]$ differenzierbar als Komposition von den Funktionen $t \mapsto x + tv$ und f. Nach dem Mittelwertsatz aus Analysis I gibt es ein $t \in [0, 1]$ mit

$$f(y) - f(x) = g(1) - g(0) = g'(t).$$

Die Kettenregel ergibt

$$\begin{aligned} g'(t) &= \partial_t (f(x + tv)) = \sum_{i=1}^n (\partial_i f)(x + tv)\, \partial_t (x + tv)_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\partial_i f)(x + tv)\, v_i = f'(x + tv)\, v, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$f(y) - f(x) = f'(x + tv)\, v.$$

Da $\xi := x + tv = (1 - t)x + ty$ in $[x, y]$ liegt, so erhalten wir (12.32). ■

Satz 12.14 *Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion der Klasse C^2. Dann gilt für jedes $x \in \Omega$ und alle $u, v \in \mathbb{R}^n$ die Identität*

$$\partial_v (\partial_u f)(x) = \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij} f(x) u_i v_j,$$

Insbesondere gilt

$$\partial_v (\partial_u f) = \partial_u (\partial_v f).$$

Beweis. Wir haben

$$\partial_u f = \sum_i (\partial_i f)\, u_i$$

und

$$\begin{aligned} \partial_v (\partial_u f) &= \sum_i \partial_v (\partial_i f)\, u_i \\ &= \sum_i \sum_j \partial_j (\partial_i f)\, v_j u_i \\ &= \sum_{i,j} (\partial_{ij} f)\, u_i v_j =: Q(u, v). \end{aligned}$$

Da $\partial_{ij} f = \partial_{ji}$, so ist die Bilinearform Q symmetrisch, d.h. $Q(u, v) = Q(v, u)$, woraus $\partial_v (\partial_u f) = \partial_u (\partial_v f)$ folgt. ■

12.6 * Parameterintegral

Satz 12.15 *Sei $g(x,y)$ eine stetige Funktion auf $I \times J$ wobei I und $J = [\alpha, \beta]$ zwei kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$ sind.*

(a) Dann ist die Funktion

$$f(x) = \int_\alpha^\beta g(x,y)\,dy$$

stetig für alle $x \in I$.

(b) Nehmen wir an, dass die partielle Ableitung $\partial_x g$ existiert und stetig auf $I \times J$ ist. Dann ist die Funktion f differenzierbar auf I und für alle $x \in I$ gilt

$$f'(x) = \int_\alpha^\beta \partial_x g(x,y)\,dy. \tag{12.33}$$

Die Identität (12.33) lässt sich wie folgt umschreiben:

$$\partial_x \int_\alpha^\beta g(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta \partial_x g(x,y)\,dy$$

so dass die Operationen ∂_x und $\int dy$ vertauschbar sind.

Beweis. (a) Da $g(x,y)$ stetig in $I \times J$ ist, so ist g nach dem Satz 11.25 gleichmäßig stetig in $I \times J$. Sei $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in I mit $\lim x_k = x \in I$. Es folgt, dass

$$g(x_k, y) \to g(x,y) \text{ für } k \to \infty,$$

und zwar die Konvergenz gleichmäßig bezüglich $y \in J$ ist. Nach dem Satz 13.12 erhalten wir $f(x_k) \to f(x)$, so dass f stetig ist.

(b) Fixieren wir ein $x \in I$ und beweisen, dass

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to \int_\alpha^\beta \partial_x g(x,y)\,dy \text{ für } h \to 0,$$

was äquivalent zu

$$\int_\alpha^\beta \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h}dy \to \int_\alpha^\beta \partial_x g(x,y)\,dy \tag{12.34}$$

für $h \to 0$ ist. Wir haben für alle $y \in [\alpha, \beta]$

$$\frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} \to \partial_x g(x,y) \text{ für } h \to 0. \tag{12.35}$$

Wir werden beweisen, dass die Konvergenz in (12.35) gleichmäßig bezüglich $y \in [\alpha, \beta]$ ist, woraus (12.34) nach dem Satz 13.12 folgen wird. Die gleichmäßige Konvergenz bedeutet in diesem Fall, dass

$$\sup_{y\in J} \left| \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} - \partial_x g(x,y) \right| \to 0 \quad \text{für } h \to 0. \tag{12.36}$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi = \xi(y) \in [x, x+h]$ mit

$$g(x+h, y) - g(x, y) = \partial_x g(\xi, y)\, h.$$

Da die Funktion $\partial_x g$ stetig auf $I \times J$ ist, so ist sie auch gleichmäßig stetig, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass

$$\begin{gathered} x_1, x_2 \in I,\ \ |x_1 - x_2| < \delta \text{ und } \forall y_1, y_2 \in J,\ |y_1 - y_2| < \delta \\ \Downarrow \\ |\partial_x g(x_1, y_1) - \partial_x g(x_2, y_2)| < \varepsilon \end{gathered} \tag{12.37}$$

Gilt $|h| < \delta$ so gilt auch $|x - \xi| < \delta$ und somit nach (12.37)

$$|\partial_x g(\xi, y) - \partial_x g(x, y)| < \varepsilon \text{ für alle } y \in J.$$

Es folgt, dass für alle $y \in J$

$$\left| \frac{g(x+h, y) - g(x, y)}{h} - \partial_x g(x, y) \right| = |\partial_x g(\xi, y) - \partial_x g(x, y)| < \varepsilon,$$

woraus (12.36) folgt. ∎

Beispiel. Leiten wir die folgende Funktion ab:

$$f(x) = \int_1^2 \frac{\ln(x+y)}{y} dy$$

wobei $x \in (0, +\infty)$. Nach dem Satz 12.15 erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_1^2 \partial_x \frac{\ln(x+y)}{y} dy = \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)\, y} \\ &= \frac{1}{x} \int_1^2 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x+y} \right) dy \\ &= \frac{1}{x} \left[\ln \frac{y}{x+y} \right]_{y=1}^{y=2} \\ &= \frac{1}{x} \ln \frac{2(x+1)}{x+2}. \end{aligned}$$

Satz 12.16 *Sei $g(x, y)$ eine stetige Funktion auf $I \times J$ wobei I ein beliebiges Intervall ist und $J = (\alpha, \beta)$ mit $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$.*

(a) Gilt

$$\int_\alpha^\beta \sup_{x \in I} |g(x, y)|\, dy < \infty, \tag{12.38}$$

so ist die Funktion

$$f(x) = \int_\alpha^\beta g(x, y)\, dy$$

stetig für alle $x \in I$.

(*b*) *Zusätzlich nehmen wir an, dass die partielle Ableitung* $\partial_x g$ *existiert und stetig auf* $I \times J$ *ist und dass*

$$\int_\alpha^\beta \sup_{x \in I} |\partial_x g(x,y)|\, dy < \infty. \tag{12.39}$$

Dann ist die Funktion f *differenzierbar auf* I *und für alle* $x \in I$ *gilt*

$$f'(x) = \int_\alpha^\beta \partial_x g(x,y)\, dy.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass das Intervall I kompakt ist, da die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von f in x nur von f in der Nähe von x abhängen. Wählen wir a, b mit $\alpha < a < b < \beta$.

(*a*) Sei $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in I mit $\lim x_k = x \in I$. Wir haben

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x) &= \int_\alpha^\beta (g(x_k,y) - g(x,y))\, dy \\ &= \int_a^b (g(x_k,y) - g(x,y))\, dy + \left(\int_\alpha^a + \int_b^\beta\right)(g(x_k,y) - g(x,y))\, dy. \end{aligned}$$

Das erste Integral konvergiert gegen 0 nach dem Satz 12.15. Für das zweite Integral gilt

$$\left|\left(\int_\alpha^a + \int_b^\beta\right)(g(x_k,y) - g(x,y))\, dy\right| \le 2\left(\int_\alpha^a + \int_b^\beta\right)\sup_{\xi \in I}|g(\xi,y)|\, dy.$$

Nach (12.38) kann die rechte Seite aufgrund der Wahl von a, b beliebig klein gemacht werden, woraus folgt $f(x_k) \to f(x)$ für $k \to \infty$.

(*b*) Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \int_\alpha^\beta \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} dy \\ &= \int_a^b \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} dy & (12.40) \\ &\quad + \left(\int_\alpha^a + \int_b^\beta\right)\frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} dy. & (12.41) \end{aligned}$$

Das Integral (12.40) konvergiert für $h \to 0$ gegen

$$\int_a^b \partial_x g(x,y)\, dy$$

nach dem Satz 12.15. Andererseits gilt

$$\int_a^b \partial_x g(x,y)\, dy = \int_\alpha^\beta \partial_x g(x,y)\, dy - \left(\int_\alpha^a + \int_b^\beta\right)\partial_x g(x,y)\, dy.$$

Für das Integral (12.41) bemerken wir zuerst, dass nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} = \partial_x g(\xi,y)$$

für ein ξ zwischen x und $x+h$, woraus folgt

$$\left|\frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h}\right| \le \sup_{\xi\in I}\left|\partial_x g(\xi,y)\right|,$$

wobei die rechte Seite unabhängig von h ist. Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\int_\alpha^\beta \partial_x g(x,y)\,dy\right| \\
\le\ & \left|\int_a^b \frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h}dy-\int_a^b \partial_x g(x,y)\,dy\right| \\
& +\left(\int_\alpha^a+\int_b^\beta\right)\left|\partial_x g(x,y)\right|dy \\
& +\left(\int_\alpha^a+\int_b^\beta\right)\left|\frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h}\right|dy \\
\le\ & \left|\int_a^b \frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h}dy-\int_a^b \partial_x g(x,y)\,dy\right| \qquad (12.42)\\
& +2\left(\int_\alpha^a+\int_b^\beta\right)\sup_{\xi\in I}\left|\partial_x g(\xi,y)\right|dy. \qquad (12.43)
\end{aligned}$$

Das Integral (12.43) kann nach (12.39) aufgrund der Wahl von a,b beliebig klein gemacht werden, und zwar unabhängig von h, wohingegen der Ausdruck (12.42) konvergiert gegen 0 für $h\longrightarrow 0$ nach dem Satz 12.15. Somit erhalten wir, dass

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\int_\alpha^\beta \partial_x g(x,y)\,dy,$$

was zu beweisen war. ■

Beispiel. Betrachten wir die Funktion

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin y}{y}dy$$

und beweisen, dass f in $x\in(0,+\infty)$ differenzierbar ist und

$$f'(x)=\int_0^\infty \partial_x e^{-xy}\frac{\sin y}{y}dy.$$

Es reicht dies für $x\in(\varepsilon,+\infty)$ für jedes $\varepsilon>0$ zu beweisen. Dafür überprüfen wir die Bedingungen (12.38) und (12.39) in $I=(\varepsilon,+\infty)$. Da $|\sin y|\le y$ und $|\sin y|\le 1$, so erhalten wir

$$\int_0^\infty \sup_{x\in(\varepsilon,+\infty)}\left|e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\right|dy \le \int_0^\infty \sup_{x\in(\varepsilon,+\infty)}\left|e^{-xy}\right|dy=\int_0^\infty e^{-\varepsilon y}dy=\frac{1}{\varepsilon}<\infty$$

und

$$\int_0^\infty \sup_{x\in(\varepsilon,+\infty)}\left|\partial_x e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\right|dy=\int_0^\infty \sup_{x\in(\varepsilon,+\infty)}\left|e^{-xy}\sin y\right|dy\le\int_0^\infty e^{-\varepsilon y}dy<\infty.$$

Nach dem Satz 12.16 erhalten wir, für alle $x > 0$,

$$f'(x) = \int_0^\infty \partial_x e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy = -\int_0^\infty e^{-xy} \sin y dy.$$

Mit Hilfe von partieller Integration erhält man

$$\int_0^\infty e^{-xy} \sin y \, dy = \frac{1}{x^2+1}$$

(siehe Aufgabe 100 (iii)), so dass

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2+1}.$$

Es folgt, dass für alle $x > 0$ gilt

$$f(x) = -\int \frac{dx}{x^2+1} = C - \arctan x. \tag{12.44}$$

Da $\left|\frac{\sin y}{y}\right| \leq 1$ und somit

$$|f(x)| \leq \int_0^\infty e^{-xy} dy = \frac{1}{x},$$

so erhalten wir

$$f(x) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to +\infty.$$

So folgt aus (12.44), dass

$$C = \arctan(+\infty) = \pi/2$$

und somit, für alle $x > 0$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x},$$

d.h.

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy = \arctan \frac{1}{x}} \tag{12.45}$$

Z.B. für $x = 1$ erhalten wir

$$\int_0^\infty e^{-y} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{4},$$

und für $x = \sqrt{3}$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{3}y} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{6}.$$

Beispiel. Mit Hilfe von (12.45) beweisen wir noch einmal den Satz 13.4, d.h.

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}.$$

Wir werden beweisen, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy = \lim_{x \to 0+} \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy. \tag{12.46}$$

Für $x \to 0+$ erhalten wir aus (12.45) und (12.46), dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy = \lim_{x \to 0} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Für jedes $a \in (0, +\infty)$ haben wir nach dem Satz 12.15(a)

$$\lim_{x \to 0+} \int_0^a e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy = \int_0^a \frac{\sin y}{y} dy.$$

Wir zeigen, dass

$$\sup_{x>0} \left| \int_a^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy \right| \to 0 \text{ für } a \to \infty. \tag{12.47}$$

Ist (12.47) schon bekannt, so beweisen wir (12.46) wie folgt. Bemerken zuerst, dass

$$\left| \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy - \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy \right| \leq \left| \int_0^a \left(e^{-xy} \frac{\sin y}{y} - \frac{\sin y}{y} \right) dy \right| \tag{12.48}$$

$$+ \left| \int_a^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy \right| + \left| \int_a^\infty \frac{\sin y}{y} dy \right|. \tag{12.49}$$

Fixieren wir ein $\varepsilon > 0$ und wählen a so groß dass

$$\sup_{x>0} \left| \int_a^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy \right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left| \int_a^\infty \frac{\sin y}{y} dy \right| < \infty,$$

was nach (12.47) und nach der Konvergenz des Dirichlet-Integrals möglich ist. Da die rechte Seite von (12.48) gegen 0 für $x \to 0+$ konvergiert, so erhalten wir, dass

$$\limsup_{x \to 0+} \left| \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy - \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy \right| \leq 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, so erhalten wir (12.46).

Um (12.47) zu beweisen verwenden wir die Ungleichung (13.6) die im Beweis des Satzes 13.1 bewiesen wurde. Setzen wir

$$f(y) = \frac{\sin y}{y}, \quad g(y) = e^{-xy}$$

und, für ein $a > 0$,

$$F_a(y) = \int_a^y f(t)\, dt = \int_a^y \frac{\sin t}{t} dt$$

Diese Funktionen erfüllen die Bedingungen des Dirichlet-Kriteriums (Satz 13.1(b)): $g(y)$ ist stetig differenzierbar, monoton, $g(y) \to 0$ für $y \to +\infty$ und $F_a(y)$ ist beschränkt. Somit erhalten wir nach (13.6)

$$\left| \int_a^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy \right| = \left| \int_a^\infty f(y)\, g(y)\, dy \right| \leq \sup_{y \in [a,\infty)} |F_a(y)|\, |g(a)|. \tag{12.50}$$

Es folgt aus der Konvergenz des Dirichlet-Integrals dass

$$\sup_{y \in [a,\infty)} |F_a(y)| = \sup_{y \in [a,\infty)} \left| \int_0^y f(t)\, dt - \int_0^a f(t)\, dt \right| \to 0 \quad \text{für } a \to \infty.$$

Da $|g(a)| \leq 1$, so folgt (12.47) aus (12.50).

12.7 * Taylorformel

Im nächsten Satz benutzen wir die folgende Notation: für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{I}^n$ setzen wir

$$\alpha! := \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!,$$

und für jeden Vektor $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$$

(wobei $x_i^{\alpha_i} = 1$ für $\alpha_i = 0$). Z.B. im Fall $n = 3$ haben wir

$$(2, 0, 1)! = 2!0!1! = 2$$

und

$$x^{(2,0,1)} = x_1^2 x_3.$$

Hauptsatz 12.17 (Taylorformel mit der Restgliedform nach Peano) *Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Für jede Funktion $f \in C^k(\Omega)$ mit $k \geq 0$ und für jedes $a \in \Omega$ gilt*

$$f(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \leq k\}} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + o\left(\|x-a\|^k\right) \text{ für } x \to a. \tag{12.51}$$

Umgekehrt, gilt für reelle Koeffizienten c_α

$$f(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \leq k\}} c_\alpha (x-a)^\alpha + o\left(\|x-a\|^k\right) \text{ für } x \to a, \tag{12.52}$$

so haben wir $c_\alpha = \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}$.

Nach der Offenheit von Ω liegt x in Ω (und somit $f(x)$ ist wohldefiniert), vorausgesetzt, dass $\|x-a\|$ hinreichend klein ist.

Definition. Die Funktion

$$\begin{aligned} T_k(x) &= \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \leq k\}} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha \\ &= \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \leq k\}} \frac{\partial^{|\alpha|} f(a)}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \frac{(x_1-a_1)^{\alpha_1} ... (x_n-a_n)^{\alpha_n}}{\alpha_1! ... \alpha_n!} \end{aligned} \tag{12.53}$$

heißt das *Taylor-Polynom* der Ordnung k der Funktion f im Punkt a. Die ausführliche Notation für das Taylor-Polynom ist $T_{k,f}(x; a)$

Offensichtlich ist $T_k(x)$ ein Polynom bezüglich der Variablen $x_1, ..., x_n$ und $T_k(a) = f(a)$. Die Taylorformel lässt sich wie folgt umschreiben:

$$f(x) = T_k(x) + o(\|x-a\|^k) \text{ für } x \to a. \tag{12.54}$$

Somit ist $T_k(x)$ eine Approximation von $f(x)$ für x in der Nähe von a mit dem Approximationsfehler $o(\|x-a\|^k)$.

Die zweite Aussage des Satzes 12.17 bedeutet folgendes. Gilt

$$f(x) = P(x) + o(\|x-a\|^k) \text{ für } x \to a \tag{12.55}$$

für ein Polynom $P(x) = \sum c_\alpha x^\alpha$ von x des Grades $\leq k$, so gilt $P \equiv T_k$. Somit ist T_k das einzige Polynom des Grades $\leq k$, das (12.55) erfüllt.

Seien $n = 1$ und Ω ein offenes Intervall. Dann ergibt (12.53)

$$T_k(x) = \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha$$

so dass

$$f(x) = \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + o\left(|x-a|^k\right) \quad \text{für } x \to a,$$

was mit der Taylorformel des Satzes 8.19 übereinstimmt.

Sei n beliebig und $a = 0$, so dass

$$T_k(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \leq k\}} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha.$$

Stellen wir $T_k(x)$ expliziter für $k = 0, 1, 2, 3$ dar. Für $|\alpha| = 0$ gilt $\alpha = (0, ..., 0)$ und somit

$$\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha = f(0)$$

und somit

$$T_0(x) = f(0) = \text{const}\,.$$

Für $|\alpha| = 1$ gilt

$$\alpha = (0, ..., \underset{\widehat{i}}{1}, ..., 0)$$

mit 1 an einer Position i und mit allen anderen Komponenten gleich 0. Somit haben wir

$$\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha = \partial_i f(0)\, x_i$$

und

$$\sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| = 1\}} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(0)\, x_i = f'(0)\, x.$$

Es folgt, dass

$$T_1(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(0)\, x_i = f(0) + f'(0)\, x.$$

Für $|\alpha| = 2$ gibt es zwei Möglichkeiten: entweder

$$\alpha = (0, ..., \underset{\widehat{i}}{2}, ..., 0)$$

mit 2 an einer Position i, oder

$$\alpha = (0, ..., \underset{\widehat{i}}{1}, ..., \underset{\widehat{j}}{1}, ..., 0),$$

mit 1 an zwei Positionen $i < j$. Im ersten Fall haben wir

$$\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}x^\alpha = \frac{\partial_{ii} f(0)}{2}x_i^2,$$

und im zweiten Fall

$$\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}x^\alpha = \partial_{ij} f(0)\, x_i x_j,$$

woraus folgt

$$\sum_{\{\alpha\in\mathbb{I}^n:|\alpha|=2\}} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}x^\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\partial_{ii} f(0)}{2}x_i^2 + \sum_{\{1\le i<j\le n\}} \partial_{ij} f(0)\, x_i x_j.$$

Somit erhalten wir

$$T_2(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(0)\, x_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial_{ii} f(0)}{2}x_i^2 + \sum_{\{1\le i<j\le n\}} \partial_{ij} f(0)\, x_i x_j. \tag{12.56}$$

Für $|\alpha| = 3$ gibt es drei Möglichkeiten: entweder

$$\alpha = (0, ..., \underset{\widehat{i}}{3}, ..., 0)$$

mit 3 an einer Position i, oder

$$\alpha = (0, ..., \underset{\widehat{i}}{2}, ..., \underset{\widehat{j}}{1}, ..., 0),$$

mit 2 und 1 an den Positionen $i \neq j$, oder

$$\alpha = (0, ..., \underset{\widehat{i}}{1}, ..., \underset{\widehat{j}}{1}, ..., \underset{\widehat{l}}{1}, ..., 0),$$

mit 1 an drei Positionen $i < j < l$. Daraus folgt:

$$T_3(x) = T_2(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial_{iii} f(0)}{6}x_i^3 + \sum_{\{i\neq j\}} \frac{\partial_{iij} f(0)}{2}x_i^2 x_j + \sum_{\{1\le i<j<l\le n\}} \partial_{ijl} f(0)\, x_i x_j x_l. \tag{12.57}$$

Zum Beispiel, sei $n = 2$. Dann bezeichnen wir die Koordinaten in $\mathbb{R}^2$ mit (x, y) anstatt (x_1, x_2). Es folgt aus (12.56), dass

$$T_2(x, y) = f(0) + \partial_x f(0)\, x + \partial_y f(0)\, y + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(0)\, x^2 + \frac{1}{2}\partial_{yy} f(0)\, y^2 + \partial_{xy} f(0)\, xy, \tag{12.58}$$

und aus (12.57)

$$T_3(x, y) = T_2(x, y) + \frac{1}{6}\partial_{xxx} f(0)\, x^3 + \frac{1}{6}\partial_{yyy} f(0)\, y^3 + \frac{1}{2}\partial_{xxy} f(0)\, x^2 y + \frac{1}{2}\partial_{xyy} f(0)\, xy^2. \tag{12.59}$$

Beispiel. Bestimmen wir die Taylor-Polynome $T_2(x, y)$ und $T_3(x, y)$ der Funktion

$$f(x, y) = x^y$$

im Punkt $a = (1,1)$. Analog zu (12.58) haben wir

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(a) + \partial_x f(a)(x-1) + \partial_y f(a)(y-1) \\ &\quad + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(a)(x-1)^2 + \frac{1}{2}\partial_{yy} f(a)(y-1)^2 + \partial_{xy} f(a)(x-1)(y-1). \end{aligned}$$

Bestimmen wir die partiellen Ableitungen von f erster und zweiter Ordnung:

$$\partial_x f = yx^{y-1}, \qquad \partial_y f = x^y \ln x$$

$$\partial_{xx} f = y(y-1)x^{y-2}, \qquad \partial_{xy} f = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1}, \qquad \partial_{yy} f = x^y \ln^2 x$$

so dass

$$\partial_x f(a) = 1, \quad \partial_y f(a) = 0,$$

$$\partial_{xx} f(a) = 0, \quad \partial_{xy} f(a) = 1, \quad \partial_{yy} f(a) = 0,$$

Es folgt, dass

$$T_2(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) = 1 - y + xy.$$

Analog zu (12.59) haben wir

$$\begin{aligned} T_3(x,y) &= T_2(x,y) + \frac{1}{6}\partial_{xxx} f(a)(x-1)^3 + \frac{1}{6}\partial_{yyy} f(a)(y-1)^3 \\ &\quad + \frac{1}{2}\partial_{xxy} f(a)(x-1)^2(y-1) + \frac{1}{2}\partial_{xyy} f(a)(x-1)(y-1)^2. \end{aligned}$$

Bestimmen wir weiter die partiellen Ableitungen von f dritter Ordnung:

$$\partial_{xxx} f = y(y-1)(y-2)x^{y-3}, \quad \partial_{xxy} f = x^{y-2}\left(2y + y^2\ln x - y\ln x - 1\right)$$

$$\partial_{xyy} f = x^{y-1}(\ln x)(y\ln x + 2), \qquad \partial_{yyy} f = x^y \ln^3 x$$

so dass

$$\partial_{xxx} f(a) = 0, \quad \partial_{xxy} f(a) = 1, \quad \partial_{xyy} f(a) = 0, \; \partial_{yyyf}(a) = 0.$$

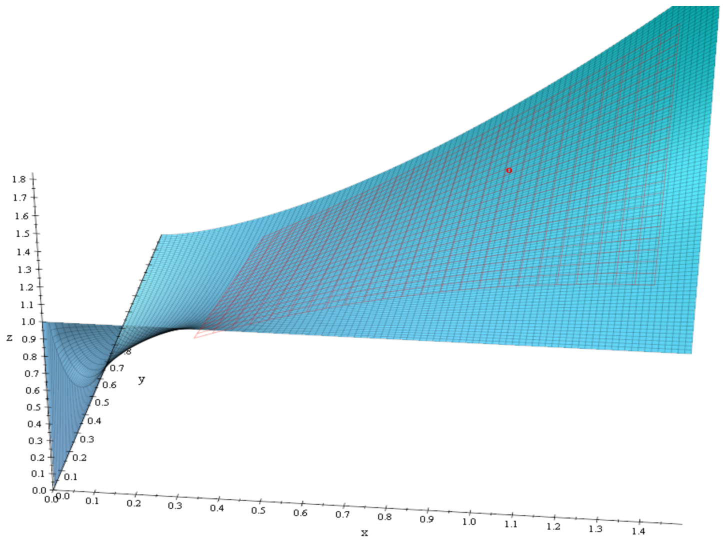
Es folgt, dass

$$T_3(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1).$$

Zum Beispiel, für $x = 1.02$ und $y = 1.1$ erhalten wir

$$1.02^{1.1} \approx T_3(1.02, 1.1) = 1 + 0.02 + 0.02 \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 0.02^2 \times 0.1 = 1.02202$$

wobei alle 5 Nachkommastellen richtig sind.



Funktionen x^y (blau), $T_3(x,y)$ (rot) und der Punkt $(1,1,1)$ (rot)

Beweis von dem Satz 12.17. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $a=0$ an. Setzen wir

$$R_k(x) := f(x) - T_k(x) \tag{12.60}$$

und beweisen per Induktion nach k, dass

$$R_k(x) = o\left(\|x\|^k\right) \text{ für } x \to 0. \tag{12.61}$$

Induktionsanfang. Für $k=0$ wird (12.61)

$$f(x) - f(0) = o(1) \text{ für } x \to 0,$$

was nach der Stetigkeit von f gilt.

Induktionsschritt von $k-1$ nach k. Fixieren wir einen Index $i = 1, ..., n$ und bemerken, dass $\partial_i f \in C^{k-1}(\Omega)$.

Behauptung. *Das Taylor-Polynom der Ordnung $k-1$ von $\partial_i f$ ist gleich $\partial_i T_k$, d.h.*

$$T_{k-1,\partial_i f}(x) = \partial_i T_{k,f}(x). \tag{12.62}$$

Nach (12.53) haben wir

$$\partial_i T_k(x) = \sum_{\{\alpha\in\mathbb{I}^n : |\alpha|\le k\}} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} \partial_i x^\alpha. \tag{12.63}$$

Im Fall $\alpha_i = 0$ hängt x^α von x_i nicht ab, woraus folgt $\partial_i x^\alpha = 0$. Somit können wir annehmen, dass in der obigen Summe nur die Werte von α mit $\alpha_i \ge 1$ benutzt werden. Setzen wir

$$\beta = (0, ..., \underset{\hat{i}}{1}, ..., 0). \tag{12.64}$$

Dann ist $\alpha - \beta$ ein Multiindex der Ordnung $|\alpha| - 1$ und es gelten die Identitäten:

$$\partial_i x^\alpha = \partial_i\left(x_1^{\alpha_1} ... x_i^{\alpha_i} ... x_n^{\alpha_n}\right) = \alpha_i (x_1^{\alpha_1} ... x_i^{\alpha_i - 1} ... x_n^{\alpha_n}) = \alpha_i x^{\alpha-\beta},$$

$$\alpha! = \alpha_1!...\alpha_i!...\alpha_n! = \alpha_i\left(\alpha_1!...\left(\alpha_i-1\right)!...\alpha_n!\right) = \alpha_i\left(\alpha-\beta\right)!,$$
$$D^\alpha f = D^{\alpha-\beta}D^\beta f = D^{\alpha-\beta}\partial_i f.$$

Einsetzen in (12.63) und Wechsel $\gamma = \alpha - \beta$ ergeben:

$$\begin{aligned}\partial_i T_k\left(x\right) &= \sum_{\{\alpha\in\mathbb{I}^n:|\alpha|\le k,\alpha_i\ge 1\}} \frac{D^{\alpha-\beta}\partial_i f\left(0\right)}{\alpha_i\left(\alpha-\beta\right)!}\alpha_i x^{\alpha-\beta} \\ &= \sum_{\{\gamma\in\mathbb{I}^n:|\gamma|\le k-1\}} \frac{D^\gamma\left(\partial_i f\right)\left(0\right)}{\gamma!}x^\gamma = T_{k-1,\partial_i f}\left(x\right),\end{aligned} \tag{12.65}$$

was (12.62) beweist.

Nach (12.62) und nach der Induktionsvoraussetzung für die Funktion $\partial_i f \in C^{k-1}\left(\Omega\right)$ erhalten wir

$$\left(\partial_i f\right)\left(x\right) = \partial_i T_k\left(x\right) + o\left(\|x\|^{k-1}\right) \text{ für } x \to 0,$$

was äquivalent zu

$$\partial_i R_k\left(x\right) = o\left(\|x\|^{k-1}\right) \text{ für } x \to 0 \tag{12.66}$$

ist.

Die Funktion $R_k\left(x\right)$ ist in einer Kugel $U_\varepsilon\left(0\right)$ wohldefiniert und gehört zur Klasse $C^k\left(B_\varepsilon\left(0\right)\right)$. Da $k \ge 1$, so ist R_k differenzierbar in dieser Kugel. Nach dem Mittelwertsatz 12.13 erhalten wir, dass für ein Punkt $\xi \in [0,x]$

$$R_k\left(x\right) = R_k\left(x\right) - R_k\left(0\right) = R_k'\left(\xi\right)x = \sum_{i=1}^n \partial_i R_k\left(\xi\right)x_i.$$

Da $\|\xi\| \le \|x\|$, so erhalten wir aus (12.66)

$$\left|R_k\left(x\right)\right| \le \sum_{i=1}^n \left|\partial_i R_k\left(\xi\right)\right| \|x\|_\infty = o\left(\|\xi\|^{k-1}\right)\|x\|_\infty = o\left(\|x\|^k\right),$$

woraus (12.61) folgt.

Jetzt beweisen wir die Eindeutigkeit des Taylor-Polynoms. Gilt (12.52), so setzen wir

$$b_\alpha = \frac{D^\alpha f\left(0\right)}{\alpha!} - c_\alpha$$

und

$$Q\left(x\right) = \sum_{\{\alpha\in\mathbb{I}^n:|\alpha|\le k\}} b_\alpha x^\alpha,$$

so dass $Q\left(x\right)$ ein Polynom von x des Grades $\le k$ ist. Es folgt aus (12.51) and (12.52), dass

$$Q\left(x\right) = o\left(\|x\|^k\right) \quad \text{für } k \to \infty. \tag{12.67}$$

Wir müssen beweisen, dass $b_\alpha = 0$ für alle α, was wir aus (12.67) gewinnen.

Zuerst zeigen wir, dass $Q\left(x\right) \equiv 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Setzen wir $x = tv$ für $v \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ und stellen $Q\left(x\right)$ wie folgt dar:

$$Q\left(x\right) = \sum_{\{\alpha\in\mathbb{I}^n:|\alpha|\le k\}} b_\alpha\left(tv\right)^\alpha = \sum_{\{\alpha\in\mathbb{I}^n:|\alpha|\le k\}} b_\alpha t^{|\alpha|}v^\alpha = \sum_{j=0}^k Q_j\left(v\right)t^j,$$

wobei $Q_j(v)$ die Polynome von v sind. Für festes v und für $t \to 0$ erhalten wir aus (12.67)

$$\sum_{j=0}^{k} Q_j(v)\, t^j = o\left(t^k\right) \text{ für } t \to 0.$$

Da die linke Seite hier ein Polynom von t des Grades $\leq k$ ist, so erhalten wir nach der Taylorformel aus Analysis 1, dass alle Koeffizienten von diesem Polynom verschwinden, d.h.

$$Q_j(v) = 0 \text{ für alle } j = 0, ..., k \text{ und für alle } v \in \mathbb{R}^n,$$

woraus folgt

$$Q(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n. \tag{12.68}$$

Beweisen wir jetzt per Induktion nach k, dass unter der Bedingung (12.68) alle Koeffizienten b_α von Q verschwinden. Für $k = 0$ ist das offensichtlich, da $Q(x) \equiv b_0 = \text{const}$. Für Induktionsschritt bemerken wir, dass analog zu (12.65) und mit β aus (12.64)

$$\partial_i Q(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \leq k, \alpha_i \geq 1\}} \alpha_i b_\alpha x^{\alpha - \beta} = \sum_{\{\gamma \in \mathbb{I}^n : |\gamma| \leq k-1\}} b'_\gamma x^\gamma,$$

wobei $\gamma = \alpha - \beta$ und $b'_\gamma = \alpha_i b_\alpha$. Da $\partial_i Q(x) \equiv 0$ und $\partial_i Q$ ein Polynom des Grades $\leq k - 1$ ist, so erhalten wir nach der Induktionsvoraussetzung, dass $b'_\gamma = 0$ für alle γ, woraus folgt, dass $b_\alpha = 0$ für alle α mit $\alpha_i \geq 1$. Da i beliebig ist, so erhalten wir $b_\alpha = 0$ für alle $\alpha \neq 0$. Für $\alpha = 0$ gilt $b_0 = Q(0) = 0$ auch. Somit sind alle b_α gleich 0, was zu beweisen war. ■

12.8 * Satz von der inversen Funktion

Hauptsatz 12.18 (Satz von der inversen Funktion) *Seien W eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : W \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung der Klasse C^l mit $l \geq 1$. Ist $f'(p)$ in einem Punkt $p \in W$ invertierbar, so existieren offene Teilmengen U und V von $\mathbb{R}^n$, so dass $p \in U \subset W$, $f(p) \in V$, und $f|_U$ eine Bijektion von U nach V ist; insbesondere ist die inverse Abbildung $f^{-1} : V \to U$ wohldefiniert. Darüber hinaus ist f^{-1} der Klasse C^l und es gilt*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \left(f'(x)\right)^{-1} \tag{12.69}$$

für alle $y \in V$ und $x = f^{-1}(y)$.

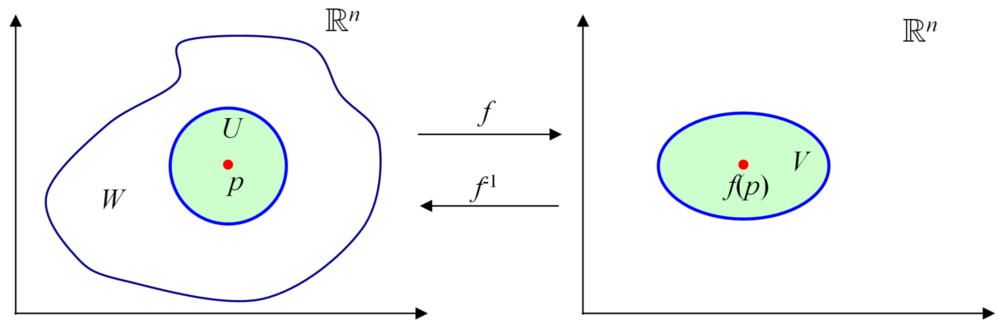


Bild zum Satz 12.18

Eine kurze Umformulierung des Satzes 12.18: in der Nähe von jedem Punkt p, wo die Matrix $f'(p)$ invertierbar ist, ist auch die Funktion f invertierbar. Betrachten wir die Menge

$$W_0 = \{p \in W : \det f'(p) = 0\}.$$

Dann ist f in $W \setminus W_0$ lokal invertierbar, d.h. invertierbar in der Nähe von jedem Punkt $p \in W \setminus W_0$. Die Identität (12.69) folgt aus dem Korollar 12.7 wenn es schon bekannt ist dass f^{-1} differenzierbar ist.

Bemerkung. Wir wissen folgendes aus Analysis I. Sei f eine reellwertige stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall J mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in J$. Dann ist f streng monoton auf J und somit existiert die inverse Funktion f^{-1} auf dem Intervall $I = f(J)$. Darüber hinaus ist f^{-1} auf I differenzierbar und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

für alle $y \in I$ und $x = f^{-1}(y)$. Der Satz 12.18 ergibt die Existenz von f^{-1} nur lokal, auch wenn $f'(x)$ in jedem Punkt $x \in W$ invertierbar ist, d.h. $\det f'(x) \neq 0$. Für die globale Existenz von f^{-1} in Dimension $n \geq 2$ benötigt man zusätzliche Bedingungen, die hier nicht besprochen werden.

Beispiel. Betrachten wir die folgende Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right). \tag{12.70}$$

Die totale Ableitung

$$f'(x, y) = J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

ist genau dann invertierbar, wenn $\det f'(x, y) = 4(x^2 + y^2) \neq 0$ d.h. wenn $(x, y) \neq 0$. Setzen wir $W = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und erhalten nach dem Satz 12.18, dass f in W lokal invertierbar ist.

Mit Hilfe von der komplexen Variable $z = x + iy$ können wir die Funktion (12.70) wie folgt darstellen: $f(z) = z^2$. Jede komplexe Zahl $w \in W$ hat genau zwei Werte von $\sqrt{w}$, d.h. es gibt zwei Werte von z mit $f(z) = w$. Es folgt, dass das Bild $f(W)$ gleich W ist, aber die Funktion $f : W \to W$ nicht injektiv ist und somit nicht (global) invertierbar ist.

12.9 * Satz von der impliziten Funktion

Betrachten wir das folgende Problem: gegeben sei eine reellwertige Funktion $F(x, y)$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, man bestimme y als Funktion von x aus der Gleichung $F(x, y) = 0$. Gibt es eine stetige Funktion $f(x)$ so dass

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \tag{12.71}$$

(möglicherweise in einer Teilmenge von Ω) so sagt man, dass die Funktion $f(x)$ durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ *implizit* definiert wird. Häufig wird der Begriff "implizite Funktion" benutzt, was bedeutet nicht anderes als "implizit definierte Funktion".

Betrachten wir die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}.$$

Dann soll der Graph der impliziten Funktion f in M liegen.
Beispiel. Die Menge von Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die die Gleichung

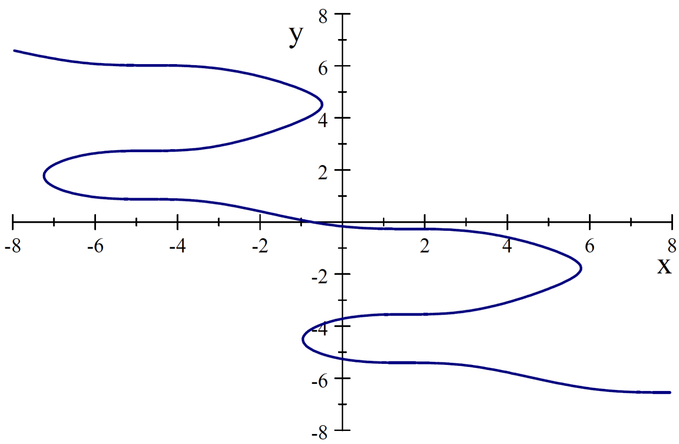
$$x^2 + y^2 = 1 \tag{12.72}$$

erfüllen, ist ein Kreis. Der Kreis ist kein Graph, aber besteht aus zwei Graphen von den stetigen Funktionen $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ auf $x \in [-1, 1]$. Diese zwei Funktionen werden implizit von der Gleichung (12.72) definiert.

Beispiel. Betrachten wir noch eine andere Gleichung:

$$x + \cos x + y + 5 \sin y = 0, \tag{12.73}$$

die sich nicht explizit lösen lässt.



Die Menge von Punkten (x, y), die (12.73) erfüllen

Die Menge M von Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die (12.73) erfüllen, ist eine Kurve, die sich in mehreren Graphen von stetigen Funktionen teilen lässt: jedes Stück zwischen den Wendepunkten bestimmt einen Graph. Somit gibt es mehrere stetige Funktionen, die von (12.73) implizit definiert werden, mit verschiedenen Definitionsbereichen.

Betrachten wir jetzt eine allgemeinere Situation when x ein Punkt in $\mathbb{R}^n$ ist und y ein Punkt in $\mathbb{R}^m$. Wir betrachten das Paar (x, y) als Element von $\mathbb{R}^{n+m}$ mit den Komponenten

$$(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m).$$

Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+m}$ wo eine Abbildung $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ definiert ist. Wir möchten die Gleichung $F(x, y) = 0$ für jedes x bezüglich y lösen und somit eine Funktion $y = f(x)$ erhalten. Diese Gleichung sieht ausführlich wir folgt aus:

$$\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \\ F_2(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \\ ... \\ F_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \end{cases}$$

wobei $F_1, ..., F_m$ die Komponenten von F sind. Das ist ein System von m skalaren Gleichungen mit m Unbekannten $y_1, ..., y_m$ und mit n Parametern $x_1, ..., x_n$. Solches System kann sehr kompliziert sein, aber wir formulieren unterhalb die einfachen Bedingungen, die mindestens lokale Lösbarkeit garantieren.

Beispiel. Betrachten wir ein Beispiel, wo F eine lineare Abbildung bezüglich y ist, d.h.

$$F(x, y) = A(x)\, y + B(x),$$

wobei $A(x)$ eine $m \times m$ von x abhängige Matrix ist und $B(x) \in \mathbb{R}^m$. Die Gleichung $F(x, y) = 0$ ist ein lineares System

$$A(x)\, y + B(x) = 0,$$

das genau dann lösbar ist, wenn die Matrix $A(x)$ invertierbar ist. In diesem Fall erhalten wir

$$y = -A^{-1}(x)\, B(x).$$

Sei die Funktion $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Die Jacobi-Matrix von F lässt sich wie folgt darstellen

$$J_F = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} F_1 & ... & \partial_{x_n} F_1 & \partial_{y_1} F_1 & ... & \partial_{y_m} F_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial_{x_1} F_m & ... & \partial_{x_n} F_m & \partial_{y_1} F_m & ... & \partial_{y_m} F_m \end{pmatrix} = (\partial_x F \mid \partial_y F), \tag{12.74}$$

wobei $\partial_x F$ die Jacobi-Matrix von F bezüglich x ist und $\partial_y F$ die Jacobi-Matrix von F bezüglich y ist. Es ist klar, dass $\partial_x F$ eine $m \times n$ Matrix ist und $\partial_y F$ eine $m \times m$ Matrix. Insbesondere ist $\partial_y F$ eine quadratische Matrix.

Zum Beispiel, im Fall $F = A(x)\, y + B(x)$ haben wir $\partial_y F(x, y) = A(x)$. Somit ist in diesem Fall die Lösbarkeit der Gleichung $F(x, y) = 0$ äquivalent zur Invertierbarkeit der Matrix $\partial_y F$.

Definition. Let Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$. Eine Funktion $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt *l-fach stetig differenzierbar* wenn alle partielle Ableitungen $D^\alpha F_j$ der Ordnung $|\alpha| \leq l$ von allen Komponenten F_j existieren und stetig in Ω sind. Man sagt in diesem Fall, dass F eine Funktion der Klasse $C^l(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ist.

Hauptsatz 12.19 (Der Satz von der impliziten Funktion) *Seien Ω eine offene Menge in $\mathbb{R}^{n+m}$ und $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung der Klasse C^l mit $l \geq 1$. Gelten für einen Punkt $(a, b) \in \Omega$ die Bedingungen*

$$F(a, b) = 0 \quad \textit{und} \quad \partial_y F(a, b) \ \textit{ist invertierbar,} \tag{12.75}$$

so existieren offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ mit $a \in U$, $b \in V$, $U \times V \subset \Omega$, und eine Abbildung $f : U \to V$ mit

$$F(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ y = f(x) \quad \textit{für alle } x \in U,\ y \in V. \tag{12.76}$$

Darüber hinaus ist f von der Klasse C^l und es gilt für alle $x \in U$ die Identität

$$f'(x) = -(\partial_y F)^{-1} (\partial_x F)(x, f(x)) \tag{12.77}$$

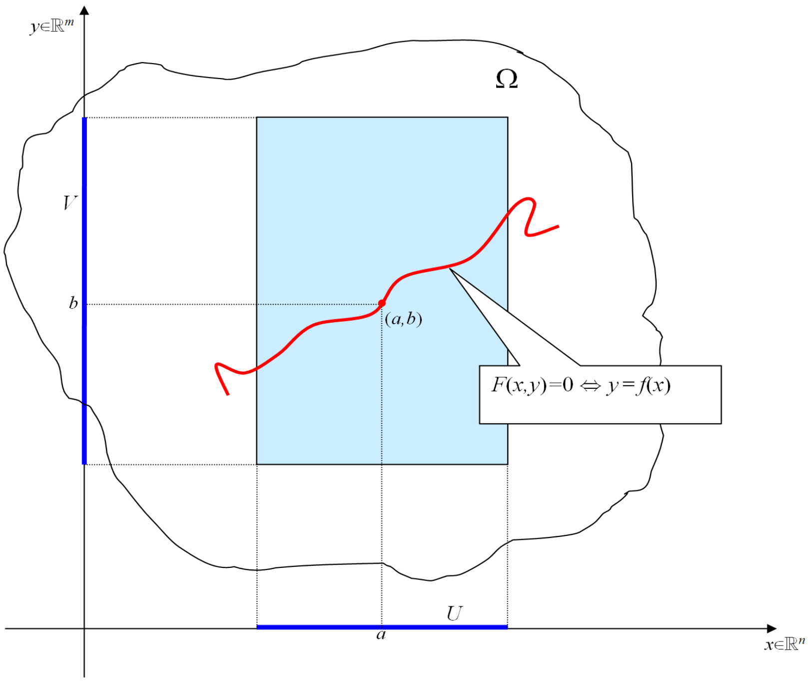


Bild zum Satz 12.19

Betrachten wir die Mengen

$$M = \{(x,y) \in \Omega : F(x,y) = 0\}$$

und

$$N = \{(x,y) \in \Omega : \det \partial_y F(x,y) = 0\}.$$

Die Bedingung (12.75) bedeutet, dass $(a,b) \in M \setminus N$. Die Existenz von f mit (12.76) bedeutet, dass die Menge M in der Nähe von (a,b) (nämlich in $U \times V$) der Graph einer Funktion ist. Somit lässt sich der Satz 12.19 wie folgt kurz umformulieren: in der Nähe von jedem Punkt $(a,b) \in M \setminus N$ ist die Menge M ein Graph. Oder noch kürzer: die Menge $M \setminus N$ ist lokal ein Graph. Das Wort "lokal" bedeutet genau "in der Nähe von jedem Punkt", und "ein Graph" bedeutet "der Graph einer Funktion von x".

Beispiel. Betrachten wir wieder die Funktion (12.73), d.h.

$$F(x,y) = x + \cos x + y + 5\sin y$$

mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wir haben

$$\partial_y F = 1 + 5\cos y.$$

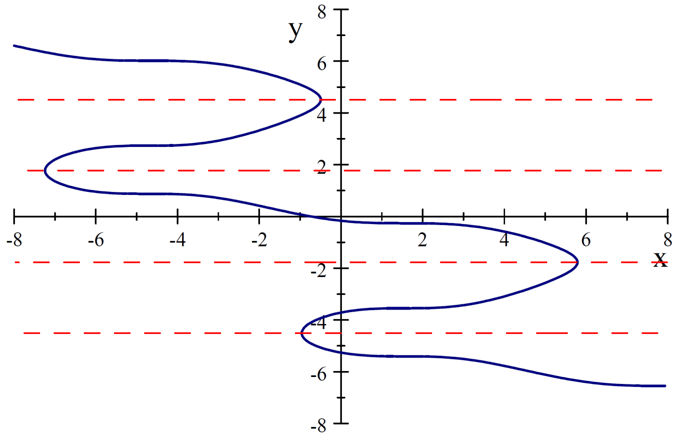
Betrachten wir die Mengen M und N wie oberhalb, d.h.

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + \cos x + y + 5\sin y = 0\right\}$$

und

$$N = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \cos y = -\frac{1}{5}\right\}$$

$$= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = \pm\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}.$$



Die Mengen M und N

Am obigen Bild M ist die Kurve und N ist die Vereinigung von waagerechten Geraden. Der Schnitt $M\cap N$ besteht aus allen Wendepunkten der Kurve M. Die Menge M außerhalb des Schnittes ist lokal der Graph einer Funktion $y=f(x)$.

Sei $y=f(x)$ eine implizit von $F(x,y)=0$ gegebene Funktion. Es folgt aus (12.77), dass

$$f'(x) = -\frac{\partial_x F}{\partial_y F} = -\frac{1-\sin x}{1+5\cos y} = -\frac{1-\sin x}{1+5\cos f(x)}.$$

Obwohl die Funktion $f(x)$ nicht explizit bekannt ist, die Formel (12.77) ergibt die Ableitung $f'(x)$ explizit durch x und $f(x)$.

Bemerkung. Die Formel (12.77) lässt sich leicht gewinnen, vorausgesetzt, dass die implizite Funktion $y=f(x)$ existiert und differenzierbar ist. Dann erfüllt f sie für alle $x\in U$ die Gleichung

$$F(x,f(x))\equiv 0.$$

Ableiten der zusammengesetzten Funktion $g(x)=F(x,f(x))$ ergibt nach der Kettenregel

$$g'(x) = F'(x,y)\begin{pmatrix}\mathrm{Id}\\ f'(x)\end{pmatrix} = (\partial_x F \mid \partial_y F)\begin{pmatrix}\mathrm{Id}\\ f'(x)\end{pmatrix} = \partial_x F + (\partial_y F)\, f'(x),$$

woraus die folgende Identität in U folgt

$$\partial_x F + (\partial_y F)\, f'(x) = 0,$$

und somit auch (12.77).

Dieser Argument gilt als Beweis von (12.77) nur dann, wenn die Differenzierbarkeit von f schon bekannt ist. Allerdings im Beweis des Satzes 12.19 werden wir die Differenzierbarkeit von f zusammen mit (12.77) erhalten, aber nicht zuvor.

12.10 * Beweise

12.10.1 Satz von der impliziten Funktion

Beweis von dem Satz 12.19. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $a = 0$ in $\mathbb{R}^n$ und $b = 0$ in $\mathbb{R}^m$. In den Vektorräumen $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^{n+m}$ wählen wir die ∞-Norm. Da F in 0 differenzierbar ist und $F(0) = 0$, so haben wir

$$F(h) = F'(0)\,h + \varphi(h), \tag{12.78}$$

wobei die Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ erfüllt

$$\varphi(h) = o(\|h\|) \text{ für } h \to 0.$$

We behaupten, dass

$$\varphi \in C^l(\Omega, \mathbb{R}^m), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0. \tag{12.79}$$

In der Tat, es folgt aus (12.78), dass

$$\varphi(h) = F(h) - F'(0)\,h,$$

woraus die ersten zwei Eigenschaften in (12.79) folgen. Da

$$\varphi'(h) = F'(h) - F'(0),$$

so erhalten wir auch $\varphi'(0) = 0$.

Da $h \in \mathbb{R}^{n+m}$, so bezeichnen wir $h = (x, y)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$. Setzen wir

$$A = \partial_x F(0) \quad \text{und} \quad B = \partial_y F(0).$$

Dann gilt

$$F'(0) = (A \mid B)$$

und

$$F'(0)\,h = (A \mid B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ax + By.$$

Somit erhalten wir aus (12.78)

$$F(x, y) = Ax + By + \varphi(x, y). \tag{12.80}$$

Die Gleichung $F(x, y) = 0$ lässt sich wie folgt umschreiben:

$$Ax + By + \varphi(x, y) = 0.$$

Da die Matrix B invertierbar ist, so ist diese Gleichung äquivalent zu

$$y = -B^{-1}(Ax + \varphi(x, y)).$$

Setzen wir

$$G(x, y) = -B^{-1}(Ax + \varphi(x, y)) \tag{12.81}$$

und erhalten die folgende Äquivalenz:

$$F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=G(x,y)\,.$$

Die weitere Idee von Beweis ist, dass die Abbildung $y\mapsto G(x,y)$ für jedes x in der Nähe von 0 in $\mathbb{R}^n$ eine Kontraktionsabbildung in der Nähe von 0 in $\mathbb{R}^m$ ist. Nach dem Fixpunktsatz von Banach können wir daraus beschließen, dass diese Abbildung einen Fixpunkt hat, dass heißt, die Gleichung $y=G(x,y)$ bezüglich y lösbar ist, was y als eine Funktion von x liefert. Um diese Idee rigoros zu machen, wir müssen den Definitionsbereich der Abbildung $y\mapsto G(x,y)$ bestimmen, wo diese Abbildung eine Selbstabbildung und auch eine Kontraktion ist. Darüber hinaus soll der Definitionsbereich ein vollständiger metrischer Raum sein.

Die Funktion $G(x,y)$ erfüllt die folgenden Eigenschaften:

$$G\in C^l(\Omega,\mathbb{R}^m)\,,\ G(0)=0,\quad \partial_y G(0)=0,$$

die trivial aus (12.79) und (12.81) folgen. Wählen wir hinreichend kleine positive Konstanten ε und δ aus den folgenden Bedingungen (i)-(iii).

(i) Da alle partielle Ableitungen $\partial_{y_i}G_j$ stetig sind und in 0 verschwinden, so gilt für hinreichend kleines $\varepsilon>0$ die Eigenschaft:

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\forall y\in\mathbb{R}^m \text{ mit } \|x\|\le\varepsilon,\ \|y\|\le\varepsilon \text{ gilt } (x,y)\in\Omega \text{ und } \left|\partial_{y_i}G_j(x,y)\right|\le\frac{1}{2m} \tag{12.82}$$

für alle i,j.

(ii) Da $\det\partial_y F$ stetig ist und $\det\partial_y F(0)\neq 0$ nach der Invertierbarkeit von $\partial_y F(0)$, so gilt für hinreichend kleines ε auch die folgende Eigenschaft:

$$\forall x\in\mathbb{R}^n\ \forall y\in\mathbb{R}^m \text{ mit } \|x\|\le\varepsilon,\ \|y\|\le\varepsilon \text{ ist } \partial_y F(x,y) \text{ invertierbar.} \tag{12.83}$$

(iii) Da die Funktion $x\mapsto G(x,0)$ stetig ist und $G(0,0)=0$, so existiert für jedes $\varepsilon>0$ (insbesondere für ε wie in (12.82) und (12.83)) ein $\delta\in(0,\varepsilon]$ mit

$$\forall x\in\mathbb{R}^m \text{ mit } \|x\|\le\delta \text{ gilt } \|G(x,0)\|<\frac{1}{2}\varepsilon. \tag{12.84}$$

Da $\delta\le\varepsilon$ so liegt der Punkt $(x,0)$ in Ω und somit ist $G(x,0)$ wohldefiniert.

Bezeichnen wir mit U und V die folgenden Kugeln

$$U=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|<\delta\}\,,\ V=\{y\in\mathbb{R}^m:\|y\|<\varepsilon\}$$

und betrachten auch die abgeschlossenen Kugeln

$$\overline{U}=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|\le\delta\}\,,\quad \overline{V}=\{y\in\mathbb{R}^m:\|y\|\le\varepsilon\}\,.$$

Nach der Wahl von ε und δ gilt $\overline{U}\times\overline{V}\subset\Omega$. Der weitere Beweis wird schrittweise durchgeführt.

Schritt 1. *Zeigen wir, dass für alle $x \in \overline{U}$ und $y, y' \in \overline{V}$ gilt*

$$\|G(x,y) - G(x,y')\| \leq \frac{1}{2}\|y - y'\|. \tag{12.85}$$

Nach dem Mittelwertsatz erhalten wir für jede Komponente G_j of G und für ein $\xi \in [y, y']$, dass

$$\begin{aligned} |G_j(x,y) - G_j(x,y')| &= |\partial_y G_j(x,\xi)(y - y')| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{m} \partial_{y_i} G_j(x,\xi)(y_i - y_i')\right| \leq \frac{1}{2m} m \|y - y'\|_\infty, \end{aligned}$$

woraus (12.85) folgt. Hier haben wir (12.82) benutzt, was die Konstante $\frac{1}{2m}$ in (12.82) erklärt.

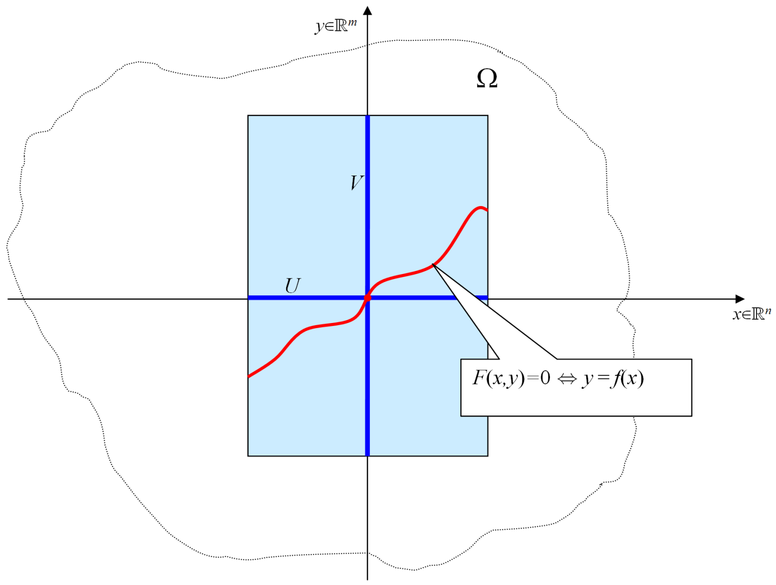
Schritt 2. *Zeigen wir, dass für alle $x \in \overline{U}$ und $y \in \overline{V}$ gilt $G(x,y) \in V$.*

We erhalten mit Hilfe von (12.85) und (12.84)

$$\|G(x,y)\| \leq \|G(x,y) - G(x,0)\| + \|G(x,0)\| < \frac{1}{2}\|y\| + \frac{1}{2}\varepsilon \leq \varepsilon.$$

Schritt 3. *Beweisen wir, dass es eine Funktion $f : \overline{U} \to \overline{V}$ gibt, so dass*

$$y = f(x) \Leftrightarrow F(x,y) = 0 \quad \textit{für alle } x \in \overline{U} \textit{ und } y \in \overline{V}. \tag{12.86}$$



Funktion f

Für jedes $x \in \overline{U}$ betrachten wir die Selbstabbildung von $\overline{V}$

$$\overline{V} \ni y \mapsto G(x,y) \in \overline{V},$$

die nach Schritt 2 wohldefiniert ist. Die Menge $\overline{V}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ und somit ist ein vollständiger metrischer Raum (Satz 11.14). Nach (12.85) ist diese Abbildung eine Kontraktion. Nach dem Fixpunktsatz von Banach (Satz 11.16) gibt es genau einen Fixpunkt dieser Abbildung, den wir mit $f(x)$ bezeichnen. Diese Funktion ist für jedes $x \in \overline{U}$ definiert und nimmt die Werte in $\overline{V}$ an. Nach Definition von f erhalten wir, dass für $x \in \overline{U}$ und $y \in \overline{V}$ die Gleichung $G(x,y) = y$ äquivalent zu $y = f(x)$ ist. Da $G(x,y) = y$ äquivalent zu $F(x,y) = 0$ ist, so erhalten wir (12.86).

Schritt 4. *Beweisen wir: es gibt eine Konstante C mit*

$$\|f(x) - f(x')\| \leq C\|x - x'\| \text{ für alle } x, x' \in \overline{U}. \tag{12.87}$$

Die Funktionen, die (12.87) erfüllen, heißen *Lipschitz-stetig*. Es ist klar, dass eine Lipschitz-stetige Funktion auch stetig ist. Insbesondere ist die Funktion f stetig in $\overline{U}$.

Es folgt aus der Identität $f(x) = G(x, f(x))$, dass

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x')\| &= \|G(x, f(x)) - G(x', f(x'))\| \\ &\leq \|G(x, f(x)) - G(x', f(x))\| \\ &\quad + \|G(x', f(x)) - G(x', f(x'))\|. \end{aligned} \tag{12.88}$$

Nach (12.85) gilt

$$\|G(x', f(x)) - G(x', f(x'))\| \leq \frac{1}{2}\|f(x) - f(x')\|.$$

Um den ersten Glied in (12.88) abzuschätzen, benutzen wir für jede Komponente G_j von G den Mittelwertsatz: es gibt ein $\xi \in [x, x']$ mit

$$G_j(x, f(x)) - G_j(x', f(x)) = \partial_x G_j(\xi, f(x))(x - x') = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} G_j\left(\xi_j, f(x)\right)(x_i - x_i').$$

Da die Funktion $\partial_{x_i} G_j(x,y)$ stetig ist, so ist sie nach dem Extremwertsatz beschränkt auf $\overline{U} \times \overline{V}$, da diese Menge beschränkt und abgeschlossen ist. Also, es existiert eine Konstante M mit $|\partial_{x_i} G_j(x,y)| \leq M$ für alle $x \in \overline{U}$, $y \in \overline{V}$ alle i, j, woraus folgt

$$|G_j(x, f(x)) - G_j(x', f(x))| \leq Mn\|x - x'\|$$

und somit

$$\|G(x', f(x)) - G(x', f(x'))\| \leq Mn\|x - x'\|.$$

Es folgt aus (12.88) dass

$$\|f(x) - f(x')\| \leq Mn\|x - x'\| + \frac{1}{2}\|f(x) - f(x')\|,$$

was (12.87) mit $C = 2Mn$ ergibt.

Schritt 5. *Beweisen wir: die Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ ist in U differenzierbar und*

$$f'(x) = -\left(\partial_y F\right)^{-1} \partial_x F(x, f(x)). \tag{12.89}$$

Fixieren wir ein $x_0 \in U$ und beweisen, dass f differenzierbar in x_0 ist. Setzen wir $y_0 = f(x_0)$. Nach der Differenzierbarkeit von F in (x_0, y_0) gilt

$$F(x,y) - F(x_0,y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \varphi(x,y) \tag{12.90}$$

mit

$$A = \partial_x F(x_0,y_0), \quad B = \partial_y F(x_0,y_0)$$

und

$$\varphi(x,y) = o(\|x - x_0\| + \|y - y_0\|) \text{ für } x \to x_0 \text{ und } y \to y_0. \tag{12.91}$$

Wir benutzen (12.90) mit $x \in U$ und $y = f(x)$. Nach Definition von f haben wir

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) = 0. \tag{12.92}$$

Nach (12.83) ist die Matrix B invertierbar. Es folgt aus (12.90) und (12.92), dass

$$f(x) - f(x_0) = y - y_0 = -B^{-1}A(x - x_0) - B^{-1}\varphi(x, f(x)). \tag{12.93}$$

Um die Differenzierbarkeit von f in x_0 daraus zu gewinnen, reicht es zu zeigen, dass

$$B^{-1}\varphi(x, f(x)) = o(\|x - x_0\|) \text{ für } x \to x_0.$$

Da die Norm der Matrix B^{-1} endlich ist, so reicht es zu beweisen, dass

$$\varphi(x, f(x)) = o(\|x - x_0\|) \text{ für } x \to x_0. \tag{12.94}$$

Nach (12.91) haben wir

$$\varphi(x, f(x)) = o(\|x - x_0\| + \|f(x) - f(x_0)\|) \text{ für } x \to x_0,$$

woraus (12.94) folgt, da nach (12.87)

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq C\|x - x_0\|.$$

Es folgt aus (12.93), dass

$$f'(x_0) = -B^{-1}A = -\partial_y F(x_0, f(x_0))^{-1} \partial_x F(x_0, f(x_0)).$$

Schritt 6. *Beweisen wir, dass* $f \in C^l(U, \mathbb{R}^m)$.

Induktionsanfang für $l = 1$. Da die Funktion f und alle partiellen Ableitungen von F stetig sind, so es folgt aus (12.89), dass auch $f'(x)$ stetig ist, woraus $f \in C^1$ folgt.

Induktionsschritt von $l - 1$ nach l. Beweisen wir, dass $F \in C^l$ ergibt $f \in C^l$. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $f \in C^{l-1}$. Da $\partial_x F$ und $\partial_y F$ von der Klasse C^{l-1} sind, so folgt es aus (12.89), dass $f' \in C^{l-1}$, woraus $f \in C^l$ folgt. ∎

12.10.2 Satz von der inversen Funktion

Beweis von dem Satz 12.18. Setzen wir

$$F(x,y) = y - f(x),$$

so dass die Gleichung $y = f(x)$ äquivalent zu

$$F(x,y) = 0$$

ist. Die Funktion $F(x,y)$ ist für alle $(x,y) \in \Omega := W \times \mathbb{R}^n$ definiert und nimmt die Werte in $\mathbb{R}^n$ an. Offensichtlich haben wir $F \in C^l(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Mit Hilfe von dem Satz von der impliziten Funktion (Satz 12.19) lösen wir die Gleichung $F(x,y) = 0$ bezüglich x und somit erhalten x als Funktion von y. Dafür brauchen wir die Invertierbarkeit von $\partial_x F$ in einem Punkt. Offensichtlich haben wir

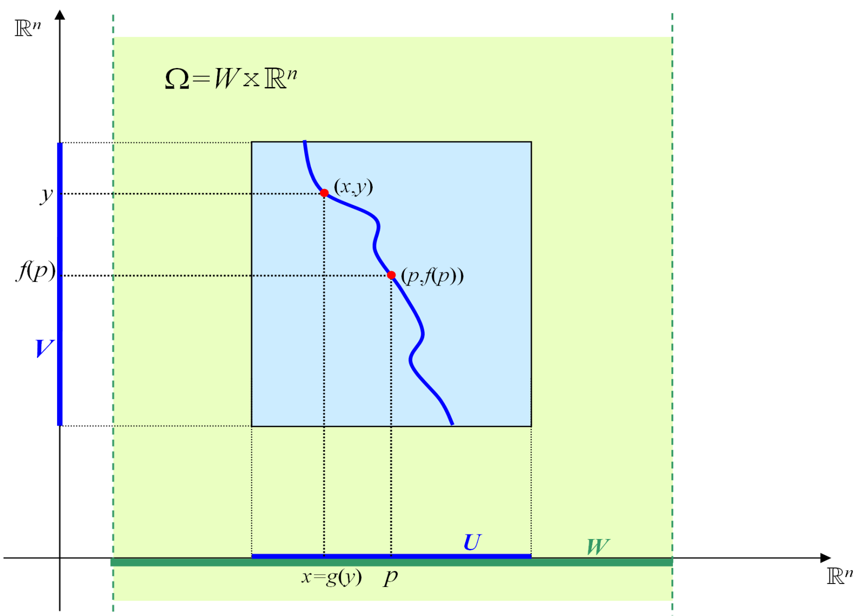
$$\partial_x F(x,y) = -f'(x).$$

Da $f'(p)$ invertierbar, so erhalten wir, dass $\partial_x F(p, f(p))$ invertierbar. Da auch $F(p, f(p)) = 0$, so erhalten wir nach dem Satz 12.19 folgendes: es gibt die Umgebungen $U \subset W$ von p und $V \subset \mathbb{R}^n$ von $f(p)$ und eine Funktion $g : V \to U$ von der Klasse C^l mit

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = g(y) \text{ für alle } x \in U \text{ und } y \in V,$$

d.h.

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y) \text{ für alle } x \in U \text{ und } y \in V. \tag{12.95}$$



Funktion $g : V \to U$

Weiter bestimmen wir $f \circ g$ und $g \circ f$. Für jedes $y \in V$ setzen wir $x = g(y)$. Da $x \in U$, so erhalten aus (12.95) $f(g(y)) = f(x) = y$, d.h.

$$f \circ g = \mathrm{Id}_V. \tag{12.96}$$

Allerdings $g \circ f$ ist nicht unbedingt gleich Id_U. Für jedes $x \in U$ setzen wir $y = f(x)$. Es ist uns nicht gegeben, dass $f(x) \in V$. Im Fall $f(x) \in V$ gilt $y \in V$ und wir erhalten aus (12.95), dass

$$g(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in U \text{ mit } \; f(x) \in V.$$

Die zusätzliche Bedingung $f(x) \in V$ ist äquivalent zu $x \in f^{-1}(V)$ wobei f^{-1} hier die Urbildabbildung ist. Somit erhalten wir

$$g(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in U \cap f^{-1}(V) =: U_0. \tag{12.97}$$

Da f stetig ist, so ist die Menge $f^{-1}(V)$ offen und somit ist U_0 auch offen. Wir haben auch $p \in U_0$ da $p \in U$ und $f(p) \in V$.

Bemerken wir, dass das Bild von g in U_0 liegt da nach (12.96) $f(g(V)) = V$, woraus folgt $g(V) \subset f^{-1}(V)$ und somit $g(V) \subset f^{-1}(V) \cap U = U_0$. Es folgt, dass die Bedingung (12.95) auch für U_0 anstatt U gilt. Dann erhalten wir aus (12.97)

$$g \circ f = \mathrm{Id}_{U_0},$$

was zusammen mit (12.96) ergibt, dass $g : V \to U_0$ die inverse Funktion von $f : U_0 \to V$ ist. Es bleibt nur U_0 in U umbenennen.

Um (12.69) zu beweisen, leiten wir die Identität $f \circ g = \mathrm{Id}_V$ ab. Nach der Kettenregel gilt für jedes $y \in V$

$$\mathrm{id} = (f \circ g)' = f'(x)\, g'(y),$$

wobei $x = g(y) = f^{-1}(y)$, was $g'(y) = f'(x)^{-1}$ ergibt. ∎

Chapter 13

* Konvergenz von Integralen und Funktionenreihen

13.1 Bedingte Konvergenz von Integralen

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem Intervall (a,b). Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ heißt *bedingt konvergent* falls es konvergent aber nicht absolut konvergent ist.

Der nächste Satz liefert zwei Kriterien für Konvergenz ohne absolute Konvergenz zu benutzen.

Satz 13.1 *Seien f und g stetige Funktionen auf $[a,+\infty)$. Sei $g(x)$ zusätzlich stetig differenzierbar und monoton auf $[a,+\infty)$. Dann das Integral*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx \tag{13.1}$$

konvergiert falls eine von den folgenden zwei Bedingungen erfüllt ist:

(a) (Abel-Kriterium) *Das Integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ist konvergent und $g(x)$ ist beschränkt.*

(b) (Dirichlet-Kriterium) *Die Stammfunktion $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ ist auf $[a,+\infty)$ beschränkt und $g(x)\to 0$ für $x\to+\infty$.*

Beweis. Partielle Integration ergibt

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx=\int_a^{+\infty} g(x)\,dF(x)=[Fg]_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty} F(x)\,g'(x)\,dx. \tag{13.2}$$

Wir zeigen, dass die beiden Glieder am rechts endlich sind, woraus die Konvergenz von dem Integral (13.1) folgen wird.

Zunächst beweisen wir, dass der Wert des Ausdrucks $[Fg]_a^{+\infty}$ endlich ist, d.h. $Fg(+\infty)$ endlich ist. Im Fall (a) ergibt die Konvergenz von $\int_a^{+\infty} f\,dx$, dass $F(x)$ konvergent für $x\to+\infty$ ist, während $g(x)$ auch konvergent für $x\to+\infty$ ist, da g monoton und beschränkt ist. Es folgt, dass der Grenzwert

$$Fg(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)\lim_{x\to+\infty}g(x)$$

existiert und endlich ist.

Im Fall (b) ist $F(x)$ beschränkt und $g(x) \to 0$ für $x \to +\infty$, woraus folgt

$$Fg(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} (Fg)(x) = 0. \tag{13.3}$$

Jetzt beweisen wir, dass das Integral $\int_a^\infty F(x) g'(x)\, dx$ absolut konvergent ist. Die Funktion F ist in den beiden Fällen (a) und (b) beschränkt. Im Fall (b) ist es eine Voraussetzung, während im Fall (a) folgt es aus der Konvergenz von $F(x)$ für $x \to +\infty$. Sei C eine obere Schranke von $|F|$, d.h. $|F(x)| \le C$ für alle $x \in [a, \infty)$. Dann gilt

$$\int_a^\infty |F(x) g'(x)|\, dx \le C \int_a^\infty |g'(x)|\, dx. \tag{13.4}$$

Die Funktion g ist monoton, woraus folgt, dass entweder immer $g'(x) \ge 0$ oder immer $g'(x) \le 0$ ist. Angenommen, dass $g'(x) \ge 0$ (der Fall $g'(x) \le 0$ ist dann analog), so erhalten wir

$$\int_a^\infty |g'(x)|\, dx = \int_a^\infty g'(x)\, dx = g(+\infty) - g(a) < \infty. \tag{13.5}$$

Somit erhalten wir, dass

$$\int_a^\infty |F(x) g'(x)|\, dx < \infty,$$

was zu beweisen war. ■

Bemerkung. Im Fall (b) folgt es aus (13.3), (13.2), (13.4) und (13.5) dass

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) g(x)\, dx \right| \le \sup_{[a,\infty)} |F| \, |g(a)|. \tag{13.6}$$

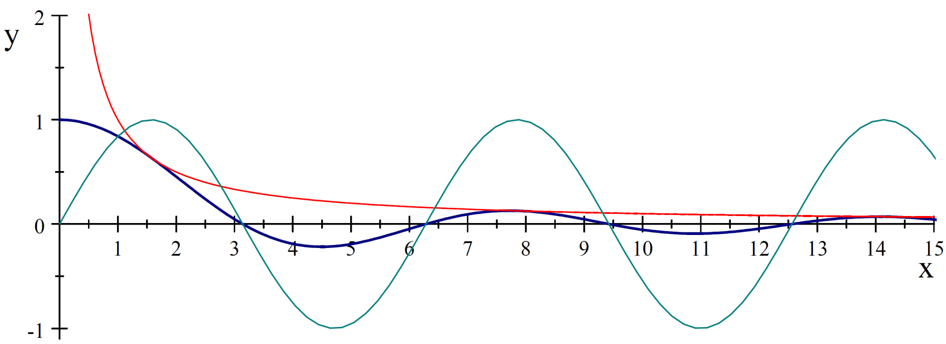
Beispiel. 1. Zeigen wir, dass das Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

konvergent ist. Dafür betrachten wir die Funktionen $f(x) = \sin x$ und $g(x) = x^{-1}$. Die Stammfunktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt = \int_a^x \sin t\, dt = -\cos x + \cos a$$

ist offensichtlich beschränkt, während $g(x)$ monoton fallend ist und $g(x) \to 0$ für $x \to +\infty$. Nach dem Dirichlet-Kriterium ist das Integral $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konvergent.



Die Funktionen $\sin x$, $\frac{1}{x}$ und $\frac{\sin x}{x}$

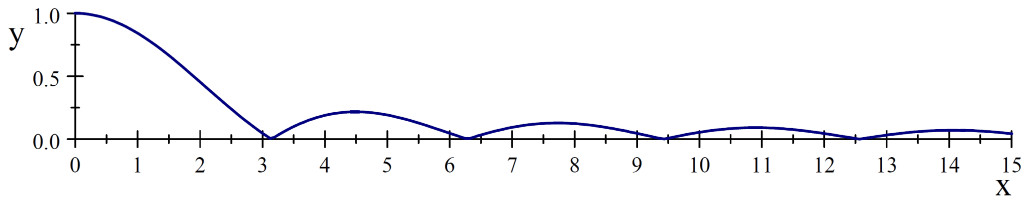
Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ heißt *Dirichlet-Integral*. Es ist auch konvergent, da die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ den Grenzwert 1 für $x \to 0$ hat und somit ist auf $[0, 1]$ stetig und integrierbar. Es ist möglich zu beweisen, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

(siehe Abschnitt 13.3 unterhalb).

Zeigen wir, dass $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}$ bedingt konvergent ist, d.h.

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty. \tag{13.7}$$



Die Funktion $\frac{|\sin x|}{x}$

Die Nullstellen von $\sin x$ auf $[1, \infty)$ sind $x_n = \pi n$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir haben

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{|\sin x|}{x} dx &\geq \frac{1}{x_{n+1}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} |\sin x| \, dx \\ &\geq \frac{1}{x_{n+1}} \left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} \sin x \, dx \right| \\ &= \frac{1}{x_{n+1}} \left| [-\cos x]_{x_n}^{x_{n+1}} \right| \\ &= \frac{2}{\pi (n+1)}, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben dass

$$\cos x_n = \cos \pi n = (-1)^n$$

und somit

$$|\cos x_{n+1} - \cos x_n| = 2.$$

Es folgt, dass

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{n=1}^\infty \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{\pi (n+1)} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n+1} = \infty,$$

woraus (13.7) folgt.

2. Zeigen wir, dass das Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} \arctan x \, dx$$

konvergiert. Setzen wir $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ und $g(x) = \arctan x$. Die Funktion g ist beschränkt und monoton steigend, während $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$ konvergent ist, wie wir oberhalb bewiesen haben. Nach dem Abel-Kriterium ist das gegebene Integral konvergent.

13.2 Gammafunktion

Definition. Definieren wir die *Gammafunktion* $\Gamma(\alpha)$ für jedes $\alpha > 0$ mit

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \tag{13.8}$$

Lemma 13.2 *Das Integral* (13.8) *konvergiert für alle* $\alpha > 0$.

Beweis. Die beiden Grenzen 0 und $+\infty$ sind kritisch (genauer zu sagen, 0 ist kritisch nur wenn $\alpha < 1$). Setzen wir

$$f(x) = x^{\alpha-1} e^{-x}$$

und beweisen, dass

$$\int_0^1 f(x)\, dx < +\infty \quad \text{und} \quad \int_1^{+\infty} f(x)\, dx < +\infty,$$

woraus die Konvergenz von (13.8) folgen wird.

Da $f(\alpha) \le x^{\alpha-1}$ und

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \left[\frac{x^\alpha}{\alpha}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha} < \infty,$$

So erhalten wir nach dem Majorantenkriterium dass auch $\int_0^1 f(x)\, dx < \infty$.

Beweisen wir jetzt die Konvergenz des zweiten Integral. Dafür beweisen wir die folgende Ungleichung

$$x^{\alpha-1} \le C e^{\frac{1}{2}x} \text{ für alle } x \ge 1, \tag{13.9}$$

wobei $C = C(\alpha)$. Wir haben

$$e^{\frac{1}{2}x} = 1 + x/2 + \frac{(x/2)^2}{2!} + ... + \frac{1}{n!}(x/2)^n + ...$$

Es gilt für alle $x \ge 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$e^{\frac{1}{2}x} \ge \frac{1}{n!}(x/2)^n = \frac{1}{2^n n!} x^n.$$

Wählen wir $n > \alpha - 1$ und erhalten, für alle $x \ge 1$,

$$e^{\frac{1}{2}x} \ge \frac{1}{2^n n!} x^{\alpha-1}$$

so dass (13.9) mit $C = n! 2^n$ gilt. Es folgt, dass für alle $x \ge 1$

$$f(x) = x^{\alpha-1} e^{-x} \le C e^{\frac{1}{2}x} e^{-x} = C e^{-\frac{1}{2}x},$$

d.h.

$$f(x) = O(e^{-\frac{1}{2}x}) \quad \text{für} \quad x \to +\infty.$$

Da

$$\int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}x} dx = \left[-2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_1^\infty = 2e^{-1/2} < \infty,$$

so erhalten wir nach dem Majorantenkriterium dass auch $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx < \infty$. ∎

Lemma 13.3 *Für alle $\alpha > 0$ gilt*

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{13.10}$$

Beweis. Die partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx \\
&= -\int_0^{+\infty} x^\alpha de^{-x} \\
&= -\left[x^\alpha e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx^\alpha \\
&= \int_0^{+\infty} \alpha x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha\Gamma(\alpha).
\end{aligned}$$

■

Bemerken wir, dass

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 1.$$

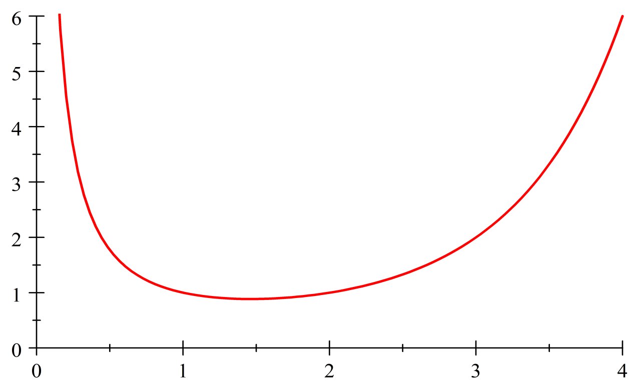
Nach Lemma (13.3) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1 \cdot \Gamma(1) = 1 \\
\Gamma(3) &= 2 \cdot \Gamma(2) = 1 \cdot 2 \\
\Gamma(4) &= 3 \cdot \Gamma(3) = 1 \cdot 2 \cdot 3
\end{aligned}$$

usw. Per Induktion nach n erhalten wir dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Der Graph von $\Gamma(\alpha)$ ist da.



Gammafunktion

13.3 Dirichlet-Integral

Wir beweisen hier den folgenden Satz.

Satz 13.4 *Es gilt*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{13.11}$$

Das Integral in der linken Seite heißt das *Dirichlet-Integral.*

Beweis. Wir wissen schon, dass das Integral (13.11) konvergiert. Somit reicht es zu beweisen, dass

$$\int_0^{\pi n} \frac{\sin x}{x} dx \to \frac{\pi}{2} \ \text{ für } n \to +\infty, \ n \in \mathbb{N}. \tag{13.12}$$

Betrachten wir zunächst das folgende Integral für jedes $n \in \mathbb{Z}_+$

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx$$

und zeigen, dass alle u_n gleich sind. Mit Hilfe von der Identität

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

erhalten wir für jedes $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
u_n - u_{n-1} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x}{\sin x} dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x \, \cos 2nx}{\sin x} dx \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \cos 2nx \, dx \qquad\qquad (y = 2nx) \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} \cos y \, dy = \frac{1}{n}[\sin y]_0^{n\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass für alle $n \in \mathbb{Z}_+$

$$u_n = u_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{13.13}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x}{\sin x} dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx \cos x}{\sin x} dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin 2nx \cot x \, dx.
\end{aligned}$$

so dass

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2nx \cot x \, dx = \frac{\pi}{2}. \tag{13.14}$$

Mit Hilfe von Substitution $x = 2ny$ erhalten wir

$$\int_0^{\pi n} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2ny}{2ny} d\,(2ny) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{x} dx,$$

woraus folgt mit Hilfe von (13.14) und partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi n} \frac{\sin x}{x} dx - \frac{\pi}{2} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{x} dx - \int_0^{\pi/2} \sin 2nx \cot x \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin 2nx \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) dx \\ &= -\frac{1}{2n} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) d \cos 2nx \\ &= -\frac{1}{2n} \left[\cos 2nx \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n} \int_0^{\pi/2} \cos 2nx \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) dx. \end{aligned} \tag{13.15}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi n} \frac{\sin x}{x} dx - \frac{\pi}{2} &= -\frac{1}{2n} \left[\cos 2nx \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) \right]_0^{\pi/2} \\ &\quad + \frac{1}{2n} \int_0^{\pi/2} \cos 2nx \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) dx. \end{aligned} \tag{13.16}$$

Wir müssen beweisen, dass der Grenzwert der linken Seite für $n \to \infty$ gleich 0 ist. Dafür zeigen wir, dass die rechte Seite gegen 0 für $n \to \infty$ konvergiert.

Zuerst bestimmen wir den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right)$$

Wir haben

$$\frac{1}{x} - \cot x = \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x}.$$

Es gilt

$$x \sin x \sim x^2 \quad \text{für } x \to 0$$

und

$$\begin{aligned} \sin x - x \cos x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \right) - x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \right) \\ &= x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right) \\ &= \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) \sim \frac{x^3}{3}, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\frac{1}{x} - \cot x \sim \frac{x^3/3}{x^2} = \frac{x}{3} \quad \text{für } x \to 0$$

und somit

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) = 0.$$

Wir erhalten

$$\left[\cos 2nx \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\cos \pi n}{\pi/2} = \pm \frac{2}{\pi},$$

woraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \left[\cos 2nx \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) \right]_0^{\pi/2} = 0. \tag{13.17}$$

Da auf $(0, \pi/2]$ gilt $0 < \sin x \le x$, so erhalten wir

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \ge 0$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2n} \int_0^{\pi/2} \cos 2nx \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) dx \right| &\le \frac{1}{2n} \int_0^{\pi/2} |\cos 2nx| \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &\le \frac{1}{2n} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) dx. \end{aligned}$$

Bemerken wir, dass für $x \to 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} &= \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\ &= \frac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{x^2 \sin^2 x} \\ &\sim \frac{x^3/6 \cdot 2x}{x^4} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{3}$$

und somit die Funktion $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ auf $[0, \pi/2]$ integrierbar ist. Es folgt, dass

$$\frac{1}{2n} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) dx \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

und somit auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \int_0^{\pi/2} \cos 2nx \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = 0. \tag{13.18}$$

Aus (13.16), (13.17) und (13.18) erhalten wir (13.12). ∎

Bemerkung. Der Beweis des Satzes 13.4 basiert auf den Eigenschaften der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} - \cot x, \quad x \in (0, \pi/2].$$

Wir haben folgendes gezeigt: diese Funktion hat den Grenzwert 0 für $x \to 0+$ und ihre Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$$

ist positiv und hat den Grenzwert $\frac{1}{3}$ für $x \to 0+$. Wir erweitern f auf das Intervall $[0, \pi/2]$ indem wir $f(0) = 0$ setzen. Dann ist f stetig differenzierbar auf $[0, \pi/2]$.

Für jede stetig differenzierbare Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ und für jedes $m \in \mathbb{N}$ erhalten wir mit Hilfe von partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \sin mx \, dx &= -\frac{1}{m} \int_a^b f(x) \, d\cos mx \\ &= -\frac{1}{m} [f(x) \cos mx]_a^b + \frac{1}{m} \int_a^b f'(x) \cos mx \, dx.\end{aligned}$$

Da $|\cos mx| \le 1$, so erhalten wir

$$\left| [f(x) \cos mx]_a^b \right| \le 2 \max_{[a,b]} |f|$$

und

$$\left| \int_a^b f'(x) \cos mx \, dx \right| \le (b - a) \max_{[a,b]} |f'|,$$

woraus folgt

$$\boxed{\lim_{m \to \infty} \int_a^b f(x) \sin mx \, dx = 0}. \tag{13.19}$$

Einsetzen von (13.19) in (13.15) mit $m = 2n$ und $[a, b] = [0, \pi/2]$ ergibt

$$\int_0^{\pi n} \frac{\sin x}{x} dx - \frac{\pi}{2} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty,$$

was den Satz 13.4 beweist.

Die Identität (13.19) heißt *Lemma von Riemann*. Wir haben es für stetig differenzierbare Funktionen f bewiesen, aber es gilt auch für alle Riemann-integrierbare Funktionen f auf $[a, b]$ (siehe Aufgabe 114).

13.4 Alternative Definition von Elementarfunktionen

Wir geben hier eine alternative Definition von allen elementaren Funktionen mit Hilfe von Integralen. Dafür muss man die Differential- und Integralrechnung zuerst ohne Exponentialfunktion und ohne trigonometrische Funktionen entwickeln.

Mit Hilfe von Integral definieren wir zunächst die logarithmische Funktion: für alle $x > 0$

$$\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t}. \tag{13.20}$$

Insbesondere gilt $\ln 1 = 0$. Es folgt, dass $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Mit Hilfe von Definition (13.20) beweist man leicht die Identität

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \tag{13.21}$$

für alle $a, b > 0$. Wir haben

$$\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_a^{ab} \frac{dx}{x} = \ln a + \int_a^{ab} \frac{dx}{x}.$$

Die Substitution $y = x/a$ im zweiten Integral ergibt

$$\int_a^{ab} \frac{dx}{x} = \int_a^{ab} \frac{d(x/a)}{x/a} = \int_1^b \frac{dy}{y} = \ln b,$$

woraus (13.21) folgt.

Die Funktion ln ist auf $(0, +\infty)$ definiert, ist differenzierbar und somit stetig, und ist streng monoton steigend. Beweisen wir, dass

$$\ln(0, +\infty) = \mathbb{R}$$

so dass die inverse Funktion $\ln^{-1}$ auf $\mathbb{R}$ definiert ist. Dafür reicht es zu beweisen, dass

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty.$$

In der Tat gilt nach dem Satz 10.22

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty,$$

da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$. Es folgt, dass

$$\lim_{x \to 0} \ln x = \lim_{y \to +\infty} \ln \frac{1}{y} = -\lim_{y \to +\infty} \ln y = -\infty.$$

Somit ist die inverse Funktion $\ln^{-1}$ auf $\mathbb{R}$ definiert und nimmt die Werte in $(0, +\infty)$ an. Diese Funktion heißt die Exponentialfunktion und wird mit exp bezeichnet, d.h.

$$\exp := \ln^{-1}.$$

Es folgt, dass für $y = \exp(x)$

$$(\exp(x))' = \frac{1}{(\ln y)'} = \frac{1}{1/y} = y = \exp(x).$$

Setzen wir

$$e := \exp(1),$$

d.h. die Zahl e die folgende Identität erfüllt:

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1.$$

Beweisen wir die Haupteigenschaft: für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y). \tag{13.22}$$

In der Tat ist (13.22) äquivalent zu

$$\ln(\exp(x+y)) = \ln[\exp(x)\exp(y)].$$

Da die linke Seite gleich $x+y$ ist und die rechte Seite nach (13.21) gleich

$$\ln\exp(x) + \ln\exp(y) = x + y$$

ist, so erhalten wir die o.g. Identität.

Jetzt definieren wir arctan für alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\arctan x := \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

Es folgt, dass

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Die Funktion $\arctan x$ ist somit streng monoton steigend. Die Bildmenge dieser Funktion ist

$$\arctan(\mathbb{R}) = (-\tau, \tau)$$

wobei

$$\tau := \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Insbesondere hat arctan die inverse Funktion, die auf dem Intervall $(-\tau, \tau)$ definiert ist. In der Tat gilt $\tau < 2$ da

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_1^\infty \frac{dt}{1+t^2} \\ &< 1 + \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = 1 + 1 = 2.\end{aligned}$$

Setzen wir

$$\tan := \arctan^{-1},$$

so dass der Definitionsbereich von tan gleich $(-\tau, \tau)$ ist. Es folgt, dass für $y = \tan x$

$$(\tan x)' = \frac{1}{(\arctan y)'} = 1 + y^2 = 1 + \tan^2 x.$$

Definieren wir für alle $x \in [-1, 1]$

$$\arcsin x := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Auf $(-1,1)$ ist $\arcsin x$ differenzierbar und

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Funktion $\arcsin x$ ist somit streng monoton steigend auf $(-1,1)$. Es ist klar, dass $\arcsin 0 = 0$. Beweisen wir, dass $\arcsin 1 < \infty$:

$$\begin{aligned} \arcsin 1 &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+t)}} \quad (\text{Substitution} \quad s = 1-t) \\ &= \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s(2-s)}} \le \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \left[2\sqrt{s}\right]_0^1 = 2 < \infty. \end{aligned}$$

Wir definieren die Zahl π durch

$$\frac{\pi}{2} := \arcsin 1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Somit ist $\arcsin x$ eine stetige streng monotone steigende Funktion auf $[-1,1]$ mit dem Bildmenge $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Definieren wir die inverse Funktion auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit den Werten in $[-1,1]$:

$$\sin := \arcsin^{-1}.$$

Es folgt, dass für $y = \sin x$

$$(\sin x)' = \frac{1}{(\arcsin y)'} = \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2 x}.$$

Bemerken wir, dass

$$\tau = \int_0^\infty \frac{ds}{1+s^2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi/2,$$

da die Substitution

$$s = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad ds = \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad t = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \tag{13.23}$$

ergibt

$$\int_0^\infty \frac{ds}{1+s^2} = \int_0^1 \left(1-t^2\right) \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Somit ist $\tan x$ auf $(-\pi/2, \pi/2)$ definiert.

Definieren wir für alle $x \in [-1,1]$

$$\arccos x := \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Diese Funktion has die Bildmenge $[0,\pi]$ da

$$\arccos 1 = 0$$

und

$$\arccos(-1) = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi.$$

Offensichtlich gilt

$$\arccos x + \arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2},$$

und somit

$$(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Setzen wir

$$\cos = \arccos^{-1},$$

so dass $\cos x$ auf $[0,\pi]$ definiert ist mit den Werten in $[-1,1]$.

Es gilt für $y = \cos x$

$$(\cos x)' = \frac{1}{(\arccos y)'} = -\sqrt{1-y^2} = -\sqrt{1-\cos^2 x}.$$

Beweisen wir für alle $x \in [0,\pi/2]$ die Identität

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{13.24}$$

Setzen wir $a = \cos x$ und $b = \sin x$ so dass

$$\int_0^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x = \int_a^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Wir müssen beweisen, dass $a^2 + b^2 = 1$. Die Substitution

$$u = t^2, \quad du = 2tdt$$

ergibt

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_0^{b^2} \frac{du}{2\sqrt{u(1-u)}} \\ \int_a^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_{a^2}^1 \frac{du}{2\sqrt{u(1-u)}} = \int_0^{1-a^2} \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} \end{aligned}$$

wobei $v = 1-u$. Es folgt $b^2 = 1-a^2$ und somit $a^2+b^2 = 1$.

Es folgt, dass

$$(\sin x)' = \cos x \quad \text{und} \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Beweisen wir jetzt, dass für alle $x \in [0,\pi/2)$ gilt

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Setzen wir $a = \cos x$, $b = \sin x$, $c = \tan x$ so dass

$$\int_0^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_a^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^c \frac{ds^2}{1+s^2}.$$

Wir müssen beweisen, dass $c = \frac{b}{a}$. Die gleiche Substitution (13.23) ergibt

$$\int_0^c \frac{ds}{1+s^2} = \int_0^{\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}} (1-t^2) \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Es folgt $\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} = b$ und somit $c = \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{b}{a}$.

Somit erhalten wir

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Um die Potenzreihen für die elementaren Funktionen zu bestimmen, benutzt man die Taylorformel mit einer Abschätzung des Restgliedes (siehe Abschnitt 13.10 unterhalb). Man erhält

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Die Funktion $\exp(x)$ wurde bisher für $x \in \mathbb{R}$ definiert, $\sin x$ – für $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ und $\cos x$ – für $x \in [0, \pi]$. Diese Potenzreihen lassen uns die Funktionen $\exp(x)$, $\cos x$ und $\sin x$ auf alle $x \in \mathbb{C}$ fortsetzen. Allerdings muss man noch beweisen, dass die Haupteigenschaft (13.22) für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt.

Es folgt aus den obigen Potenzreihen, dass für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x.$$

Insbesondere gilt

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i$$

und

$$\exp(i\pi) = -1, \quad \exp(i2\pi) = 1,$$

woraus auch die Periodizität von exp, sin und cos folgt.

13.5 Funktionenfolgen

Seien J eine beliebige Menge und $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von reellwertigen (oder komplexwertigen) Funktionen auf J.

Definition. Man sagt, dass die Folge $\{f_n\}$ gegen eine Funktion f *punktweise auf* J konvergiert wenn für jedes $x \in J$ gilt $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$, d.h.

$$\forall x \in J \quad |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ für } n \to \infty. \tag{13.25}$$

Die punktweise Konvergenz bezeichnet man mit $f_n \to f$.

Für jede Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ definieren wir die sup-Norm von f auf J mit

$$\|f\|_J := \sup_{x \in J} |f(x)| \qquad (= \sup |f(J)|).$$

Man benutzt auch die einfachere Notation $\|f\| = \|f\|_J$ wenn J fixiert ist.

Definition. Man sagt, dass $\{f_n\}$ gegen f *gleichmäßig auf* J konvergiert wenn

$$\|f_n - f\|_J \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Die gleichmäßige Konvergenz bezeichnet man mit $f_n \rightrightarrows f$.

Die gleichmäßige Konvergenz ist offensichtlich eine stärkere Bedingung als die punktweise Konvergenz, da sie äquivalent zu

$$\sup_J |f_n - f| \to 0$$

ist, woraus (13.25) folgt.

Die Umkehrung gilt nicht: es gibt punktweise konvergente Folgen die nicht gleichmäßig konvergent sind.

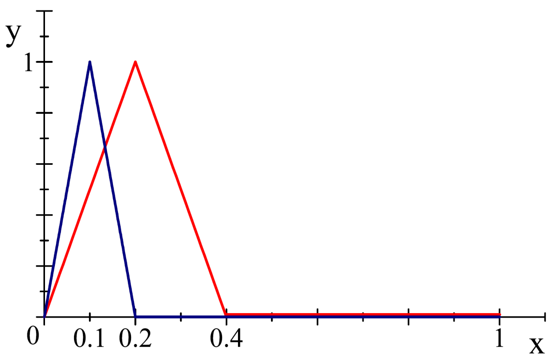
Beispiel. 1. Betrachten wir auf $J = (0, +\infty)$ die Funktionen

$$f_n(x) = \frac{x}{n}.$$

Für jedes $x \in J$ gilt offensichtlich $f_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$ so dass $f_n \to 0$, aber $f_n \not\rightrightarrows 0$ da $\|f_n\|_J = \infty$.

2. Betrachten wir auf $J = [0, 1]$ die Funktionen

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2 - nx, & \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n}, \\ 0, & \frac{2}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$



Die Graphen von f_5 und f_{10}

Zeigen wir, dass $f_n(x) \to 0$ für jedes $x \in [0, 1]$. Für $x = 0$ ist es offensichtlich, da $f_n(0) = 0$. Für $x > 0$ gilt $x > 2/n$ für hinreichend große n, woraus $f_n(x) = 0$ folgt. Andererseits, da $\|f_n\|_J = \sup_{[0,1]} f_n = 1$, so sehen wir, dass $f_n \not\rightrightarrows 0$.

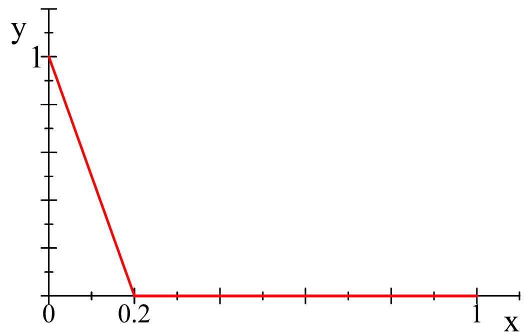
Die gleichmäßige Konvergenz ist wichtig da sie die Stetigkeit von Funktionen bewahrt.

Satz 13.5 *Sei* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von stetigen Funktionen auf einem Intervall* $J \subset \mathbb{R}$. *Gilt* $f_n \rightrightarrows f$ *auf* J *so ist* f *auch stetig auf* J.

Beweis. ?????????????? ■

Beispiel. Die punktweise Konvergenz bewahrt die Stetigkeit nicht. Betrachten wir zum Beispiel die Funktionen

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$



Der Graph von g_5

Offensichtlich ist g_n stetig auf $[0,1]$. Für $n \to \infty$ erhalten wir $g_n(x) \to 0$ für $x > 0$ und $g_n(0) \to 1$, d.h. $g_n \to g$ wobei

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Es ist klar, dass g unstetig an 0 ist.

13.6 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen

Sei $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von reellwertigen (oder komplexwertigen) Funktionen auf einer Menge J. Betrachten wir die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ und ihre Partialsummen

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Definition. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert auf J *punktweise* bzw *gleichmäßig* wenn die Folge $\{F_n\}$ von Partialsummen *punktweise* bzw *gleichmäßig* auf J konvergiert.

Die folgende Aussage gibt ein hilfreiches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen an.

Satz 13.6 (Weierstraßsches Majorantenkriterium; auch Weierstraßscher *M-Test*) *Sei* $\{f_k\}$ *eine Funktionenfolge auf* J *mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_J < \infty.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *auf* J *absolut und gleichmäßig.*

Somit folgt die gleichmäßige Konvergenz von einer Funktionenreihe aus der Konvergenz einer numerischen Reihe.

Beweis. Für jedes $x \in J$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_J < \infty$$

so dass die Reihe $\sum f_k(x)$ absolut konvergent für jedes $x \in J$ ist. Insbesondere ist diese Reihe punktweise konvergent. Setzen wir

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad \text{und} \quad F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

und beweisen, dass $F_n \rightrightarrows F$ für $n \to \infty$. Für jedes $x \in J$ gilt

$$|F(x) - F_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_J.$$

Da die rechte Seite unabhängig von $x \in J$ ist, so erhalten wir

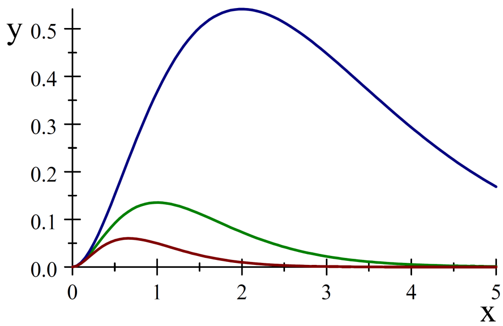
$$\|F - F_n\|_J = \sup_{x \in J} |F(x) - F_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_J.$$

Da die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, so erhalten wir, dass $\|F - F_n\|_J \to 0$ und somit $F_n \rightrightarrows F$, was zu beweisen war. ■

Beispiel. Beweisen wir, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^2 e^{-kx}$$

gleichmäßig auf $[0, +\infty)$ konvergiert. Die Funktion $f_k(x) = x^2 e^{-kx}$ ist positive für $x > 0$, verschwindet in $x = 0$ und konvergiert gegen 0 für $x \to +\infty$. Es folgt, dass f_k eine Maximumstelle auf $[0, \infty)$ hat.



Funktionen $f_k(x) = x^2 e^{-kx}$ für $k = 1, 2, 3$

An der Maximumstelle x von f_k gilt $f_k'(x) = 0$, was äquivalent zu $(\ln f_k)' = 0$, d.h. zu

$$(2 \ln x - kx)' \;=\; 0,$$

$$\frac{2}{x} - k \;=\; 0,$$

woraus folgt $x = \frac{2}{k}$. Somit erhalten wir

$$\|f_k\|_{[0,\infty)} = \max_{[0,\infty)} f_k = f_k\left(\frac{2}{k}\right) = \left(\frac{2}{k}\right)^2 e^{-2} = \frac{4e^{-2}}{k^2}.$$

Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, so erhalten wir nach dem Majorantenkriterium dass die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^2 e^{-kx}$ absolut und gleichmäßig auf $[0, +\infty)$ konvergiert.

Definition. Sei $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen auf einem Intervall J. Die Folge $\{f_k\}$ konvergiert auf J *lokal gleichmäßig*, wenn diese Folge auf jedem abgeschlossenen beschränkten Intervall $I \subset J$ gleichmäßig konvergiert. Konvergiert $\{f_k\}$ lokal gleichmäßig gegen f, so schreibt man $f_k \overset{loc}{\rightrightarrows} f$.

Analog konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ auf J lokal gleichmäßig wenn diese Reihe auf jedem abgeschlossenen beschränkten Intervall $I \subset J$ gleichmäßig konvergiert.

Offensichtlich impliziert eine lokal gleichmäßige Konvergenz $f_k \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ auf J die punktweise Konvergenz $f_k \to f$ da es für jedes $x \in J$ ein kompaktes Intervall I mit $x \in I \subset J$ gibt. Konvergiert die Folge $\{f_k\}$ gleichmäßig auf J gegen f, so konvergiert $\{f_k\}$ gegen f auch lokal gleichmäßig, da für jedes Teilintervall $I \subset J$ gilt

$$\|f_k - f\|_I \leq \|f_k - f\|_J.$$

Somit haben wir die folgende Beziehung zwischen den Typen von Konvergenz:

$$f_k \rightrightarrows f \quad \Longrightarrow \quad f_k \overset{loc}{\rightrightarrows} f \quad \Longrightarrow \quad f_k \to f.$$

Korollar 13.7 *Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf einem Intervall J. Konvergiert die Folge $\{f_k\}$ lokal gleichmäßig auf J, so ist der Grenzwert $f(x) = \lim f_k(x)$ stetig auf J. Die ähnliche Eigenschaft gilt auch für die Reihen: die Summe einer lokal gleichmäßig konvergenten Reihe von stetigen Funktionen ist stetig.*

Beweis. Auf jedem abgeschlossenen beschränkten Intervall $I \subset J$ gilt nach Voraussetzung $f_k \rightrightarrows f$. Nach dem Satz 13.5 ist f stetig auf I. Da I ein beliebiges kompaktes Teilintervall von J ist, so ist f stetig auch auf J. Die Aussage für die Reihen folgt, da die Partialsummen stetig und lokal gleichmäßig konvergent sind. ∎

Beispiel. Zeigen wir, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ auf $J = (-1, 1)$ lokal gleichmäßig konvergiert. Jedes abgeschlossene beschränkte Intervall $I \subset J$ liegt in einem Intervall der Form $[-a, a]$ mit $0 < a < 1$, woraus folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|x^k\right\|_I \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\|x^k\right\|_{[-a,a]} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k < \infty.$$

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Reihe auf I absolut und gleichmäßig und somit lokal gleichmäßig auf J. Zeigen wir, dass die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ auf $(-1, 1)$ nicht gleichmäßig ist. Die Summe der Reihe ist

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

und die Partialsumme ist

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Es folgt

$$f(x) - f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$

und

$$\|f - f_n\|_J = \sup_{x \in (-1,1)} \left| \frac{x^{n+1}}{1 - x} \right| = \infty.$$

Wir beschließen, dass $f_n \not\rightrightarrows f$ auf $(-1, 1)$.

13.7 Potenzreihen

Definition. Eine *Potenzreihe* ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{13.26}$$

mit Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$. Die Menge von allen $x \in \mathbb{R}$ wo die Reihe konvergiert, ist der Definitionsbereich der Summe der Reihe.

Satz 13.8 *Sei die Potenzreihe* (13.26) *für ein* $x = x_0 \neq 0$ *konvergent. Dann konvergiert die Potenzreihe absolut und lokal gleichmäßig auf dem Intervall* $(-s, s)$ *mit* $s = |x_0|$. *Folglich ist die Summe* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *eine stetige Funktion auf* $(-s, s)$.

Beweis. Wir beweisen, dass für jedes $0 < r < s$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ auf $[-r, r]$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Für jedes $x \in [-r, r]$ gilt

$$\left| c_k x^k \right| = \left| c_k x_0^k \left(\frac{x}{x_0} \right)^k \right| \leq \left| c_k x_0^k \right| \left(\frac{r}{s} \right)^k.$$

Die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_0^k$ impliziert, dass $c_k x_0^k \to 0$ für $k \to \infty$. Insbesondere ist die Folge $\left\{ c_k x_0^k \right\}$ beschränkt, zum Beispiel, $\left| c_k x_0^k \right| \leq C$ für alle k und eine Konstante C. Es folgt, dass

$$\left\| c_k x^k \right\|_{[-r,r]} \leq C \left(\frac{r}{s} \right)^k.$$

Da $\frac{r}{s} < 1$ und somit die geometrische Reihe $\sum_k \left(\frac{r}{s} \right)^k$ konvergiert, so beschließen wir nach dem M-Test, dass die Potenzreihe $\sum_k c_k x^k$ absolut und gleichmäßig auf $[-r, r]$ konvergiert. Somit konvergiert diese Reihe absolut und lokal gleichmäßig auf $(-s, s)$. Die zweite Aussage folgt aus dem Korollar 13.7. ∎

Definition. Der Wert

$$R := \sup \left\{ |x| : \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \text{ konvergiert} \right\} \in [0, +\infty] \tag{13.27}$$

heißt der *Konvergenzradius* der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Das Intervall $(-R, R)$ heißt das *Konvergenzintervall* der Reihe.

Korollar 13.9 *Sei R der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Dann konvergiert diese Reihe lokal gleichmäßig auf $(-R,R)$ und ihre Summe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ist eine stetige Funktion auf $(-R,R)$. Der Definitionsbereich der Reihe ist eines von den Intervallen*

$$(-R,R)\,,[-R,R]\,,(-R,R],\ [-R,R). \tag{13.28}$$

Beweis. Für jedes $r \in (0,R)$ konvergiert die Reihe für ein x mit $r < |x| < R$ (nach Definition (13.27) von R). Nach dem Satz 13.8 konvergiert die Reihe lokal gleichmäßig auf $(-s,s)$ mit $s = |x|$ und somit gleichmäßig auf $[-r,r]$. Da $r < R$ beliebig ist, so konvergiert die Reihe lokal gleichmäßig auf $(-R,R)$. Nach dem Satz 13.7 ist die Summe $f(x)$ stetig auf $(-R,R)$.

Andererseits, für jedes x außerhalb $[-R,R]$ divergiert die Reihe einfach nach (13.27). An den Grenzpunkten R und $-R$ kann die Reihe sowohl konvergent als auch divergent sein. Der Definitionsbereich der Summe $f(x)$ ist somit eines von den Intervallen (13.28). ■

Satz 13.10 *Für den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gilt die folgende Formel von* Cauchy-Hadamard*:*

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k}}. \tag{13.29}$$

Bemerkung. Es gibt eine andere Formel für den Konvergenzradius:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|$$

aber unter der Voraussetzungen dass alle $c_k \neq 0$ und dass der Grenzwert existiert. Die Formel (13.29) von Cauchy-Hadamard hingegen gilt immer ohne zusätzliche Voraussetzungen.

Beweis. Wir benutzen die folgende Eigenschaft von lim sup: gilt für eine Folge $\{a_k\}$

$$\limsup_{k\to\infty} a_k < c$$

so gilt $a_k < c$ für fast alle k. In der Tat, liegt im $[c,+\infty)$ unendlich viele Glieder der Folge $\{a_k\}$ so gibt es im $[c,+\infty]$ einen Häufungspunkt der Folge, was unmöglich ist, dass der größte Häufungspunkt der Folge $\{a_n\}$ gleich $\limsup_{n\to\infty} a_n$ ist was kleiner als c ist.

Definieren wir R mit (13.29) und beweisen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ für $|x| < R$ konvergiert und für $|x| > R$ divergiert. Dann erhalten wir dass R der Konvergenzradius ist. Sei zuerst $0 < |x| < R$ (der Fall $x = 0$ ist trivial). Es folgt, dass

$$\limsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k} = \frac{1}{R} < \frac{1}{|x|}.$$

Offensichtlich gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\limsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k} < \frac{1-\varepsilon}{|x|},$$

woraus folgt, dass

$$|c_k|^{1/k} < \frac{1-\varepsilon}{|x|} \text{ für fast alle } k.$$

Somit gilt

$$\left|c_k x^k\right| < (1-\varepsilon)^k \text{ für fast alle } k.$$

Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (1-\varepsilon)^k$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

Beweisen wir jetzt, dass für $|x| > R$ die Reihe divergiert. Es gilt dann

$$\limsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k} > \frac{1}{|x|},$$

und somit gibt es eine Teilfolge $\{c_{k_i}\}$ mit

$$\lim_{i\to\infty} |c_{k_i}|^{1/k_i} > \frac{1}{|x|}.$$

Daraus folgt, dass

$$|c_{k_i}|^{1/k_i} > \frac{1}{|x|} \text{ für fast alle } i$$

und somit

$$\left|c_{k_i} x^{k_i}\right| > 1 \text{ für fast alle } i.$$

Folglich ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ divergent nach dem Trivialkriterium (Satz 5.4). ■

Beispiel. Die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

ist konvergent für $x = -1$ als Leibniz-Reihe. Nach dem Satz 13.8 konvergiert sie lokal gleichmäßig auf $(-1, 1)$. Für $|x| > 1$ gilt $\frac{|x|^k}{k} \to \infty$ so dass die Reihe divergiert. Somit ist das Konvergenzradius gleich 1 und das Konvergenzintervall ist $(-1, 1)$. Das Gleiche folgt auch aus (13.29) da

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} (1/k)^{1/k}} = 1.$$

Der Definitionsbereich der Reihe ist $[-1, 1)$, da die Reihe an $x = -1$ konvergiert und an $x = 1$ divergiert (als harmonische Reihe).

Nach dem Korollar 13.9 ist die Summe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ stetig auf dem Konvergenzintervall $(-R, R)$. Ist $f(x)$ auch am Grenzpunkt $x = R$ oder $x = -R$ definiert, so entsteht die Frage, ob f an diesem Grenzpunkt auch stetig ist. Die Antwort ist positiv und wird im folgenden Satz gegeben.

Satz 13.11 (Satz von Abel) *Die Funktion $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ist stetig in jedem Punkt $x = x_0$ wo die Reihe konvergiert (d.h. im ganzen Definitionsbereich).*

Beweis. Liegt x_0 im Konvergenzintervall $(-R, R)$, so gilt die Aussage nach dem Korollar 13.9. Es bleibt den Fall $x_0 = \pm R$ zu betrachten. Im Fall $x_0 = 0$ gibt es nichts zu beweisen, so sei $x_0 \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $x_0 = 1$ da sonst x/x_0 in x umbenennen. Auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $f(1) = 0$ da sonst c_0 ändern. Unter diesen Voraussetzungen beweisen, dass $f(x)$ stetig auf $[0,1]$ ist, insbesondere an der Grenze $x = 1$.

Wir benutzen die *abelsche partielle Summation* um die Reihe $\sum c_k x_k$ umzuformen. Bezeichnen wir für jedes $n \in \mathbb{Z}_+$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = c_0 + c_1 + ... + c_n$$

und $s_{-1} = 0$, so dass für alle $k \in \mathbb{Z}_+$ gilt

$$c_k = s_k - s_{k-1}.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = f(1) = 0,$$

so ist die Folge $\{s_n\}$ konvergent und somit beschränkt. Nach dem Majorantenkriterium für numerische Reihen (Satz 5.5) konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k$$

für alle $x \in (-1,1)$. Es gilt somit für alle $x \in (-1,1)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s_{k-1})\, x^k = \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} s_{k-1} x^k.$$

Da das Glied $s_{k-1}x^k$ für $k = 0$ verschwindet, so lässt sich der Index k in der letzten Summe von $k = 1$ anfangen. Zudem umbenennen wir in dieser Summe $k-1$ in k und somit erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_{k-1} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} s_{k-1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^{k+1},$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s_k \left(x^k - x^{k+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (1-x)\, s_k x^k. \end{aligned} \tag{13.30}$$

Diese Identität wurde für $x \in (-1,1)$ beweisen, aber für $x = 1$ gilt (13.30) auch da $f(1) = 0$. Beweisen wir, dass die Reihe (13.30) gleichmäßig gegen $f(x)$ auf $[0,1]$ konvergiert, woraus die Stetigkeit von f auf $[0,1]$ folgen wird. Die Partialsummen dieser Reihe sind

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (1-x)\, s_k x^k, \tag{13.31}$$

und für alle $x \in [0,1)$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-x) s_k x^k \right| \leq \sup_{k>n} |s_k| (1-x) \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \\ &\leq \sup_{k>n} |s_k| (1-x) \frac{1}{1-x} \\ &= \sup_{k>n} |s_k| . \end{aligned}$$

Für $x = 1$ gilt diese Ungleichung auch, da $f(1) = f_n(1) = 0$ (siehe (13.31)). Somit erhalten wir für alle $x \in [0,1]$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sup_{k>n} |s_k| ,$$

woraus folgt

$$\|f - f_n\|_{[0,1]} = \sup_{[0,1]} |f - f_n| \leq \sup_{k>n} |s_k| .$$

Da $s_n \to 0$ für $n \to \infty$, so gilt auch[1] $\sup_{k>n} |s_k| \to 0$ und somit

$$\|f - f_n\|_{[0,1]} \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

d.h. die gleichmäßige Konvergenz $f_n \rightrightarrows f$ auf $[0,1]$. Nach dem Satz 13.5 ist f auf $[0,1]$ stetig. ∎

Beispiel. Es gilt die folgende Identität für alle $x \in (-1,1)$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \tag{13.32}$$

Die Potenzreihe (13.32) hat den Konvergenzradius 1, aber konvergiert auch am Grenzpunkt $x = 1$, was aus dem Leibniz-Kriterium folgt, da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ alternierend ist und die Glieder monoton fallend sind. Nach dem Satz 13.11 ist die Summe der Reihe (13.32) stetig an $x = 1$. Da $\arctan x$ auch stetig an $x = 1$ ist, so erhalten wir, dass die Identität (13.32) auch für $x = 1$ gilt (und analog für $x = -1$). Da $\arctan 1 = \pi/4$, so erhalten wir die Identität

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

---

[1] Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein N mit

$$|s_k| < \varepsilon \text{ für alle } k > N.$$

Daraus folgt, dass für alle $n \geq N$

$$\sup_{k>n} |s_k| \leq \sup_{k>N} |s_k| \leq \varepsilon$$

und somit $\sup_{k>n} |s_k| \to 0$ für $n \to \infty$.

13.8 Integrations unter gleichmäßiger Konvergenz

Satz 13.12 *Sei* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von stetigen Funktionen auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall* $[a,b]$*. Konvergiert* f_k *gleichmäßig auf* $[a,b]$ *gegen eine Funktion* f*, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\,dx. \tag{13.33}$$

Man kann auch schreiben

$$\int_a^b \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\,dx$$

so dass die Operationen gleichmäßiger lim und $\int_a^b$ vertauschbar sind.

Beweis. Die Funktion f ist stetig nach dem Satz 13.5 und somit integrierbar. Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_k(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b (f_k - f)\,dx\right| \\ &\le \int_a^b |f_k - f|\,dx \\ &\le \sup_{[a,b]}|f_k - f|\,(b-a) = \|f_k - f\|_{[a,b]}\,(b-a),\end{aligned}$$

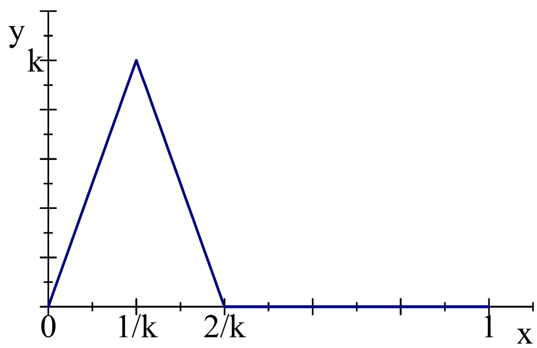
wobei wir die LM-Ungleichung des Satzes 10.12 verwendet haben. Da $f_k \rightrightarrows f$ und somit $\|f_k - f\|_{[a,b]} \to 0$, so erhalten wir

$$\left|\int_a^b f_k(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \to 0,$$

was äquivalent zu (13.33) ist. ■

Beispiel. Die Voraussetzung von der gleichmäßigen Konvergenz ist wichtig für den Satz 13.12. Die punktweise Konvergenz $f_k \to f$ ergibt die Konvergenz von den Integralen nicht. Zum Beispiel, betrachten wir die folgenden Funktionen auf $[0,1]$:

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 x, & 0 \le x \le \frac{1}{k}, \\ 2k - k^2 x, & \frac{1}{k} \le x \le \frac{2}{k}, \\ 0, & \frac{2}{k} \le x \le 1. \end{cases}$$



Der Graph von f_k

Es gilt die punktweise Konvergenz $f_k \to 0$ auf $[0,1]$, aber

$$\int_0^1 f_k(x)\,dx \geq \int_0^{1/k} f_k dx = \int_0^{1/k} k^2 x\,dx = k^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/k} = \frac{1}{2}$$

und somit

$$\int_0^1 f_k(x)\,dx \not\to 0.$$

Korollar 13.13 *Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen auf $[a,b]$ Funktionen. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig auf $[a,b]$, so gilt*

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx. \tag{13.34}$$

In anderen Wörtern, die Operationen $\int_a^b$ und $\sum_{k=1}^{\infty}$ über einer Funktionenreihe sind vertauschbar, vorausgesetzt, dass die Reihe gleichmäßig konvergiert. Noch eine Umformulierung von (13.34): eine Funktionenreihe lässt sich *gliedweise* Integrieren vorausgesetzt dass sie gleichmäßig konvergiert.

Beweis. Setzen wir

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Da die Folge $\{F_n\}$ gleichmäßig auf $[a,b]$ konvergiert, so gilt nach dem Satz 13.12

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b F_n dx \to \int_a^b \lim_{n\to\infty} F_n dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right) dx,$$

was zu beweisen war. ■

Korollar 13.14 *Sei die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ konvergent auf einem Intervall $(-R,R)$ (insbesondere kann R der Konvergenzradius sein). Dann gilt für alle $x \in (-R,R)$*

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}. \tag{13.35}$$

Beweis. Für $x = 0$ ist (13.35) trivial. Sei $x \in (0,R)$. Nach dem Satz 13.8 konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ gleichmäßig auf dem Intervall $[0,x]$. Nach dem Korollar 13.13 lässt sich die Identität

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

auf dem Intervall $[0,x]$ gliedweise integrieren:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x c_k t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1},$$

was zu beweisen war. Analog betrachtet man den Fall $x < 0$. ■

Beispiel. Betrachten wir die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

die für $x \in (-1, 1)$ konvergiert. Nach (13.35) erhalten wir für alle $x \in (-1, 1)$

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + ...$$

Andererseits gilt

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x),$$

woraus folgt, dass für alle $x \in (-1, 1)$

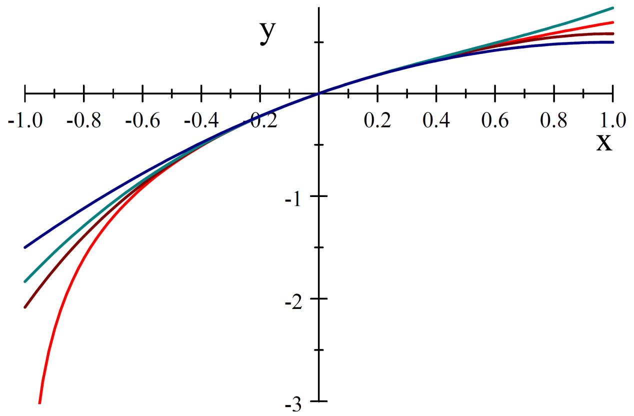
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

Der Wechsel von x nach $-x$ ergibt die folgende Identität

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}}, \tag{13.36}$$

die für alle $x \in (-1, 1)$ gilt. Der Konvergenzradius der Reihe (13.36) ist gleich 1 wie es aus der Formel von Cauchy-Hadamard (Satz 13.10) folgt.

Die Reihe in (13.36) heißt die *Taylorreihe* der Funktion $\ln(1+x)$. Die Partialsummen dieser Reihe sind die Taylor-Polynome $T_n(x)$ von $\ln(1+x)$ (Aufgabe 43).



Die Funktion $\ln(1+x)$ (rot) und die Partialsummen $T_2(x)$, $T_3(x)$, $T_4(x)$

Für $x = 1$ stimmt die Reihe (13.36) mit der Leibniz-Reihe überein und ist somit konvergent. Nach dem Satz von Abel (Satz 13.11) ist die Summe der Reihe (13.36) stetig an $x = 1$. Da $\ln(1+x)$ auch an $x = 1$ stetig ist, so beschließen wir, dass (13.36) auch an $x = 1$ gilt, d.h.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... $$

An $x = -1$ divergiert die Reihe (13.36), und auch $\ln(1+x)$ ist nicht definiert.

13.9 Differenzieren unter gleichmäßiger Konvergenz

Satz 13.15 *Sei* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen auf einem Intervall* $J \subset \mathbb{R}$. *Nehmen wir an, dass*

- $f_k \to f$ *punktweise auf* J;
- $f'_k \overset{loc}{\rightrightarrows} g$ *auf* J.

Dann ist die Funktion f *stetig differenzierbar und es gilt* $f' = g$.

Äquivalente Formulierung: es gilt

$$\left(\lim_{k\to\infty} f_k\right)' = \lim_{k\to\infty} f'_k,$$

vorausgesetzt, dass $\{f_k\}$ punktweise konvergiert und $\{f'_k\}$ lokal gleichmäßig konvergiert. In diesem Fall sind die Operationen lim und Ableitung vertauschbar.

Beweis. Fixieren wir ein $c \in J$. Nach der Newton-Leibniz-Formel haben wir für alle $x \in J$

$$f_k(x) - f_k(c) = \int_c^x f'_k(t)\,dt. \tag{13.37}$$

Da $f'_k \overset{loc}{\rightrightarrows} g$ auf J, so ist g stetig in J nach dem Satz 13.7. Da $f'_k \rightrightarrows g$ auf $[c,x]$ (oder $[x,c]$ im Fall $x < c$), so erhalten wir nach dem Satz 13.12

$$\int_c^x f'_k(t)\,dt \to \int_c^x g(t)\,dt \text{ as } k \to \infty.$$

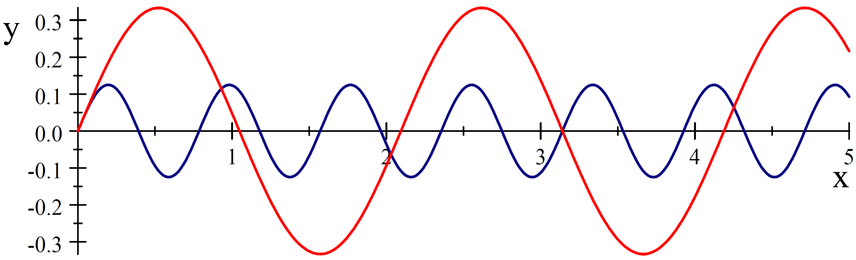
Es folgt aus (13.37) für $k \to \infty$, dass

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)\,dt.$$

Nach dem Satz 10.16 beschließen wir, dass $f' = g$, was zu beweisen war. ∎

Bemerken wir folgendes: die Behauptung des Satzes 13.15 ist über die Ableitungen, aber der Beweis auf Integration basiert.

Beispiel. Die Konvergenz $f_k \rightrightarrows f$ allein ergibt $f'_k \to f'$ nicht. Zum Beispiel, die Folge $f_k = \frac{1}{k}\sin kx$ konvergiert gegen 0 gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ aber $f'_k = \cos kx$ konvergiert nicht.



Funktionen $\frac{1}{3}\sin 3x$ und $\frac{1}{8}\sin 8x$

Korollar 13.16 *Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Nehmen wir an, dass*

- *die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ist auf J punktweise konvergent;*
- *die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ ist auf J lokal gleichmäßig konvergent.*

Dann gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'. \tag{13.38}$$

In anderen Wörtern: die Reihe lässt sich gliedweise ableiten vorausgesetzt dass sie punktweise konvergiert und die Reihe von Ableitungen lokal gleichmäßig konvergiert.

Beweis. Die Partialsummen $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ erfüllen alle Voraussetzungen des Satzes 13.15, woraus folgt

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \left(\lim_{n\to\infty} F_n\right)' = \lim_{n\to\infty} F_n' = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k',$$

was zu beweisen war. ■

Satz 13.17 *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die Funktion*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 ...$$

in $(-R, R)$ unendlich oft differenzierbar, es gilt in $(-R, R)$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + ... \tag{13.39}$$

und der Konvergenzradius der Reihe (13.39) ist auch gleich R.

Die Identität (13.39) dass eine Potenzreihe sich im Konvergenzintervall *immer* gliedweise ableiten lässt.

Beweis. Sei R' der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1}$. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard (Satz 13.10) gilt

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{k\to\infty} (k|c_k|)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} k^{1/k} \limsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k} = \frac{1}{R},$$

da $k^{1/k} \to 1$ für $k \to \infty$. Somit erhalten wir $R' = R$. Insbesondere konvergiert die Reihe (13.39) lokal gleichmäßig in $(-R, R)$.

Nach dem Korollar 13.16 gilt für alle $x \in (-R, R)$

$$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1},$$

da $\sum_k c_k x^k$ punktweise konvergiert und $\sum_k c_k k x^{k-1}$ lokal gleichmäßig in $(-R, R)$ konvergiert. Somit ist f in $(-R, R)$ differenzierbar und es gilt (13.39).

Es bleibt noch zu beweisen, dass f unendlich oft differenzierbar ist. Dafür bemerken wir, dass die Reihe $f'(x) = \sum_k c_k k x^{k-1}$ mit dem Konvergenzradius R alle Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt. Somit beschließen wir, dass f' in $(-R, R)$ differenzierbar ist,

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + 4 \cdot 3c_4 x^2 + ...$$

und der Konvergenzradius dieser Reihe gleich R ist. Per Induktion nach n erhalten wir, dass $f^{(n)}(x)$ in $(-R, R)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert, und es gilt für alle $x \in (-R, R)$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k k(k-1) ... (k-n+1)x^{n-k}. \tag{13.40}$$

■

Beispiel. Betrachten wir die Identität

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

die für alle $x \in (-1, 1)$ gilt. Ableiten davon ergibt

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1},$$

noch einmal Ableiten ergibt

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2},$$

usw. Alle diese Identitäten gelten auch für alle $x \in (-1, 1)$.

13.10 Taylorreihen

Sei die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

konvergent in einem Intervall $(-R, R)$ mit $R > 0$. Nach dem Satz 13.17 ist f unendlich oft in $(-R, R)$ differenzierbar und es gilt für alle $x \in (-R, R)$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k k(k-1) ... (k-n+1)x^{n-k}.$$

Insbesondere für $x = 0$ gilt

$$f^n(0) = c_n n(n-1) ... (n-n+1) = c_n n!$$

und somit

$$\boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}. \tag{13.41}$$

Umgekehrt, sei f eine unendlich oft differenzierbare Funktion auf einem Intervall J mit $0 \in J$. Betrachten wir die Reihe

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n} \tag{13.42}$$

und stellen die Frage ob diese Reihe gegen $f(x)$ konvergiert.

Definition. Die Reihe (13.42) heißt die *Taylorreihe* der Funktion f an der Stelle 0 (oder auch *Macklaurin-Reihe*).

Nach dem obigen Argument gilt folgendes: ist f die Summe einer konvergenten Potenzreihe, so konvergiert ihre Taylorreihe gegen f. Für allgemeine unendlich oft differenzierbare Funktion f muss ihre Taylorreihe *nicht* unbedingt gegen $f(x)$ konvergieren (oder überhaupt konvergieren).

Die Partialsummen der Taylorreihe (13.42) sind offensichtlich die Taylor-Polynome

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Somit konvergiert die Reihe (13.42) gegen $f(x)$ genau dann, wenn

$$f(x) - T_n(x) \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Um diese Bedingung überprüfen zu können, brauchen wir eine Abschätzung des Restgliedes $f(x) - T_n(x)$. Nach dem Satz 10.18 gilt die Darstellung

$$f(x) = T_n(x) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt. \tag{13.43}$$

Die Funktion

$$\boxed{R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt} \tag{13.44}$$

heißt das Integralrestglied.

Korollar 13.18 *Sei f unendlich oft differenzierbar auf einem Intervall J mit $0 \in J$. Sei $x \in J$. Die Identität*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \tag{13.45}$$

gilt genau dann wenn $R_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$.

Beweis. Diese Aussage folgt offensichtlich aus (13.43) da $T_n(x)$ eine Partialsumme der Reihe (13.45) ist. ■

Beispiel. Bestimmen wir die Taylorreihe für die Funktion $f(x) = e^x$. Da $f^{(n)}(x) = e^x$ und $f^{(n)}(0) = 1$, so erhalten wir nach (13.41) die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Wir wissen, dass die Summe dieser Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ gleich e^x ist. Beweisen wir dies noch einmal, und zwar mit Hilfe von dem Korollar 13.18. Es gilt

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Da $e^t \le e^{|x|}$ und $|x-t| \le |x|$, so erhalten wir nach der LM-Ungleichung

$$|R_n(x)| \le e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!} |x|.$$

Da $\frac{|x|^n}{n!} \to 0$, so erhalten wir $R_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$, woraus folgt, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

13.11 Binomische Reihe

Bestimmen wir die Taylorreihe für die Funktion

$$f(x) = (1+x)^p$$

wobei $p \in \mathbb{R}$. Der Definitionsbereich der Funktion f ist $x > -1$, wo die Funktion f unendlich oft differenzierbar ist. Im Fall $p > 0$ ist $f(x)$ auch an der Stelle $x = -1$ definiert und stetig.

Es gilt für $x > -1$

$$f'(x) = p(1+x)^{p-1}, \quad f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2}, \quad ...$$

und

$$f^{(n)}(x) = p(p-1)...(p-n+1)(1+x)^{p-n}.$$

Insbesondere gilt

$$f^{(n)}(0) = p(p-1)...(p-n+1), \quad n \in \mathbb{N},$$

und $f(0) = 1$. Somit ist die Taylorreihe von f an der Stelle 0 wie folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n, \tag{13.46}$$

wobei

$$\binom{p}{n} = \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

und

$$\binom{p}{0} = 1.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n$ heißt die *binomische Reihe.*

Bemerken wir, dass für $p \in \mathbb{N}$ und $0 \le n \le p$ gilt

$$\binom{p}{n} = \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!} \frac{(p-n)!}{(p-n)!} = \frac{p!}{n!(p-n)!},$$

was mit der üblichen Definition von Binomialkoeffizienten übereinstimmt.

Satz 13.19 *Für jedes $p \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylorreihe (13.46) gegen $f(x)$ für alle $x \in (-1,1)$, d.h. es gilt*

$$\boxed{(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n}. \tag{13.47}$$

Darüber hinaus, im Fall $p > 0$ konvergiert die binomische Reihe gegen $f(x)$ gleichmäßig auf $[-1,1]$.

Für jedes $p \in \mathbb{R}$ konvergiert die binomische Reihe gegen $(1+x)^p$ lokal gleichmäßig auf $(-1,1)$ wie es aus dem Korollar 13.9 folgt.

Die Identität (13.47) ist eine Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatz. In der Tat, für $p \in \mathbb{N}$ gilt nach dem binomischen Lehrsatz für alle $x \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} x^n,$$

was mit (13.47) übereinstimmt, da in diesem Fall alle Koeffizienten $\binom{p}{n}$ mit $n > p$ verschwinden. When $p \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, so kann man zeigen, dass der Konvergenzradius der binomischen Reihe gleich 1 ist.

Beweis. Um (13.47) zu beweisen, zeigen wir, dass für jedes $x \in (-1,1)$ gilt $R_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$. Für $x = 0$ gibt nichts zu beweisen, so sei $x \neq 0$. Für die Funktion

$$f(t) = (1+t)^p$$

haben wir nach (13.44)

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \\ &= \frac{p(p-1)\dots(p-n)}{n!} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-(n+1)}\, dt. \end{aligned}$$

Die Substitution $t = xs$ ergibt

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-(n+1)}\, dt &= \int_0^1 (x-xs)^n (1+xs)^{p-(n+1)}\, x\, ds \\ &= x^n \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{(1+xs)^n} (1+xs)^{p-1}\, x\, ds. \end{aligned}$$

Da $1 + xs \geq 1 - s$ (da $x > -1$), so erhalten wir

$$\frac{(1-s)^n}{(1+xs)^n} \leq 1$$

und somit

$$\left| \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{(1+xs)^n} (1+xs)^{p-1}\, x\, ds \right| \leq \int_0^1 (1+xs)^{p-1} |x|\, ds =: C < \infty$$

und

$$\left| \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-(n+1)}\, dt \right| \leq C |x|^n.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\leq C\left|\frac{p(p-1)\dots(p-n)}{n!}\right||x|^n \\
&= C|p|\left|\frac{(1-p)(2-p)\dots(n-p)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}\right||x|^n \\
&= C|p|\left|\left(1-\frac{p}{1}\right)x\left(1-\frac{p}{2}\right)x\dots\left(1-\frac{p}{n}\right)x\right| \\
&= C|p|\prod_{k=1}^{n}\left|1-\frac{p}{k}\right||x|.
\end{aligned}$$

Da $\frac{p}{k}\to 0$ für $k\to\infty$, so gibt es für jedes $\varepsilon>0$ ein $N\in\mathbb{N}$ so dass

$$\left|\frac{p}{k}\right|<\varepsilon \quad \text{für alle } k>N,$$

und somit

$$\left|1-\frac{p}{k}\right||x|<(1+\varepsilon)|x| =: q \quad \text{für alle } k>N.$$

Fixieren wir ein $x\in(-1,1)$ und wählen wir ein $\varepsilon>0$ so klein, dass $q<1$. Dann gilt es für alle $n>N$

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\leq C|p|\left(\prod_{k=1}^{N}\left|1-\frac{p}{k}\right||x|\right)\left(\prod_{k=N+1}^{n}\left|1-\frac{p}{k}\right||x|\right) \\
&\leq C'q^{n-N},
\end{aligned}$$

woraus $R_n(x)\to 0$ folgt.

Sei jetzt $p>0$. In diesem Fall beweisen wir unterhalb, dass die binomische Reihe auf $[-1,1]$ gleichmäßig konvergiert. Dann ist die Summe dieser Reihe eine stetige Funktion auf $[-1,1]$. Da $(1+x)^p$ auch stetig auf $[-1,1]$ ist und die Identität

$$(1+x)^p=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}x^n$$

für alle $x\in(-1,1)$ gilt, so gilt sie auch für alle $x\in[-1,1]$.

Da für alle $x\in[-1,1]$ gilt

$$\left|\binom{p}{n}x^n\right|\leq\left|\binom{p}{n}\right| =: c_n,$$

um die gleichmäßige Konvergenz der binomischen Reihe auf $[-1,1]$ zu beweisen, reicht es nach dem M-Test von Weierstraß zu zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n<\infty.$$

Fixieren wir eine natürliche Zahl $m>p$ und bemerken dass für $n>m$

$$c_n = \left|\frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}\right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\frac{p(p-1)\dots(p-m+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot (m-1)}\frac{(p-m)(p-m-1)\dots(p-n+1)}{m\cdot(m+1)\dots\cdot(n-1)}\frac{1}{n}\right| \\
&= C\frac{(m-p)(m+1-p)\dots(n-1-p)}{m(m+1)\dots(n-1)}\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

wobei

$$C=\left|\frac{p(p-1)\dots(p-m+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot (m-1)}\right|.$$

Es folgt

$$c_n = C\left(1-\frac{p}{m}\right)\left(1-\frac{p}{m+1}\right)\dots\left(1-\frac{p}{n-1}\right)\frac{1}{n},$$

wobei alle Faktoren positiv sind. Es gilt somit

$$\begin{aligned}
\ln c_n &= \ln C + \ln\left(1-\frac{p}{m}\right)+\ln\left(1-\frac{p}{m+1}\right)+\dots+\ln\left(1-\frac{p}{n-1}\right)+\ln\frac{1}{n} \\
&= \ln C + \sum_{k=m}^{n-1}\ln\left(1-\frac{p}{k}\right)-\ln n.
\end{aligned}$$

Es folgt aus (8.15) dass

$$\ln(1+t)\le t \text{ für alle } t>-1,$$

insbesondere

$$\ln\left(1-\frac{p}{k}\right)\le -\frac{p}{k}\quad \text{für alle } k\ge m.$$

Somit erhalten wir

$$\ln c_n \le \ln C - p\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{k}-\ln n.$$

Nach der Ungleichung (10.65) aus dem Beweis von dem Integralkriterium gilt es für jede monoton fallende Funktion f auf $[m,\infty)$

$$\int_m^n f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{n-1} f(k).$$

Für $f(x)=\frac{1}{x}$ erhalten wir

$$\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{k}\ge\int_m^n\frac{dx}{x}=\ln n-\ln m$$

woraus folgt

$$\ln c_n \le \ln C - p(\ln n-\ln m)-\ln n = \ln C + p\ln m-(p+1)\ln n$$

und

$$c_n \le \frac{Cm^p}{n^{p+1}} \text{ für alle } n>m.$$

Da $p>0$, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}<\infty,$$

woraus folgt
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty,$$
was zu beweisen war. ■

Bemerkung. Die geometrische Reihe
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$
ist ein spezieller Fall der binomischen Reihe für $p = -1$, da
$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{n!} = (-1)^n .$$
Der Definitionsbereich der geometrischen Reihe ist $(-1, 1)$ und stimmt mit dem Konvergenzintervall überein.

13.12 Sätze von der majorisierten und monotonen Konvergenz

Satz 13.20 (Satz von der majorisierten Konvergenz) *Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf einem Intervall (a,b) die lokal gleichmäßig auf (a,b) gegen f konvergiert. Sei g eine nichtnegative lokal integrierbare Funktion auf (a,b) mit*
$$\int_a^b g(x)\,dx < \infty. \tag{13.48}$$
Gilt für alle k
$$|f_k| \leq g \quad \textit{auf} \ (a,b) \tag{13.49}$$
so gilt
$$\int_a^b f_k(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \quad \textit{für}\ k \to \infty. \tag{13.50}$$

Die Funktion g mit (13.48)-(13.49) heißt *integrierbare Majorante* der Folge $\{f_k\}$.

Beweis. Wählen wir ein $c \in (a,b)$ und beweisen, dass
$$\int_a^c f_k(x)\,dx \to \int_a^c f(x)\,dx. \tag{13.51}$$
Analoge Eigenschaft gilt auch für Integration von c bis b, woraus (13.50) folgen wird.

Für jedes $a < t < c$ haben wir
$$\int_a^c f_k(x)\,dx = \int_a^t f_k(x)\,dx + \int_t^c f_k(x)\,dx.$$
Da $f_k \rightrightarrows f$ auf $[t,c]$, so auf $[t,c]$ gilt
$$\int_t^c f_k(x)\,dx \to \int_t^c f(x)\,dx \quad \text{für}\ k \to \infty. \tag{13.52}$$

Andererseits,

$$\left|\int_a^t f_k(x)\,dx\right| \leq \int_a^t |f_k(x)|\,dx \leq \int_a^t g(x)\,dx$$

und analog

$$\left|\int_a^t f(x)\,dx\right| \leq \int_a^t g(x)\,dx$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned}\int_a^c f_k(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx &= \int_a^t f_k(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx \\ &\quad + \int_t^c f_k(x)\,dx - \int_t^c f(x)\,dx\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left|\int_a^c f_k(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx\right| &\leq \left|\int_a^t f_k(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx\right| \\ &\quad + \left|\int_t^c f_k(x)\,dx - \int_t^c f(x)\,dx\right| \\ &\leq 2\int_a^t g(x)\,dx + \left|\int_t^c f_k(x)\,dx - \int_t^c f(x)\,dx\right|.\end{aligned}$$

Es folgt aus (13.48), dass

$$\int_a^t g(x)\,dx \longrightarrow 0 \text{ für } t \longrightarrow a- .$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ wählen wir t so nah an a dass

$$\int_a^t g(x)\,dx < \varepsilon/4.$$

Nach (13.52) gibt es $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $k \geq N$ gilt

$$\left|\int_t^c f_k(x)\,dx - \int_t^c f(x)\,dx\right| < \varepsilon/2.$$

Es folgt, dass

$$\left|\int_a^c f_k(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

woraus (13.51) folgt. ■

Korollar 13.21 *Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf einem Intervall (a,b). Angenommen seien die folgenden Bedingungen:*

(a) die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert lokal gleichmäßig auf (a,b);

(b) es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \leq g(x)$ wobei g eine lokal integrierbare nichtnegative Funktion auf (a,b) mit

$$\int_a^b g(x)\,dx < \infty.$$

Dann gilt

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx. \tag{13.53}$$

Beweis. Bezeichnen wird

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad \text{und} \quad F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Es folgt, dass $F_n \overset{loc}{\rightrightarrows} F$ auf (a, b) und

$$|F_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

Nach dem Satz 13.20 gilt

$$\int_a^b F_n(x)\, dx \to \int_a^b F(x)\, dx,$$

woraus (13.53) folgt. ■

Der nächste Satz zeigt, dass gleichmäßige Konvergenz unter bestimmen Voraussetzungen aus punktweiser Konvergenz folgt.

Satz 13.22 (Satz von Dini) *Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge von stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall J die punktweise gegen eine stetige Funktion f auf J konvergiert. Dann gilt auch die gleichmäßige Konvergenz $f_n \rightrightarrows f$ auf J.*

Beweis. Bezeichnen wir $g_n = f - f_n$. Dann ist $\{g_n\}$ eine monoton fallende Folge von nichtnegativen stetigen Funktionen die auf J punktweise gegen 0 konvergiert. Wir beweisen, dass $g_n \rightrightarrows 0$ auf J, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N \quad \sup_J |g_n| < \varepsilon.$$

Da $g_n \geq 0$ und g_n monoton fallend ist, so reicht es zu beweisen, dass

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ so dass } g_n(x) < \varepsilon \text{ für alle } x \in J. \tag{13.54}$$

Fixieren wir ein $\varepsilon > 0$. Nach der Voraussetzung haben wir $g_n(x) \to 0$ für jedes $x \in J$, insbesondere

$$\forall x \in J \quad \exists n_x \in \mathbb{N} \text{ so dass } g_{n_x}(x) < \varepsilon.$$

Da g_{n_x} stetig ist, so existiert ein offenes Intervall U_x mit Zentrum x so dass auch

$$g_{n_x} < \varepsilon \text{ auf } U_x \cap J. \tag{13.55}$$

Das Mengensystem $\{U_x\}_{x\in J}$ ist eine Überdeckung von J mit offenen Intervallen. Nach dem Überdeckungssatz gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{x_i}\}_{i=1}^m$ von J. Setzen wir

$$n = \max(n_{x_1}, n_{x_2}, ..., n_{x_m}).$$

Für jedes $i = 1, ..., m$ gilt $g_n \leq g_{n_i}$ nach der Monotonie der Folge $\{g_n\}$, was zusammen mit (13.55) ergibt

$$g_n < \varepsilon \text{ auf } U_{x_i} \cap J.$$

Da $\bigcup_{i=1}^m U_{x_i} \supset J$, so erhalten wir, dass

$$g_n < \varepsilon \text{ auf } J,$$

was zu beweisen war. ■

Satz 13.23 (Sätze von der monotonen Konvergenz)

(*a*) *Sei* $\{f_n\}$ *eine monoton steigende Folge von nichtnegativen stetigen Funktionen auf einem offenen Intervall* (a,b)*, die gegen eine stetige Funktion* f *auf* (a,b) *punktweise konvergiert. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{13.56}$$

(*b*) *Sei* $\{f_n\}$ *eine monoton fallende Folge von nichtnegativen stetigen Funktionen auf einem offenen Intervall* (a,b)*, die gegen eine stetige Funktion* f *auf* (a,b) *punktweise konvergiert. Gilt für ein* m

$$\int_a^b f_m(x)\,dx < \infty, \tag{13.57}$$

so gilt (13.56).

Die Bedingung (13.57) im Fall (b) ist wesentlich. Z.B., die Folge $f_n(x) \equiv \frac{1}{n}$ auf $(0,\infty)$ ist monoton fallend und $f_n \to 0 = f$ aber

$$\int_0^\infty f_n(x)\,dx = \infty \not\to 0 = \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Beweis. Nach dem Satz von Dini (Satz 13.22) ist die Konvergenz in den beiden Fällen lokal gleichmäßig. Nach dem Satz 13.20, um (13.56) zu beweisen, reicht es eine integrierbare Majorante g zu finden, d.h. eine nichtnegative lokal integrierbare Funktion auf (a,b) die die Bedingungen

$$\int_a^b g(x)\,dx < \infty$$

und

$$|f_n(x)| \le g(x) \quad \forall x \in (a,b) \ \forall n$$

erfüllt. Im Fall (b) ist die Funktion $g = f_m$ die integrierbare Majorante (es reicht die Restfolge $\{f_n\}_{n=m}^\infty$ zu betrachten).

Im Fall (a) gibt es zwei Möglichkeiten. Gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx < \infty,$$

so ist $g = f$ die integrierbare Majorante.

Nehmen wir jetzt an, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx = \infty. \tag{13.58}$$

In diesem Fall müssen wir beweisen, dass

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \infty \text{ für } n\to\infty. \tag{13.59}$$

Nach definition vom uneigentlichen Integral, für jedes $c \in (a,b)$ gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$= \lim_{t \to a+} \int_t^c f(x)\, dx + \lim_{s \to b-} \int_c^s f(x)\, dx.$$

Die Bedingung (13.58) impliziert folgendes: für jedes $E > 0$ existieren t und s mit

$$a < t < s < b$$

und

$$\int_t^s f(x)\, dx > E.$$

Da $f_n \rightrightarrows f$ auf $[t, s]$, so erhalten wir, dass

$$\lim_{n \to \infty} \int_t^s f_n(x)\, dx = \int_t^s f(x)\, dx > E,$$

woraus folgt, dass auch

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx > E.$$

Da E beliebig ist, so erhalten wir (13.59). ■

13.13 Gauss-Integral

Satz 13.24 *Es gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{13.60}$$

Für den Beweis brauchen wir das folgende lemma.

Lemma 13.25 *Für die Funktion* $\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ *auf* $(0, +\infty)$ *ist monoton steigend und konvergiert gegen* e *für* $t \to +\infty$.

Beweis. Es reicht zu beweisen, dass $\ln \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ monoton steigend ist, d.h.

$$\left(t \ln \left(1 + \frac{1}{t}\right)\right)' \geq 0$$

für alle $t > 0$. Die Ableitung ist gleich

$$\left(t \ln \left(1 + \frac{1}{t}\right)\right)' = \ln \left(1 + \frac{1}{t}\right) + t \frac{1}{1 + \frac{1}{t}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) = \ln \left(1 + \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{1 + t},$$

und wir müssen beweisen, dass

$$\ln \left(1 + \frac{1}{t}\right) \geq \frac{1}{1 + t} \tag{13.61}$$

für alle $t > 0$. Setzen wir $x = \frac{1}{1+t}$ so dass $0 < x < 1$. Dann gilt

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + \frac{1}{t},$$

und (13.61) ist äquivalent zu
$$\frac{1}{1-x} \geq e^x.$$
Diese Ungleichung gilt für alle $0 < x < 1$ da
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = e^x.$$

Um die Identität
$$\lim_{t\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$
zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass
$$\lim_{t\to+\infty} t \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) = 1.$$
Mit der Substitution $x = \frac{1}{t}$ ist diese Identität äquivalent zu
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \tag{13.62}$$
und (13.62) gilt, da
$$\ln(1+x) = x + o(x) \sim x \quad \text{für } x \to 0.$$

■

Beweis von dem Satz 13.24. Beweisen wir zuerst die folgende Aussage: die Folge von Funktionen
$$\left\{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$
ist monotone steigend und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen e^{x^2} für $n \to \infty$ konvergiert. Für $x = 0$ ist das offensichtlich. Für $x \neq 0$ gilt
$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n}{x^2}}\right)^{x^2}.$$
Es folgt aus dem Lemma 13.25 mit $t = \frac{n}{x^2}$ dass die Folge $\left\{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n}{x^2}}\right\}_{n\in\mathbb{R}}$ monoton steigend ist und gegen e konvergiert, woraus die Aussage folgt.

Somit ist die Folge
$$f_n(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}$$
monoton fallend und konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen e^{-x^2}für $n \to \infty$. Für die Funktion
$$f_1(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$
gilt
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} = \pi < \infty.$$

Somit erhalten wir nach dem Satz 13.23(b) dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx. \tag{13.63}$$

Andererseits die Substitution $y = x/\sqrt{n}$ ergibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} = \sqrt{n}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^n}.$$

Die inverse Substitution $y = \cot t$, $t \in (0,\pi)$ ergibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sqrt{n}\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sin^2 t\left(1+\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\right)^n} = \sqrt{n}\int_0^{\pi} \sin^{2n-2} t\,dt.$$

Nach dem Satz 10.27 gilt

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n-2} t\,dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{2n-2}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}} \text{ für } n \to \infty,$$

woraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx \to \sqrt{\pi},$$

was zusammen mit (13.63) ergibt (13.60). ■

Korollar 13.26 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Beweis. Nach Definition (13.8) von Γ-Funktion und nach (13.60) erhalten wir

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{-1/2}dt = 2\int_0^{\infty} e^{-t}d\left(t^{1/2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

■

13.14 Approximationssatz von Weierstraß

Hauptsatz 13.27 *Für jede stetige Funktion f auf einem kompakten Intervall J gibt es eine Folge von Polynomen $\{P_n\}$ mit $P_n \rightrightarrows f$ auf J für $n \to \infty$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $J = [0,1]$ an. Wir verwenden die *Bernstein-Polynome*: für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $k = 0, ..., n$ setzen wir

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

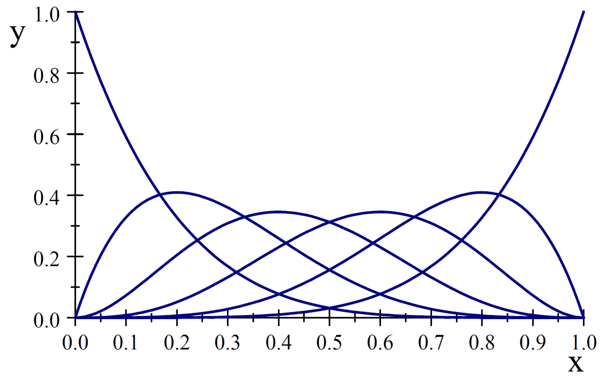
Zum Beispiel,

$$B_{1,0}(x) = 1-x, \quad B_{1,1}(x) = x$$
$$B_{2,0}(x) = (1-x)^2, \quad B_{2,1}(x) = 2x(1-x), \quad B_{2,2}(x) = x^2.$$

Offensichtlich ist das Polynom $B_{n,k}$ immer nichtnegativ auf $[0,1]$. Sei $0 < k < n$. Dann die Funktion $B_{n,k}(x)$ verschwindet an $x = 0$ und $x = 1$, und hat die Maximumstelle an $x = \frac{k}{n}$ da

$$\begin{aligned} (\ln B_{n,k}(x))' &= (k \ln x + (n-k)\ln(1-x))' \\ &= \frac{k}{x} - \frac{n-k}{1-x} \end{aligned}$$

und die Gleichung $\frac{k}{x} - \frac{n-k}{1-x} = 0$ die einzige Nullstelle $x = \frac{k}{n}$ hat.



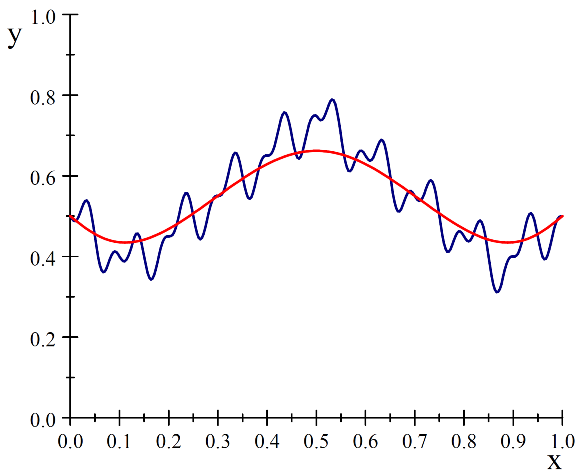
Polynome $B_{5,k}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir das Polynom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) \tag{13.64}$$

und beweisen, dass

$$P_n \rightrightarrows f \quad \text{auf } [0,1] \quad \text{für } n \to \infty.$$



Funktion f (blau) und ihres Polynom $P_n(x)$ (rot) mit $n = 20$

Der Beweis basiert auf den folgenden Identitäten für Bernstein-Polynome, die für alle x gelten:

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = 1 \tag{13.65}$$

$$\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) = nx \tag{13.66}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 \tag{13.67}$$

und

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}. \tag{13.68}$$

Für den Beweis verwenden wir den binomischen Lehrsatz in der Form:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}. \tag{13.69}$$

Für $a = 1 - x$ erhalten wir

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x),$$

was mit (13.65) übereinstimmt.

Ableiten von (13.69) ergibt

$$n(x+a)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} kx^{k-1}a^{n-k}. \tag{13.70}$$

Einsetzen hier $a = 1 - x$ und Multiplizieren mit x ergibt (13.66).

Weiteres Ableiten von (13.70) ergibt

$$n(n-1)(x+a)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)x^{k-2}a^{n-k}.$$

Einsetzen hier $a = 1 - x$ und Multiplizieren mit x^2 ergibt (13.67).

Es folgt aus (13.66) und (13.67), dass

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) \\ &= n(n-1)x^2 + nx. \end{aligned}$$

Jetzt beweisen wir (13.68). Da

$$\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 = x^2 - 2x\frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^{2}B_{n,k}(x) &= x^{2}\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(x)-2\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n}kB_{n,k}(x)+\frac{1}{n^{2}}\sum_{k=0}^{n}k^{2}B_{n,k}(x)\\ &= x^{2}-2\frac{x}{n}nx+\frac{1}{n^{2}}\left(n(n-1)x^{2}+nx\right)\\ &= -\frac{x^{2}}{n}+\frac{x}{n}\\ &= \frac{(1-x)x}{n}.\end{aligned}$$

Jetzt können wir für die Polynome P_n aus (13.64) beweisen dass $P_n \rightrightarrows f$ auf $[0,1]$. Nach dem Lemma 10.11, die Funktion f ist auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig, d.h. für jedes $\varepsilon>0$ existiert ein $\delta>0$ so dass für alle $x,y\in[0,1]$

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon. \tag{13.71}$$

Fixieren wir ein solches Paar ε,δ und schätzen die Differenz $f(x)-P_n(x)$ wie folgt ab. Für jedes $x\in[0,1]$ mit Hilfe von (13.65) erhalten wir

$$\begin{aligned}f(x)-P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}f(x)B_{n,k}(x)-\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n,k}(x)\\ &= \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n,k}(x)+\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n,k}(x).\end{aligned}$$

Im Bereich $\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta$ gilt nach (13.71)

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\varepsilon$$

woraus folgt, dass

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n,k}(x)\right| &\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(x)\\ &\leq \varepsilon\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}B_{n,k}(x)\leq\varepsilon.\end{aligned}$$

Sei $C=\sup_{[0,1]}|f|<\infty$. Dann gilt

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n,k}(x)\right|\leq 2C\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta}B_{n,k}(x).$$

Nach (13.68) gilt

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta} B_{n,k}(x) \leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta} \frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^2}{\delta^2} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{\delta^2}\frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{\delta^2 n},$$

woraus folgt

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta} \left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_{n,k}(x)\right| \leq \frac{2C}{\delta^2 n}.$$

Somit erhalten wir für alle $x \in [0,1]$

$$|f(x)-P_n(x)| \leq \varepsilon + \frac{2C}{\delta^2 n}$$

und somit

$$\|f-P_n\|_{[0,1]} \leq \varepsilon + \frac{2C}{\delta^2 n}.$$

Jetzt wählen wir ein $N \in \mathbb{N}$ so gross dass

$$\frac{2C}{\delta^2 N} < \varepsilon.$$

Dann gilt für alle $n \geq N$

$$\|f-P_n\|_{[0,1]} \leq 2\varepsilon,$$

woraus $P_n \rightrightarrows f$ folgt. ■

13.15 Zweiter Beweis des Approximationssatzes von Weierstraß

Zweiter Beweis von dem Satz 13.27. Bezeichnen wir mit $A[a,b]$ die Menge von allen stetigen Funktionen f auf $[a,b]$ so dass es eine Folge $\{P_n\}$ von Polynomen gibt mit $P_n \rightrightarrows f$ auf $[a,b]$. We müssen beweisen, dass $A[a,b]$ alle stetige Funktionen auf $[a,b]$ enthält.

Schritt 1. Beweisen wir, dass die Funktion $f(x)=|x|$ in $A[-1,1]$ liegt. Wir haben

$$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{1+(x^2-1)} = (1+y)^{1/2},$$

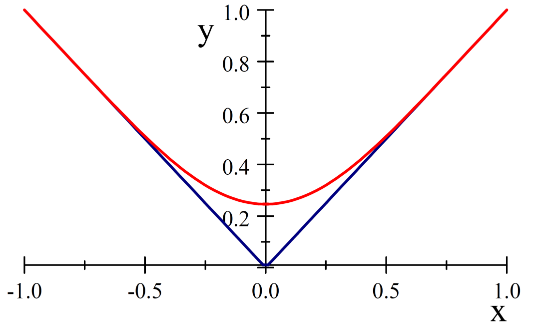
wobei $y=x^2-1$. Für $x\in[-1,1]$ gilt $y\in[-1,0]$. Es folgt aus der binomischen Reihe (13.47), dass

$$(1+y)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k} y^k,$$

wobei nach dem Satz 13.19 die Konvergenz gleichmäßig auf $[-1,1]$ ist. Daraus folgt, dass

$$|x| = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\left(x^2-1\right)^k,$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig auf $[-1,1]$ ist. Da die Partialsummen dieser Reihe Polynome sind, so erhalten wir, dass $|x| \in A[-1,1]$.



Funktionen $|x|$ und $\sum_{k=0}^{5} \binom{1/2}{k} (x^2-1)^k$

Schritt 2. Bemerken wir die folgenden einfachen Eigenschaften von $A[a,b]$, die direkt aus der Definition folgen.

(i) Gilt $f, g \in A[a,b]$ so gilt auch $\alpha f + \beta g \in A[a,b]$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii) Ist $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen aus $A[a,b]$ mit $g_n \rightrightarrows f$ auf $[a,b]$ so gilt auch $f \in A[a,b]$.

(iii) Für jede Funktion $f(x) \in A[a,b]$ gilt $f\left(\frac{x-c}{\lambda}\right) \in A[\lambda a + c, \lambda b + c]$ für beliebige $\lambda > 0$ und $c \in \mathbb{R}$.

Schritt 3. Es folgt aus den Schritten 1 und 2, dass

$$\left|\frac{x-c}{\lambda}\right| \in A[-\lambda + c, \lambda + c].$$

Gegeben seien ein Intervall $[a,b]$ und $c \in \mathbb{R}$, es gibt λ groß genug so dass

$$-\lambda + c < a < b < \lambda + c.$$

Es folgt, dass

$$\left|\frac{x-c}{\lambda}\right| \in A[a,b],$$

und Multiplizieren mit λ ergibt, dass

$$|x-c| \in A[a,b].$$

Somit erhalten wir, dass für beliebige Folgen $\{c_j\}_{k=0}^n$ und $\{\alpha_j\}_{k=0}^n$

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j |x - c_j| \in A[a,b].$$

Sei f eine stetige Funktion auf $[a,b]$. Da f auf $[a,b]$ auch gleichmäßig stetig ist (Lemma 10.11), so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass

$$x, y \in [a,b], \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{13.72}$$

Wählen wir eine Zerlegung $\{c_k\}_{k=0}^n$ von $[a,b]$ so dass $c_k - c_{k-1} < \delta$ für alle $k = 1, ..., n$. In jedem Intervall $[c_{k-1}, c_k]$ gilt nach (13.72)

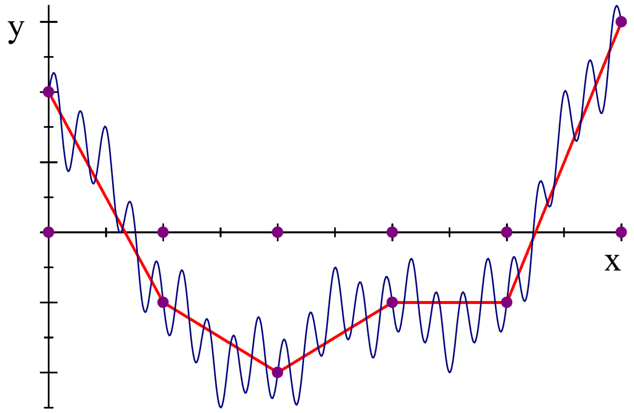
$$x, y \in [c_{k-1}, c_k] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Jetzt wählen wir eine Folge $\{\alpha_j\}_{j=0}^n$ von reellen Zahlen so dass für die folgende stückweise lineare Funktion

$$g_n(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j |x - c_j| \tag{13.73}$$

gilt

$$g_n(c_k) = f(c_k) \quad \text{für alle } k = 0, ..., n. \tag{13.74}$$



Funktionen f (blau) und g_n (rot), $n = 5$

Wir beweisen unterhalb im Schritt 4, dass (13.74) immer möglich ist. Gilt (13.74), so leiten wir daraus her, dass

$$|f(x) - g_n(x)| < 2\varepsilon \ \text{ für alle } x \in [a,b].$$

Jedes $x \in [a,b]$ liegt in einem Intervall $[c_{k-1}, c_k]$. Im Intervall $[c_{k-1}, c_k]$ ist jede Funktion $|x - c_j|$ linear (da c_j außerhalb (c_{k-1}, c_k) liegt), woraus folgt, dass auch $g_n(x)$ im Intervall $[c_{k-1}, c_k]$ linear ist. Somit gilt für jedes $x \in [c_{k-1}, c_k]$

$$|g_n(x) - g_n(c_k)| \leq |g_n(c_{k-1}) - g_n(c_k)| = |f(c_{k-1}) - f(c_k)| < \varepsilon.$$

Da auch

$$|f(x) - f(c_k)| < \varepsilon,$$

so erhalten wir für alle $x \in [c_{k-1}, c_k]$

$$|f(x) - g_n(x)| \leq |f(x) - f(c_k)| + |g_n(x) - g_n(c_k)| < 2\varepsilon.$$

Es folgt

$$\|f - g_n\|_{[a,b]} \leq 2\varepsilon,$$

und somit $g_n \rightrightarrows f$ für $n \to \infty$. Da $g_n \in A[a,b]$, so erhalten wir $f \in A[a,b]$.

Schritt 4. Es bleibt zu beweisen, dass die Koeffizienten α_j für die Funktion g_n in (13.73) so gewählt werden können, dass (13.74) gilt, was äquivalent zur Lösbarkeit des folgenden Systems von Gleichungen für α_j ist:

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j |c_k - c_j| = f(c_k) \quad \text{für alle } k = 0, ..., n.$$

Das ist ein lineares System von $n+1$ Gleichungen mit $n+1$ Unbekannten α_j. Es hat eine eindeutige Lösung $\{\alpha_j\}$ für beliebige Folge $\{f(c_k)\}$ genau dann, wenn das homogene System

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j |c_k - c_j| = 0 \quad \text{für alle } k = 0, ..., n \tag{13.75}$$

nur die trivialle Lösung $\alpha_j = 0$ hat. Angenommen, dass (13.75) gilt, betrachten wir die Funktion

$$h(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j |x - c_j| .$$

Da $h(x)$ an allen Stellen $x = c_k$ verschwindet und in jedem Intervall $[c_{k-1}, c_k]$ die Funktion $h(x)$ linear ist, so gilt

$$h(x) = 0 \quad \forall x \in [c_{k-1}, c_k] .$$

Für jedes $x \in (c_{k-1}, c_k)$ ist $x - c_j$ positiv für $j \leq k-1$ und negativ für $j \geq k$. Es folgt, dass für $x \in (c_{k-1}, c_k)$ gilt:

$$h(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 x + ... + \alpha_{k-1} x - \alpha_k x - ... - \alpha_n x + \text{const} .$$

Da $h'(x) = 0$ für alle $x \in (c_{k-1}, c_k)$, so folgt es, dass für alle $k = 1, ..., n$

$$\alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_{k-1} - \alpha_k - \alpha_{k+1} ... - \alpha_n = 0.$$

Ist $k \leq n-1$, so Subtrahieren diese Gleichung aus

$$\alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_{k-1} + \alpha_k - \alpha_{k+1} - ... - \alpha_n = 0$$

ergibt $\alpha_k = 0$, für alle $k = 1, ..., n-1$. Somit erhalten wir für alle $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} h(x) &= \alpha_0 |x - c_0| + \alpha_n |x - c_n| \\ &= \alpha_0 (x - c_0) - \alpha_n (x - c_n) \\ &= (\alpha_0 - \alpha_n) x - \alpha_0 c_0 + \alpha_n c_n. \end{aligned}$$

Da $h(x) = 0$ so folgt es $\alpha_0 = \alpha_n$ und $\alpha_0 c_0 = \alpha_n c_n$ woraus folgt $\alpha_0 = \alpha_n = 0$. Wir beschließen, dass $\alpha_k = 0$ für alle $k = 0, ..., n$, was zu beweisen war. ∎

Eine interessante Folgerung aus diesem Beweis ist, dass

$$\det \left(|c_i - c_j| \right)_{i,j=0}^{n} \neq 0$$

für beliebige Folge $\{c_k\}_{k=0}^{n}$ von verschiedenen reellen Zahlen.

13.16 Fourier-Reihen

Eine Fourier-Reihe ist eine Reihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{13.76}$$

wobei $x \in \mathbb{R}$ eine Variable ist und a_k, $b_k \in \mathbb{R}$ die Koeffizienten der Reihe sind. Eine Partialsumme der Reihe ist

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Diese Funktion heißt aus dem offensichtlichen Grund ein *trigonometrisches Polynom*.

In diesem Abschnitt besprechen wir die Frage, ob eine gegebene Funktion sich als Summe einer Fourier-Reihe darstellen lässt. Wir beginnen mit dem folgenden Lemma.

Lemma 13.28 *Konvergiert die Fourier-Reihe (13.76) gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen eine Funktion $f(x)$, so gilt für alle k,*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx \quad \textit{und} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx. \tag{13.77}$$

Beweis. Beachten Sie, dass die Integrale in (13.77) definiert sind, weil die Funktion $f(x)$ stetig ist als gleichmäßiger Grenzwert der stetigen Funktionen. Fixieren wir eine nicht-negative ganze Zahl n und multiplizieren die Identität

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{13.78}$$

um $\cos nx$. Die resultierende Reihe konvergiert immer noch gleichmäßig (weil $|\cos nx| \le 1$), daher nach dem Satz 13.12

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx &= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos nx dx \qquad (13.79)\\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_0^{2\pi}\cos kx\cos nx dx + b_k\int_0^{2\pi}\sin kx\cos nx dx\right).\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Identität

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b)),$$

erhalten erhalten wir

$$\int_0^{2\pi}\cos kx\cos nx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(k-n)x\ dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(k+n)x\ dx. \tag{13.80}$$

Verwenden Sie nun die folgende Formel: für jede ganze Zahl l,

$$\int_0^{2\pi}\cos lx\ dx = \begin{cases} 2\pi, & l = 0\\ 0, & l \neq 0,\end{cases} \tag{13.81}$$

da im Fall $l \neq 0$ sich das Integral auf $[\sin lx]_0^{2\pi} = 0$ reduziert. Aus (13.80) folgt

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos nx dx = \begin{cases} 2\pi, & k = n = 0 \\ \pi, & k = n \neq 0, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Als nächstes haben wir analog für alle k, n,

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin(k+n)x + \sin(k-n)x)\, dx = 0$$

weil

$$\int_0^{2\pi} \sin lx\ dx = 0 \text{ für alle } l \in \mathbb{Z}. \tag{13.82}$$

Somit verschwinden alle Glieder in der rechten Seite von (13.79) außer dem Glied mit $k = n$. Im Fall $n = 0$ erhalten wir dann

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} 2\pi = \pi a_0,$$

und im Fall $n > 0$:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \pi a_n$$

so dass (13.77) in beiden Fällen gilt.

Die Koeffizienten b_k werden auf ähnliche Weise durch Multiplikation von (13.78) mit $\sin nx$ bestimmt. ■

Beachten Sie, dass alle Glieder in der Fourier-Reihe 2π-periodische Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind. Daher ist die Summe immer (wenn sie existiert) auch 2π-periodisch.

Im Folgenden ist die Funktion $f(x)$ entweder 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ oder nur auf $[0.2\pi]$ definiert.

Lemma 13.28 motiviert die folgende Definition.

Definition. Definieren wir für jede Riemann-integrierbare Funktion f auf $[0, 2\pi]$ deren *Fourier-Koeffizienten* mit

$$\boxed{a_k = a_k(f) = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\ dx} \text{ und } \boxed{b_k = b_k(f) = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\ dx} \tag{13.83}$$

für alle ganzen Zahlen $k \geq 0$. Die Fourier-Reihe der Funktion f ist die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Da wir noch nicht wissen, ob diese Reihe konvergiert und wenn ja dann ob seine Summe $f(x)$ ist, so schreiben wir

$$\boxed{f(x) \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)} \tag{13.84}$$

was bedeutet, dass die Koeffizienten a_k und b_k durch (13.83) bestimmt sind. Wir werden herausfinden, unter welchen Bedingungen von f das Zeichen $\sim$ durch $=$ ersetzt werden kann und in welchem Sinn die Reihe konvergiert.

Beispiel. 1. Wenn $f(x) \equiv 1$ dann erhalten wir aus (13.83), (13.81) und (13.82), dass $a_0 = 1$ während $a_k = b_k = 0$ für alle $k \geq 1$. Also ist in diesem Fall die Fourier-Reihe von $f(x)$ identisch mit 1 und fällt daher mit $f(x)$ zusammen.

2. Betrachten Sie auf $[0, 2\pi]$ eine Stufenfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

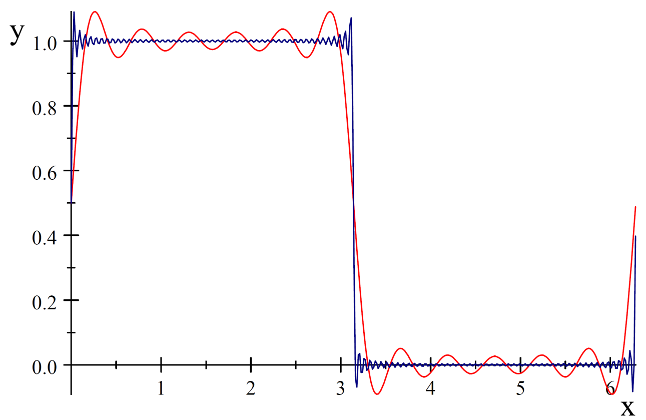
Dann

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dx = 1, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos kx \, dx = 0, \quad k > 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin kx \, dx = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos kx}{k} \right]_0^\pi = \frac{1}{\pi k} \left(1 - (-1)^k \right) = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade}, \\ \frac{2}{\pi k}, & k \text{ ungerade}. \end{cases} \end{aligned}$$

Somit hat die Fourier-Reihe die Form

$$f \sim \frac{1}{2} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{\pi (2l+1)} \sin (2l+1) x = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x + ...$$

Es ist überhaupt nicht ersichtlich, ob man hier Gleichheit hat. Unterhalb sind die Graphen der Partialsummen $S_5(x)$ (rot) und $S_{50}(x)$ (blau) dieser Fourier-Reihe, die auf Konvergenz schließen lassen, außer den Punkten $x = 0, \pi, 2\pi$:



Für das Folgende brauchen wir eine komplexe Form der Fourier-Reihe. Beachten Sie zunächst, dass das Riemann-Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ für komplexwertige Funktionen f wie folgt definiert wird:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\, dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\, dx,$$

vorausgesetzt dass sowohl Re f als auch Im f integrierbar sind. Die meisten Eigenschaften der Integration lassen sich leicht auf komplexwertige Funktionen übertragen (in insbesondere Linearität, Additivität, LM-Ungleichung, die Newton-Leibniz Formel, partielle Integration).

Definition. Für jede komplexwertige integrierbare Funktion f auf $[0, 2\pi]$ definieren wir ihre *komplexe Fourier-Koeffizienten* für alle $k \in \mathbb{Z}$ durch

$$\boxed{c_k = c_k(f) = \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx} dx}. \tag{13.85}$$

Die komplexe Fourier-Reihe von f ist die Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}.$$

Lemma 13.29 *Die komplexe Fourier-Reihe stimmt mit der (reellen) Fourier-Reihe überein, vorausgesetzt, dass die beiden Reihen konvergieren.*

Beweis. Tatsächlich ist die komplexe Fourier-Reihe eine Doppelreihe, die sich wie folgt umschreiben lässt:

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-ikx} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}\right).\end{aligned}$$

Nach der Definitionen von a_k, b_k, c_k und mit Hilfe von der Euler-Formel

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$$

erhalten wir

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2}$$

und für $k > 0$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\ dx - i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{a_k - ib_k}{2},$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{ikx} dx = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

Deshalb,

$$\begin{aligned}c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k)(\cos kx + i \sin kx) \\ &\quad + \frac{1}{2}(a_k + ib_k)(\cos kx - i \sin kx) \\ &= a_k \cos kx + b_k \sin kx.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

was zu beweisen war. ■

Um den nächsten Satz zu formulieren, benötigen wir die folgende Notation

$$f(x-) = \lim_{y\to x-} f(y)$$

und

$$f(x+) = \lim_{y\to x+} f(y).$$

Nehmen wir an, dass $f(x-)$ existiert und endlich ist. Wir sagen, dass f *links differenzierbar* an x, wenn der Grenzwert

$$\lim_{y\to x-} \frac{f(y) - f(x-)}{y-x} \text{ existiert und ist endlich.}$$

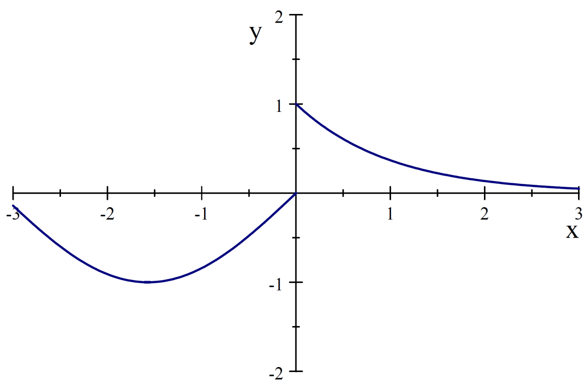
Der Wert dieses Grenzwertes heißt die linke Ableitung von f und wird mit $f'(x-)$ bezeichnet. Ähnlich definiert man die rechte Differenzierbarkeit und die rechte Ableitung $f'(x+)$.

Zum Beispiel für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ \sin x, & x \leq 0 \end{cases}$$

wir haben

$$f(0+) = 1, f(0-) = 0, f'(0+) = -1, f'(0-) = 1.$$



Wenn f an x differenzierbar ist, dann ist f natürlich links und rechts differenzierbar und

$$f'(x) = f'(x-) = f'(x+).$$

Hauptsatz 13.30 *Sei f eine 2π-periodische integrierbare Funktion, die an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ rechts ist und links differenzierbar ist. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f an x gegen $\frac{f(x-)+f(x+)}{2}$, d.h.*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

Ist zusätzlich $f(x)$ stetig an x, dann konvergiert die Fourier-Reihe von f an x gegen $f(x)$.

Beweis. Setzen wir

$$S_n(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}.$$

Wir müssen beweisen, dass

$$S_n(x) \to \frac{f(x-) + f(x+)}{2} \text{ für } n \to \infty.$$

Einsetzen

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt,$$

in $S_n(x)$ ergibt

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} \int_0^{2\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left(\sum_{|k| \leq n} e^{ik(x-t)} \right) dt. \tag{13.86}$$

Setzen wir $u = x - t$ und betrachten die Funktion

$$D(u) = \sum_{|k| \leq n} e^{iku},$$

die *Dirichlet-Kern* heißt. Die Funktion $D(u)$ ist offensichtlich stetig (und sogar unendlich oft differenzierbar). Für $u = 0$ gilt

$$D(u) = \sum_{|k| \leq n} 1 = 2n + 1.$$

Für $u \neq 0$ ist $D(u)$ eine Summe der geometrischen Folge, so dass

$$\begin{aligned} D(u) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{iku} = \sum_{k=-n}^{n} \left(e^{iu}\right)^k = e^{-inu} \sum_{k=0}^{2n} \left(e^{iu}\right)^k \\ &= e^{-inu} \frac{\left(e^{iu}\right)^{2n+1} - 1}{e^{iu} - 1} = \frac{e^{iu\left(n+\frac{1}{2}\right)} - e^{-iu\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{e^{iu/2} - e^{-iu/2}} \\ &= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{\sin \frac{u}{2}}. \end{aligned}$$

Es folgt (13.86) dass

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D(x-t) dt \qquad \text{(Substitution } u = x - t\text{)}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2\pi}\int_x^{x-2\pi} f(x-u)\, D(u)\, du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x} f(x-u)\, D(u)\, du. \end{aligned}$$

Da die Funktionen f und D 2π-periodisch sind, hat das Integral der Funktion $f(x-u)\,D(u)$ auf jedem Intervall der Länge 2π den gleichen Wert. Auch mit Hilfe von $D(u) = D(-u)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\, D(u)\, du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (f(x-u) + f(x+u))\, D(u)\, du. \end{aligned} \tag{13.87}$$

Zum Beispiel, für die Funktion $f \equiv 1$ haben wir $S_n(x) = 1$ und es folgt aus (13.87), dass

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D(u)\, du = 1$$

(diese Identität folgt auch direkt aus (13.13)). Deshalb,

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{f(x-)+f(x+)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [f(x-u)+f(x+u)]\, D(u)\, du \\ &\quad -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x-)+f(x+)}{2} D(u)\, du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [(f(x-u)-f(x-)) \\ &\quad +(f(x+u)-f(x+))] D(u)\, du. \end{aligned}$$

Definieren wir die Funktion $F_+(u)$ für $u > 0$ durch

$$F_+(u) = \frac{f(x+u)-f(x+)}{u}$$

so dass F_+ lokal integrierbar in $(0, +\infty)$ ist. Nach der Voraussetzung, $\lim_{u\to 0} F_+(u)$ existiert und ist endlich, so dass F_+ sich an der Stelle $u = 0$ nach Stetigkeit erweitern lässt. Dies impliziert, dass F_+ integrierbar auf jedem Intervall $[0, a]$ ist, insbesondere auf $[0, \pi]$. Analog definieren wir für $u > 0$ die Funktion

$$F_-(u) = \frac{f(x-u)-f(x-)}{u}$$

und beachten, dass F_- auf $[0, \pi]$ integrierbar ist.

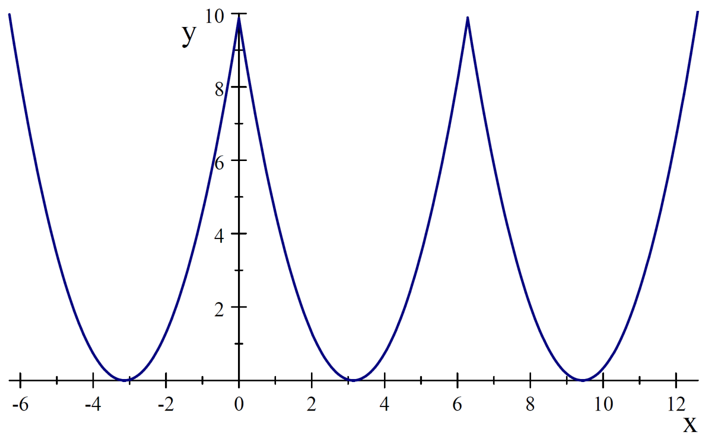
Als nächstes schreiben wir

$$\begin{aligned} [(f(x-u)-f(x-)) + (f(x+u)-f(x+))]\, D(u) &= \frac{F_-(u)\, u + F_+(u)\, u}{\sin\frac{u}{2}} \sin(n+\frac{1}{2})u \\ &= G(u)\sin(n+\frac{1}{2})u, \end{aligned}$$

wobei
$$G(u) = \frac{F_-(u) + F_+(u)}{\sin \frac{u}{2}} u.$$
Die Funktion $\frac{u}{\sin u/2}$ ist stetig auf $(0, \pi]$ und lässt stetig auf $u = 0$ erweitern so dass $\frac{u}{\sin u/2}$ stetig auf $[0, \pi]$ ist. Da F_- und F_+ auf $[0, \pi]$ integrierbar sind, so folgt es, dass $G(u)$ auf $[0, \pi]$ integrierbar ist. Da
$$S_n(x) - \frac{f_+(x) + f_-(x)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi G(u) \sin(n + \frac{1}{2}) u du,$$
so schließen wir nach dem Riemann-Lemma (siehe Übungen) dass die rechte Seiten dieser Identität gehen 0 für $n \to \infty$ konvergiert, was zu beweisen war. ∎

Beispiel. Sei $f(x)$ eine 2π-periodische Funktion auf $\mathbb{R}$, die auf $[0, 2\pi)$ wie folgt definiert ist
$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$
Wie wir oberhalb gesehen haben, die Fourier-Reihe dieser Funktion ist
$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2l+1)} \sin(2l+1)x = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x + ...$$
Wenn $x = \pi$ ist, so ist die Summe der Fourier-Reihen $\frac{1}{2}$, was stimmt mit $\frac{f(\pi-)+f(\pi+)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ überein. An allen anderen Punkten in $(0, 2\pi)$ ist the Funktion f ist; daher konvergiert die Fourier-Reihe gegen $f(x)$. Nehmen wir, zum Beispiel, $x = \pi/2$. Ersetzen von $\sim$ durch $=$ und Anwendung von $\sin(2l+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^l$ ergibt
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...\right)$$
woher
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \frac{\pi}{4}.$$

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = (x - \pi)^2$ auf $[0, 2\pi]$, das 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ erweitert wird:



Berechnen wir die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktion f:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\,dx \qquad (\text{Substitution } y = x-\pi) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2 dy = \frac{1}{\pi}\frac{2\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}, \end{aligned}$$

und für $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2 \cos k\,(y+\pi)\,dx \\ &= (-1)^k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2\cos ky dx. \end{aligned}$$

Das letztere Integral wird durch zweimalige partielle Integration ausgewertet:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} y^2\cos ky dx &= \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} y^2 d\sin ky = \frac{1}{k}\left[y^2\sin ky\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} y\sin ky dy \\ &= 0 + \frac{2}{k^2}\int_{-\pi}^{\pi} yd\cos ky = \frac{2}{k^2}\left[y\cos ky\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ky dy \\ &= \frac{4\pi}{k^2}(-1)^k + 0, \end{aligned}$$

woher

$$a_k = \frac{4}{k^2}.$$

Schließlich,

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\sin kx dx = (-1)^k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2\sin ky dx = 0,$$

weil die Funktion $y^2\sin ky$ ungerade ist. Damit erhalten wir die Fourier-Reihe

$$(x-\pi)^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}. \tag{13.88}$$

Da die Funktion $f(x)$ stetig ist und rechts und links differenzierbar an alle Stellen, nach Satz 13.30 gilt hier Gleichheit für alle x.

Wenn wir beispielsweise $x = 0$ einsetzen, erhalten wir eine bemerkenswerte Identität

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots .$$

Wenn wir $x = \pi$ einsetzen, erhalten wir

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots .$$

Chapter 14

* Flächen in $\mathbb{R}^n$

Es gibt die folgenden zwei Wege um einen Unterraum von $\mathbb{R}^n$ zu bestimmen.

Für jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist das Bild

$$\operatorname{im} A = \{Au : u \in \mathbb{R}^m\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Man sagt, dass der Unterraum $S = \operatorname{im} A$ durch die *parametrische* Gleichung $v = Au$ gegeben wird, was folgendes bedeutet: jeder Punkt $v \in S$ lässt sich als $v = Au$ mit $u \in \mathbb{R}^m$ darstellen. Der Punkt u heißt *Parameter*. Wir haben

$$\dim S = \dim \operatorname{im} A = \operatorname{rg} A,$$

da die linear unabhängigen Spalten von A eine Basis in $\operatorname{im} A$ liefern und der Rang $\operatorname{rg} A$ gleich die maximale Anzahl von den linear unabhängigen Spalten (oder Zeilen) der Matrix A ist.

Für jede lineare Abbildung $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ist der Kern

$$\ker B = \{x \in \mathbb{R}^n : Bx = 0\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Man sagt, dass der Unterraum $S = \ker B$ durch die Gleichung $Bx = 0$ gegeben wird. Nach dem Rangsatz gilt

$$\dim S = \dim \ker B = n - \operatorname{rg} B.$$

Es ist leicht zu sehen, dass jeder Unterraum von $\mathbb{R}^n$ sich in den beiden Formen darstellen lässt: sowohl parametrisch wie als Kern.

14.1 Parametrische Gleichung einer Fläche

Seien M eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und m eine ganze Zahl zwischen 1 und n.

Definition. Die Menge M heißt *m-dimensionale Fläche* wenn es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ und eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt:

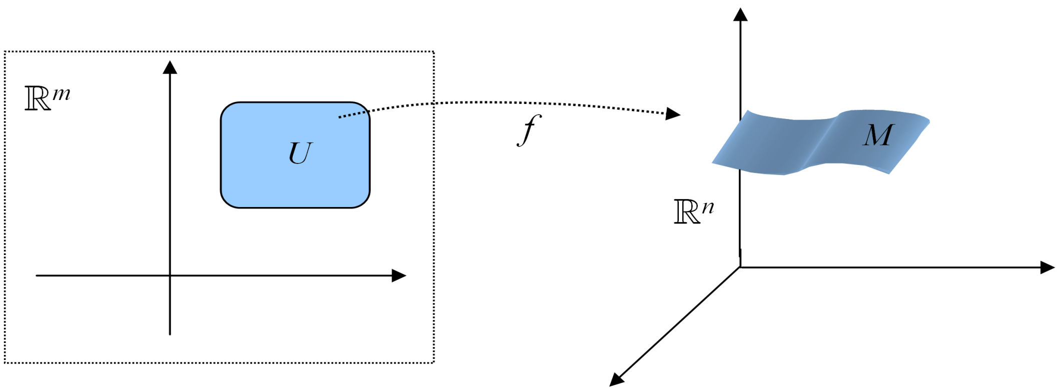
1. $M = f(U)$;

2. f ist injektiv;

3. f ist stetig differenzierbar;

4. f' ist nichtsingulär, d.h. $\operatorname{rg} f'(u) = m$ für alle $u \in U$.

Das Paar (U, f) heißt eine *Parametrisierung* von M. Das Dreifache (M, U, f) heißt eine *parametrisierte Fläche*. Die parametrisierte Fläche gehört zur Klasse C^l wenn $f \in C^l(U, \mathbb{R}^n)$.



m-dimensionale parametrisierte Fläche (M, U, f)

Wir bezeichnen die Punkte in U mit u und nennen u Parameter. Nach Definition gilt für jeden Punkt $x \in M$ die eindeutige Darstellung $x = f(u)$ mit $u \in U$. Man sagt auch, dass M mit der *parametrischen Gleichung* $x = f(u)$ gegeben wird. Die Komponenten $u_1, ..., u_m$ von dem Parameter u heißen die *lokalen Koordinaten* von x. In ausführlicher Form sieht die parametrische Gleichung wie folgt aus:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(u_1, .., u_m) \\ ... \\ x_n = f_n(u_1, ..., u_m). \end{cases}$$

Die Ableitung $f' = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)$ ist eine $n \times m$ Matrix (die Jacobi-Matrix) und die Bedingung $\operatorname{rg} f'(x) = m$ bedeutet, dass der Rang von $f'(u)$ an jeder Stelle $u \in U$ maximal ist.

Im Fall $m = 1$ nehmen wir an, dass U ein offenes Intervall ist. Die 1-dimensionale parametrisierte Fläche (M, U, f) ist offensichtlich eine parametrisierte Kurve.

Beispiel. (*m-dimensionale Ebene*) Sei $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung oder, was äquivalent ist, eine $n \times m$ Matrix. Angenommen sei, dass $m \leq n$ und $\operatorname{rg} A = m$. Betrachten wir eine *affine* Abbildung

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \\ f(u) &= Au + b \end{aligned}$$

wobei $b \in \mathbb{R}^n$. Die Abbildung f ist injektiv da nach dem Rangsatz

$$\dim \ker A = m - \operatorname{rg} A = 0$$

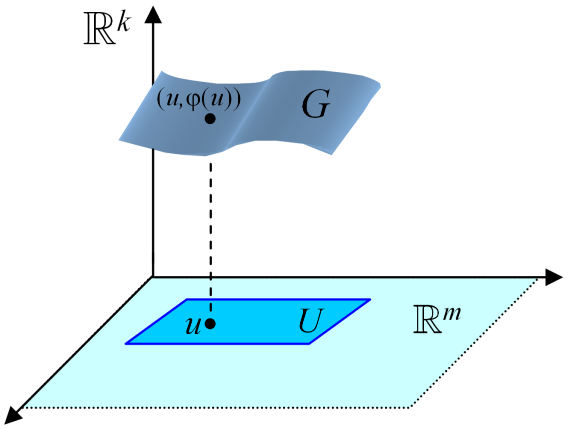
und somit $f(u_1) = f(u_2)$ ergibt $A(u_1 - u_2) = 0$ und $u_1 = u_2$. Da $f' = A$ und somit $\operatorname{rg} f' = m$, so ist die Menge $M = f(\mathbb{R}^m)$ eine m-dimensionale Fläche. Offensichtlich ist

M das Bild des Unterraums im A unter Translation $x \mapsto x+b$, d.h. M eine m-dimensionale *Ebene* ist.

Beispiel. *(Graphen)* Seien U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}^k$ eine stetig differenzierbare Funktion. Betrachten wir den Graph von φ

$$G = \{(u, \varphi(u)) \in \mathbb{R}^n : u \in U\}, \tag{14.1}$$

wobei das Paar $(u, \varphi(u))$ ein Element von $\mathbb{R}^n$ mit $n = m + k$ ist.



Der Graph G der Funktion φ

Lemma 14.1 *Der Graph G wie oberhalb ist eine m-dimensionale Fläche.*

Beweis. Es folgt aus (14.1), dass $G = f(U)$ wobei die Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ wie folgt definiert wird:

$$f(u) = (u, \varphi(u)).$$

Die Abbildung f ist offensichtlich injektiv und stetig differenzierbar. Es gilt

$$f'(u) = \left(\begin{array}{|c|} \hline \mathrm{id} \\ \hline \varphi'(u) \\ \hline \end{array}\right), \tag{14.2}$$

wobei id die identische $m \times m$ Matrix ist und $\varphi'(u)$ eine $k \times m$ Matrix. Da die ersten m Zeilen der Matrix $f'(u)$ linear unabhängig sind, so erhalten wir $\operatorname{rg} f'(u) = m$. Somit ist (U, f) eine Parametrisierung und G ist eine m-dimensionale Fläche. ■

Der nächste Satz wird ohne Beweis angegeben.

Satz. *Jede m-dimensionale Fläche ist lokal der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion.*

Im Beweis dieses Satzes wird der Satz von der impliziten Funktion benutzt und die Bedingung, dass die Parametrisierung der Fläche nichtsingulär sein soll, spielt eine wichtige Role. Dafür betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel. Die Abbildung

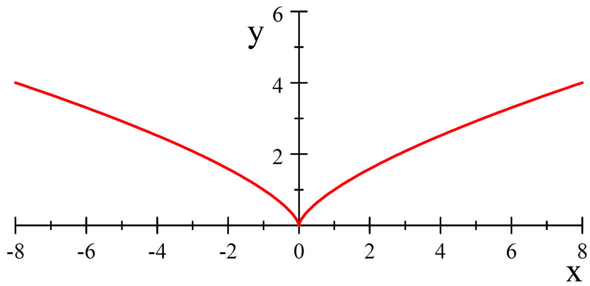
$$f \quad : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$f(u) = \left(u^3, u^2\right)$$

erfüllt die Bedingungen 1-3 von der Definition der Parametrisierung, aber die Bedingung 4 gilt nicht im Punkt $u = 0$ da

$$f'(0) = \left(3u^2, 2u\right)|_{u=0} = (0,0)$$

und somit $\operatorname{rg} f'(0) = 0 < 1$. Das Bild von f ist eine Kurve und sogar der Graph der Funktion $y = x^{2/3}$, aber diese Funktion ist in 0 nicht differenzierbar.



Die Kurve $f(u) = (u^3, u^2)$ ist der Graph der Funktion $y = x^{2/3}$

14.2 Tangentialebene

Definition. Seien U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung. Die *Tangentialabbildung* von f im Punkt $u \in U$ ist die folgende affine Abbildung

$$\begin{gathered} \tau : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \\ \tau(h) = f(u) + f'(u)\,h. \end{gathered} \tag{14.3}$$

In anderen Wörtern ist $\tau(h)$ das Taylor-Polynom der Ordnung 1 der Funktion f in u. Nach der Differenzierbarkeit von f gilt

$$f(u+h) = f(u) + f'(u)\,h + o(\|h\|) = \tau(h) + o(\|h\|)$$

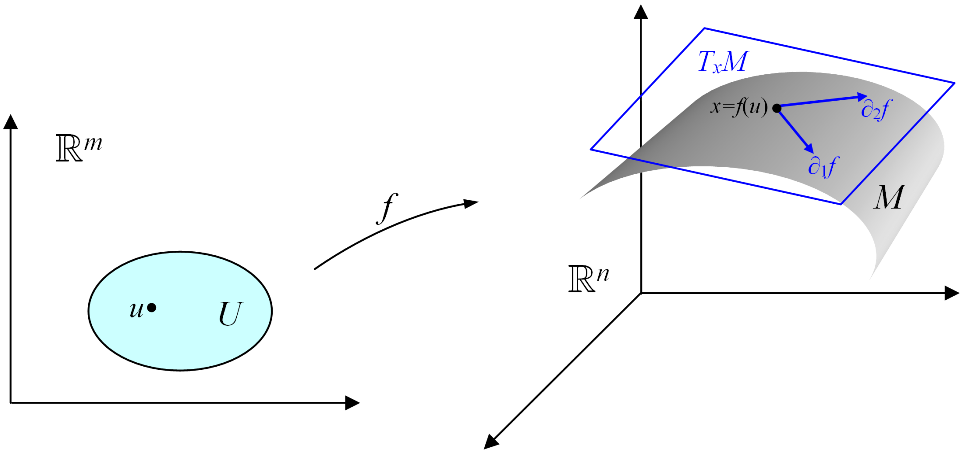
für $h \to 0$, so dass $\tau(h)$ eine affine Approximation von $f(u+h)$ für die kleinen Werte von $\|h\|$ ist.

Definition. Sei (M, U, f) eine m-dimensionale parametrisierte Fläche in $\mathbb{R}^n$. Die *Tangentialebene* T_xM an M im Punkt $x = f(u) \in M$ ist das Bild der Tangentialabbildung τ von f im Punkt u.

Es folgt aus (14.3), dass

$$\boxed{T_xM = \operatorname{im} \tau = x + \operatorname{im} f'(u)}.$$

Da $\operatorname{rg} f'(u) = m$, so ist T_xM eine m-dimensionale Ebene und $(\mathbb{R}^n, \tau)$ ist die Parametrisierung von T_xM. Die Ebene T_xM ist eine affine Approximation der Fläche M in der Nähe von x.



Tangentialebene T_xM

In Anwendungen ist es bequem die parametrische Gleichung (14.3) wie folgt darzustellen:

$$\tau(h) = f(u) + h_1\partial_1 f(u) + h_2\partial_2 f(u) + ... + h_m\partial_m f(u),$$

wobei $h_1, ..., h_m$ die Komponenten von h sind und $\partial_1 f, ..., \partial_m f$ die Spalten der Matrix f' sind, die eine Basis in im $f'(u)$ liefern.

Beispiel. Betrachten wir die Parametrisierung des Kreises

$$\begin{aligned} f &: (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \\ f(u) &= (\cos u, \sin u) \end{aligned}$$

Da $f'(u) = (-\sin u, \cos u)$, so ist die Tangente (=1-dimensionale Tangentialebene) wie folgt gegeben:

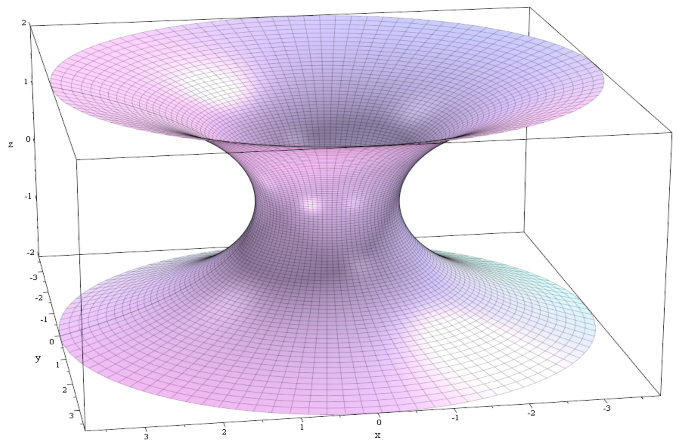
$$\begin{aligned} \tau(h) &= (\cos u, \sin u) + h(-\sin u, \cos u) \\ &= (\cos u - h\sin u, \sin u + h\cos u). \end{aligned}$$

Die Richtung $(-\sin u, \cos u)$ der Tangente ist offensichtlich orthogonal zum Radiusvektor $(\cos u, \sin u)$.

Beispiel. Betrachten wir die Parametrisierung

$$\begin{aligned} f &: U \to \mathbb{R}^3 \\ f(u, v) &= (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) \end{aligned}$$

wobei $U = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$, d.h. $u \in \mathbb{R}$ und $v \in (0, 2\pi)$. Die Fläche $M = \mathrm{im}\, f$ heißt *Katenoid.*



Katenoid

Berechnen wir die totale Ableitung:

$$f' = (\partial_u f, \partial_v f) = \begin{pmatrix} \sinh u \cos v & -\cosh u \sin v \\ \sinh u \sin v & \cosh u \cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im Fall $u \neq 0$ haben wir

$$\det \begin{pmatrix} \sinh u \cos v & -\cosh u \sin v \\ \sinh u \sin v & \cosh u \cos v \end{pmatrix} = 2 \cosh u \sinh u \neq 0,$$

woraus folgt $\operatorname{rg} f' = 2$. Im Fall $u = 0$ haben wir

$$f' = \begin{pmatrix} 0 & -\sin v \\ 0 & \cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

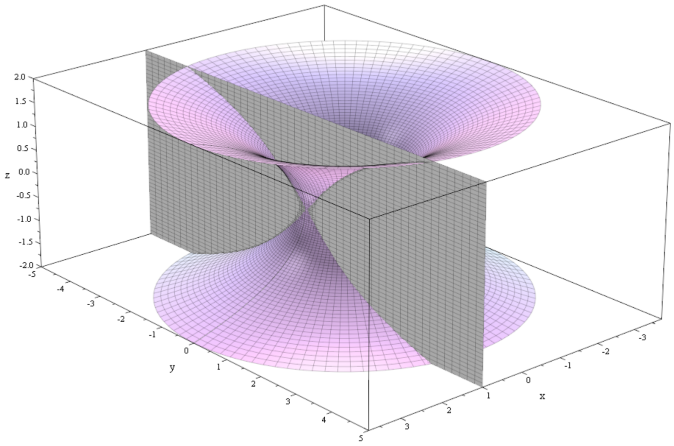
woraus wieder folgt $\operatorname{rg} f' = 2$. Somit ist f' nichtsingulär und (U, f) ist eine Parametrisierung. Die Tangentialabbildung von f im Punkt (u, v) ist

$$\begin{aligned} \tau(h) &= f(u,v) + h_1 \partial_u f + h_2 \partial_v f \\ &= f(u,v) + h_1 (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1) + h_2 (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0). \end{aligned}$$

Zum Beispiel für $u = v = 0$ haben wir $x = f(0,0) = (1,0,0)$ und

$$\tau(h) = (1,0,0) + h_1 (0,0,1) + h_2 (0,1,0).$$

Die Tangentialebene $T_x M = \operatorname{im} \tau$ geht durch $(1,0,0)$ und wird von den Vektoren $(0,0,1)$ und $(0,1,0)$ erzeugt.



Das Katenoid und eine Tangentialebene

14.3 Implizite Flächen

Satz 14.2 *Seien Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $F : \Omega \to \mathbb{R}^k$, $k < n$, eine stetig differenzierbare Funktion. Nehmen wir an, dass in einem Punkt $p \in \Omega$ gilt*

$$F(p) = 0 \quad \textit{und} \quad \operatorname{rg} F'(p) = k.$$

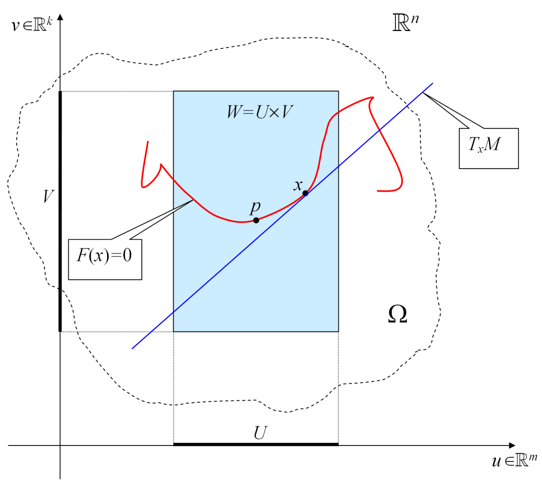
Dann existiert eine offene Menge W mit $p \in W \subset \Omega$ so dass die Null-Niveaumenge

$$M = \{x \in W : F(x) = 0\}$$

eine m-dimensionale Fläche ist, wobei $m = n - k$.

Darüber hinaus hat die Tangentialebene T_xM für jedes $x \in M$ die folgende Darstellung:

$$T_xM = x + \ker F'(x). \tag{14.4}$$



Die implizite Fläche M und die Tangentialebene T_xM

Die von der Gleichung $F(x) = 0$ gegebene Menge heißt eine *implizite Fläche.* Der Satz 14.2 besagt, dass jede implizite Fläche in der Nähe von jedem Punkt p mit nichtsingulärem $F'(p)$ eine Fläche ist.

Es folgt aus (14.4), dass $y \in T_x M$ äquivalent zu $y - x \in \ker F'(x)$ ist, d.h. zu

$$F'(x)(y-x) = 0.$$

Das ist die Gleichung der Tangentialebene $T_x M$.

Beweis. Die Matrix $F'(x)$ hat k Zeilen und n Spalten. Da $\operatorname{rg} F'(p) = k$, so existieren k linear unabhängige Spalten von $F'(p)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die letzten k Spalten, d.h. die Spalten $m+1, ..., n$ linear unabhängig sind:

$$F'(p) = \left(\boxed{k \times m} \; \boxed{k \times k} \right)$$

Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ stellen wir in der Form $x = (u, v)$ dar wobei

$$u = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m \quad \text{and} \quad v = (x_{m+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^k,$$

und schreiben die Gleichung $F(x) = 0$ in der Form $F(u, v) = 0$. Da

$$F'(p) = (\partial_u F(p) \ \mid \partial_v F(p))$$

und die Matrix $\partial_v F(p)$ aus den letzten k Spalten von der Matrix $F'(p)$ besteht, so erhalten wir nach der Voraussetzung, dass $\partial_v F(p)$ invertierbar ist.

Nach dem Satz von der impliziten Funktion (Satz 12.19) existieren offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^k$ mit $p \in U \times V \subset \Omega$ und eine C^1-Funktion $\varphi : U \to V$ mit

$$F(u, v) = 0 \ \Leftrightarrow v = \varphi(u) \text{ für alle } u \in U \text{ und } v \in V. \tag{14.5}$$

Setzen wir $W = U \times V$ und bemerken, dass nach (14.5)

$$\begin{aligned} M &= \{x \in W : F(x) = 0\} \\ &= \{(u, v) \in U \times V : F(u, v) = 0\} \\ &= \{(u, v) \in U \times V : v = \varphi(u)\} \end{aligned}$$

so dass M der Graph der Funktion $v = \varphi(u)$ in U ist. Nach Lemma 14.1 ist M eine m-dimensionale Fläche.

Beweisen wir jetzt (14.4). Die Fläche M als ein Graph hat die Parametrisierung $x = f(u)$, wobei

$$f(u) = (u, \varphi(u)) : U \to \mathbb{R}^n$$

Die Tangentialebene an M im Punkt $x = f(u)$ ist

$$T_x M = x + \operatorname{im} f'(u).$$

Es bleibt zu beweisen, dass

$$\operatorname{im} f'(u) = \ker F'(x).$$

Nach (14.5) gilt $F(u, \varphi(u)) = 0$ für alle $u \in U$, was äquivalent zu $F \circ f = 0$. Ableiten von dieser Identität ergibt nach dem Kettenregel

$$F'(x) f'(u) = 0$$

für alle $u \in U$, wobei $x = f(u)$. Es folgt, dass

$$\operatorname{im} f'(u) \subset \ker F'(x). \tag{14.6}$$

Da $\operatorname{rg} F'(x) = k$ in der Nähe von p, so erhalten wir nach dem Rangsatz

$$\dim \ker F'(x) = n - \operatorname{rg} F'(x) = n - k = m.$$

Andererseits nach dem Beweis von Lemma 14.1 gilt

$$\dim \operatorname{im} f'(u) = \operatorname{rg} f'(u) = m.$$

Somit haben die Unterräume $\ker F'(x)$ und $\operatorname{im} f'(u)$ die gleichen Dimensionen, woraus folgt, dass sie übereinstimmen. ■

Beispiel. Betrachten wir in $\mathbb{R}^n$ die Gleichung

$$x_1^2 + ... + x_n^2 = 1,$$

die die Einheitssphäre S bezüglich der 2-Norm bestimmt. Die Sphäre S ist die Null-Niveaumenge der Funktion

$$F(x) = x_1^2 + ... + x_n^2 - 1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

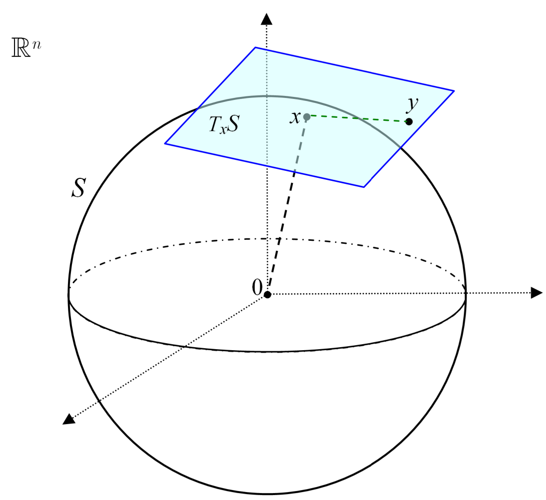
Wir haben

$$F'(x) = (\partial_1 F, ..., \partial_n F) = 2(x_1, ..., x_n).$$

Es ist klar, dass $\operatorname{rg} F'(x) = 1$ für jedes $x \in S$ so dass S lokal eine Fläche ist. Die Gleichung der Tangentialebene ist

$$\sum_{i=1}^n x_i (y_i - x_i) = 0.$$

Insbesondere sehen wir, dass $y - x$ orthogonal zu x ist.



Die Tangentialebene zur Sphäre

Chapter 15

* Analysis und Topologie der Ebene

15.1 Holomorphe und harmonische Funktionen

Hier beweisen wie wieder den Fundamentalsatz der Algebra mit Hilfe von dem Begriff von holomorphen Funktionen.

Definition. Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Eine Funktion $f \to \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, wenn $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ und die reellwertigen Funktionen u und v unendlich oft stetig differenzierbar in Ω und die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases} . \tag{15.1}$$

Die Gleichungen (15.1) heißen *Cauchy-Riemann-Gleichungen.*

Offensichtlich ist die Konstante holomorph. Auch die Funktion $f(z) = z$ ist holomorph, da $u = x$ und $v = y$. Die Funktion $f(z) = \overline{z} = x - iy$ ist im Gegensatz nicht holomorph.

Lemma 15.1 *Seien f und g zwei holomorphe Funktionen in Ω. Dann auch die folgenden Funktionen sind holomorph: $f+g$, fg, f/g (vorausgesetzt $g \neq 0$).*

Beweis. Sei $f = u + iv$ und $g = a + ib$. Dann erfüllen u und v die Gleichungen (15.1), und die Funktionen a und b erfüllen

$$\begin{cases} a_x = b_y \\ b_x = -a_y \end{cases}$$

Es ist offensichtlich, dass $f+g$ auch holomorph ist. Beweisen wir, dass fg holomorph. Wir haben

$$fg = (ua - vb) + i(ub + va).$$

und

$$\begin{aligned} (ua - vb)_x &= u_x a + u a_x - v_x b - v b_x \\ &= v_y a + u b_y + u_y b + v a_y \\ &= (ub + va)_y \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(ub+va)_x &= u_x b + u b_x + v_x a + v a_x \\ &= v_y b - u a_y - u_y a + v b_y \\ &= -(ua - vb)_y ,\end{aligned}$$

so dass fg holomorph ist.

Beweisen wir jetzt, dass f/g holomorph ist. Es reicht zu beweisen, dass $1/g$ holomorph ist. Wir haben

$$\frac{1}{g} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

und

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)_x &= \frac{a_x\left(a^2+b^2\right) - 2a\left(aa_x + bb_x\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2} \\ &= \frac{\left(-a^2+b^2\right)a_x - 2abb_x}{\left(a^2+b^2\right)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)_y &= -\frac{b_y\left(a^2+b^2\right) - 2b\left(aa_y + bb_y\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2} \\ &= \frac{\left(-a^2+b^2\right)b_y + 2aba_y}{\left(a^2+b^2\right)^2}.\end{aligned}$$

Da $a_x = b_y$ und $-b_x = a_y$, so erhalten wir

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)_x = \left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)_y ,$$

d.h. die erste Cauchy-Riemann-Gleichung für die Funktion $\frac{1}{g}$. Die zweite Gleichung wird analog bewiesen. ■

Man kann beweisen, dass auch Komposition von holomorphen Funktionen wieder holomorph ist.

Sei $P(z)$ ein Polynom über $\mathbb{C}$. Es folgt aus dem Lemma 15.1, dass P holomorph in $\mathbb{C}$ ist und auch die Funktion $\frac{1}{P}$ holomorph im Bereich $\{P \neq 0\}$ ist. Man kann beweisen, dass die Summe der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ immer holomorph in jedem Bereich ist, wo die Reihe konvergiert. Insbesondere ist die Funktion $f(z) = e^{az}$ holomorph für jedes $a \in \mathbb{C}$.

Definition. Eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch* wenn $u \in C^2(\Omega)$ und in Ω

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt subharmonisch wenn in Ω

$$u_{xx} + u_{yy} \geq 0. \tag{15.2}$$

Bemerken wir, dass der Realteil $u = \operatorname{Re} f$ und Imaginärteil $v = \operatorname{Im} f$ einer holomorphen Funktion f unbedingt harmonisch sind, da nach (15.1)

$$u_{xx} = (v_y)_x = v_{yx} = v_{xy} = (v_x)_y = -u_{yy}$$

und somit $u_{xx} + y_{yy} = 0$. Z.B., die Funktion $u(x,y) = e^x \cos y$ ist harmonisch als der Realteil von e^{iz}.

15.2 Maximum-Prinzip und Fundamentalsatz der Algebra

Lemma 15.2 (Maximum-Prinzip) *Sei Ω eine beschränkte offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Sei $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion die in Ω subharmonisch ist. Dann gilt*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \tag{15.3}$$

Beweis. Sei zuerst

$$u_{xx} + u_{yy} > 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{15.4}$$

Es gilt eine Maximumstelle von u in $\overline{\Omega}$, sei $z_0 = (x_0, y_0)$. Ist $z_0 \in \partial\Omega$, so gilt (15.3) offensichtlich. Sei $z_0 \in \Omega$. Da diese eine Maximumstelle ist, so gelten

$$u_{xx}(z_0) \le 0 \quad \text{und} \quad u_{yy}(z_0) \le 0,$$

was im Widerspruch zur Annahme (15.4) steht.

Jetzt betrachten wir den allgemeinen Fall von (15.2). Dafür betrachten wir für jedes $\varepsilon > 0$ die Funktion

$$u_\varepsilon(x, y) = u(x, y) + \varepsilon\left(x^2 + y^2\right).$$

Es gilt

$$(u_\varepsilon)_{xx} = u_{xx} + 2\varepsilon \quad \text{und} \quad (u_\varepsilon)_{yy} = u_{yy} + 2\varepsilon$$

so dass

$$(u_\varepsilon)_{xx} + (u_\varepsilon)_{yy} = (u_{xx} + u_{yy}) + 4\varepsilon > 0.$$

Nach dem ersten Fall gilt also

$$\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon.$$

Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir (15.3). ∎

Jetzt geben wir noch einen (zweiten) Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Hauptsatz 15.3 *(*Fundamentalsatz der Algebra*) Jedes Polynom $P(z)$ über $\mathbb{C}$ von dem Grad $n \ge 1$ hat mindestens eine Nullstelle $z \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Angenommen, dass P keine Nullstelle hat, betrachten wir die Funktion $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ die in $\mathbb{C}$ holomorph ist. Setzen wir $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ so dass u und v harmonische Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ sind. Da $|P(z)| \to +\infty$ für $|z| \to \infty$, so erhalten wir $f(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $R > 0$ mit

$$|f(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \text{ mit } |z| \ge R.$$

Insbesondere für die Kreisscheibe $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$ gilt

$$\max_{\partial K_R} |f| \le \varepsilon.$$

Es folgt, dass auch

$$\max_{\partial K_R} |u| \le \varepsilon \quad \text{und} \quad \max_{\partial K_R} |v| \le \varepsilon.$$

Nach dem Maximum-Prinzip gilt auch

$$\max_{K_R} |u| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad \max_{K_R} |v| \leq \varepsilon,$$

insbesondere

$$|u(0)| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad |v(0)| \leq \varepsilon.$$

Da ε beliebig ist, so folgt es $u(0) = v(0) = 0$ und $f(0) = 0$ was unmöglich ist, da $f(0) = 1/P(0) \neq 0$. ∎

15.3 Kurvenintegral und Windungszahl

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare parametrisierte Kurve. Wir bezeichnen mit $|\gamma|$ das Bild von γ, d.h. die Kurve $\gamma([a,b])$. Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ die $|\gamma|$ enthält, und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung mit den Komponenten

$$f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)).$$

Setzen wir auch

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

und definieren das *Kurvenintegral* von f entlang γ mit

$$\int_\gamma P dx + Q dy := \int_a^b \left(P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)\right) dt.$$

Lemma 15.4 *Sei $\tau : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine surjective monoton steigende stetig differenzierbare Funktion. Betrachten wir die parametrisierte Kurve $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$, d.h.*

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(\tau(s)), \quad s \in [\alpha,\beta].$$

Dann gilt $|\widetilde{\gamma}| = |\gamma|$ und

$$\int_{\widetilde{\gamma}} P dx + Q dy = \int_\gamma P dx + Q dy.$$

Beweis. Die Identität $|\widetilde{\gamma}| = |\gamma|$ ist offensichtlich. Setzen wir

$$\widetilde{\gamma}(s) = (\widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s))$$

wobei

$$\widetilde{x}(s) = x(\tau(s)) \quad \text{und} \quad \widetilde{y}(s) = y(\tau(s)).$$

Die Substitution $t = \tau(s)$ ergibt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma P dx + Q dy &= \int_a^b \left(P(\gamma(t)) x'(t) + Q(\gamma(t)) y'(t)\right) dt \\
&= \int_\alpha^\beta \left(P(\widetilde{\gamma}(s)) x'(\tau(s)) + Q(\widetilde{\gamma}(s)) y'(\tau(s))\right) \tau'(s) ds \\
&= \int_\alpha^\beta \left(P(\widetilde{\gamma}(s)) \widetilde{x}'(s) + Q(\widetilde{\gamma}(s)) \widetilde{y}'(s)\right) ds
\end{aligned}$$

$$= \int_{\widetilde{\gamma}} Pdx + Qdy,$$

wobei we benutzt haben. dass

$$\widetilde{x}'(s) = x'(\tau(s))\,\tau'(s) \quad \text{und} \quad \widetilde{y}'(s) = y'(\tau(s))\,\tau'(s).$$

■

Definition. Angenommen, dass $|\gamma|$ den Ursprung 0 nicht enthält, definieren wir

$$A_0(\gamma) := \int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_a^b \frac{x(t)\,y'(t) - y(t)\,x'(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} dt. \tag{15.5}$$

Stellen wir γ in Polarkoordinaten $(r\,,\theta)$ dar:

$$\gamma(t) = (r(t)\,,\theta(t))$$

wobei $r(t)$ und $\theta(t)$ erfüllen sollen

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t) \quad \text{und} \quad y(t) = r(t)\sin\theta(t). \tag{15.6}$$

Die Funktion

$$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

ist automatisch stetig differenzierbar, wobei der Polarwinkel $\theta(t)$ von (15.6) nur bis zur additiven Konstante $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, definiert ist.

Lemma 15.5 *Liegt $|\gamma|$ in $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ so gibt es einen stetig differenzierbaren Polarwinkel $\theta(t)$ auf $[a,b]$, der mit dem Polarradius*

$$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y^2(t)}$$

die Identitäten (15.6) erfüllt. Für dieses $\theta(t)$ gilt

$$A_0(\gamma) = \theta(b) - \theta(a). \tag{15.7}$$

Somit ist $A_0(\gamma)$ gleich den Winkel zwischen den Vektoren $\gamma(b)$ und $\gamma(a)$.

Beweis. Betrachten wir zunächst den Fall wenn $|\gamma|$ in der Halbebene $H_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ liegt. Für jedes $(x,y) \in H_+$ setzen wir

$$r(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \theta(x,y) = \arctan\frac{y}{x},$$

so dass r und θ als Funktionen von $(x,y) \in H_+$ stetig differenzierbar sind. Da $\tan\theta = \frac{y}{x}$ und $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ so folgt es dass $\cos\theta > 0$ und

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}$$

und

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{y}{r}.$$

Somit ist das Paar (r,θ) die Polarkoordinaten von $(x,y) \in H_+$, und (r,θ) ist von (x,y) stetig differenzierbar abhängig.

Somit können wir jede Kurve γ mit $|\gamma| \subset H_+$ in Polarkoordinaten darstellen:

$$\gamma(t) = (r(x(t), y(t)), \theta(x(t), y(t))), \quad t \in [a,b],$$

und $\theta(x(t), y(t))$ stetig differenzierbar ist.

Das Gleiche gilt wenn $|\gamma| \subset H_- := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$. In diesem Fall setzen wir

$$\theta(x,y) = \pi + \arctan\frac{y}{x}$$

so dass $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$, $\cos\theta < 0$ und somit

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = -\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}.$$

Analog definiert man $\theta(t)$ als eine stetig differenzierbare Funktion für jede Kurve γ die in der Halbebene $\{y > 0\}$ oder $\{y < 0\}$ liegt.

Für beliebige Kurve γ mit $|\gamma| \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gibt es ein ε so dass $|\gamma(t)| > \varepsilon$ für alle $t \in [a,b]$. Sei $\{t_k\}_{k=0}^n$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ so dass für jedes $k = 0, ..., n-2$ gilt

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\| < \varepsilon/2 \text{ für alle } t, s \in [t_k, t_{k+2}].$$

Bezeichnen wir mit γ_k die Kurve γ auf dem Intervall $[t_k, t_{k+2}]$. Dann liegt $|\gamma_k|$ in einer Halbebene. In der Tat, liegt $\gamma_k(t_k) = (x(t_k), y(t_k))$ in einer Viertelebene V, z.B. in

$$V = \{(x,y) : x, y \geq 0\}.$$

Da $\|\gamma_k(t_k)\| > \varepsilon$, so gilt entweder $x(t_k) > \varepsilon/2$ oder $y(t_k) > \varepsilon/2$. Sei $x(t_k) > \varepsilon/2$. Es folgt, dass für alle $t \in [t_k, t_{k+2}]$ gilt

$$|x(t) - x(t_k)| < \varepsilon/2$$

woraus folgt $x(t) > 0$. Somit liegt $|\gamma_k|$ im H_+.

Somit gibt es einen stetig differenzierbaren Polarwinkel $\theta_k(t)$ für jede Kurve γ_k. Auf jedem Intervall $[t_k, t_{k+1}]$ mit $k \geq 1$ gibt es zwei Polarwinkeln $\theta_{k-1}(t)$ und $\theta_k(t)$. Für die Differenz davon gilt

$$\theta_k(t) - \theta_{k-1}(t) = 2\pi n_k \text{ für jedes } t \in [t_k, t_{k+1}]$$

für ein $n_k \in \mathbb{Z}$. Die Zahl n_k ist von $t \in [t_k, t_{k+1}]$ unabhängig da die Differenz $\theta_k(t) - \theta_{k-1}(t)$ eine stetige Funktion auf $[t_k, t_{k+1}]$ ist.

Jetzt definieren wir die Funktion $\theta(t)$ auf $[a,b]$ wie folgt: für jedes $k = 0, ..., n-1$

$$\theta(t) = \theta_k(t) - 2\pi(n_1 + ... + n_k) \quad \text{für } t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Dann ist $\theta(t)$ der Polarwinkel von $\gamma_k(t)$ und somit der Polarwinkel von $\gamma(t)$ für jedes $t \in [a,b]$.

Beweisen wir, dass die Funktion θ auf $[a,b]$ stetig differenzierbar ist. Es folgt, dass auf $[t_k, t_{k+1}]$ gilt

$$\begin{aligned}\theta(t) &= (\theta_{k-1}(t) + 2\pi n_k) - 2\pi(n_1 + ... + n_k) \\ &= \theta_{k-1}(t) - 2\pi(n_1 + ... + n_{k-1}).\end{aligned}$$

Somit gilt die Identität

$$\theta(t) = \theta_{k-1}(t) - 2\pi(n_1 + ... + n_{k-1})$$

auf dem Intervall $[t_{k-1}, t_{k+1}] = [t_{k-1}, t_k] \cup [t_k, t_{k+1}]$. Da θ auf jedem Intervall $[t_{k-1}, t_{k+1}]$ stetig differenzierbar ist, so folgt es dass θ auch auf $[a,b]$ stetig differenzierbar ist.

Für $r(t)$ und $\theta(t)$ wie oberhalb gilt

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}, \quad \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\sin\theta}{r}$$

$$x' = r'\cos\theta - (r\sin\theta)\theta', \quad y' = r'\sin\theta + (r\cos\theta)\theta'$$

und

$$\begin{aligned}\frac{xy'-yx'}{x^2+y^2} &= \frac{\cos\theta}{r}(r'\sin\theta + (r\cos\theta)\theta') - \frac{\sin\theta}{r}(r'\cos\theta - (r\sin\theta)\theta') \\ &= \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\theta' = \theta'.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir aus (15.5)

$$A_0(\gamma) = \int_a^b \theta' dt = \theta(b) - \theta(a),$$

was zu beweisen war. ■

Sei jetzt $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ geschlossen ist, d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$. Dann gilt $r(a) = r(b)$ und

$$\theta(b) = \theta(a) + 2\pi n$$

für ein $n \in \mathbb{Z}$. Es folgt, dass

$$A_0(\gamma) = 2\pi n.$$

Definition. Die ganze Zahl n heißt die *Windungszahl* (auch *Index* genannt) der geschlossenen Kurve γ bezüglich 0 und wird mit $\operatorname{ind}_0 \gamma$ bezeichnet. In anderen Wörtern, gilt

$$\operatorname{ind}_0 \gamma := \frac{1}{2\pi} A_0(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}, \tag{15.8}$$

vorausgesetzt, dass $0 \notin |\gamma|$.

Beispiel. Sei $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi n]$, die n-fach Kreislinie von Radius r, wobei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\operatorname{ind}_0 \gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi n} \frac{(r\cos t)(r\sin t)' - r\sin t\,(r\cos t)'}{(r\cos t)^2 + (r\sin t)^2} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi n} \frac{r^2\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}{r^2\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi n} dt = n.$$

Beispiel. Nehmen wir an, dass das Bild $|\gamma|$ in einer von vier Halbebenen von $\mathbb{R}^2$ liegt, und beweisen, dass

$$\operatorname{ind}_0 \gamma = 0.$$

Wie im Beweis von Lemma 15.5, der Polarwinkel θ in der Halbebene ist eine Funktion von (x, y). Da

$$(x(a), y(a)) = (x(b), y(b)),$$

so folgt es aus (15.7), dass

$$\operatorname{ind}_0 \gamma = \theta(x(b), y(b)) - \theta(x(a), y(a)) = 0,$$

Beispiel. Betrachten wir die Kreislinie

$$\gamma_r(t) = (a + r\cos t, b + r\sin t), \ \ t \in [0, 2\pi],$$

mit dem Mittelpunkt (a, b) wobei $0 < r < \sqrt{a^2+b^2}$. Dann $0 \notin |\gamma_r|$ und gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}_0 \gamma_r &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(a+r\cos t)(b+r\sin t)' - (b+r\sin t)(a+r\cos t)'}{(a+r\cos t)^2+(b+r\sin t)^2}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{ar\cos t + br\sin t + r^2}{a^2+b^2+2ar\cos t+2br\sin t+r^2}dt.\end{aligned}$$

Der Integrand ist eine stetige Funktion bezüglich $(r, t) \in \left(0, \sqrt{a^2+b^2}\right) \times [0, 2\pi]$, woraus folgt, dass auch $\operatorname{ind}_0 \gamma_r$ stetig bezüglich r ist. Da $\operatorname{ind}_0 \gamma_r$ ganze Zahl ist, so ist $\operatorname{ind}_0 \gamma_r$ eine Konstante und von r unabhängig ist. Da für $r \to 0$ das Integral offensichtlich gegen 0 konvergiert, so erhalten wir

$$\operatorname{ind}_0 \gamma_r = 0$$

für alle $r < \sqrt{a^2+b^2}$. Alternativ kann man bemerken, dass für kleine Werten von r liegt $|\gamma_r|$ in einer Halbebene, so dass $\operatorname{ind}_0 \gamma_r = 0$ nach dem obigen Beispiel gilt.

Setzen wir $b = 0$ und $a = 1$. Dann für alle $0 < r < 1$ erhalten wir die folgende nicht-triviale Identität

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t + r}{\cos t + \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)}dt = 0.$$

Definition. Für eine geschlossene stetig differenzierbare Kurve γ und für beliebigen Punkt $w \in \mathbb{R}^2 \setminus |\gamma|$ definieren wir den Index $\operatorname{ind}_w \gamma$ mit

$$\operatorname{ind}_w \gamma = \operatorname{ind}_0(\gamma - w) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{(x-w_x)\,dy - (y-w_y)\,dx}{(x-w_x)^2+(y-w_y)^2}. \tag{15.9}$$

Der folgende Satz 15.6 ist eine 2-dimensionale Version von dem Zwischenwertsatz aus Analysis 1. Umformulieren wir zunächst dem Zwischenwertsatz wie folgt. Für jedes Paar $\{\alpha, \beta\}$ von reellen Zahlen und jedes $c \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\}$ setzen wir

$$\operatorname{ind}_c \{\alpha, \beta\} = \begin{cases} 1, \text{ falls } \alpha < c < \beta \\ -1, \text{ falls } \beta < c < \alpha, \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann ergibt der Zwischenwertsatz folgendes. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Gilt für ein $c \in \mathbb{R} \setminus \{f(a), f(b)\}$

$$\operatorname{ind}_c \{f(a), f(b)\} \neq 0,$$

so liegt c im $f([a, b])$.

Hauptsatz 15.6 *Sei $f : D \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Abbildung von der abgeschlossen Kreisscheibe $D \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Sei γ die parametrisierte Kreislinie ∂D. Gilt für einen Punkt $w \in \mathbb{R}^2 \setminus |f \circ \gamma|$*

$$\operatorname{ind}_w f \circ \gamma \neq 0,$$

so liegt w im $f(D)$.

Für jedes $w \in |f \circ \gamma|$ gilt offensichtlich $w \in f(D)$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $w = 0$ (sonst bezeichnen wir $f - w$ wieder mit f). Sei

$$D = \left\{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| \leq R\right\}.$$

Betrachten wir eine Familie von parametrisierten Kreislinien

$$\gamma_r(t) = (r \cos t, r \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

wobei $r \in [0, R]$ als der Parameter der Familie betrachtet wird. Betrachten wir die Kurve $\widetilde{y}$

$$\widetilde{\gamma}_r = f \circ \gamma_r.$$

Nehmen wir das Gegenteil an, dass 0 nicht im $f(D)$ liegt. Dann $0 \notin |\widetilde{\gamma}_r|$ für jedes $r \in [0, R]$ so dass $\operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}$ für alle r definiert ist. Wir haben

$$\operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_r = \frac{1}{2\pi} \int_{\widetilde{\gamma}_r} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\widetilde{x}_r(t)\, \widetilde{y}_r'(t) - \widetilde{y}_r(t)\, \widetilde{x}_r'(t)}{\widetilde{x}_r(t)^2 + \widetilde{y}_r(t)^2} dt$$

wobei

$$\widetilde{\gamma}_r(t) = (\widetilde{x}_r(t), \widetilde{y}_r(t)).$$

Sei $f = (P, Q)$. Dann

$$\widetilde{\gamma}_r = f \circ \gamma_r = (P(r \cos t, r \sin t), Q(r \cos t, r \sin t)).$$

Wir sehen, dass die Funktionen

$$\widetilde{x}_r(t) = P(r \cos t, r \sin t) \quad \text{und} \quad \widetilde{y}_r(t) = Q(r \cos t, r \sin t)$$

stetig differenzierbar in $(r,t) \in [0,R] \times [0,2\pi]$ sind, woraus folgt, dass der Integrand

$$\frac{\widetilde{x}_r(t)\,\widetilde{y}_r'(t) - \widetilde{y}_r(t)\,\widetilde{x}_r'(t)}{\widetilde{x}_r(t)^2 + \widetilde{y}_r(t)^2}$$

stetig in $(r,t) \in [0,R] \times [0,2\pi]$ ist. Es folgt aus dem Satz 12.15, dass $\operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_r$ stetig in $r \in [0,R]$ ist. Da die Zahl $\operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_r$ ganz ist, so folgt es daraus, dass $\operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_r$ eine Konstante in $r \in [0,R]$ ist.

Andererseits bemerken wir, dass für $r = 0$ ist $|\gamma_0|$ ein Punkt 0 und somit ist $|\widetilde{\gamma}_0|$ ein Punkt $f(0)$. Es folgt, dass

$$\operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_0 = 0$$

und somit $\operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_r = 0$ für alle $r \in [0,R]$. Insbesondere gilt auch

$$\operatorname{ind}_0 f \circ \gamma = \operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_R = 0,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. ■

15.4 Anwendungen von Windungszahl

15.4.1 Fundamentalsatz der Algebra

Jetzt geben wir noch einen (dritten) Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Hauptsatz 15.7 *Jedes Polynom $f(z)$ über $\mathbb{C}$ von dem Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle $z \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Betrachten wir die Kreisscheibe $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ wobei R groß genug ist. Sei γ die folgende Parametrisierung der Kreislinie ∂D:

$$\gamma(t) = R(\cos t + i \sin t).$$

Um zu beweisen, dass $f(z) = 0$ für ein z gilt, reicht es zu zeigen, dass $0 \in f(D)$, was nach dem Satz 15.6 der Fall ist, wenn

$$\operatorname{ind}_0 f \circ \gamma \neq 0.$$

Sei $f(z) = z^n + g(z)$ wobei $g(z)$ ein Polynom des Grades $\leq n-1$ ist. Wählen wir R so groß, dass

$$\sup_{\{z:|z|=R\}} |g(z)| \leq \frac{1}{2} R^n. \tag{15.10}$$

Betrachten wir eine Familie von Kurven

$$\gamma_\lambda(t) = \gamma(t)^n + \lambda g(\gamma(t))$$

wobei $\lambda \in [0,1]$. Insbesondere ist $\gamma_0(t) = \gamma(t)^n$ eine n-fach Kreislinie und $\gamma_1(t) = f(\gamma(t))$.

Es folgt aus (15.10), dass $|\gamma_\lambda|$ den Ursprung 0 nicht enthält. Da

$$\gamma_0(t) = R^n(\cos nt + i \sin nt),$$

so erhalten wir

$$\operatorname{ind}_0 \gamma_0 = n.$$

Es folgt aus (15.8) nach dem Satz 12.15, dass der Index $\operatorname{ind}_0 \gamma_\lambda$ eine stetige Funktion von λ ist. Somit ist $\operatorname{ind}_0 \gamma_\lambda$ eine Konstante als Funktion von λ. Daraus folgt, dass

$$\operatorname{ind}_0 f \circ \gamma = \operatorname{ind}_0 \gamma_1 = \operatorname{ind}_0 \gamma_0 = n$$

und somit $\operatorname{ind}_0 f \circ \gamma \neq 0$, was zu beweisen war. ■

15.4.2 Fixpunktsatz von Brouwer

Hauptsatz 15.8 (Fixpunktsatz von Brouwer) *Sei $f : D \to D$ eine stetige Selbstabbildung von der abgeschlossen Kreisscheibe D in $\mathbb{R}^2$. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. einen Punkt $z \in D$ mit $f(z) = z$.*

Beweis. Wir beweisen diesen Satz im Fall wenn f stetig differenzierbar ist. Nehmen wir das Gegenteil an, dass f keinen Fixpunkt hat, d.h. $f(z) \neq z$ für alle $z \in D$. Dann gibt es eine eindeutige Gerade durch $f(z)$ und z. Betrachten wir den Halbgerade

$$G = \{tz + (1-t) g(z) : t \geq 0\}$$

die an $f(z)$ anfängt und durch z geht. Sei $g(z)$ der Punkt von Durchschnitt von ∂D mit G. Dann erhalten wir eine stetig differenzierbare Abbildung $g : D \to \partial D$. Bemerken auch, dass für $z \in \partial D$ gilt $g(z) = z$.

Eine stetige Abbildung $F : X \to Y$ wobei $Y \subset X$, heißt *Retraktion* wenn $F|_Y = \mathrm{Id}$. So ist g eine Retraktion. Wir zeigen allerdings, so es keine Retraktion von D nach ∂D gibt.

Sei γ die standarte Parametrisierung der Kreislinie ∂D. Da $g \circ \gamma = \gamma$, so folgt es, dass

$$\operatorname{ind}_0 g \circ \gamma = \operatorname{ind}_0 \gamma = 1.$$

Nach dem Satz 15.6 beschließen wir, dass $0 \in g(D)$ was unmöglich ist, da $g(D) = \partial D$ und $0 \notin \partial D$. ■

15.4.3 Das Komplement einer abgeschlossenen Kurve

Satz 15.9 (*a*) *Der Index $\operatorname{ind}_w \gamma$ ist eine stetige Funktion von $w \in \mathbb{R}^2 \setminus |\gamma|$.*

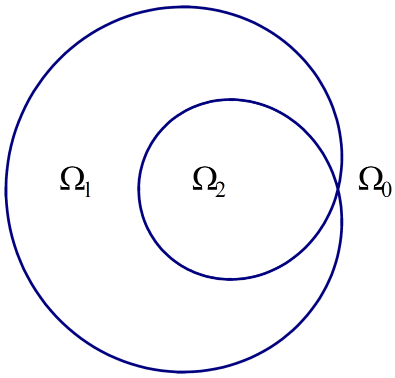
(*b*) *Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist sie Menge*

$$\Omega_k = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 \setminus |\gamma| : \operatorname{ind}_w \gamma = k \right\}.$$

offen und

$$\bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_k = \mathbb{R}^2 \setminus |\gamma|. \tag{15.11}$$

(*c*) *Die Menge Ω_0 ist unbeschränkt während Ω_k für $k \neq 0$ ist immer beschränkt.*



Mengen Ω_k

Beweis. (a) Das folgt aus (15.9).

(b) Da $\operatorname{ind}_w \gamma$ nur die ganzen Werte annimmt, so gilt

$$\Omega_k = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 \setminus |\gamma| : \operatorname{ind}_w \gamma \in (k - 1/2, k + 1/2) \right\}.$$

Da das Intervall $(k - 1/2, k + 1/2)$ offen ist und die Funktion $w \mapsto \operatorname{ind}_w \gamma$ stetig, so ist Ω_k offen. Die Identität (15.11) folgt nach der Definition von Ω_k.

(c) Ist w weit genug von $|\gamma|$ so liegt $|\gamma|$ in einer Halbebene bezüglich w, woraus folgt, dass $\operatorname{ind}_w \gamma = 0$. Somit enthält Ω_0 alle w die weit genug von $|\gamma|$ liegen, woraus die beiden Aussagen folgen. ■

Die folgenden zwei Sätze geben wir ohne Beweis an.

Hauptsatz 15.10 (Satz von Jordan) *Sei γ eine einfache geschlossene stetig differenzierbare Kurve. Dann in der Folge $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ gibt es nur zwei nicht-leere Mengen: Ω_0 und Ω_i wobei entweder $i = 1$ oder $i = -1$. Darüber hinaus sind die Mangen Ω_0 und Ω_i zusammenhängend und es gilt*

$$\partial\Omega_0 = \partial\Omega_i = |\gamma|.$$

Die Menge Ω_i heißt das *Innere* von γ, Ω_0 heißt das *Äußere* von γ.

Satz 15.11 *Sei γ eine einfache geschlossene stetig differenzierbare Kurve. Sei Ω das Innere von γ. Der Flächeninhalt von Ω ist gleich*

$$F(\Omega) = \int_\gamma y\,dx = -\int_\gamma x\,dy = \frac{1}{2}\int_\gamma (y\,dx - x\,dy).$$

Jetzt benutzen wir die komplexwertige Notation für eine parametrisierte geschlossene Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Setzen wir

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Dann gilt

$$dz = dx + idy$$

und

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

so dass

$$\frac{dz}{z} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} + i\frac{xdy - y\,dx}{x^2 + y^2}. \tag{15.12}$$

Bemerken wir, dass

$$\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{d\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2} = \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right)\right]_a^b = \ln\|\gamma(b)\| - \ln\|\gamma(a)\| = 0. \tag{15.13}$$

Somit erhalten wir aus (15.8), (15.12) und (15.13) dass

$$\operatorname{ind}_0 \gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

Für beliebigen Punkt $w \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ gilt somit

$$\operatorname{ind}_w \gamma = \operatorname{ind}_0(\gamma - w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - w}.$$

Ende