81. Band Heft 1
ausgegeben am 21. 6. 1978

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgeber:
W. Benz, P. L. Butzer, W. D. Geyer,
K. Jacobs, H. Schubert

B. G. Teubner Stuttgart 1978

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgeber
W. Benz, Bundesstr. 55, 2000 Hamburg 13 – P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen – W. D. Geyer, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen – K. Jacobs, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen – H. Schubert, Universitätsstr. 1, 4000 Düsseldorf

Verlag
B. G. Teubner, Postfach 801069, 7000 Stuttgart 80 (Vaihingen) – Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – GW ISSN 0012-0456
Herstellung: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, 6830 Schwetzingen

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigungen von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs, Math. Institut der Universität, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen, zu richten.

Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden die Herausgeber bei den Verlagen anfordern.

Die Verfasser erhalten von ihren Arbeiten 75, von Buchbesprechungen 2 Sonderdrucke unentgeltlich.

Der 81. Band des Jahresberichts umfaßt vier Hefte. Der Band wird nur geschlossen abgegeben. Bestellungen werden an den Verlag erbeten, der die Bezieher bittet, ihm von Anschriftenänderungen unverzüglich Kenntnis zu geben.

Für den Abdruck vorgesehene Manuskripte sind in einwandfrei leserlicher und völlig druckfertiger Form (Schreibmaschinenschrift) einzureichen. Die Manuskripte müssen nach satztechnischen Richtlinien und Auszeichnungsregeln, die von der Schriftleitung des Jahresberichts zu erhalten sind, gestaltet werden.

Nachträgliche Änderungen bei der Korrektur, die 5% des Satzpreises übersteigen, müssen dem Autor angerechnet werden.

Konten der DMV: Kreissparkasse Tübingen, Girokonto 1626. – Postscheckkonto: DMV in Tübingen, Nr. 18517 – 706 beim Postscheckamt Stuttgart. – DDR: Berliner Stadtkontor, Berlin C 111, Kurstraße, Konto Nr. 20/142007.

Inhalt von Band 81, Heft 1

1. Abteilung

2. Abteilung

Vorbemerkung der Herausgeber

Mit Band 81 (1979) treten für die Herausgabe des Jahresberichts der DMV neue Richtlinien in Kraft, für deren Durchführung die Herausgeber zu sorgen haben. Einzelabhandlungen sollen künftig nicht mehr aufgenommen werden. Davon ausgenommen sind Beiträge prominenter Autoren zu Themen, die alle Mathematiker interessieren dürften. Fast alle übrigen Beiträge werden Überblickscharakter haben. Hinzu kommen noch Aufsätze historischen Inhalts und Nachrufe. Die Herausgeber werden sich bemühen, an die Tradition der berühmten Berichte anzuknüpfen.

Aus kalkulatorischen Gründen wird das Satzverfahren ab Band 81 auf Composer-Satz umgestellt.

Das vorliegende Heft ist das vorzeitig publizierte Heft 81/1. Es soll die neuen Absichten der Herausgeber des Jahresberichts exemplarisch vorführen. Drei der eingeschlossenen Texte erscheinen noch im alten Satzverfahren. Hierdurch ist ein Vergleich mit dem Composer-Satz möglich, der, so hoffen die Herausgeber, den Leser davon überzeugen wird, daß dieser Übergang, der zu erheblichen Kosteneinsparungen führt, vertretbar erscheint.

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
81 (1978) 3–12

Die Entwicklung der Beweistheorie *)

Von KURT SCHÜTTE in München

Im Jahre 1917 erschien ein Buch von Hermann Weyl mit dem Titel „Das Kontinuum", in dem es heißt: „Hier wird die Meinung vertreten, daß das Haus der Analysis zu einem wesentlichen Teil auf Sand gebaut ist." Hermann Weyl schreibt dann weiter: „Ich glaube, diesen schwankenden Grund durch Stützen von zuverlässiger Festigkeit ersetzen zu können; doch tragen sie nicht alles, was man heute allgemein für gesichert hält; den Rest gebe ich preis, weil ich keine andere Möglichkeit sehe."

Die hier von Hermann Weyl geäußerte Kritik an der klassischen Analysis, d. h. an der bis dahin üblichen und auch heute noch allgemein üblichen Analysis, wendet sich gegen den imprädikativen Gebrauch der reellen Zahlen. Die Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen beruht ja wesentlich darauf, daß man zuläßt, reelle Zahlen unter Bezugnahme auf die Menge aller reellen Zahlen zu definieren. Einen solchen Definitionsprozeß, bei dem etwas unter Bezugnahme auf eine Gesamtheit definiert und dieser Gesamtheit hinzugerechnet wird, nennt man *imprädikativ*. In der Imprädikativität liegt eine gewisse Zirkelhaftigkeit, die zur Kritik Anlaß gibt.

Hermann Weyl skizziert nun in seinem Buch einen Aufbau der Analysis, bei dem die Imprädikativität vermieden, aber die allgemeine Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen preisgegeben wird.

Schon vorher waren, insbesondere von dem holländischen Mathematiker L. E. J. Brouwer, noch weitergehende Einwände gegen die klassische Mathematik erhoben worden. Diese Einwände richten sich hauptsächlich gegen die indirekten Beweisführungen, die zu Existenzaussagen führen, ohne daß die betreffenden Existenzbeweise auch nur die geringste Möglichkeit bieten, die als existierend angesehenen Objekte effektiv aufzuweisen. Brouwer hatte deshalb seit etwa 1907 begonnen, eine sogenannte *intuitionistische* Mathematik zu entwickeln, die auf der Grundlage der Konstruierbarkeit beruht und die klassische Mathematik verwirft.

---

*) Festvortrag anläßlich der Ehrenpromotion von Herrn Professor Dr. Paul Bernays in München am 16. Oktober 1976.

Als dann Hermann Weyl 1921 in der Mathematischen Zeitschrift eine Abhandlung „Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik" veröffentlichte, wurde es allgemein üblich, von einer ernsthaften Grundlagenkrise der Mathematik zu sprechen.

Dies war die Zeit, in der David Hilbert sein Programm entwickelte, mit dem er das Ziel verfolgte, die gesamte klassische Mathematik auf eine unanfechtbare Grundlage zu stellen. Hilbert war gewillt, die Problematik der indirekten und imprädikativen Beweisführungen durchaus zu berücksichtigen, aber dennoch die klassische Mathematik ohne Preisgabe irgendwelcher Teile als mathematisch exakt sicherzustellen.

Die mathematische Theorie, die nach Hilbert eine exakte Begründung der klassischen Mathematik liefern sollte, wurde von ihm *Beweistheorie* genannt. Diese Beweistheorie wurde von David Hilbert von Anfang an in engster Zusammenarbeit mit Paul Bernays entwickelt. Von Hilbert stammt offenbar die Grundidee der Beweistheorie, und von Bernays wurde eine detaillierte Systematik der Beweistheorie entwickelt. Hiermit wurde ein neues Gebiet der Mathematik geschaffen, das nicht einen speziellen mathematischen Gegenstandsbereich behandelt wie etwa die Arithmetik als die Lehre von den ganzen Zahlen oder die Funktionentheorie als die Lehre von den Funktionen einer komplexen Veränderlichen oder die Geometrie als die Lehre vom Raum, sondern ein Gebiet, das die Mathematik selbst zum Gegenstand mathematischer Untersuchungen macht. Die Beweistheorie analysiert die Grundbegriffe und Beweisverfahren einer mathematischen Theorie hinsichtlich ihrer mathematischen, d. h. rein formalen, Strukturen und untersucht die formalisierten Beweismöglichkeiten von solchen formal fixierten mathematischen Theorien. Hierzu wird die Sprache der mathematischen Logik gebraucht. Wesentlich für die Beweistheorie ist nun, daß die Untersuchungen an den Formeln der mathematischen Logik ohne Bezugnahme auf die intendierten Bedeutungen rein *syntaktisch*, d. h. nur hinsichtlich ihrer formalen Struktur, durchgeführt werden.

Solche syntaktischen Untersuchungen hat es zwar schon vorher in der mathematischen Logik gegeben, aber erst die Beweistheorie hat die syntaktische Methode zur vollen Blüte gebracht. Hier werden nicht nur die mathematischen Aussagen, sondern auch die mathematischen Beweise formal fixiert, so daß allgemeine Untersuchungen über die Beweismöglichkeiten mathematischer Gebiete durchgeführt werden können.

Wir verdanken nun Herrn Bernays das grundlegende Werk der Beweistheorie, nämlich das zweibändige Werk „Grundlagen der Mathematik" von Hilbert und Bernays. Die beiden Bände, die in den Jahren 1934 und 1939 erschienen, waren zunächst als eine ausführliche Darstellung der Vorlesungsausarbeitungen von Hilbert gedacht, wurden dann aber unter

Berücksichtigung der inzwischen in der Beweistheorie erzielten Ergebnisse allein von Herrn Bernays verfaßt in einem Umfang, der weit über den Inhalt der Hilbertschen Vorlesungsausarbeitungen hinausgeht. Es wird hier zugleich mit ausführlichen Erklärungen der philosophischen Grundideen eine so detaillierte mathematische Systematik der Beweistheorie entwickelt, daß dieses Buch zu einem grundlegenden Standardwerk für alle weitergehenden Untersuchungen geworden ist. Das Werk wurde deshalb in der 2. Auflage, die in den Jahren 1968 und 1970 erschien, mit nur wenigen Änderungen und Ergänzungen in fast ungeänderter Form neu herausgegeben.

Ich ging davon aus, daß Hilbert mit der Beweistheorie eine exakte Grundlegung problematischer Teile der Mathematik anstrebte, und muß nun zu erklären versuchen, wie die Beweistheorie diese Aufgabe lösen sollte.

Soweit in der Mathematik nur endliche Objektbereiche behandelt werden, liegt keine Problematik vor. Eine Problematik ergibt sich erst bei der mathematischen Behandlung von unendlichen Objektbereichen, unter denen als einfachster und mathematisch wichtigster Bereich die Menge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ zu nennen ist.

Schon vor der Entwicklung des Intuitionismus von Brouwer und der Beweistheorie von Hilbert war versucht worden, eine Grundlegung der Mathematik zu entwickeln, und zwar durch Zurückführung der Mathematik auf die reine Logik. Es handelt sich hierbei um den sogenannten *Logizismus*, der besonders von Frege und später in den „Principia Mathematica" von Russell und Whitehead in ausführlicher Systematik dargestellt wurde. Sowohl die Schriften von Frege als auch die Principia Mathematica waren äußerst fruchtbar für die Entwicklung der mathematischen Logik, konnten aber das Ziel einer exakten Grundlegung der Mathematik nicht erreichen. Frege hat dies selbst erkannt, und die Principia Mathematica konnten ohne Hinzunahme eines höchst problematischen Reduzibilitätsaxioms nicht zur Fixierung der klassischen Mathematik gelangen.

Der Logizismus definiert die natürlichen Zahlen als Äquivalenzklassen. Zum Beispiel wird die Zahl 2 definiert als die Klasse aller Prädikate, die auf genau zwei Elemente zutreffen. Das klingt zwar zirkelhaft, ist es aber nicht, weil sich das Zutreffen eines Prädikats auf genau zwei Elemente ohne Bezugnahme auf den Zahlbegriff rein logisch (in der Prädikatenlogik mit Identität) formulieren läßt. Die Definition des Logizismus ist zwar nicht zirkelhaft, aber auf eine allgemeine Ontologie gegründet, die den Antinomien der Logik und Mengenlehre ausgesetzt ist und daher keine unproblematische Begründung der Arithmetik zu geben vermag.

Tatsächlich ist eine Bezugnahme der Arithmetik auf eine allgemeine

Ontologie mathematisch unwesentlich und daher überflüssig. Es kommt ja in der Mathematik nicht darauf an, eine platonische Idee der Zahl zu entwickeln, sondern nur darauf, die formalen Gesetzmäßigkeiten der Zahlenfolge zu studieren. Hierzu genügt es vollständig, die natürlichen Zahlen durch bestimmte Zeichenreihen, die wir *Ziffern* nennen, zu repräsentieren. Als solche Ziffern verwenden Hilbert und Bernays die Zeichen

$$0, 0', 0'', 0''', \ldots .$$

Hierin kommt genau das und nur das zum Ausdruck, was für die Mathematik wesentlich ist. Die Ziffernfolge hat genau ein erstes Element, wir nennen es „Null", und zu jedem Element genau einen Nachfolger, der von allen vorhergehenden Elementen verschieden ist. Das ist alles. Der Übergang von einer Ziffer zum Nachfolger wird durch Anhängen eines Striches zum Ausdruck gebracht. Diese Ziffernfolge wird sukzessive konstruiert und ist im wahrsten Sinne des Wortes unendlich. Sie hat kein Ende, denn das Fortschreiten zum Nachfolger darf unbeschränkt fortgesetzt werden.

Es spielt dabei keine Rolle, ob die Wandtafel oder irgendeine Stelle in der Welt ausreicht, immer wieder Striche anzubringen. Man hat es ja in der Mathematik nicht mit Realitäten zu tun, sondern mit abstrakten Ideen. Wir können jedenfalls unseren Gedanken eine klare Vorstellung von dieser unendlichen Ziffernfolge zugrunde legen und mit dieser Vorstellung arbeiten, wobei jede einzelne Ziffer als eine wohlbestimmte endliche Zeichenreihe anzusehen ist.

Diese Charakterisierung der natürlichen Zahlen hat nichts mit Axiomen zu tun. Die Ziffern sind hier konstruktiv definiert, und das Beweisprinzip der vollständigen Induktion gilt hier trivialerweise aufgrund der konstruktiven Definition der Ziffern. Man braucht hierbei keine Peano-Axiome.

Auf der Grundlage einer solchen Zifferndarstellung der natürlichen Zahlen läßt sich ein umfangreicher Teil der Arithmetik entwickeln, die sogenannte *rekursive Zahlentheorie*, die im wesentlichen von dem norwegischen Mathematiker Th. Skolem begründet wurde und im Grundlagenbuch von Bernays systematisch dargestellt ist. Die rekursive Zahlentheorie ist völlig konstruktiv und unproblematisch.

Zur Fixierung der vollen klassischen Arithmetik, in der auch indirekte Beweise für allgemeine Existenzaussagen durchgeführt werden, ist jedoch eine Formalisierung des Zahlbegriffs erforderlich, bei der der konstruktive Charakter der Ziffernfolge teilweise verlorengeht und eine axiomatische Fassung der vollständigen Induktion benötigt wird. Eine solche Formalisierung der Arithmetik im Rahmen der Prädikatenlogik 1. Stufe wurde von Bernays mit seinem System Z gegeben. Dieses System Z wird im

Grundlagenbuch eingehend behandelt. Es werden elementare Teilsysteme von Z untersucht sowie konservative Erweiterungen, die sich durch Hinzunahme von Kennzeichnungs- und Auswahloperatoren ergeben. Die mathematischen Axiome des Systems Z sind im wesentlichen die Peano-Axiome und die Rekursionsgleichungen für Addition und Multiplikation.

Es war nun das erste wichtige Ziel der Beweistheorie, die reine Zahlentheorie, etwa in der Gestalt des Systems Z, als widerspruchsfrei nachzuweisen. Die arithmetischen Beweise werden im System Z formal dargestellt durch endliche Bäume von Formeln, die nach genau festgelegten Regeln zusammengesetzt sind. Diese formalisierten Beweise nennen wir *Herleitungen.* Ein Widerspruchsfreiheitsbeweis hat zu zeigen, daß es keine Herleitung geben kann, die zu einem Widerspruch führt. Hierzu genügt es zu zeigen, daß es keine Herleitung gibt, deren Endformel die *falsche* Formel $0 = 0'$ ist. Der Widerspruchsfreiheitsbeweis sollte nach Hilbert mit Methoden geführt werden, die er als *finit* bezeichnete, d. h. in elementarer Weise durch kombinatorisches Operieren an endlichen Zeichenreihen. Die Situation ist hier ähnlich wie bei der Einführung der Ziffern. Es läßt sich eine unendliche Folge von Herleitungen beschreiben, aber jede einzelne Herleitung ist eine wohlbestimmte endliche Formelfigur. Man hat beim Widerspruchsfreiheitsbeweis davon auszugehen, daß eine bestimmte Herleitung gegeben sei, und dann mit kombinatorischen Methoden zu zeigen, daß diese Herleitung nicht die Endformel $0 = 0'$ haben kann. Dies ist die Auffassung des finiten Standpunktes.

Es wurden nun, insbesondere von W. Ackermann, solche finiten Widerspruchsfreiheitsbeweise entwickelt. Diese führten jedoch nicht zu dem gewünschten Ziel, das volle System Z der reinen Zahlentheorie als widerspruchsfrei nachzuweisen.

Als dann im Jahr 1931 die berühmte Arbeit von Kurt Gödel über die Unvollständigkeitseigenschaften formaler Systeme erschien, wurde klar, weshalb die bisherigen Versuche nicht zum Ziel führen konnten. Gödel bewies mit seinem 2. Unvollständigkeitssatz, daß die Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems im allgemeinen nicht mit Beweismethoden, die in dem System selbst formalisiert sind, bewiesen werden kann. Die finiten Beweismethoden im strengsten Sinne des Wortes „finit" sind im System Z vollständig formalisiert. Daher kann das System Z nicht mit streng finiten Methoden als widerspruchsfrei nachgewiesen werden. Die Beweise von Gödel beruhen auf einer Arithmetisierung eines formalen Systems, d. h. auf einer effektiv berechenbaren Numerierung der Formeln und Herleitungen des betreffenden Systems, wodurch die äußeren (metalogischen) Untersuchungen eines zahlentheoretischen Systems in das System selbst hineinprojiziert werden. Gödel bezieht sich dabei auf ein formales System nach

Art der Principia Mathematica. Er erklärt, daß seine Unvollständigkeitssätze auch für viele verwandte Systeme gelten, ohne jedoch genau anzugeben, wie diese verwandten Systeme beschaffen sein müssen, damit die Unvollständigkeitssätze auf sie zutreffen.

Bernays hat nun in seinem Grundlagenbuch eine sehr durchsichtige Arithmetisierung formaler Systeme entwickelt und in Form von Ableitungsbedingungen genau angegeben, unter welchen Voraussetzungen der 1. Gödelsche Unvollständigkeitssatz und unter welchen Voraussetzungen auch der 2. Gödelsche Unvollständigkeitssatz auf ein formales System zutrifft. Dabei ist auch der Beweis des wichtigsten Hilfssatzes für den 2. Unvollständigkeitssatz, den Gödel nur äußerst knapp angedeutet hatte, in allen Einzelheiten exakt ausgeführt.

Es ist teilweise der Eindruck entstanden, das Hilbertsche Programm sei durch die Ergebnisse von Gödel ad absurdum geführt. Dies ist durchaus nicht der Fall, wie Gödel selbst am Schluß seiner Arbeit schreibt. Es ist allerdings offenbar geworden, daß man den zunächst eingenommenen engsten finiten Standpunkt durch Hinzunahme allgemeinerer konstruktiver Methoden erweitern muß, wenn man die reine Zahlentheorie oder noch stärkere mathematische Theorien als widerspruchsfrei nachweisen will. Es hat sich aufgrund der Gödelschen Sätze zwar als unmöglich erwiesen, die gesamte klassische Mathematik völlig konstruktiv zu begründen, aber es ist durchaus möglich, noch sehr starke Teilsysteme der klassischen Mathematik auf eine konstruktive Grundlage zu stellen. Dies zeigte sich sehr bald nach Bekanntwerden der Gödelschen Sätze durch einen Widerspruchsfreiheitsbeweis von Gerhard Gentzen.

Gentzen bewies zunächst in seiner Doktorarbeit „Über das logische Schließen“ einen fundamentalen Satz der reinen Prädikatenlogik. Er führte einen Schlußweisenkalkül ein, bei dem die von ihm als *Schnittregel* bezeichnete Schlußregel die einzige Schlußregel ist, deren Prämissen etwas enthalten können, was nichts mit der Konklusion zu tun hat. Der von Gentzen bewiesene Hauptsatz besagt nun, daß die Schnittregel eliminierbar ist, so daß jede Herleitung der reinen Prädikatenlogik in einer gewissen umweglosen Weise geführt werden kann. Dieser Satz hat sich als äußerst fruchtbar für alle beweistheoretischen Untersuchungen erwiesen. Es ist eigentlich verwunderlich, daß fast ein Jahrhundert seit Entstehung der modernen mathematischen Logik verging, bis ein so wichtiger Satz der reinen Logik entdeckt wurde. Dies mag vielleicht daran liegen, daß erst durch die Beweistheorie von Hilbert und Bernays die syntaktische Methode so weit in den Vordergrund gerückt war, daß diese Entdeckung zustande kam. Der Hauptsatz von Gentzen ist nämlich ein wesentlich syntaktischer Satz.

Gentzen bewies dann im Jahr 1935 die Widerspruchsfreiheit der reinen

Zahlentheorie durch eine transfinite Induktion bis zur Ordinalzahl ε_0. Hiermit benutzte er ein Beweisprinzip, das gemäß dem 2. Unvollständigkeitssatz von Gödel über die reine Zahlentheorie hinausgeht, jedoch völlig konstruktiv ist. Der Ordinalzahlenabschnitt bis ε_0 läßt sich nämlich in elementarer Weise fixieren, und die Wohlordnung dieses Abschnittes läßt sich in einem streng konstruktiven Sinne nachweisen. Der Widerspruchsfreiheitsbeweis von Gentzen genügt also allen Anforderungen zur Begründung der reinen Zahlentheorie gegenüber der vorgebrachten Kritik an der klassischen Mathematik.

Gentzen bezieht sich in seinem Widerspruchsfreiheitsbeweis nicht auf das formale System Z von Bernays, sondern auf einen äquivalenten Sequenzenkalkül. Die Nützlichkeit des Systems Z zeigte sich dann aber in einem Beweis von L. Kalmar, in dem die Grundideen von Gentzen unmittelbar auf das System Z übertragen sind. Dieser Widerspruchsfreiheitsbeweis des Systems Z ist einfacher und durchsichtiger als der ursprüngliche Beweis von Gentzen.

Mit dem Widerspruchsfreiheitsnachweis der reinen Zahlentheorie waren nun die problematischen indirekten Beweisführungen der klassischen Mathematik jedenfalls in einem fundamentalen Teilbereich der Mathematik gerechtfertigt gegenüber den erhobenen Einwendungen. In diesem Teil der Mathematik tritt jedoch die problematische Imprädikativität noch nicht auf.

Das nächste wichtige Ergebnis der Beweistheorie war eine Abgrenzung der Prädikativität. Ein rein prädikativer Aufbau der Mathematik erfolgt in natürlicher Weise im Rahmen einer verzweigten Typenlogik, wie sie in den Principia Mathematica entwickelt wurde, d. h. in Form einer geschichteten Analysis. Die reellen Zahlen werden hier wie in der klassischen Analysis als gewisse Mengen, etwa als Untermengen von Dedekindschen Schnitten, definiert. Man hat jedoch in der geschichteten Analysis im Unterschied zur klassischen Analysis zwischen reellen Zahlen verschiedener Schichten zu unterscheiden. Die Schichtung beruht auf den mengentheoretischen Definitionen der betreffenden Zahlen. Reelle Zahlen verschiedener Schichten können jedoch (als Mengen) extensional gleich sein.

Die Prädikativität konnte nun durch eine genau angebbare Ordinalzahl Γ_0 charakterisiert werden, nämlich in folgendem Sinne: Für jeden Ordnungstyp $<\Gamma_0$ läßt sich in elementarer Weise eine Wohlordnung definieren, die in streng prädikativer Weise als wohlgeordnet nachweisbar ist, während ein solcher Nachweis für keine Wohlordnung eines Ordnungstyps $\geq \Gamma_0$ möglich ist.

Unter Bezugnahme auf prädikativ nachweisbare Wohlordnungen erbrachte S. Feferman eine prädikative Interpretation für ein bestimmtes Teilsystem der klassischen Analysis, nämlich für die sogenannte Δ^1_1-Analysis.

Dieses Teilsystem der Analysis hat dieselbe Sprache, also dieselben Begriffsbildungen wie die klassische Analysis, während sich ja die Sprache der geschichteten Analysis wesentlich von der Sprache der klassischen Analysis unterscheidet. Die Einschränkung der Δ_1^1-Analysis gegenüber der klassischen Analysis besteht nur in einer Einschränkung des Komprehensionsaxioms, das zu jeder Aussage $A(x)$ eine Menge $\{x \mid A(x)\}$ zu bilden gestattet. Dabei durchläuft x den Grundbereich, für den man hier den Bereich der natürlichen Zahlen oder auch den Bereich der rationalen Zahlen nehmen kann. In der Δ_1^1-Analysis wird die zugelassene Mengenbildung eingeschränkt auf solche Aussagen $A(x)$, die zugleich je einer Allaussage $\forall Y B(x, Y)$ und einer Existenzaussage $\exists Y C(x, Y)$ beweisbar äquivalent sind, wobei Y eine Mengenvariable ist und in den Formeln $B(x, Y)$, $C(x, Y)$ keine weiteren gebundenen Mengenvariablen auftreten.

Mit der Δ_1^1-Analysis ist nun ein sehr ausdrucksfähiges Teilsystem der klassischen Analysis prädikativ gesichert, ein Teilsystem, das weit über das hinausgeht, auf das Hermann Weyl die Analysis in seinem Buch „Das Kontinuum“ einschränken wollte. Die Δ_1^1-Analysis dürfte aber auch wohl im wesentlichen das umfassendste Teilsystem der klassischen Analysis sein, das sich noch prädikativ begründen läßt.

Die Beweistheorie ist hierbei nicht stehengeblieben. G. Takeuti erbrachte 1967 einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für ein bedeutend stärkeres Teilsystem der klassischen Analysis, das als Π_1^1-Analysis bezeichnet wird. In diesem System ist die Bildung von Mengen $\{x \mid A(x)\}$ viel weniger als in der Δ_1^1-Analysis eingeschränkt. Zu den Aussagen $A(x)$, die hier zur Mengenbildung zugelassen sind, gehören alle Aussagen, die sich folgendermaßen bilden lassen:

1. Die Π_1^1-Aussagen $\forall Y B(x, Y)$, wobei Y eine Mengenvariable ist und $B(x, Y)$ keine weiteren gebundenen Mengenvariablen enthält, wohl aber freie Mengenvariablen enthalten darf.

2. Die Aussagen, die sich aus bereits zugelassenen Aussagen durch aussagenlogische Verknüpfungen oder durch Quantifizierung über den Grundbereich ergeben.

3. Die Aussagen, die sich aus bereits zugelassenen Aussagen ergeben, wenn für darin auftretende freie Mengenvariablen zugelassene Mengenterme $\{x \mid A(x)\}$ eingesetzt werden.

Der Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Π_1^1-Analysis erfolgt durch transfinite Induktion über eine Wohlordnung, die in elementarer (primitivrekursiver) Weise definierbar ist, für die aber der Wohlordnungsnachweis grundsätzlich nicht ohne Verwendung von imprädikativen Begriffen möglich ist, aber doch noch in einer gewissen konstruktiven Weise durchgeführt werden kann. Ich halte es für ein bedeutsames Ergebnis der Beweistheorie, daß auch wesentlich imprädikative Teile der Mathematik auf die Wohlordnungen von genau fixierten Ordinalzahlenabschnitten zurückgeführt werden konnten. Die kleinsten Ordinalzahlen, bis zu denen die transfinite Induktion für die Widerspruchsfreiheitsbeweise von zwei verwandten Systemen der Π^1_1-Analysis benötigt wird, wurden kürzlich von W. Buchholz und W. Pohlers genau bestimmt.

Mit dem Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Π^1_1-Analysis ist zwar nicht das ursprüngliche Ziel von Hilbert erreicht, Teile der klassischen Mathematik mit streng konstruktiven Mitteln zu begründen, aber doch ein tiefer Einblick in die beweistheoretische Stärke mathematischer Theorien gewonnen. In gewissem Sinne liefert aber auch der Widerspruchsfreiheitsbeweis der Π^1_1-Analysis einen Evidenznachweis für die mathematische Bedeutsamkeit des betreffenden Systems, da die Wohlordnung, auf der der Widerspruchsfreiheitsbeweis beruht, einen weniger problematischen Eindruck erweckt als die imprädikative Fassung der Π^1_1-Analysis.

Ich konnte hier nur einige Ergebnisse der Beweistheorie anführen. Die bisher vorliegenden beweistheoretischen Untersuchungen sind wesentlich vielfältiger. Sie gehen auch über die Π^1_1-Analysis hinaus, allerdings teilweise mit völlig nichtkonstruktiven Methoden. Einige stärkere Systeme als die Π^1_1-Analysis konnten aber noch durch elementar definierbare Ordinalzahlen charakterisiert werden.

Ich bin in meinem Vortrag von der früheren Grundlagenkrise der Mathematik ausgegangen und habe abschließend zu sagen, wie die Situation heute ist. Man spricht nicht mehr von einer Grundlagenkrise der Mathematik. Es gibt im allgemeinen keinen Streit mehr über Grundlagenfragen der Mathematik, keinen Streit, wie er früher recht heftig zwischen den beiden Richtungen von Brouwer und Hilbert entbrannt war. Keine dieser beiden Richtungen hat ihr ursprüngliches Ziel erreicht. Die intuitionistische Mathematik hat sich nicht durchgesetzt. Die Mathematik hat sich im wesentlichen in ihrer klassischen Form weiterentwickelt, konnte jedoch nicht in dem von Hilbert angestrebten Sinne mit mehr oder weniger finiten Methoden begründet werden.

Beide Richtungen haben jedoch zu wesentlichen Erkenntnissen über die Struktur der Mathematik geführt und sich gegenseitig gefördert. Der Intuitionismus, der auch heute noch – besonders in Holland – gepflegt wird, hat von der Beweistheorie die Formalisierung seiner Begriffsbildungen übernommen, eine Formalisierung, die von Brouwer entschieden abgelehnt worden war, und in der Beweistheorie hat sich die Zurückführung von Formalisierungen der klassischen Mathematik auf intuitionistische Formalisierungen als äußerst nützlich erwiesen.

Es hat sich herausgestellt, daß die klassische Mathematik, insbesondere die klassische Analysis, eine sehr starke Theorie ist, die sich grundsätzlich nicht elementarisieren läßt. Die Grundlagenuntersuchungen haben aber auch das Bewußtsein gestärkt, daß die nicht elementarisierbare Mathematik ein sinnvoller Gegenstand exakter Forschung ist. Eine Preisgabe derjenigen Teile der Mathematik, die sich nicht finit oder nicht prädikativ begründen lassen, würde eine dogmatische Einengung der Forschung bedeuten, auf die sich eine Wissenschaft nicht einlassen kann.

Die Beweistheorie beschränkt sich heute nicht darauf, Teile der Mathematik konstruktiv zu interpretieren, sondern sucht allgemeine logische Zusammenhänge zwischen Teilgebieten der Mathematik aufzudecken. Sie ist als eine Strukturtheorie mathematischer Beweismöglichkeiten aufzufassen. Die Begründung dieser Strukturtheorie verdanken wir zu einem wesentlichen Teil Herrn Bernays.

(Eingegangen: 22. 3. 1977)

Mathematisches Institut
der Universität München
Theresienstraße
8000 München

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
81 (1978) 13 – 21

Die Entwicklung der axiomatischen Mengenlehre *)

Von ERNST SPECKER in Zürich

Lassen Sie mich mit einem Zitat beginnen aus der Arbeit „Die Mathematik als ein zugleich Vertrautes und Unbekanntes“:

> Wenn der Menschengeist sich beschwert oder herabgedrückt fühlt durch das viele Rätselhafte im Dasein, durch den Eindruck unserer weitgehenden Unwissenheit in so vielen Bereichen, der Mangelhaftigkeiten der sprachlichen Wiedergabe und Verständigung, dann wendet er sich wohl gern dem Gebiet der Mathematik zu, in welchem ein deutliches und genaues Erfassen von Gegenständlichkeiten sich findet und Gewinnung von Einsicht durch angemessene Begriffe in so befriedigender Weise erreicht wird. Hier fühlt der menschliche Geist sich heimisch, hier erlebt er den Triumph, daß die Verwendung und Verbindung von ganz elementaren Vorstellungen, wie sie uns aus dem Kinderspiel vertraut sind, bedeutsame, überraschende und weittragende Resultate zu Tage bringt. An Konkretes als Ausgangspunkt anknüpfend betätigt sich das mathematische Denken in anschaulicher Fixierung und Vergegenwärtigung seiner Gegenstände und von da führt es durch Begriffsbildungen und gedankliche Verflechtung von Feststellungen zu Ergebnissen, die wiederum sich auf das Konkrete anwenden lassen ... [2].

Was hier von der Mathematik im allgemeinen gesagt ist, gilt wohl von der Mengenlehre im besonderen. Unser Geist darf sich in der Mengenlehre ja darum besonders heimisch fühlen, weil wir in der Lage sind, den Gegenstandsbereich sozusagen aus dem Nichts zu erschaffen. Beschränken wir uns nämlich auf Mengen, deren Elemente selbst wieder Mengen sind (was sich bekanntlich als hinreichend erwiesen hat), so dürfen wir uns vorstellen, daß alle Mengen aus einem Baustein – der leeren Menge Λ – aufgebaut sind.

---

*) Festvortrag anläßlich der Ehrenpromotion von Herrn Professor Dr. Paul Bernays in München am 16. Oktober 1976.

Durch die Prozesse der elementaren Mengenbildung entstehen so etwa die Mengen

$\{\Lambda\}$: Menge mit dem einen Element Λ
$\{\Lambda, \{\Lambda\}\}$
etc.

Bezüglich der Gleichheit setzen wir fest, daß zwei Mengen gleich sind, falls sie dieselben Elemente besitzen. Für den weiteren Aufbau scheint dann zunächst nur noch ein einziges Prinzip nötig zu sein, das Prinzip, daß eine Eigenschaft E (von Mengen) eine Menge M_E so bestimmt, daß gilt:

$$x \in M_E \leftrightarrow E(x) \qquad \text{(für alle } x\text{)}.$$

Als Ausgangspunkt der axiomatischen Mengenlehre darf die Einsicht betrachtet werden, daß das obige Prinzip unhaltbar ist. Wählen wir nämlich als E die Eigenschaft $x \notin x$, so erhielten wir eine Menge M_E mit

$$x \in M_E \leftrightarrow x \notin x \qquad \text{(für alle } x\text{)}.$$

Wählen wir für x speziell M_E, so ergibt dies

$$M_E \in M_E \leftrightarrow M_E \notin M_E \qquad \text{(Russellsche Antinomie).}$$

Zermelo ist der erste gewesen, der versucht hat, das allgemeine Komprehensionsprinzip so einzuschränken, daß einerseits die Antinomien vermieden werden und anderseits das in der Mathematik übliche Operieren erhalten bleibt, oder – um mit Hilbert zu sprechen – er hat versucht, das Paradies, das Cantor für die Mengenlehre entdeckt hat, zu retten. Wie im alten Paradies, so gibt es auch im neuen gewisse Einschränkungen. Diese Einschränkungen werden nun allerdings nicht negativ formuliert („du sollst nicht"), sondern es wird positiv das Erlaubte formuliert. Ganz ist dies allerdings Zermelo – wie wir sehen werden – noch nicht gelungen.

Das System von Zermelo („Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I", veröffentlicht 1908) [15] besteht aus sieben Axiomen.

Die Axiome I und II haben wir eigentlich schon eingeführt; sie drücken das Prinzip der Extensionalität (bei Zermelo: Bestimmtheit) und die Existenz von Elementarmengen aus. Die Axiome IV bis VII fordern die Existenz von Potenzmenge, Vereinigung, Auswahlmenge und einer unendlichen Menge in der folgenden Form:

> Es gibt eine Menge Z, welche die leere Menge enthält und mit einem Element a auch das Element $\{a\}$.

Alle diese Axiome sind durchaus positiv formuliert, und sie finden sich noch in ganz ähnlicher Form in modernen Axiomensystemen.

Anders das Axiom III (von Zermelo Axiom der Aussonderung genannt):

Ist die Klassenaussage $E(x)$ definit für alle Elemente einer Menge M, so besitzt M immer eine Untermenge M_E, welche alle diejenigen Elemente x von M, für welche $E(x)$ wahr ist, und nur solche als Elemente enthält.

In diesem Axiom kommt der Begriff „definit“ vor – was das ist, kann wohl nur an Hand von Beispielen verstanden werden, und zwar von positiven und negativen. Es wird also schon vorausgesetzt, daß wir den Unterschied von Gut und Böse kennen.

Zunächst also ein positives Beispiel: Sei Z eine Menge, wie im Unendlichkeitsaxiom gefordert, und sei die Aussage $E_1(x)$ definiert durch:

$$E_1(x) \quad \text{genau wenn} \quad x \quad \text{höchstens ein Element besitzt.}$$

Dadurch erhalten wir eine Teilmenge Z_1 von Z, welche immer noch die von Z geforderten Eigenschaften besitzt, zusätzlich aber noch für alle x die Eigenschaft E_1.

Und nun ein Beispiel einer nicht definiten Aussage: $E_2(x)$ besage, daß sich das Element x von Z durch höchstens 1000 Zeichen definieren lasse. $\Lambda, \{\Lambda\}, .. \{..\{\Lambda\}.\}, ..$ wären etwa solche Elemente. Sei nun r das erste unter den Elementen

$$\Lambda, \{\Lambda\}, \{\{\Lambda\}\}, \ldots,$$

welches sich nicht durch 1000 Zeichen definieren läßt – so ist r ja eben durch weniger als 1000 Zeichen definiert worden, und wir haben einen Widerspruch erhalten (Antinomie von Berry [1])).

Durch den Zusatz „definit“ sollen nun solche Begriffsbildungen ausgeschlossen werden. In einem gewissen Sinn ist dies auch durchaus gelungen, wenn auch nicht mit voller mathematischer Schärfe. Diese Schärfe ist in den Präzisierungen des Axioms von Fraenkel und Skolem erreicht.

In moderner Sprechweise drückt sich die Skolemsche Fassung [13] folgendermaßen aus:

Wir führen die Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe über den Primaussagen $x = y$, $x \in y$ (auch andere Variable) als Sprache der Mengenlehre schlechthin ein; definit ist nun alles, was sich sagen läßt.

Die Eigenschaft $E_1(x)$ („x hat höchstens 1 Element“) läßt sich dann ausdrücken:

$$\neg (\exists u)(\exists v)(u \in x \wedge v \in x \wedge \neg u = v);$$

[1]) Die Antinomie ist in Russell [11] veröffentlicht.

für die Eigenschaft E_2 ist auf alle Fälle keine solche Umschreibung offensichtlich. (Falls sie möglich wäre, hätten wir einen Widerspruch, was sich ja nicht ganz ausschließen läßt.)

Durch diese Präzisierung entspricht nun das Axiomensystem von Zermelo allen Anforderungen an mathematische Schärfe. Es hat allerdings seinen Charakter etwas geändert: Das Prinzip der Aussonderung wird nicht mehr durch ein einziges Axiom formuliert, sondern durch ein Axiomenschema oder, wenn man lieber will, durch unendlich viele Axiome (für jede Formel eines!).

Von hier aus stellt sich natürlicherweise die Frage, ob es überhaupt möglich sei, die Mengenlehre mit endlich vielen Axiomen zu erfassen. Diese Frage ist durch von Neumann in positivem Sinn beantwortet worden. Allerdings hat er nicht eigentlich die übliche Mengenlehre axiomatisiert, sondern das System, dessen Objekte Abbildungen von Mengen in Mengen sind. Da sich aber bekanntlich der Abbildungsbegriff durch den Mengenbegriff und der Mengenbegriff durch den Abbildungsbegriff ausdrücken läßt, so durfte nach von Neumann im Prinzip als bekannt gelten, daß eine endliche Axiomatisierung der Mengenlehre möglich sei. Daß aber diese endliche Axiomatisierung in einer sehr natürlichen und damit für die Weiterentwicklung auch handlichen Form existiere, diese Einsicht verdanken wir Herrn Bernays. Er hat sein System zuerst in einer Vorlesung eingeführt (1929/30 in Göttingen), publiziert und nach allen Richtungen hin untersucht wurde es im Journal of Symbolic Logic [1]. (Die erste Abhandlung erschien 1937, die siebte und letzte 1954.)

Der Grundgedanke des Systems von Herrn Bernays ist der folgende: Es gibt zwei Sorten von Individuen: Mengen und Klassen; Klassen vertreten dabei in einem gewissen Sinn die Eigenschaften. Fassen wir der Einfachheit halber Mengen als spezielle Klassen auf, so handelt es sich bei einem Axiomensystem nun darum, festzulegen, welche Klassen Mengen sind, und ferner Axiome der Klassenbildung anzugeben. Was dieses letztere betrifft, so ist etwa zu fordern, daß es zu Klassen A, B eine Klasse C gibt, so daß für alle Mengen x gilt: $x \in C$ genau wenn $x \in A$ und $x \in B$; ferner soll es zu jeder Klasse die Komplementärklasse geben. Nicht so naheliegend wie zu Konjunktion und Negation ist es, für den Existenzquantor das Analogon zu finden. Wesentlich für diese Möglichkeit ist es, daß sich der Begriff „das geordnete Paar von a, b" im System darstellen läßt. Soll dann etwa eine Gesamtheit, gegeben durch

$$(\exists y)\, \Phi(x, y),$$

durch eine Klasse dargestellt werden, so wird zuerst die Klasse der Paare $\langle x, y \rangle$ mit $\Phi(x, y)$ eingeführt und dann mit Hilfe eines Klassenbildungsaxioms, welches die Projektion ermöglicht, die gesuchte Klasse erhalten.

Daß ausgehend von einer endlichen Anzahl solcher einfachen Prinzipien dann gezeigt werden kann, daß jede „definite“ Eigenschaft eine Klasse darstellt, dies ist gewiß ein Beispiel dafür, „daß die Verwendung und Verbindung von ganz elementaren Vorstellungen bedeutsame, überraschende und weittragende Resultate zu Tage bringt“.

Auf Grund des Klassenbegriffes läßt sich nun das Prinzip der Aussonderung als ein wirkliches Axiom formulieren: Ist die Klasse A in einer Menge enthalten, so ist A eine Menge.

Fast ebenso einfach ist die Formulierung des sogenannten Ersetzungsaxioms von Fraenkel [7] – eines mathematischen Prinzips, welches insbesondere zum Aufbau der Kardinalzahltheorie gebraucht wird und das bei Zermelo noch nicht berücksichtigt war.

Neben der Bereitstellung des begrifflichen Rahmens für die Mengenlehre enthält die erwähnte Publikationsreihe von Herrn Bernays die erste – und bis heute noch nicht übertroffene – Untersuchung darüber, welche Axiome im einzelnen zur Darstellung von mathematischen Theorien nötig sind. Besonders interessant ist dabei die Frage nach der independenten Begründung der Ordinalzahlen sowie die Frage nach den Systemen, welche für die klassische Analysis ausreichen. Was diese letztere Frage betrifft, so hat sich das von Herrn Bernays eingeführte „Axiom der abhängigen Wahl“ in den neueren Untersuchungen zur Lebesgueschen Maßtheorie als besonders wichtig erwiesen.

Die Folge der sieben Arbeiten stellt somit gleichzeitig den Anfang und den Höhepunkt jenes Teiles der axiomatischen Mengenlehre dar, welcher sich zur Aufgabe stellt, ein Begriffssystem für die Mathematik anzugeben und dann auch zu untersuchen, wie nun des genaueren die Darstellung der verschiedenen Gebiete innerhalb des Systems sich gestaltet.

Welche anderen Aufgaben stellen sich der axiomatischen Mengenlehre?

An erster Stelle steht hier wohl die Aufgabe, den Status von mengentheoretischen Sätzen zu klären, die sich in der naiven Mengenlehre nicht haben entscheiden lassen, – und hier vor allem die Frage nach der Mächtigkeit des Kontinuums. Bekanntlich hat Cantor gezeigt, daß diese Mächtigkeit größer ist als die Mächtigkeit $\aleph_0$ der Menge der natürlichen Zahlen. Ferner hat Cantor gezeigt, daß es eine kleinste Mächtigkeit – $\aleph_1$ – gibt, welche größer ist als $\aleph_0$. Es stellt sich somit ganz natürlich die Frage nach dem Verhältnis von $2^{\aleph_0}$ (der Mächtigkeit des Kontinuums) und $\aleph_1$: Ist

$$\aleph_1 < 2^{\aleph_0} \qquad \text{oder} \qquad \aleph_1 = 2^{\aleph_0}?$$

Diese Frage ist in einem Sinn bis heute ungeklärt.

In der axiomatischen Mengenlehre dagegen ist eine gewisse Klärung erreicht worden. Dort besteht nämlich neben den Möglichkeiten, $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$

zu beweisen oder $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ zu beweisen, noch eine dritte Möglichkeit: der Nachweis, daß weder $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ noch $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ aus den Axiomen folgt.

Dieser Nachweis ist nun tatsächlich gelungen (Gödel und Cohen). (Dabei ist vorausgesetzt, daß das Axiomensystem widerspruchsfrei ist.) Die von den beiden Autoren zum Beweis entwickelten Methoden haben sich für die Weiterentwicklung der axiomatischen Mengenlehre als fundamental erwiesen und sollen daher kurz skizziert werden.

Der Satz von Gödel [8], welcher besagt, daß $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ nicht aus den Axiomen folgt, wird durch die Konstruktion einer Klasse L von Mengen bewiesen, für welche gilt: $\langle L, \in \rangle$ erfüllt die Axiome der Mengenlehre und zusätzlich $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

Die Klasse L wird folgendermaßen eingeführt: Ist zunächst x eine beliebige Menge, so sei $\mathrm{Def}(x)$ die folgendermaßen definierte Teilmenge der Potenzmenge von x:

$z \in \mathrm{Def}(x)$ genau wenn es eine Formel φ und Elemente $p_1, \ldots, p_k$ von x gibt mit

$$(\forall u)(u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge \tilde{\varphi}(p_1, \ldots, p_k, u)).$$

(Die Tilde über φ deutet an, daß die gebundenen Quantoren in φ auf x beschränkt werden.)

Die Definition von $\mathrm{Def}(x)$ – der in x definierbaren Teilmengen – ist dem Anschein nach recht nahe bei der Antinomie von Berry; sie kann aber in Ordnung gebracht werden – am einfachsten dadurch, daß analog der Finitisierung der Klassenbildungsaxiome das Schema durch endlich viele Spezialfälle und ihre Iteration ersetzt wird. Auf Grund der Operation Def ist dann L leicht folgendermaßen einzuführen:

$$L_0 = \Lambda, \; L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha),$$
$$L_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} L_\alpha \quad (\text{für Limeszahl } \lambda),$$
$$L = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} L_\alpha.$$

Daß nun in $\langle L, \in \rangle$ die Kontinuumshypothese gilt, das nachzuweisen, erfordert natürlich einige Arbeit. Es ist allerdings gelungen, durch Heranziehen von Begriffen der Modelltheorie den ursprünglichen Gödelschen Beweis durchsichtiger zu gestalten.

In der Klasse L gelten neben der Kontinuumshypothese weitere erstaunliche Sätze. Als Beispiel sei das Prinzip $\lozenge$ von Jensen[2]) erwähnt:

Es gibt eine Folge f von Funktionen: $f_\alpha: \alpha \to \alpha \; (\alpha \in \omega_1)$, so daß zu jeder Funktion $g, g: \omega_1 \to \omega_1$, ein α existiert mit

$$g \upharpoonright \alpha = f_\alpha.$$

---

[2]) Die Äquivalenz der Fassung des Textes mit jener von Jensen [9] ergibt sich aus Fassungen in [5], [6].

Aus $\Diamond$ folgt unmittelbar $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, es ist aber schwächer als $V = L$. Jensen hat das Prinzip $\Diamond$ abstrahiert aus seinem Beweis für die Ungültigkeit der Suslinschen Hypothese in L [14]. (Diese Hypothese besagt, daß in der üblichen Charakterisierung des Ordnungstyps der reellen Zahlen die Annahme einer abzählbaren dichten Teilmenge ersetzt werden kann durch die Bedingung, daß jede Menge von disjunkten Intervallen abzählbar ist.)

Die – rekursive – Konstruktion der Folge f ist einfach: f_α sei die erste Folge aus L (in der natürlichen Ordnung), welche keine Folge f_β mit $\beta < \alpha$ fortsetzt.

Als letztes soll nun noch skizziert werden, wie Cohen [4] gezeigt hat, daß $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ nicht aus den Axiomen folgt. Auch dieser Beweis ist in den letzten Jahren durchsichtiger geworden, wenn auch der fundamentale Ansatz derselbe geblieben ist [3]).

Es ist wohl naheliegend, zu versuchen, $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ dadurch zu widerlegen, daß der Bereich der Mengen vergrößert wird. Einen Ansatz dafür liefert die bekannte Tatsache, daß die Identitäten der klassischen Logik nicht nur in der Booleschen Algebra der beiden Werte wahr, falsch, sondern in jeder Booleschen Algebra gelten; sollen auch die Quantoren interpretiert werden, so ist diese Algebra ferner als vollständig vorauszusetzen. Denken wir nun daran, daß Mengen auch als Funktionen mit den Werten wahr, falsch interpretierbar sind – $x \in a \leftrightarrow a(x) =$ wahr –, so ergibt sich nun die Erweiterung eines Modelles $\mathfrak{M} = \langle M, \in \rangle$ zu $\mathfrak{M}^B$ dadurch, daß wir von den zweiwertigen Mengenfunktionen zu den Boolesch-wertigen übergehen. (In einer strengen Durchführung hat dies rekursiv zu geschehen.) Das Modell $\mathfrak{M}^B$ bewertet nun die Sätze der Mengenlehre noch nicht mit wahr/falsch, sondern erst mit Elementen aus B – es ist nicht schwierig, wenn auch aufwendig, zu zeigen, daß alle Axiome und damit alle beweisbaren Sätze den Wert 1 (Einselement von B) haben. Diese ganze Überlegung kann innerhalb der Mengenlehre durchgeführt werden, und es ist eigentlich noch nicht nötig, von Modellen zu sprechen. Der Schritt „nach außen" wird getan für den Nachweis, daß gewisse Elemente von B (z. B. der „Wert" der Kontinuumshypothese) nicht 1 sind. Dazu wird B homomorph auf die zweiwertige Boolesche Algebra abgebildet; da bei der Auswertung der Formeln mit Quantoren auch unendliche Vereinigungen auftreten, so müssen wir voraussetzen, daß der Homomorphismus mit diesen Vereinigungen vertauschbar ist. Bekanntlich lassen sich Homomorphismen auf die zweiwertige Boolesche Algebra durch das Urbild von „wahr" charakterisieren: Die obigen Bedingungen können nun so interpretiert werden, daß dieses Urbild ein „generischer Ultrafilter" ist.

[3]) Man vergleiche dazu [12] mit den recht ausführlichen historischen Bemerkungen über die Arbeiten von D. Scott, R. Solovay, P. Vopenka.

Die Existenz eines solchen Ultrafilters ist nun nicht selbstverständlich – falls wir von einem abzählbaren Modell ausgehen, ist die Existenz aber leicht nachzuweisen.

Es ist klar, daß hier nur der ganz grobe Rahmen der von Cohen eingeführten Methode skizziert werden konnte. Insbesondere wäre für ein genaueres Verständnis anzugeben, welche Boolesche Algebra für die Widerlegung von $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ zu wählen ist.

Wie die Gödelsche Beweismethode hat auch jene von Cohen Anlaß zu neuen Prinzipien gegeben. So hat etwa Martin [10] ein Axiom (MA)[4]) formuliert – es postuliert die Existenz von gewissen Homomorphismen Boolescher Algebren –, für welches gezeigt werden kann:

(MA + $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$) ist widerspruchsfrei;

(MA + $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$) impliziert die Suslinsche Hypothese.

Damit ist zusammen mit dem Resultat von Jensen die vollständige Unabhängigkeit der Suslinschen Hypothese von den üblichen Axiomen gezeigt.

Nach dem Vorangehenden könnte es scheinen, daß die axiomatische Mengenlehre sich geradlinig von Zermelo zur Betrachtung von recht seltsamen neuen Axiomen entwickelt habe. Dem ist natürlich nicht so; es mußte in der kurzen Übersicht notwendigerweise manches unerwähnt bleiben. Auf ein solches Gebiet soll zum Schluß noch hingewiesen werden: die Theorie der unerreichbaren Kardinalzahlen. Es ist dies eine Theorie, die auch Herrn Bernays fasziniert und zu der er in der Festschrift für Fraenkel [3] eine größere Arbeit veröffentlicht hat. Es wird darin gezeigt, wie aus der Annahme eines Relativierungsschemas die Existenz der unerreichbaren Kardinalzahlen von Mahlo folgt. Dieses Schema bringt zum Ausdruck, daß jede gültige Aussage über das ganze Mengensystem schon in einer geeignet gewählten Menge erfüllt ist.

In dem Zitat, mit dem wir begonnen haben, ist die Rede von der Anwendung auf Konkretes gewesen. Vielleicht erlauben Sie mir in dieser besonderen Stunde für Herrn Bernays, seine Freunde und Schüler, einmal auch eine besondere Anwendung seines Relativierungsschema zu machen:

Alles Gute und Schöne, das es irgendwo gibt, gibt es auch in der Nähe.

---

[4]) *Axiom von Martin.* Sei B eine vollständige Boolesche Algebra mit der Eigenschaft, daß jede Teilmenge B' von B von paarweise disjunkten Elementen abzählbar ist.

Sei ferner $\aleph < 2^{\aleph_0}$ und seien $b_{i,\alpha}$ für $i < \omega, \alpha < \aleph$ Elemente von B. Dann existiert ein Homomorphismus

$$h: B \to \{0,1\}$$

mit
$$h\left(\bigcup_i b_{i,\alpha}\right) = \bigcup_i h(b_{i,\alpha}) \qquad \text{für alle } \alpha\,.$$

Literaturverzeichnis

[1] Bernays, P.: A system of axiomatic set theory, parts I – VII. J. of Symbol. Log. **2** (1937) 65 – 77 ; **6** (1941) 1 – 17; **7** (1942) 65 – 89, 133 – 145; **8** (1943) 89 – 106; **13** (1948) 65 – 79; **19** (1954) 81 – 96

[2] Bernays, P.: Die Mathematik als ein zugleich Vertrautes und Unbekanntes. Synthese IX (1954) 465 – 471

[3] Bernays, P.: Zur Frage der Unendlichkeitsschemata in der axiomatischen Mengenlehre. In: Essays on the foundations of mathematics, dedicated to Prof. A. A. Fraenkel. Jerusalem 1961, 3 – 49

[4] Cohen, P. J.: The independence of the continuum hypothesis I, II. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **50** (1963) 1143 – 1148; **51** (1964) 105 – 110.

[5] Devlin, K. J.; Johnsbråten, H.: The Souslin Problem. Berlin-Heidelberg-New York 1974. = Lecture Notes in Mathematics, vol. 405

[6] Drake, F. R.: Set theory. Amsterdam 1974

[7] Fraenkel, A.: Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre. Math. Ann. **86** (1922) 230 – 237

[8] Gödel, K.: The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **24** (1938) 556 – 557

[9] Jensen, R. B.: Automorphism properties of Souslin continua. Notices Am. Math. Soc. **16** (1969) 576

[10] Martin, D. A.; Solovay, R. M.: Internal Cohen Extensions. Ann. of Math. Log. **2** (1970) 143 – 178

[11] Russell, B.: On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types. Proc. of the London Math. Soc. (2) **4** (1906) 29 – 53

[12] Scott, D.: A Proof of the Independence of the Continuum Hypothesis. Math. Systems Theory **1** (1967) 89 – 111

[13] Skolem, T.: Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. Wissenschaftliche Vorträge, gehalten auf dem 5. Kongreß der skandinavischen Mathematiker in Helsingfors 1922, 217 – 232

[14] Souslin, M.: Problème (3), Fundam. Math. **1** (1920) 223

[15] Zermelo, E.: Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. Math. Ann. **65** (1908) 261 – 281

(Eingegangen: 22. 3. 1977)

Eidgenössische
Technische Hochschule
Zürich
Rämistraße

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
81 (1978) 22–24

Nachwort *)

Von PAUL BERNAYS **)

Liebe Anwesende! Ich bin sehr gerührt und möchte mich herzlich bedanken für die große Ehre, die man mir hier hat zuteil werden lassen. Die beiden so schönen Vorträge von Herrn Schütte und Herrn Specker behandelten die zwei Gebiete, auf denen hauptsächlich meine mathematischen Arbeiten erfolgten. Beidemal waren diese angeregt durch die Unternehmungen bedeutender Forscher: das Unternehmen der Beweistheorie von Hilbert, und die axiomatischen Forschungen in der Mengenlehre von Zermelo und von Neumann, sowie neuerdings von Azriel Levy.

Die Beweistheorie hat eine andere Entwicklung genommen, als Hilbert es sich gedacht hatte. Aus dem beweistheoretischen Programm Hilberts ergab sich die Aufgabe, Beweise der Widerspruchsfreiheit für Disziplinen der klassischen Mathematik vom finiten Standpunkt aus zu führen. Diese Aufgabestellung mußte – wie man weiß – aufgrund der Ergebnisse Gödels insofern abgeschwächt werden, als ein solcher Nachweis der Widerspruchsfreiheit nur von einem erweiterten Standpunkt der Konstruktivität verlangt werden konnte. Solche Beweise durch erweiterte konstruktive Methoden sind dann auch mehreren Mathematikern gelungen. Insbesondere hat Herr Schütte für verschiedene formale Systeme konstruktive Widerspruchsfreiheitsbeweise erbracht. Der Effekt der Widerspruchsfreiheitsbeweise ist freilich kaum derjenige, wie er ursprünglich durch die Beweistheorie intendiert war: nämlich, die Evidenz der Widerspruchsfreiheit der klassischen Theorie merklich zu steigern. Vom klassischen Standpunkt ist die Widerspruchsfreiheit dieser Theorien ziemlich einfach zu ersehen. Die konstruktiven Beweise vermeiden zwar manche nicht-elementaren Hilfsmittel, andererseits aber sind sie recht schwierig zu verfolgen. Die Bedeutung dieser Beweise liegt auch nicht eigentlich darin, die Überzeugung von der Widerspruchsfreiheit zu wecken – worauf besonders Herr Kreisel hingewiesen hat –; vielmehr zeigt jeweils ein solcher Beweis etwas Weitergehendes als bloß die Widerspruchsfreiheit.

*) Nachträgliche Bemerkungen zu den vorstehend abgedruckten Festvorträgen.

**) Verstorben am 18. September 1977.

Andererseits kann man aber doch angesichts dieser Situation nicht sagen – wie es manche aufgrund der Gödelschen Ergebnisse taten –, daß die Beweistheorie gescheitert sei. Sie hat sich vielmehr reichhaltig entwickelt, und die Betrachtung der beweistheoretischen Strukturen erweist sich als fruchtbar für die Mathematik selbst.

Auch das andere der beiden genannten Forschungsgebiete, die axiomatische Mengenlehre, hat eine lebhafte Entwicklung genommen, und es ist den Mathematikern bewußt geworden, daß man die gesamte klassische Mathematik in ein System der Mengenlehre einordnen kann. Angesichts der heutigen Entwicklung der Mengenlehre, in welcher die Betrachtung riesiger Mächtigkeiten eine vornehmliche Rolle spielt, die ungeheuer weit über das hinausgehen, was in geometrischen Mannigfaltigkeiten vorkommt, mag man sich allerdings fragen, ob dieser Aspekt der Mathematik der dominierende sein solle, und ob man nicht vielmehr zurückkommen solle auf die alte Dualität von Arithmetik und Geometrie.

Allerdings, das Spezifische des Geometrischen kommt in der traditionellen Geometrie nicht deutlich zum Ausdruck. Dieses Spezifische, das zu der arithmetischen Intuition, auf welche Brouwer hinweist, im Geometrischen hinzukommt, ist die Vorstellung des Stetigen, die Vorstellung von Kurven und Flächen. Freilich, diese geometrische Intuition ist nicht so direkt präzise wie die arithmetische Intuition. Es bedarf hier einer Art der Präzisierung. Das tatsächliche Verfahren stellt eine Art von Kompromiß dar zwischen Anschaulichkeit und Begrifflichkeit. Für diese Art der Präzisierung erweist sich der Mengenbegriff und die Axiomatik als nützlich. Anhand der symbolischen Logik ist in neuerer Zeit die Präzisierung noch verschärft worden.

Diese schärfere Präzisierung ist freilich mit einer grundsätzlichen Problematik verbunden. Die scharf präzisierten Axiomensysteme gestatten zwar die Darstellung und auch die logische Formalisierung der klassischen Beweise. Aber diese Axiomensysteme haben jeweils auch Modelle ("non standard models"), die nicht der Intention der Arithmetik und der Geometrie entsprechen. Damit erhalten die mathematischen Theorien einen Charakter der Uneigentlichkeit, und zwar schon von der Zahlentheorie an.

Es mag auch als fragwürdig erscheinen, ob die Sätze der Zahlentheorie noch für so große Zahlen Sinn haben, die man nicht einmal dekadisch aufschreiben kann. Von der Anschauung her ist uns die Folge $0, 0', 0'', \ldots$ nur als Progreß in indefinitum, nicht in infinitum, gegeben.

Man soll aber andrerseits die Problematik auch nicht übertreiben. Neuerdings ist ja von Herrn Eduard Wette sogar behauptet worden, die Zahlentheorie sei widersprüchlich. Er beruft sich dafür auf einen von ihm geführten Widerspruchsfreiheitsbeweis für die intuitionistische Zahlentheorie, von dem er behauptet, daß er sich im Rahmen des formalen Systems der intuitionistischen Zahlentheorie darstellen lasse, – woraus ja nach dem Unvollständigkeitstheorem von Gödel die Widersprüchlichkeit der intuitionistischen Zahlentheorie, also erst recht der klassischen Zahlentheorie, folgen würde. Doch daß sich dieses so verhält, ist bisher nicht nachgeprüft worden und wird stark bezweifelt. Auch ist es kaum plausibel, daß die Diskrepanz zwischen der Endlichkeit unserer Beweismittel und der Unendlichkeit der intendierten Strukturen sich in der Widersprüchlichkeit der klassischen formalen Systeme auswirkt. Widersprüchlichkeit würde ja bedeuten, daß wir zuviel beweisen können, während der bestehende Sachverhalt dafür spricht, daß wir nicht genug beweisen können. In diese Richtung weisen ja auch alle die Feststellungen über die Existenz von "non standard models" sowie auch das Ergebnis von Paul Cohen, daß das Cantorsche Kontinuumsproblem im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre nicht lösbar ist.

In allen diesen neueren Ergebnissen kommt eine gewisse Unvollkommenheit unserer heutigen Mathematik zum Ausdruck, und sie bewirken jedenfalls, daß neben den formalen Systemen der klassischen Theorien die inhaltliche, nicht-formalisierte Mengenlehre, wie sie in der Semantik angewandt wird, ihre Bedeutung behält.

(Eingegangen: 27. 3. 1977)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
81 (1978) 25–44

Konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete*)

D. Gaier

Inhalt

Das Thema dieses Artikels gehört zum klassischen Bestand der Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen. Seine Ergebnisse reichen zum Teil weit zurück, und es gibt mehrere Lehrbücher, in denen es ausführlich behandelt wird. Doch handelt es sich um einen besonders schönen Teil der Funktionentheorie, bei dem die Wechselwirkung zwischen geometrischer und analytischer Betrachtungsweise sehr deutlich in Erscheinung tritt, und der sich besonders für die Behandlung in Vorlesungen eignet. Es soll daher versucht werden, einen Überblick über die wesentlichen Gesichtspunkte zu geben, wobei auch neuere Entwicklungen einbezogen werden.

---

*) Ausarbeitung von 5 Vorträgen, die der Verfasser im Februar 1977 bei einer „Lerntagung“ in Oberwolfach gehalten hat.

§ 0 Vorbereitende Bemerkungen

Zunächst sei G ein n-fach zusammenhängendes Gebiet der erweiterten komplexen Ebene $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, mit $\infty \in G$. Die Komponenten C_j von ∂G können nicht-punktförmig angenommen werden, da jede konforme Abbildung (KA) eines Gebiets in einem isolierten Randpunkt eine hebbare Singularität besitzt. Falls notwendig, können die C_j ferner als analytische Jordankurven angenommen werden: Bildet man das Äußere von C_1 mit $w_1 = h_1(z)$ konform auf $\{w_1 : |w_1| > 1\}$ ab, danach das Äußere von $h_1(C_2)$ auf $\{w_2 : |w_2| > 1\}$, usf., so erhält man nach n Schritten ein von n analytischen Jordankurven berandetes Bild von G durch die KA $h_n \circ \ldots \circ h_1$. Auf diesen Prozeß kommen wir in § 4 zurück.

Folgende F u n k t i o n s k l a s s e n werden benötigt:

$$\Sigma(G) = \left\{f : f \text{ in } G\backslash\infty \text{ regulär und schlicht; } f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots\right\};$$
$$\Sigma^*(G) = \{f \in \Sigma(G) \text{ mit } f(0) = 0\}, \text{ falls } 0 \in G;$$
$$\Sigma_0(G) = \{f \in \Sigma(G) \text{ mit } a_0 = 0\}.$$

Alle drei Klassen sind bezüglich der Operation $\circ$ abgeschlossen, und das Funktional $a_1 = a_1[f]$ genügt der Beziehung

$$a_1[f \circ g] = a_1[f] + a_1[g] \qquad f \in \Sigma(g(G)), g \in \Sigma(G).$$

Schließlich setzen wir noch

$$D_\rho = \{z : |z| > \rho\} \cup \{\infty\} \qquad (\rho > 0).$$

Es folgen einige H i l f s m i t t e l für § 1 und § 2.

Hilfssatz 1 *Ist* $f \in \Sigma(D_\rho)$ *und* $\omega \notin f(D_\rho)$, *so gilt* $|\omega - a_0| \leq 2\rho$. *Gleichheit besteht genau dann, wenn* $\Gamma = \partial f(D_\rho)$ *eine Strecke ist.*

B e w e i s. Es ist

$$F(z) := \frac{f(\rho z) - \omega}{\rho} = z + \frac{a_0 - \omega}{\rho} + \frac{a_1}{\rho^2}\frac{1}{z} + \ldots$$

schlicht in D_1 und $\neq 0$. Daher ist

$$(F(z^2))^{1/2} = z + \frac{a_0 - \omega}{2\rho}\frac{1}{z} + \ldots$$

schlicht in D_1. Der Flächensatz (Anhang) liefert $\left|\frac{a_0 - \omega}{2\rho}\right| \leq 1$, wobei Gleichheit genau dann steht, wenn

$$(F(z^2))^{1/2} = z + \frac{a_0 - \omega}{2\rho}\frac{1}{z} = z + e^{i\varphi}/z$$

gilt, d. h. für

$$f_\varphi(z) = z + [\omega + 2\rho e^{i\varphi}] + \frac{\rho^2 e^{2i\varphi}}{z}.$$

Das Bild von D_ρ unter f_φ wird von einer Strecke berandet, deren Länge 4ρ und deren Steigungswinkel φ ist.

Folgerung 1 *Für* f *aus Hilfssatz* 1 *ist* diam $\Gamma \leqslant 4\rho$, *mit Gleichheit genau dann, wenn* $f = f_\varphi$ *gilt für ein* $\varphi \in \mathbf{R}$.

Denn für zwei beliebige Randpunkte $\omega_{1,2}$ von $f(D_\rho)$ gilt $|\omega_{1,2} - a_0| \leqslant 2\rho$, also $|\omega_1 - \omega_2| \leqslant 4\rho$. Gleichheit führt auf f_φ.

Folgerung 2 *Die Klassen* $\Sigma_0(G)$ *und* $\Sigma^*(G)$ *sind normal und kompakt.*

Ist nämlich $f \in \Sigma_0(G)$ und ρ so groß, daß $\partial G \subset \{z\colon |z| < \rho\}$, so ist wegen Hilfssatz 1 ($a_0 = 0$!) $|f(z)| \leqslant 2\rho$, falls $z \in G \cap \{z\colon |z| \leqslant \rho\}$. Damit sind die $f \in \Sigma_0(G)$ lokal gleichmäßig beschränkt in G. Wegen der Normierung der Funktionenklassen ist jede Grenzfunktion schlicht und in ∞ richtig normiert.

Für $f \in \Sigma^*(G)$ wählen wir ρ wie eben und wenden Hilfssatz 1 mit $\omega = 0$ an: $|a_0| \leqslant 2\rho$. Da $f - a_0 \in \Sigma_0(G)$ ist, sind somit auch die $f \in \Sigma^*(G)$ lokal gleichmäßig beschränkt.

§ 1 Konforme Abbildung auf Parallelschlitzgebiete

Eines der Hauptprobleme in der Theorie der KA mehrfach zusammenhängender Gebiete ist die Frage nach Standardgebieten, auf die sich jedes Gebiet n-fachen Zusammenhangs abbilden läßt.

A Abbildungssatz

Ein Gebiet $S \subset \hat{\mathbf{C}}$, dessen Rand ∂S aus n Strecken mit Steigungswinkel ϑ besteht, heißt ein ϑ-Schlitzgebiet. Sind Γ_j die Komponenten von ∂S, so gilt also $\operatorname{Im}(e^{-i\vartheta} w) = c_j$ für $w \in \Gamma_j$; für $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi/2$ ergeben sich Horizontal- bzw. Vertikalschlitzgebiete. Hilbert und Koebe bewiesen schon 1909, daß jedes mehrfach zusammenhängende Gebiet G konform auf ein ϑ-Schlitzgebiet abbildbar ist (potentialtheoretische Methode), doch gelang die Charakterisierung durch ein funktionentheoretisches Extremalproblem erst de Possel (1931) und Grötzsch (1932).

Wir betrachten zunächst den S o n d e r f a l l $n = 1$. Für $G = D_1$ liefern $z \mapsto z + \frac{1}{z}$ und $z \mapsto z - \frac{1}{z}$ Abbildungen auf ein Horizontal- bzw. Vertikalschlitzgebiet, so daß man einen Zusammenhang der Abbildung mit dem Koeffizienten von $1/z$ vermuten wird.

Satz 1 *Bildet* $w = h(z) = z + a_1/z + \ldots$ *das einfach zusammenhängende Gebiet* G *auf ein* ϑ*-Schlitzgebiet ab, so gilt* $\operatorname{Re}(a_1 e^{-2i\vartheta}) \geqslant 0$. *Gleichheit besteht genau dann, wenn* G *selbst ein* ϑ*-Schlitzgebiet ist.*

B e w e i s. Angenommen, $\partial h(G)$ sei eine ϑ-Strecke: Mittelpunkt B, Länge 4 A, Steigungswinkel ϑ. Dann bildet

$$w = A\left(\omega + \frac{e^{2i\vartheta}}{\omega}\right) + B \tag{1.1}$$

das Gebiet $\{\omega\colon |\omega| > 1\}$ ebenfalls auf $h(G)$ ab, so daß wir h^{-1} mit (1.1) komponieren können:

$$z = h^{-1}(w) = w - \frac{a_1}{w} + \ldots = A\omega + B + \left(Ae^{2i\vartheta} - \frac{a_1}{A}\right) \cdot \frac{1}{\omega} + \ldots$$

ist eine in D_1 schlichte Funktion. Bieberbachs Flächensatz liefert

$$\left|\frac{1}{A}\left(Ae^{2i\vartheta} - \frac{a_1}{A}\right)\right| \leqslant 1, \quad \text{also} \quad \left|1 - \frac{a_1 e^{-2i\vartheta}}{A^2}\right| \leqslant 1,$$

also $\operatorname{Re}(a_1 e^{-2i\vartheta}) \geqslant 0$. Dabei besteht Gleichheit genau dann, wenn $a_1 = 0$ ist und

$$z = A\omega + B + Ae^{2i\vartheta}/\omega = w$$

ist, wie behauptet.

Eine genauere Aussage ist mit Hilfe der ϑ - B r e i t e von ∂G möglich. Darunter verstehen wir den kleinsten Abstand zweier Parallelen in Richtung ϑ, die ∂G eingrenzen:

$$\vartheta\text{-Breite} = \max\{\operatorname{Im}(ze^{-i\vartheta}) : z \in \partial G\} - \min\{\operatorname{Im}(ze^{-i\vartheta}) : z \in \partial G\}.$$

Zusatz *Liegt* ∂G *in einem Kreis um* 0 *mit Radius* R, *und hat* ∂G *eine* *ϑ-Breite* $\geqslant d > 0$, *so ist sogar* $\operatorname{Re}(a_1 e^{-2i\vartheta}) \geqslant p(R, d) > 0$, *unabhängig von* G.

Grötzsch nennt das einen Gleichmäßigkeitssatz.

Nun sei a l l g e m e i n G n-fach zusammenhängend,

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots \qquad \in \Sigma_0(G),$$

und es werde das Extremalproblem betrachtet

$$\operatorname{Re}(a_1[f]e^{-2i\vartheta}) = \max! \qquad (f \in \Sigma_0(G)). \tag{1.2}$$

Satz 2 a) *Das Extremalproblem* (1.2) *besitzt eine Lösung* f_0.

b) *Jede Lösung* f_0 *bildet* G *auf ein ϑ-Schlitzgebiet ab.*

c) f_0 *ist eindeutig bestimmt.*

B e w e i s. a) Weil die Klasse $\Sigma_0(G)$ normal und kompakt ist und weil $a_1[f]$ stetig von f abhängt, wird $\sup\{\operatorname{Re}(a_1[f]e^{-2i\vartheta}) : f \in \Sigma_0(G)\}$ durch ein $f_0 \in \Sigma_0(G)$ angenommen.

b) Sei f_0 eine Lösung von (1.2), und eine Komponente von $\partial f_0(G)$ sei kein ϑ-Schlitz. Ihr Äußeres werde durch h, in ∞ normiert, auf ein ϑ-Schlitzgebiet abgebildet (Fall $n = 1$). Nach Satz 1 gilt

$$\operatorname{Re}(a_1[h]e^{-2i\vartheta}) > 0 \quad \text{und} \quad h \in \Sigma_0(f_0(G)).$$

Damit folgt nun

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(a_1[h \circ f_0]e^{-2i\vartheta}) &= \operatorname{Re}(a_1[h]e^{-2i\vartheta}) + \operatorname{Re}(a_1[f_0]e^{-2i\vartheta}) \\ &> \operatorname{Re}(a_1[f_0]e^{-2i\vartheta}),\end{aligned}$$

also war f_0 nicht Extremalfunktion. Folglich sind alle Komponenten von $\partial f_0(G)$ ϑ-Schlitze.

c) Sind f_1, f_2 zwei ϑ-Schlitzabbildungen, so ist $d = f_1 - f_2$ in G regulär, einschließlich $z = \infty$, wo $d(\infty) = 0$ ist. Ist $d \neq 0$, so ist $W := \{d(z) : z \in G\}$ eine offene Menge. Nun bemerken wir, daß $\operatorname{Im}(e^{-i\vartheta}d(z))$ gegen $d_j \in \mathbf{R}$ strebt, wenn z gegen die Komponenten C_j von ∂G strebt. Nehmen wir daher einen Punkt $d(z_0)$ von W mit $\operatorname{Im}(e^{-i\vartheta}d(z_0)) \neq d_j$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, und schreiten von $d(z_0)$ in

ϑ-Richtung nach ∞ voran, so kommen wir nie zu einem Randpunkt von W, bleiben damit in W; damit wäre d in G unbeschränkt, was falsch ist. Also ist $d = 0$.

B Zusammenhang verschiedener Schlitzabbildungen

Zu fest gegebenem Gebiet G sei jetzt f_ϑ die nach Satz 2 eindeutig bestimmte Funktion aus $\Sigma_0(G)$, die G auf ein ϑ-Schlitzgebiet abbildet. Dann läßt sich f_ϑ durch f_0 und $f_{\pi/2}$ linear kombinieren:

$$f_\vartheta(z) = e^{i\vartheta}[\cos\vartheta\, f_0(z) - i \sin\vartheta\, f_{\pi/2}(z)].$$

Denn es ist f_ϑ in ∞ richtig normiert, schlicht in G (wie eine Anwendung des Argumentprinzips zeigt), und $\mathrm{Im}(e^{-i\vartheta} f_\vartheta(z)) \to \cos\vartheta\, c_j + \sin\vartheta\, d_j$ für $z \to C_j$. Also vermittelt f_ϑ *die* ϑ-Schlitzabbildung.

Betrachtet man den Koeffizienten von $1/z$, also

$$a_1[f_\vartheta] = e^{i\vartheta}(\cos\vartheta\, a_1[f_0] - i \sin\vartheta\, a_1[f_{\pi/2}]) = M + Re^{2i\vartheta}$$

mit $$M = \frac{1}{2}(a_1[f_0] + a_1[f_{\pi/2}]) \text{ und } R = \frac{1}{2}(a_1[f_0] - a_1[f_{\pi/2}]), \qquad (1.3)$$

so erkennt man, daß die Zahlen $a_1[f_\vartheta]$ den Kreis mit Mittelpunkt M und Radius R durchlaufen; man beachte, daß aus (1.2) für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi/2$ folgt

$$\mathrm{Re}\, a_1[f_{\pi/2}] \leqslant \mathrm{Re}\, a_1[f_\vartheta] \leqslant \mathrm{Re}\, a_1[f_0],$$

so daß $R \geqslant 0$ ist. Und ist $f \in \Sigma_0(G)$ *beliebig*, so gilt $\mathrm{Re}(a_1[f]e^{-2i\vartheta}) \leqslant \mathrm{Re}(a_1[f_\vartheta]e^{-2i\vartheta})$, für alle $\vartheta \in [0, \pi]$, und das heißt, daß $a_1[f]$ jedenfalls im Kreis

$$\{\zeta : |\zeta - M| \leqslant R\} \qquad (1.4)$$

gelegen ist für jedes $f \in \Sigma_0(G)$. Eine einfache Stetigkeitsüberlegung zeigt, daß tatsächlich alle Werte innerhalb des Kreises angenommen werden:

Der Wertevorrat des Funktionals $a_1[f]$, $f \in \Sigma_0(G)$, *ist der Kreis* (1.4) *mit* M *und* R *gemäß* (1.3).

Dieses Ergebnis stammt von Grötzsch (1932) und Schiffer (1943); der Durchmesser 2 R des Kreises, span G, wird von Schiffer näher untersucht.

C Weitere Ergebnisse

Auch gemischte Schlitzabbildungen sind möglich; das Bildgebiet wird von p horizontalen und n-p vertikalen Strecken berandet (Koebe 1918, Komatu 1953). Eine Charakterisierung durch ein Extremalproblem ist wieder möglich.

Die Funktionen $N := (f_0 + f_{\pi/2})/2$ und $M := (f_0 - f_{\pi/2})/2$ haben noch Beachtung gefunden. Wichtig ist, daß N in G schlicht ist und die Randkomponenten von N(G) konvexe Jordankurven sind. Die von ihnen umschlossene Fläche ist maximal in der Klasse Σ_0, und zwar $\pi/2 \cdot$ span G, wie Schiffer 1943 zeigte. Siehe auch Ahlfors und Beurling 1950.

§ 2 Kreisbogenschlitz- und Radialschlitzabbildung

Jetzt soll das n-fach zusammenhängende Gebiet G auf weitere Standardgebiete abgebildet und die Abbildung wieder durch eine Extremaleigenschaft charakterisiert werden.

A Die Ungleichung von Rengel

Es bezeichne S ein mit endlich vielen Vertikalschlitzen über den Punkten x_j versehenes Rechteck (Fig. 1), γ_x einen Querschnitt in S über der Abszisse x.

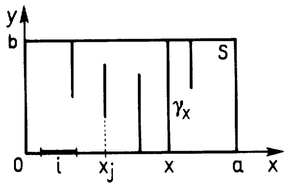

Fig. 1

Satz 3 *Es sei* F *in* S *regulär und* $I := \iint_S |F'|^2 db \leqslant \infty$. *Ferner sei*

$$\int_{\gamma_x} |F'| dy \geqslant \beta > 0 \quad \textit{für } 0 < x < a,\ x \neq x_j,$$

$$\int_{\gamma_x} |F'| dy \geqslant \beta + c \quad \textit{für } x \in i, \textit{ wobei } |i| = \delta \geqslant 0,\ c > 0 \textit{ ist.}$$

Dann gilt

$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{I}{\beta^2} - 2\,\frac{c\delta}{b\beta}\,. \tag{2.1}$$

Gleichheit besteht genau dann, wenn $\delta = 0$ *und* $F' = e^{i\alpha} \cdot \beta/b$ *ist.*

Dieser Satz verknüpft Längen und Flächen und ordnet sich in natürlicher Weise in die allgemeine Theorie der Moduln von Kurvenklassen ein (hierzu siehe Anhang 2). Wir geben einen Beweis „aus dem Stand".

B e w e i s. Integriert man die Voraussetzungen bezüglich x, so erhält man

$$\int_x \int_{\gamma_x} |F'| dy\, dx \geqslant \beta(a - \delta) + (\beta + c)\delta = \beta a + \delta c.$$

Nun ist aber

$$0 \leqslant \iint_S \left(|F'| - \frac{\beta}{b}\right)^2 db = \iint_S |F'|^2 db - 2\,\frac{\beta}{b} \iint_S |F'| db + \frac{\beta^2}{\delta^2} \cdot ab.$$

Das letzte Integral ist $\geqslant \beta a + \delta c$, das vorletzte = I; daraus folgt (2.1). Die Diskussion des Gleichheitszeichens ist klar. – Wir heben noch hervor

Sonderfall $\delta = 0$ *Ist* $\int_{\gamma_x} |F'| dy \geqslant \beta > 0$ *für* $0 < x < a,\ x \neq x_j$, *so gilt* $\dfrac{I}{\beta^2} \geqslant \dfrac{a}{b}$.

Daraus folgt sofort ein E i n s c h l i e ß u n g s s a t z für Moduln von Vierecken V. Es sei (Fig. 2)

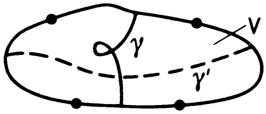

Fig. 2

α = inf{Längen von Kurven γ}
β = inf{Längen von Kurven γ'}
I = Fläche von V.

Dann gilt für den Modul der Kurvenklasse $\Gamma = \{\gamma\}$ die Ungleichung

$$\frac{\beta^2}{I} \leqslant m(\Gamma) \leqslant \frac{I}{\alpha^2}.$$

B Das Kreisbogenschlitz-Theorem

Es sei G ein Kreisbogenschlitzgebiet, d. h. die Vollebene $\hat{\mathbf{C}}$ mit n Schlitzen, die auf Kreisen um $z = 0$ liegen. Wir betrachten Abbildungen f von G aus der Klasse $\Sigma^*(G)$:

$$f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots; \quad f(0) = 0.$$

Satz 4 *Es gilt* $|f'(0)| \leqslant 1$, *mit Gleichheit genau dann, wenn* $f(z) = z$ *ist.*

B e w e i s. Es sei r, R so gewählt, daß die n Schlitze in $\{z : r < |z| < R\}$ liegen. Es bezeichne γ das Bild von $\{z: |z| = r\}$ und Γ das von $\{z: |z| = R\}$ unter f, und es sei

$$A(R) = \max\{|w|: w \in \Gamma\}, \qquad a(r) = \min\{|w|: w \in \gamma\}.$$

Sodann schlitzen wir $G \cap \{z: r < |z| < R\}$ längs $r < z < R$ auf und entsprechend das Bild in der w-Ebene. Nun ist $z' = \log z$, $w' = \log w$ anwendbar: In der z'-Ebene entsteht ein vertikal geschlitztes Rechteck vom Typ S des Satzes 3, in der w'-Ebene sein Bild; die Abbildung heiße $w' = F(z')$.

Jeder Querschnitt γ_x hat ein Bild der Länge $\geqslant 2\pi$, und $F(S')$ hat eine Fläche $\leqslant 2\pi\,[\log A(R) - \log a(r)]$. Die Anwendung des Sonderfalles $\delta = 0$ von Abschnitt A mit $\beta = 2\pi$, $a = \log(R/r)$, $b = 2\pi$ liefert daher

$$2\pi \log \frac{A(R)}{a(r)} \geqslant I \geqslant 2\pi \log \frac{R}{r}$$

also $\quad \dfrac{a(r)}{r} \leqslant \dfrac{A(R)}{R}$.

Für $r \to 0$, $R \to \infty$ ergibt sich $|f'(0)| \leqslant 1$.

Ist $|f'(0)| = 1$, so haben zunächst alle γ_x Bilder der Länge 2π. Andernfalls wären die Längen $\geqslant 2\pi + c$ für ein ganzes x-Intervall, und (2.1) liefert einen Widerspruch. Daher gehen kleine Kreise um $z = 0$ in Kreise um $w = 0$ über, weshalb $f(z) = Cz$ ist. Wegen der Normierung in ∞ ist $f(z) = z$.

Eine verwandte Situation entsteht, wenn das Gebiet G außen von $\{z: |z| = 1\}$ und weiteren $n - 1$ Kreisbogenschlitzen um 0 berandet ist und der Einheitskreis in sich übergeht; einzige weitere Normierung $f(0) = 0$.

Satz 5 *Auch jetzt gilt* $|f'(0)| \leqslant 1$, *mit Gleichheit genau dann, wenn* $f(z) = e^{i\alpha} z$ *ist.*

Der Beweis von Satz 4 läßt sich direkt übertragen; wir setzen $R = 1$, $A(R) = 1$. – Mit Hilfe des Schwarzschen Lemmas beweist man noch den

Zusatz *Die Aussage von* Satz 5 *bleibt richtig, wenn* f *das Gebiet* G *in den Einheitskreis abbildet und dabei* $\{z: |z| = 1\}$ *in den Außenrand übergeht.*

C Die Kreisbogenschlitz-Abbildung

Das Gebiet G sei nun wieder beliebig n-fach zusammenhängend, $0 \in G$. Wir betrachten Abbildungen

$$f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots, \; f(0) = 0, \quad \text{d. h. } f \in \Sigma^*(G),$$

und stellen das Extremalproblem

$$|f'(0)| = \max! \qquad (f \in \Sigma^*(G)). \tag{2.2}$$

Satz 6 a) *Das Extremalproblem* (2.2) *besitzt eine Lösung* f_0.
b) *Jede Lösung* f_0 *bildet* G *auf ein Kreisbogenschlitzgebiet ab.*
c) f_0 *ist eindeutig bestimmt.*

B e w e i s. a) wird wie üblich bewiesen.

b) Sei f_0 eine Lösung von (2.2), und angenommen, eine Komponente von $\partial f_0(G)$ sei kein Kreisbogenschlitz um 0. Ihr Äußeres werde durch h, $h \in \Sigma^*$, auf das Komplement eines Kreisbogens um 0 abgebildet (Fall $n = 1$). Nach Satz 4 ist

$$|h'(0)| > 1 \quad \text{und} \quad h \circ f_0 \in \Sigma^*(G).$$

Damit folgt nun

$$|(h \circ f_0)'(0)| > |f_0'(0)|,$$

also war f_0 nicht Extremalfunktion. Folglich sind alle Komponenten von $\partial f_0(G)$ Kreisbogenschlitze um 0.

c) Sind f_0, f_1 zwei Lösungen von (2.2), so bildet $\Phi = f_1 \circ f_0^{-1}$ die Kreisbogenschlitzgebiete $f_0(G)$, $f_1(G)$ aufeinander ab. Satz 4, auf Φ und Φ^{-1} angewandt, liefert $|\Phi'(0)| = 1$, also ist $\Phi = \mathrm{id}$ oder $f_0 = f_1$.

Bemerkungen 1) In der vor Satz 5 geschilderten verwandten Situation führt das Extremalproblem (2.2) auf den Einheitskreis mit $n - 1$ zu 0 konzentrischen Kreisbogenschlitzen.

2) Stellt man das zu (2.2) entsprechende M i n i m u m - P r o b l e m, so erhält man R a d i a l s c h l i t z -Abbildungen, d. h., die Bildgebiete besitzen n (bzw. $n - 1$) Schlitze, die auf den Nullpunkt zuweisen. Die Beweise verlaufen analog.

§ 3 Geometrische Extremalprobleme

Die bisher behandelten Standardgebiete haben große Bedeutung bei der Lösung zahlreicher geometrischer Extremalprobleme für n-fach zusammenhängende Gebiete. Wir geben einen Überblick und behandeln zwei Probleme genauer.

A Zusammenstellung wichtiger Extremalprobleme

In den Jahren 1928 bis 1934 hat Grötzsch eine Anzahl sehr schöner geometrischer Extremalprobleme untersucht. Die meisten der folgenden Ergebnisse gehen auf ihn zurück; siehe auch besonders Jenkins 1958, S. 90ff.

Zunächst zwei Modulprobleme, die z. B. bei Ahlfors 1973 behandelt sind. Ist G ein zweifach zusammenhängendes Gebiet, berandet vom Einheitskreis und einem Kontinuum Γ, das $R > 1$ und ∞ enthält, so wird sein Modul maximal, wenn $\Gamma = \{z: z \geqslant R\} \cup \{\infty\}$. Ist ferner G ein zweifach zusammenhängendes Gebiet, berandet vom Intervall $[-1, 0]$ und einem Kontinuum Γ, das einen Punkt z_0 mit $|z_0| = R$ und ∞ enthält, so wird sein Modul maximal, wenn $\Gamma = \{z: z \geqslant R\} \cup \{\infty\}$.

Nun sei G n-fach zusammenhängend und $\partial G = \cup \Gamma_j$, und $f \in \Sigma(G)$ bilde G auf ein anderes n-fach zusammenhängendes Gebiet G' mit $\partial G' = \cup \Gamma_j'$ ab. Dann führt das Extremalproblem in der Klasse $\Sigma(G)$

diam $\Gamma_j' = \max!$ auf ein Ellipsenschlitzgebiet: Γ_j' wird eine Strecke $\overline{PQ}$, $\Gamma_k'(k \neq j)$ liegen auf Ellipsen mit Brennpunkten P und Q;

diam $\Gamma_j' = \min!$ und Umfang $(\Gamma_j') = \min!$ auf ein Gebiet, das von einem Kreis Γ_j' und $n-1$ Radialschlitzen berandet ist;

$\max\{|w_j - w_k|: w_j \in \Gamma_j', w_k \in \Gamma_k'\} = \max!$ auf ein Gebiet, für welches Γ_j' und Γ_k' auf einer Strecke liegen, während die $n-2$ übrigen Komponenten auf Ellipsen liegen, deren Brennpunkte die Punkte mit maximalem Abstand sind;

$\min\{|w_j - w_k|: w_j \in \Gamma_j', w_k \in \Gamma_k'\} = \min!$ auf ein entsprechendes Gebiet, bei dem die $n-2$ übrigen Komponenten auf Hyperbeln liegen, deren Brennpunkte die Punkte mit minimalem Abstand sind;

$|f(z_1) - f(z_2)| = \max!$, $(z_1, z_2 \in G)$, auf ein Ellipsenschlitzgebiet.

Weiter kann der Wertevorrat $W\{h\}$ verschiedener Funktionale h angegeben werden. Es ist

$W\{f(z_0)\}$, $(z_0 \in G)$, eine Kreisscheibe, wenn f die Klasse $\Sigma_0(G)$ oder die Klasse $\Sigma^*(G)$ durchläuft, „Verschiebungsproblem";

$W\{\log f'(z_0)\}$, $(z_0 \in G)$, ist eine Kreisscheibe, wenn f die Klasse $\Sigma(G)$ durchläuft, „Verzerrungsproblem".

Fixiert man schließlich vier Punkte z_1, z_2, z_3, z_4 in G, so läßt sich $W\{D(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4))\}$ beschreiben, wobei D das Doppelverhältnis der vier Bildpunkte ist (Grötzsch 1933). Die Abbildungen f werden so normiert, daß 0, 1, ∞ Fixpunkte sind. Als Wertevorrat von $f(z_4)$ ergibt sich dann nach Abbildung durch die inverse Modulfunktion J^{-1} eine Kreisscheibe.

B Das Durchmesserproblem

Für das oben zuerst genannte Problem soll hier eine vereinfachte Lösung angegeben werden. Es sei also G n-fach zusammenhängend, Γ eine ausgezeichnete Komponente von ∂G, $f \in \Sigma(G)$, und $D[f] := \text{diam } f(\Gamma)$ gesetzt.

Satz 7 *Es ist* $D[f]$ *maximal genau dann, wenn* $f(\Gamma)$ *eine Strecke ist, während die übrigen Komponenten von* $\partial f(G)$ *auf Ellipsen liegen, deren Brennpunkte in den Endpunkten der Strecke liegen.*

B e w e i s (s. auch Komatu 1969). Für die Einfachheit des Beweises ist wichtig zu erkennen, daß G geeignet angenommen werden kann. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (Einschaltung einer Hilfsabbildung) kann nämlich G als

Kreisbogenschlitzgebiet angenommen werden, innen von $\Gamma = \{z: |z| = 1\}$ berandet und ferner noch von $n - 1$ zu 0 konzentrischen Kreisbögen.

Für $f \in \Sigma$ sei $f(G) = G_w$ in der w-Ebene gelegen und $f(\Gamma)$ mit Γ_w bezeichnet. Sein gesamtes Äußeres g werde durch die Hilfsabbildung $h \in \Sigma(g)$ auf $\{\omega: |\omega| > \rho\}$ abgebildet, wobei G_w in G_ω übergehe.

(a) Folgerung 1 von Hilfssatz 1, auf h^{-1} angewandt, ergibt $D[f] \leqslant 4\rho$.

(b) Setzt man momentan $\zeta = 1/z$, $\tau = \rho/\omega$, so ist auf die Abbildung $\zeta \mapsto \tau$ Satz 5 anwendbar: $|\tau'(0)| \leqslant 1$, was $\rho \leqslant 1$ bedeutet. Damit wird $D[f] \leqslant 4$.

Im Falle der Gleichheit muß erstens $\rho = 1$ sein, d. h. $|\tau'(0)| = 1$, also (Satz 5) ist $\zeta \mapsto \tau$ eine Drehung, G_ω also ein Kreisbogenschlitzgebiet. Zweitens muß auch in (a) das Gleichheitszeichen stehen, also muß h^{-1} von der Form $\omega + \rho^2 e^{2i\varphi}/\omega + c$ sein (Hilfssatz 1), was aus G_ω ein Ellipsenschlitzgebiet G_w produziert. Und ist G_w von dieser Art, so wird $D[f] = 4$.

C Ein Flächeninhaltsproblem

Nun sei ausnahmsweise G ein endliches, d. h. in **C** gelegenes, n-fach zusammenhängendes Gebiet, z_0 ein fester Punkt in G, und

$$K = \{f: f \text{ schlicht in } G;\ f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 1\}.$$

Wir stellen das Extremalproblem

$$A(f) := \iint_G |f'(z)|^2 \, db = \min! \qquad (f \in K), \tag{3.1}$$

ein Problem, das bereits Grötzsch 1931 durch Verweis auf seine Flächenstreifenmethode knapp behandelt hatte. Wir geben eine einfache Darstellung.

Satz 8 a) *Das Problem* (3.1) *besitzt eine Lösung.*

b) *Jede Lösung* f_0 *bildet* G *auf eine Kreisscheibe um* 0 *mit* $n - 1$ *zu* 0 *konzentrischen Kreisbogenschlitzen ab.*

Die Lösung braucht nicht eindeutig bestimmt zu sein. Da jedoch eine der n Komponenten von ∂G in den Kreis übergehen muß, und die Abbildung dann eindeutig bestimmt ist (Satz 5), kann es höchstens n Lösungen von (3.1) geben. Für $n = 2$ existieren 2 Lösungen genau dann, wenn G eine konforme Selbstabbildung mit Fixpunkt z_0 zuläßt; weiteres bei Gaier 1977.

Wir verwenden zwei Hilfsmittel. (a) Ist D ein Ringgebiet vom Modul M, dessen Innenrand die Fläche F_1 umschließt, so ist seine Fläche $F \geqslant (M^2 - 1)F_1$. Gleichheit besteht, wenn D ein konzentrischer Kreisring ist. Der Satz stammt von Carleman; siehe z. B. Golusin, S. 177.

(b) Wird $\{z: |z| < r\}$ schlicht und durch $f(0) = 0$, $|f'(0)| = 1$ normiert abgebildet, so hat das Bildgebiet eine Fläche $\geqslant \pi r^2$ mit Gleichheit, wenn f eine Drehung ist. Diese bekannte Tatsache geht auf Bieberbach zurück.

Beweis von Satz 8. Wir beweisen nur b). Es sei f_0 eine Extremalfunktion, $G_0 = f_0(G)$, und h eine Hilfsabbildung, die G_0 auf ein Kreisbogenschlitzgebiet S abbildet, wobei sich die Außenränder entsprechen sollen und $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$ ist; h ist eindeutig bestimmt. Der Außenrand von $h(G_0)$ sei $\{w: |w| = R\}$, während die

$n-1$ Schlitze auf Kreisen um 0 mit Radien $r_1 < r_2 < \ldots < r_p = R$ liegen mögen. Wir betrachten die Teilgebiete

$$s_1 = \{w\colon |w| < r_1\}, \quad s_2 = \{w\colon r_1 < |w| < r_2\}, \ldots, s_p = \{w\colon r_{p-1} < |w| < r_p\}$$

von S und ihre fremden Urbilder $s_1^*, \ldots, s_p^*$ in G_0. Deren Flächeninhalte seien $a_1, \ldots, a_p$.

Wegen Hilfsmittel (b) gilt zunächst $a_1 \geqslant \pi r_1^2$.

Da h den Außenrand von G_0 in $\{w\colon |w| = R\}$ überführt, umschließt das Urbild jedes Kreises $\{w\colon |w| = \rho,\ r_1 < \rho < r_2\}$ das Gebiet s_1^* und also eine Fläche $\geqslant a_1$. Hilfsmittel (a) von oben bringt daher

$$a_2 \geqslant \left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1\right] a_1 \geqslant \pi r_2^2 - \pi r_1^2,$$

woraus $a_1 + a_2 \geqslant \pi r_2^2$ folgt.

In analoger Weise erhält man allgemein

$$a_j \geqslant \left[\left(\frac{r_j}{r_{j-1}}\right)^2 - 1\right] a_{j-1} \geqslant \pi r_j^2 - \pi r_{j-1}^2 \qquad (j = 2, \ldots, p).$$

Addition über j ergibt für die Fläche von G_0

$$A(f_0) \geqslant \sum_{j=1}^{p} a_j \geqslant \pi R^2 = A(h \circ f_0),$$

und da $h \circ f_0 \in K$ ist, muß hierin das Gleichheitszeichen stehen. Dann aber muß z. B. $a_1 = \pi r_1^2$ sein, und h ist die Identität, folglich G_0 ein Kreisbogenschlitzgebiet.

§ 4 Konstruktive Gesichtspunkte

Für die effektive Gewinnung von Normalabbildungen mehrfach zusammenhängender Gebiete stehen verschiedene Methoden zur Verfügung; vgl. das Buch von Gaier (1964), Kap. V. Wir schildern hier einige Verfahren, die funktionentheoretisch interessant sind. Bei ihnen wird das Abbildungsproblem reduziert auf eine F o l g e von KA e i n fach zusammenhängender Gebiete.

A Kreisringabbildung nach Komatu

In der z_0-Ebene sei ein zweifach zusammenhängendes Gebiet G_0 gegeben, außen von $\{z_0\colon |z_0| = 1\}$, innen von einer Jordankurve C_0 berandet, welche 0 umlaufe. Der erste Iterationsschritt wird in zwei Halbschritten h_1, g_1 ausgeführt:

h_1 bildet ext C_0 auf $\{w_1\colon |w_1| > 1\}$ ab, $h_1(\infty) = \infty$. Hierbei gehe $\{z_0\colon |z_0| = 1\}$ in Γ_1 über;

g_1 bildet int Γ_1 auf $\{z_1\colon |z_1| < 1\}$ ab, $g_1(0) = 0$, $(g_1 \circ h_1)(1) = 1$.

Das Gebiet $G_1 = f_1(G_0)$, mit $f_1 = g_1 \circ h_1$, ist von der Form von G_0; auf dieses kann ein weiterer Iterationsschritt angewendet werden, usf. Nach m Schritten soll

$$f_m := (g_m \circ h_m) \circ (g_{m-1} \circ h_{m-1}) \circ \ldots \circ (g_1 \circ h_1) \tag{4.1}$$

als Näherung für die KA f_∞ von G_0 auf $G_\infty := \{w: M^{-1} < |w| < 1\}$ dienen.

Zur Diskussion der Konvergenz und Konvergenzgeschwindigkeit der Folge $\{f_m\}$ erklären wir (mit Koebe) die Spiegelungsfähigkeit eines Gebiets. Zwei Gebiete G_1, G_2 heißen bezüglich einer gemeinsamen Randkomponente C spiegelbildlich, wenn es eine KA φ von $G_1 \cup G_2 \cup C$ gibt so, daß $\varphi(C)$ ein Kreis ist, bezüglich dem $\varphi(G_1)$ und $\varphi(G_2)$ spiegelbildlich liegen. G_1 heißt dann auch über C hinweg spiegelungsfähig. Offenbar ist C notwendig eine analytische Jordankurve.

Ist ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet G über jede seiner Randkomponenten spiegelungsfähig, so heißt es einmal allseitig spiegelungsfähig. Sind alle Spiegelbilder von G ihrerseits einmal allseitig spiegelungsfähig, so heißt G zweimal allseitig spiegelungsfähig, usf.

Man bestätigt leicht: (a) Die spiegelbildliche Lage von G_1 und G_2 bleibt erhalten bei KA von $G_1 \cup G_2 \cup C$. (b) Sind G_1, G_2 und g_1, g_2 spiegelbildlich gelegen, und $g_1 = h(G_1)$ für eine KA h, so läßt sich h konform nach G_2 hinein fortsetzen.

Nun zurück zu den Komatu-Iterationen (4.1)! Durch Verfolgung der beiden Halbschritte h_1, g_1 sehen wir, daß G_1 2-mal über seinen Innenrand hinweg spiegelungsfähig ist, und allgemein ist $G_m = f_m(G_0)$ 2m-mal nach innen spiegelungsfähig. Dies trifft auch auf G_∞ zu, so daß die Abbildung F_m von G_∞ nach G_m, zunächst nur auf G_∞ definiert, konform nach $\{w: M^{-2m-1} < |w| < 1\}$ fortgesetzt werden kann (Bemerkung (b) oben).

An dieser Stelle hilft weiter

Satz 9 (8er-Satz) *Es sei* F *eine* KA *von* $R := \{r < |w| < 1\}$, *bei der der Einheitskreis in sich übergeht, mit* $F(1) = 1$ *und* $F(w) \neq 0$ $(w \in R)$. *Dann gilt*

$$|F(w) - w| < 8r \qquad (w \in R), \tag{4.2}$$

und die Konstante 8 *ist bestmöglich.*

Der Satz wurde 1962 in zwei Arbeiten von Duren-Schiffer und Gaier-Huckemann bewiesen, 1963 unabhängig (und schöner) von Gehring-af Hällström. Die Konstante 8 kann durch 3 ersetzt werden, wenn F(R) bezüglich 0 punktsymmetrisch ist; der Fall der Symmetrie zu **R** scheint nicht behandelt.

Die Anwendung des 8er-Satzes auf F_m ergibt wegen $F_m(w) - w = f_m(z_0) - f_\infty(z_0)$ sofort

Satz 10 *Für die Komatu-Iterationen* (4.1) *gilt*

$$|f_m(z_0) - f_\infty(z_0)| < 8\, M^{-2m-1} \qquad (m = 1, 2, \ldots; z_0 \in G_0). \tag{4.3}$$

Wählt man G_0 als einen geeigneten exzentrischen Kreisring, so daß die f_m explizit darstellbar sind, so findet man übrigens, daß die 8 in (4.3) nicht ersetzbar ist durch eine Konstante <4. Weiteres über numerische Experimente, auch zur Berechnung des Moduls M, im Buch von Gaier 1964 oder bei Reutter-Neukirchen 1967.

B Vollkreisabbildung nach Koebe

In der $z = z_0$-Ebene sei nun ein n-fach zusammenhängendes Gebiet G_0 gegeben, $\infty \in G_0$. Gesucht ist eine KA $f \in \Sigma_0(G_0)$ von G_0 auf ein Gebiet V, dessen

Rand aus n Kreisen besteht. Die Existenz dieser (eindeutig bestimmten) Vollkreisabbildung geht auf Koebe 1908 zurück; auch mit der „Kontinuitätsmethode" läßt sich ein Existenzbeweis erbringen (s. Golusin, S. 200). Die Existenz vorausgesetzt, kann man auch hier wieder ein konstruktives Verfahren angeben.

Beim „iterierenden Verfahren" von Koebe numeriert man zunächst die Komponenten von ∂G_0 durch: $C_1, C_2, \ldots, C_n$, und bildet im 1. Schritt durch $h_1 \in \Sigma_0(\mathrm{ext}\, C_1)$ das Äußere von C_1 auf das Äußere eines Kreises ab. Dabei mögen die C_j in $C_j^{(1)}$ übergehen. Im 2. Schritt bildet $h_2 \in \Sigma_0(\mathrm{ext}\, C_2^{(1)})$ das Äußere von $C_2^{(1)}$ auf das Äußere eines Kreises ab, usf. Sind alle Komponenten durchlaufen, beginnt man wieder mit der ersten und fährt zyklisch fort. Nach m Schritten ergibt sich die m-te Näherung

$$f_m = h_m \circ h_{m-1} \circ \ldots \circ h_1 \qquad (m \geqslant 1),$$

und man stellt fest, daß $G_m = f_m(G_0)$ mindestens $\left[\frac{m-1}{n-1}\right]$-mal allseitig spiegelungsfähig ist.

Hohe Spiegelungsfähigkeit von G_m bedeutet aber, daß G_m „nahe" am Vollkreisgebiet V liegt. Dies wird präzisiert durch

Satz 11 (Gaier 1959). *Es sei V ein Vollkreisgebiet,* $\partial V = \bigcup_{j=1}^{n} K_j$, *und um die Kreise* K_j *seien paarweise fremde Ringgebiete* R_j *der Moduln* M_j *gelegt. Es sei* $g \in \Sigma_0(V)$ *eine* KA *von* V, $G = g(V)$, *und* ∂V *und* ∂G *mögen in einem Kreis vom Radius* R *liegen. Dann gibt es eine Konstante* $C(R, M)$ *mit der Eigenschaft: Ist* G N*-mal allseitig spiegelungsfähig, und* $M = \min M_j$, *so gilt*

$$|g(z) - z| \leqslant C(R, M)\, M^{-4N} \qquad (z \in V).$$

Wie man sieht, liegt g umso näher an der Identität, je höher die Spiegelungsfähigkeit N von G ist und je größer M ist. Das min M_j wird übrigens maximal, wenn alle M_j gleich sind, und die R_j werden dann von Trajektorien eines quadratischen Differentials berandet. Hierzu vergleiche man Strebel 1966.

Die Anwendung von Satz 11 auf die Koebe-Iterationen f_m liefert

Satz 12 *Ist* $f_\infty \in \Sigma_0(G_0)$ *die Vollkreisabbildung von* G_0, *so gilt für die Koebe-Iterationen*

$$|f_m(z_0) - f_\infty(z_0)| \leqslant C\, M^{-4N} \qquad (m = 1, 2, \ldots;\ z_0 \in G_0),$$

wobei $N = \left[\frac{m-1}{n-1}\right]$ *ist.*

C Zusätzliche Bemerkungen

Oben wurde gezeigt, daß die Vollkreisabbildung f_∞ eines n-fach zusammenhängenden Gebiets als Komposition abzählbar vieler KA einfach zusammenhängender Gebiete darstellbar ist. Von theoretischem Interesse ist, daß eine solche Darstellung sogar durch n KA einfach zusammenhängender Gebiete möglich ist:

$$f_\infty = F_n \circ \ldots \circ F_2 \circ F_1;$$

bei Normierung in ∞ sind die Faktoren eindeutig bestimmt. Der Faktor F_1 etwa kann (konstruktiv) dadurch gewonnen werden, daß das Koebesche iterierende Verfahren nur innerhalb C_1 und seiner Bilder ausgeführt wird, erfordert zwar abzählbar viele Schritte, bildet aber ein einfach zusammenhängendes Gebiet konform ab. Die Existenz einer solchen Faktorisierung bewies allgemein Erohin 1959; eine genauere Untersuchung samt mehreren Anwendungen findet man bei Hübner 1966.

Zweitens ist interessant, daß sich die Vollkreisabbildung $G \to V$ für die Untersuchung der Frage heranziehen läßt, wieviele konforme Selbstabbildungen (SA) ein n-fach zusammenhängendes Gebiet G maximal zuläßt. Ist $N(n)$ diese Maximalzahl, so ist natürlich $N(1) = N(2) = \infty$ und $2n \leqslant N(n) \leqslant n(n-1)(n-2)$ für $n > 2$ ziemlich leicht zu zeigen. Heins bestimmte 1946 die Zahl $N(n)$ für $n > 2$ genau:

$$N(n) = 2n \quad \text{für } n \neq 4, 6, 8, 12, 20;$$
$$N(4) = 12; \quad N(6) = N(8) = 24; \quad N(12) = N(20) = 60.$$

Beim Beweis wird verwendet, daß jede SA von G eine solche von V induziert und umgekehrt, und daß jede SA von V notwendig eine lineare Abbildung ist. Da die SA eine Gruppe bilden, fragt man also nach der maximalen Ordnung gewisser Untergruppen der Gruppe aller linearen Transformationen.

Schließlich sei bemerkt, daß sich der Gedanke des iterierenden Verfahrens auch zur konstruktiven Gewinnung von ϑ-Schlitz-Abbildungen verwenden läßt. Jeweils wird die in ϑ-Richtung „breiteste“ Komponente hergenommen und ihr Äußeres, in ∞ normiert, auf das Komplement einer ϑ-Strecke abgebildet (Grötzsch 1932, Golusin 1939). Für $n = 2$ streben diese ϑ-Breiten monoton gegen 0 für $m \to \infty$ (Lind 1963). Bislang ist jedoch nicht bekannt, ob das entsprechende Verfahren zur Gewinnung der gemischten Schlitzabbildung ($n = 2$: Ein Horizontalschlitz, ein Vertikalschlitz) konvergiert.

§ 5 Gebiete unendlichen Zusammenhangs

Jetzt sollen die Besonderheiten besprochen werden, die sich bei der KA von Gebieten mit unendlich vielen Randkomponenten ergeben. Dabei kann ∂G aus abzählbar vielen oder auch überabzählbar vielen Komponenten bestehen; als Komponenten werden jetzt auch Punkte zugelassen.

A Parallelschlitz-Abbildung

Die Existenz einer KA eines Gebiets G beliebigen Zusammenhangs auf ein ϑ-Schlitzgebiet war schon Hilbert und Koebe (1909) bekannt; potentialtheoretische Methoden und Ausschöpfung von G durch Gebiete endlichen Zusammenhangs. Auch der auf dem Extremalproblem (1.2) beruhende Beweis liefert die Existenz der Abbildung, da der endliche Zusammenhang dort nicht verwendet wird.

Bei der Eindeutigkeit (nach Normierung in ∞) der Abbildung liegen die Verhältnisse anders, worauf erstmals Koebe 1918 hinwies. Er gab zwei Vertikalschlitzgebiete G_1, G_2 an, die konform, aber nicht linear aufeinander abbildbar sind. Wir schildern seine Idee.

Ausgegangen wird von der Menge $M_1 = \{0, \pm 1/n; n = 1, 2, \ldots\}$. Ist $\pm 1/n$ einer ihrer isolierten Punkte mit Abstand δ_n zum Rest der Menge, so bestehe M_2 aus allen Punkten $\pm \frac{1}{n} \pm \frac{\delta_n}{3} \frac{1}{n'}$, $(n, n' = 1, 2, \ldots)$. Allgemein wird zu M_j eine Menge M_{j+1} gebildet, so daß jeder Punkt von M_j Häufungspunkt von M_{j+1} wird: $M_j \subset M'_{j+1}$.

Über den Punkten von $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ werden sodann zur x-Achse symmetrische Schlitze geeigneter Länge $\geqslant 0$ errichtet, das Komplement heiße G_1 (Vertikalschlitzgebiet), und $G_1 \cap \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ heiße g. Dieses e i n f a c h zusammenhängende Gebiet g werde durch f auf die obere Halbebene abgebildet mit $f(\infty) = \infty$, und sodann f mittels Spiegelungsprinzip von g auf G_1 fortgesetzt. Es ergebe sich $G_2 = f(G_1)$, und man ist fertig, wenn $\partial G_2 \subset \mathbf{R}$ als total unzusammenhängend nachgewiesen ist, was durch Bezug auf die Primendentheorie möglich ist. Denn G_1 und G_2 sind dann Vertikalschlitzgebiete, f aber ersichtlich nicht linear.

Über 40 Jahre lang hat sich Koebes Beispiel gehalten, bis Reich 1960 feststellte, daß es lückenhaft ist. Denn bilden die über M errichteten Schlitze den Rand eines Gebiets, so müßte insbesondere M selbst abgeschlossen sein: $M' \subset M$. Nach Konstruktion ist aber $M \subset M'$, denn aus $P \in M$ folgt $P \in M_j \subset M'_{j+1} \subset M'$. Folglich wäre $M = M'$, M wäre perfekt und daher von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, was der Konstruktion widerspricht.

Reich (1960) und danach Jenkins (1962) konnten die Idee Koebes jedoch retten, indem sie G_1 mittels einer Cantor-Menge als Gebiet mit überabzählbar vielen Vertikalschlitzen definierten, von denen jeder – wie bei Koebe – Häufungsschlitz ist.

Wir halten fest:

Die ϑ-Schlitz-Abbildung $f \in \Sigma_0(G)$ *eines Gebiets* G *unendlichen Zusammenhangs ist nicht immer eindeutig bestimmt.*

An dieser Stelle liegt es auf der Hand, konform äquivalente ϑ-Schlitzgebiete (ϑ fest) in Ä q u i v a l e n z k l a s s e n zusammenzufassen. Erklärt man dann in jeder Klasse einen ausgezeichneten Repräsentanten, so ist die Eindeutigkeit der ϑ-Schlitz-Abbildung eines beliebigen Gebiets auf ein a u s g e z e i c h n e t e s ϑ-Schlitzgebiet gerettet.

Die Definition ausgezeichneter Schlitzgebiete (etwa $\vartheta = 0$) kann auf vier Arten geschehen.

(1) G sei beliebig ($\infty \in G$), $\{G_n\} \uparrow G$ eine Ausschöpfung von G durch Gebiete endlichen Zusammenhangs, $f_n \in \Sigma_0(G_n)$ ihre Horizontalschlitz-Abbildungen. Man zeigt $f_n \Rightarrow f_0$ in kompakten Teilen von G, wo f_0 von der Wahl der Ausschöpfung nicht abhängt. $f_0(G)$ heißt „Minimalschlitzgebiet" (Koebe 1918).

(2) Direkt an das Gebiet knüpft folgende äquivalente Definition an. Es sei G ein Horizontalschlitzgebiet, ∂G im achsenparallelen Rechteck R enthalten, $g = R \backslash \partial G$, F die Fläche von g. In der Klasse K der auf $g \cup \partial R$ reellwertigen, stetigen Funktionen φ mit $\varphi(z) = 0$, $(z \in \partial R)$, die überdies noch stückweise „glatt" seien, gelte für das Dirichlet-Integral D[ ] über g:

$$D[\varphi + \operatorname{Re} z] \geqslant D[\operatorname{Re} z] = F \quad \text{für alle } \varphi \in K.$$

Dann ist G Minimalschlitzgebiet (Koebe).

(3) Äquivalent hierzu ist die mehr geometrische Definition der „Normalbereiche" nach Grötzsch 1931. Es seien G und R wie in (2), V_k endlich viele fremde Vierecke, welche die vertikalen Seiten von R verbinden, und m_k ihre Moduln. Gilt dann

$$\sup \sum m_k = \frac{a}{b},$$

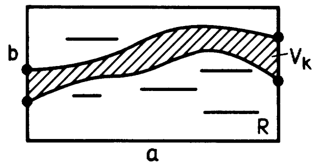

Fig. 3

so heißt G „Normalbereich".

(4) Schließlich ist G ausgezeichnetes Horizontalschlitzgebiet genau dann, wenn für jede Funktion $f \in \Sigma_0(G)$, $f \neq \mathrm{id}$, gilt $\mathrm{Re}\, a_1[f] < 0$. Das Extremalproblem (1.2) hat daher stets eine eindeutig bestimmte Lösung und führt auf ein ausgezeichnetes ϑ-Schlitzgebiet. Siehe das Buch von Jenkins, S. 81.

Wie gesagt, sind die Definitionen (1) bis (4) äquivalent. Aus (2) folgt, daß der 2-dimensionale Inhalt von ∂G bei einem ausgezeichneten Schlitzgebiet notwendig 0 ist. Und hat die Projektion von ∂G auf eine b-Seite das Maß 0, so ist nach (3) G sicher ein Normalbereich.

B Kreisbogenschlitz-Abbildung

Da hier die Verhältnisse weitgehend analog zu denen von A sind, wollen wir uns kurz fassen. Die Existenz der Kreisbogenschlitz-Abbildung ist für ein beliebiges Gebiet gesichert, während die Eindeutigkeit wieder nur dann gewährleistet ist, wenn man unter den Kreisbogenschlitzgebieten extremale aussondert. Eine ausführliche Diskussion und eine Charakterisierung extremaler Gebiete durch die extremale Länge von Kurvenklassen findet man bei Reich-Warschawski 1960.

C Vollkreisabbildung

Ein Gebiet V heißt Vollkreisgebiet, wenn die Komponenten von ∂V Kreise oder Punkte sind.

Die Existenz einer KA eines beliebigen Gebiets G auf ein Vollkreisgebiet V ist immer noch ein offenes Problem. Zahlreiche hinreichende Bedingungen sind jedoch bekannt.

Koebe 1908: G hat endlichen Zusammenhang.

Koebe 1922: G ist symmetrisch zu $\mathbf{R}$, wobei $\mathbf{R}$ jede Randkomponente trifft.

Denneberg 1932: Die Komponenten von ∂G haben Durchmesser $\leqslant a$ und gegenseitige Abstände $\geqslant b > 0$. (Infolgedessen hat ∂G nur eine Häufungskomponente ∞.)

Strebel 1951: (1) ∂G besteht aus abzählbar vielen analytischen Jordankurven oder Punkten; (2) jeder Häufungspunkt von Randkomponenten ist „vollkommen punktförmig".

Hier ergibt sich eine interessante Verbindung mit dem Problem der „Stabilität von Randkomponenten"; siehe Sario 1956 und Oikawa 1960.

Strebel 1953: Verallgemeinerung von Strebel 1951.

Sibner 1967: G läßt sich auf ein Vollkreisgebiet genau dann konform abbilden, wenn dies quasikonform möglich ist.

Zum Beweis wird der Satz über die Existenz einer quasikonformen Abbildung mit vorgeschriebener Dilatation von Ahlfors-Bers verwendet. Das Ergebnis von Koebe 1922 wird dahingehend verallgemeinert, daß G quasisymmetrisch zu einer Jordankurve L angenommen wird.

Die Eindeutigkeit der (in ∞ normierten) Vollkreisabbildung ist hingegen nicht immer gewährleistet, wie erstmals Strebel 1951 bemerkt hat. Dies folgt daraus, daß N_D echte Teilmenge von N_{SB} ist (vgl. Abschnitt D). Danach gibt es eine total unzusammenhängende, kompakte Menge E, deren Komplement $C = E^c$ eine nicht lineare, schlichte Funktion f trägt. Hierbei hat f(G) total unzusammenhängenden Rand; andernfalls könnte man f(G) in den Einheitskreis abbilden, und E^c würde eine beschränkte, schlichte Funktion tragen, gegen $E \in N_{SB}$. Also sind G und f(G) Vollkreisgebiete, obgleich f nicht linear ist.

Jedoch gibt es hinreichende Bedingungen, unter denen ein Vollkreisgebiet V nur lineare KA auf ein anderes Vollkreisgebiet zuläßt. Dies ist nach Strebel 1951 der Fall, wenn V nur abzählbar viele Randkomponenten hat und sich auf jedem Randkreis ein Bogen befindet, gegen den sich die anderen Komponenten von ∂V nicht häufen.

D Existenz schlichter Funktionen in E^c

Ist E eine kompakte Menge, deren Komplement E^c ein Gebiet G ist, so befaßt sich ein Teil der vorstehenden Untersuchungen mit der Aufgabe, zu G gewisse schlichte Funktionen mit ausgezeichneten Abbildungseigenschaften zu finden. Wir fragen nun: Wann ist E so „dünn", daß E^c nur triviale schlichte Funktionen trägt? Genauer:

(a) Wann ist jede in E^c schlichte Funktion linear?
(b) Wann ist jede in E^c schlichte Funktion in E^c unbeschränkt?

Zu diesem Komplex siehe Ahlfors-Beurling 1950. Es heißt E aus N_B bzw. N_D, wenn jede in E^c reguläre und beschränkte bzw. mit endlichem Dirichlet-Integral versehene Funktion konstant ist; und es heißt E aus N_{SB} bzw. N_{SD}, wenn es auf E^c nur unbeschränkte bzw. mit unendlichem Dirichlet-Integral versehene schlichte Funktionen gibt. N_B sind die Painlevéschen Nullmengen, Fall (a) tritt genau dann ein, wenn $E \in N_D$ ist, und nach Definition gilt (b) genau dann, wenn $E \in N_{SB}$ ist. Also sind N_D und N_{SB} hier besonders interessant.

Für $E \in N_D$ ist charakteristisch, daß E^c und jedes dazu konform äquivalente Gebiet ein Komplement vom Maß 0 haben; insbesondere ist E selbst vom Maß 0.

Auch eine Charakterisierung durch den Modul von Kurvenklassen, die E meiden, ist möglich.

Weiter folgt aus der Definition sofort, daß $N_D \subset N_{SB}$ gilt. Diese Inklusion ist echt, denn es gibt eine (verallgemeinerte) Cantor-Menge $F \subset [0, 1]$ von positivem Maß, für die $E = F \times F \in N_{SB}$ ist. Weil aber $\mu(E) > 0$ ist, gehört E nicht zu N_D. Also ist $N_D \subsetneq N_{SB}$. Für lineare Mengen E gilt jedoch $N_D = N_{SB}$.

Schließlich ist interessant, daß N_{SB} und N_{SD} zusammenfallen. Nimmt man daher eine total unzusammenhängende Menge, deren Komplement g endliche Fläche hat und wirft einen Punkt $z_0 \in g$ nach ∞, so entsteht eine total unzusammenhängende Menge $E \notin N_{SD}$, also $E \notin N_{SB}$, folglich gibt es eine in $E^c = G$ b e s c h r ä n k t e schlichte Funktion f. Der Rand von f(G) ist daher nicht total unzusammenhängend, obwohl es der von G war.

Anhang

Um die Lesbarkeit der Arbeit zu erleichtern, seien zwei Themen noch kurz gestreift. Sie sind zum Beispiel in dem zitierten Buch von Ahlfors eingehend behandelt.

1. Der Flächensatz Es sei f in $\{z: |z| > 1\}$ regulär und schlicht,

$$f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \qquad (|z| > 1).$$

Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \leqslant 1$ (Gronwall 1914, Bieberbach 1916). Die Fläche innerhalb der analytischen Jordankurve $C_r = \{f(z): |z| = r\}$ für $r > 1$ errechnet sich nämlich zu

$$F(r) = \pi r^2 - \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{-2n}.$$

Da $F(r) > 0$ ist für alle $r > 1$, erhalten wir die Behauptung für $r \to 1$. – Insbesondere ist $|a_1| \leqslant 1$, und $|a_1| = 1$ führt auf $a_2 = a_3 = \dots = 0$.

2. Moduln von Kurvenklassen Dieser von Ahlfors und Beurling 1950 eingeführte Begriff hat sich als äußerst fruchtbar für viele Fragen in der Theorie der konformen und quasikonformen Abbildungen erwiesen und spielt bei Extremalproblemen eine wichtige Rolle.

Gegeben sind eine K u r v e n k l a s s e $\Gamma = \{\gamma\}$ und eine Klasse $\mathbf{P} = \{\rho\}$ von M e t r i k e n. Die Elemente γ von Γ sind lokal rektifizierbare stetige Kurven in $\mathbf{C}$, das soll heißen stetige Bilder von $\{z: |z| = 1\}$ oder von $\{z: 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ oder von $\{z: 0 < z < 1\}$, die lokal rektifizierbar sind. Die Elemente ρ von $\mathbf{P}$ sind Borelmeßbare Funktionen in $\mathbf{C}$ mit $0 \leqslant \rho(z) \leqslant \infty$, $(z \in \mathbf{C})$, und so, daß ρ auf jeder Kurve $\gamma \in \Gamma$ eine bezüglich der Bogenlänge meßbare Funktion wird.

Wir sagen, die Metrik $\rho \in \mathbf{P}$ sei z u l ä s s i g für die Klasse Γ, wenn $\int_\gamma \rho\, ds \geqslant 1$ ist für jede Kurve $\gamma \in \Gamma$, und betrachten sodann

$$m(\Gamma) := \inf\{\iint_{\mathbf{C}} \rho^2 db_z : \rho \text{ zulässig für } \Gamma\}.$$

Diese Größe $m(\Gamma)$, $0 \leqslant m(\Gamma) \leqslant \infty$, heißt Modul der Kurvenklasse Γ, ihr reziproker Wert $\lambda(\Gamma)$ die extremale Länge der Kurvenklasse Γ. Den Hintergrund dieser allgemeinen Definition bildet ein „Längen-Flächen-Prinzip", die Abschätzung von Kurvenlängen durch Gebietsflächen mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung, das mindestens auf Courant (1914) zurückgeht.

Wegen der Eigenschaften des Moduls $m(\Gamma)$ verweisen wir auf Ahlfors. Hier soll nur erwähnt werden, daß $m(\Gamma)$ konform invariant ist. Das heißt: Sind alle γ in einem Gebiet G enthalten, und wird G durch eine konforme Abbildung auf ein Gebiet G' abgebildet, wobei die Kurven γ in Kurven γ' übergehen, so wird mit $\Gamma' = \{\gamma'\}$ stets $m(\Gamma) = m(\Gamma')$.

Wichtige Beispiele kommen beim Viereck und beim Ringgebiet vor. Es sei C eine Jordankurve, G ihr Inneres, und z_1, z_2, z_3, z_4 vier verschiedene auf C markierte Punkte in positiver Orientierung. Wir sagen dann, ein Viereck V mit den Seiten $z_1z_2, z_2z_3, z_3z_4, z_4z_1$ liege vor. Jedes Viereck läßt eine Normalabbildung zu: G kann konform auf ein Rechteck so abgebildet werden, daß die Ecken z_1, z_2, z_3, z_4 von V in die Ecken von R übergehen, die wir in 0, a, a + ib, ib annehmen dürfen. a und b sind nicht eindeutig bestimmt, wohl aber a/b. Man zeigt leicht, daß $a/b = m(\Gamma)$ ist, wobei Γ die Klasse der Kurven γ ist, welche die Seiten z_1z_2 und z_2z_3 von V in G verbinden.

Hat man ein Gebiet G mit zwei Randkontinuen, so läßt sich dieses auf einen konzentrischen Kreisring $\{w: R_1 < |w| < R_2\}$ konform abbilden. Dabei ist R_2/R_1 eindeutig bestimmt, und man zeigt leicht, daß $\log(R_2/R_1) = 2\pi\, m(\Gamma)$ ist, wobei Γ die Klasse der Kurven $\gamma \subset G$ ist, welche die beiden Randkomponenten von G trennen. So ordnet sich das Radienverhältnis R_2/R_1, oft auch als Modul des Gebiets G bezeichnet, in die allgemeine Theorie der Moduln von Kurvenklassen ein.

Literaturhinweise

A Bücher

Ahlfors, L. V.: Conformal invariants. New York: McGraw-Hill 1973

Bieberbach, L.: Einführung in die konforme Abbildung. § 24–§ 26. Berlin: Walter de Gruyter 1967

Gaier, D.: Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Kap. V. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1964

Golusin, G. M.: Geometrische Funktionentheorie. Kap. V. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1957

Jenkins, J. A.: Univalent functions and conformal mapping. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1958

Kühnau, R.: Geometrie der konformen Abbildung auf der hyperbolischen und der elliptischen Ebene. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1974

Nehari, Z.: Conformal mapping. Kap. VII. New York: McGraw-Hill 1952 (Neudruck Dover 1975)

Tsuji, M.: Potential theory in modern function theory. Kap. IX. Tokio: Maruzen 1959

B Originalarbeiten zu § 1 bis § 4

Erohin, V.: On the theory of conformal and quasiconformal mapping of multiply connected regions (Russ.). Doklady Akad. Nauk SSSR **127** (1959) 1155–1157

Gaier, D.: Über ein Flächeninhaltsproblem und konforme Selbstabbildungen. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **22** (1977) 1101–1105

G r ö t z s c h, H.: Mehrere wichtige Arbeiten in Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl., 1928–1935

G r u n s k y, H.: Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche. Schriften Berlin **1** (1932) 95–140

H e i n s, M.: On the number of 1–1 directly conformal maps which a multiply-connected plane region of finite connectivity p (>2) admits onto itself. Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946) 454–457

H ü b n e r, O.: Die Faktorisierung konformer Abbildungen und Anwendungen. Math. Z. **92** (1966) 95–109

K o m a t u, Y.: Über einige Variationsprobleme von Grötzsch bei konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete. Math. Nachr. **39** (1969) 357–362

L i n d, I.: An iterative method for conformal mappings of multiply-connected domains. Ark. Mat. **4** (1963) 557–560

R e u t t e r, F.; N e u k i r c h e n, H. J.: Untersuchungen auf dem Gebiet der praktischen Mathematik: Vergleichende Untersuchung einiger numerischer Verfahren zur konformen Abbildung einfach und zweifach zusammenhängender Gebiete. Forsch. Ber. Nordrhein-Westfalen No. 1855, 1967

S c h i f f e r, M.: The span of multiply connected domains. Duke Math. J. **10** (1943) 209–216

S t r e b e l, K.: Über quadratische Differentiale mit geschlossenen Trajektorien und extremale quasikonforme Abbildungen. Nevanlinna Festband 1966, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 105–127

W i t t i c h, H.: Zur konformen Abbildung schlichter Gebiete. Math. Nachr. **18** (1958) 226–234

C Originalarbeiten zu § 5 (unendlicher Zusammenhang)

A h l f o r s, L. V.; B e u r l i n g, A.: Conformal invariants and function-theoretic null-sets. Acta math. **83** (1950) 101–129

G r ö t z s c h, H.: Über konforme Abbildung unendlich vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche mit endlich vielen Häufungsrandkomponenten. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl., **81** (1929) 51–86

G r ö t z s c h, H.: Zum Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter unendlich-vielfach zusammenhängender Bereiche. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl., **83** (1931) 185–200

J e n k i n s, J. A.: On a paper of Reich concerning minimal slit domains. Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962) 358–360

K o e b e, P.: Zur konformen Abbildung unendlich-vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche. Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl., 1918, 60–71

K o e b e, P.: Über die konforme Abbildung endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängender symmetrischer Bereiche. Acta math. **43** (1922) 263–287

O i k a w a, K.: On the stability of boundary components. Pacific J. Math. **10** (1960) 263–294

R e i c h, E.: A counterexample of Koebe's for slit mappings. Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960) 970–975

R e i c h, E.; W a r s c h a w s k i, S. E.: On canonical conformal maps of regions of arbitrary connectivity. Pacific J. Math. **10** (1960) 965–985

S a r i o, L.: Strong and weak boundary components. J. Analyse Math. **5** (1956/57) 389–398

S i b n e r, R. J.: Remarks on the Koebe Kreisnormierungsproblem. Comment. Math. Helv. **43** (1968) 289–295

S t r e b e l, K.: Über das Kreisnormierungsproblem der konformen Abbildung. Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. AI. Math. Phys. no. **101** (1951)

S t r e b e l, K.: Über die konforme Abbildung von Gebieten unendlich hohen Zusammenhangs. I. Comment. Math. Helv. **27** (1953) 101–127

(Eingegangen: 19. 8. 1977)

Anschrift des Verfassers:
Mathematisches Institut der Universität
Arndtstraße 2
D 6300 Gießen

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
81 (1978) 45–48

Karl Maruhn

in memoriam

H. Boerner

Am 8. Februar 1976 verstarb in Gießen Professor Dr. Karl M a r u h n – zu früh, möchte man sagen, hatte er doch nach der Emeritierung in alter Frische – trotz des Hüftleidens, das sehr gut behoben war – seine Lehrtätigkeit, insbesondere die Kursvorlesungen über die für die Physiker wichtigen partiellen Differentialgleichungen, fortgesetzt bis über den 70. Geburtstag hinaus und sie erst 1975 aus Gesundheitsgründen einstellen müssen.

Karl Maruhn wurde am 5. Dezember 1904 in Chemnitz (heute Karl-Marx-Stadt) als Sohn eines Kaufmanns geboren. Er ging in der Nähe von Dresden auf die Volksschule, in Leipzig aufs Gymnasium, studierte in Leipzig (mit kurzer Unterbrechung in Tübingen) und promovierte dort 1930 als Schüler von Leon Lichtenstein. Kurz darauf legte er auch das Staatsexamen ab und war, nach kurzer Hilfsassistententätigkeit am Leipziger Mathematischen Institut, an verschiedenen Leipziger Schulen als Lehrer tätig.

1935 ging Maruhn an die DVL (Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt) in Berlin-Adlershof und war dort bis 1944 auf den Gebieten der Flugmechanik und Aerodynamik tätig. Er habilitierte sich von dort aus 1937 an der Berliner Technischen Hochschule und war an ihr 1938 bis 1944 nebenamtlich als Dozent tätig.

Von 1944 bis zum Kriegsende verwaltete er als Dozent an der deutschen Universität in Prag die verwaiste Professur für angewandte Mathematik. Dann ging er nach Jena und war dort zuerst Dozent, dann „Professor mit vollem Lehrauftrag“, schließlich 1948 bis 1949 persönlicher Ordinarius. 1949 kam der Ruf als ordentlicher Professor und Direktor des Instituts für die Reine Mathematik an der Technischen Hochschule Dresden. Seit 1953 war er Mitherausgeber der „ Hochschulbücher für Mathematik“ beim Deutschen Verlag der Wissenschaften in Ostberlin.

1957 starb in Gießen Egon Ullrich, der Inhaber des – damals einzigen – Lehrstuhls für Mathematik. Der Fakultät wurde bekannt, daß Herr Maruhn den Wunsch hatte, nach dem Westen zu gehen, und so setzte sie ihn mit auf die Liste. Das Ministerium nahm seinen Wunsch so ernst, daß es ihn „außer der Reihe“ berief, und ich konnte die Fakultät überreden, dagegen nichts einzuwenden – kannte ich doch Maruhn seit der Studentenzeit und wußte, welch schätzenswerten Kollegen wir dadurch bekamen. So konnte Karl Maruhn – mit Erlaubnis der DDR-Behörden – schon im WS 1958/59 und im SS 1959 als Gastprofessor in Gießen lehren und wurde am 10. 10. 1959 zum ordentlichen Professor an der Justus-Liebig-Universität ernannt.

Es gab damals an der Gießener Universität Kollegen, die der Meinung waren, Maruhn müsse ein „Agent" sein, weil er diese Erlaubnis bekommen hatte. In Wahrheit verdankte er es der großen Hartnäckigkeit, mit der er immer wieder bei den zuständigen Stellen „bohrte", daß er sie schließlich bekam.

Eine gewisse Hartnäckigkeit können wir auch beobachten, wenn wir uns nun Maruhns wissenschaftlichem Lebenswerk zuwenden. Die größte Reihe seiner Arbeiten ist dem ureigensten Anliegen seines Lehrers Lichtenstein gewidmet: den Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, diesem für das Verständnis der Gestalt der Himmelskörper so wichtigen Ansatz. Als Lichtenstein im Sommer 1933 starb – gerade noch bevor das NS-Regime etwas gegen ihn unternahm –, hinterließ er ein großes Programm noch unerledigter Aufgaben, und Maruhn, dessen Dissertation schon diesem Gebiet entnommen war, sah wohl auch eine Art Ehrenpflicht darin, hier weiterzumachen. Hierzu mußten die Lichtensteinschen Methoden weiterentwickelt werden, und das führte dann auch zu neuen Fragestellungen. Alles, was die Astronomen interessiert, kommt in den Maruhnschen Arbeiten vor: Übergänge von einem Körper zu mehreren getrennten, Doppelsterne, Ringkörper mit und ohne Zentralkörper, „Mondkörper" usw. Besonders interessant sind immer die Fälle, wo in Punkten der Oberfläche die Schwerkraft verschwindet, so daß Ablösung von Materie stattfinden kann. Das alles erfordert eine große Beherrschung schwieriger Methoden der Analysis und eine große Hartnäckigkeit in ihrer Anwendung. Auf diese Dinge ist Maruhn auch gegen Ende seines Lebens immer wieder einmal zurückgekommen; damals kam eine interessante Anwendung auf die Theorie der Gezeiten hinzu.

Hydro- und Aerodynamik liegen eng beisammen. So war der Sprung zur DVL ein sehr natürlicher, und dort sind Ende der 30er Jahre und im Krieg einige Arbeiten entstanden, die praktische Probleme der Luftfahrt behandeln. Als Maruhns zweites Hauptgebiet muß aber die Potentialtheorie betrachtet werden, der er vor allem in den 40er Jahren eine größere Anzahl von Arbeiten gewidmet hat. Auch hier ist er zu wichtigen Grenzfällen vorgestoßen: Potential einer einfachen oder doppelten Belegung auf einer sich ins Unendliche erstreckenden Fläche; Randwertaufgaben für Gebiete, die sich ins Unendliche erstrecken; nicht beschränkte Randfunktion, wobei er feststellte, daß hier die Unität und der sog. Alternativsatz nicht immer gelten, und Bedingungen angab, unter denen sie doch gelten.

Maruhn war ein liebenswerter Mensch. Still und zurückhaltend, strahlte er doch so viel menschliche Wärme aus, daß ihm keiner böse sein konnte und es unter den Kollegen immer friedlich zuging. Den Studenten gegenüber war er streng aber zeigte doch so viel väterliche Güte, daß nie einer sich ungerecht behandelt vorkam. Überhaupt war seine Lehrtätigkeit – wie alles was er tat – durch große Gewissenhaftigkeit ausgezeichnet.

Ein anderes Beispiel für seine Gewissenhaftigkeit: Bei Kriegsende hielt er sich gerade im Thüringer Wald auf, wohin die Familie von Berlin aus evakuiert worden war. Da fühlte er sich verpflichtet, noch einmal nach Prag zurückzukehren – was ihm einige Monate Internierung eintrug.

Eine „Schule" hat Maruhn nicht gebildet, hierfür war wohl seine Verweildauer an den verschiedenen Stätten seiner Wirksamkeit zu kurz. Von seinen Gießener Doktorschülern ist Horst Kummer in die angewandte Mathematik gegangen und leitet heute die Abteilung Mathematik des Europäischen Raumfahrtzentrums ESA in Darmstadt. Klaus Klingelhöfer ist Professor an der Fachhochschule (Ingenieurschule) in Gießen, Hans-Joachim Frohn Akad. Oberrat für Statistik am Fachbereich Nahrungswirtschafts- und Haushaltswissenschaften der Gießener Universität, Helmut Kahleis Professor an der Gesamthochschule Siegen. Von den Kollegen an der Dresdner Technischen Hochschule, die dort Maruhns Assistenten gewesen sind, bezeichnen sich mehrere gern als Maruhns Schüler, obwohl sie nicht bei ihm promoviert haben – ein schönes Beispiel dafür, wie sie sich von ihrem Chef verstanden und gefördert fühlten.

Das Gießener Institut profitiert noch heute davon, daß Herr Maruhn die Beziehungen zu osteuropäischen Ländern, ganz besonders zu Ungarn, die er von Dresden aus angeknüpft hatte, von Gießen aus immer weiter gepflegt hat. Bedeutende Mathematiker von dort sind immer wieder für einige Zeit Gastprofessoren in Gießen.

Schriftenverzeichnis

1. Ein Beitrag zur mathematischen Theorie der Gestalt der Himmelskörper. (Dissertation) Math. Z. **33** (1931) 300–320
2. (gemeinsam mit V. Garten) Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper, Math. Z. **35** (1932) 154–160
3. Über den Laplaceschen Ringkörper. Math. Z. **36** (1932) 122–142
4. Über den von Laplace postulierten Urkörper. Math. Z. **37** (1933) 463–478
5. Über einige Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, auf deren Oberfläche singuläre Punkte liegen. Math. Z. **38** (1934) 747–776
6. Über zwei Gleichgewichtsfiguren rotierender inhomogener Flüssigkeit. Math. Z. **39** (1934) 244–262
7. Über die Verzweigung der Lösung einer Integro-Differentialgleichung aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Math. Z. **40** (1935) 56–69
8. Ergänzung zur Arbeit Nr. 7. Math. Z. **40** (1935) 312–314
9. Über Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, auf deren Oberflächen singuläre Punkte liegen (Vortrag). Jber. d. Dt. Math.-Verein. **45** (1935) 125–126
10. Über eine Klasse ebener Wirbelbewegungen in einer ideellen inkompressiblen Flüssigkeit. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **45** (1935) 194–201
11. Neuere Ergebnisse zum Problem der Gleichgewichtsfiguren einer rotierenden Flüssigkeit. Sitz.-Ber. Berl. Math. Ges. **36** (1937) 25–32
12. Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender inhomogener Flüssigkeiten. J. f. d. reine u. angew. Math. **174** (1935) 68–72
13. Über ein Existenzprobiem der Hydrodynamik. Math. Z. **45** (1939) 155–175
14. Konvergenzuntersuchungen zur Theorie der Auftriebsverteilung vorgegebener Tragflügel. Sitz.-Ber. Berl. Math. Ges. **38/39** (1939) 17–42
15. Druckverteilungsrechnungen an elliptischen Rümpfen und in ihrem Außenraum. Jahrb. 1941 d. dtsch. Luftfahrtforsch., 125–147
16. Aerodynamische Untersuchungen an Rümpfen mit rechteckähnlichem Querschnitt. Jahrb. 1942 d. dtsch. Luftfahrtforsch., 263–279

17. Zur eindeutigen Lösbarkeit der potentialtheoretischen Randwertaufgaben bei nichtbeschränkten Randwerten. Math. Z. **48** (1942) 251–267
18. Einige Bemerkungen zu den Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Sitz.-Ber. Berl. Math. Ges. **40/41** (1942) 13–28
19. Über das Verhalten der Potentialfunktionen im Unendlichen, Ber. über d. Mathematikertagung in Tübingen 1946, 106–108
20. Über einige Klassen nichtlinearer Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Math. Z. **51** (1947) 36–60
21. Bemerkungen über das Verhalten der Potentialfunktionen im Unendlichen. Arch. d. Math. **1** (1948) 253–262
22. Potentialfunktionen in unendlichen Raumteilen (Vortrag). Jber. d. Dt. Math.-Verein. **54** (1951) 25–27
23. Über die Potentiale von Belegungen auf unendlichen Flächen. Math. Nachr. **8** (1952) 239–248
24. Existenzbetrachtungen über die Bewegung von Wirbelringen. Wiss. Z. d. T. H. Dresden **2** (1953) 385–390
25. Eine hydrodynamische Existenzbetrachtung (Vortrag). Z. angew. Math. Mech. **34** (1954) 338–339
26. Zur mathematischen Theorie der Gestalt der Himmelskörper (Vortrag). Wiss. Z. d. Hochsch. f. Elektrotechn. Ilmenau **1** (1955) 163–164
27. Über die Existenz stationärer Wirbelbewegungen in einer inkompressiblen Flüssigkeit (Vortrag). Sitz.-Ber. Berl. Math. Ges. Jg. 1954/55 und 1955/56, 4
28. Eine hydrodynamische Existenzbetrachtung. Proc. Intern. Congr. Math. 1954, Vol. 1 (1957) 526
29. Über die Existenz stationärer Bewegungen von Wirbelringen. IX^{e} Congrès internat. de Mécan. appl. I (1957) 173–176
30. Einige Bemerkungen zur Theorie der Gezeiten. Math. Ann. **165** (1966) 111–116
31. Über ein Modell aus der Theorie der Gezeiten. Wiss. Beitrag 1968/9 (M 1) der Univ. Halle, Beiträge zur Analysis u. Angew. Math., 9–16
32. Bemerkungen über singuläre Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Mitt. Math. Sem. Gießen **91** (1971) 105–114

(Eingegangen: 15. 2. 1978)

Anschrift des Verfassers:
Charlottenburger Str. 19
3400 Göttingen

Buchbesprechungen

C. F. Gauß, Mathematisches Tagebuch 1796–1814, hrsg. von H. Wußing, Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig 1976, 95 S., kart., DM 12,–.

Das hiermit herausgegebene Tagebuch wurde im Jahre 1898 durch Stäckel bei einem Gaußenkel entdeckt und später mitsamt einem Kommentar in die Gesammelten Werke des Meisters aufgenommen. Die Entdeckung von Stäckel wirkte damals sensationell, gab aber auch den Forschern manche Rätsel auf, die auch heute noch nicht voll gelöst sind. Es ist daher zu begrüßen, daß der vorliegende erneute Nachdruck des Tagebuchs in Ostwalds Klassikern es einem größeren Kreis von Lesern zugänglich macht. Nach einer wertvollen historischen Einleitung von K. R. Biermann folgt eine Faksimile-Wiedergabe des Tagebuchs, das nur aus 20 Blättern besteht und nicht gut lesbar ist. Daher folgt dem Original dann eine Wiedergabe des lateinischen Textes im Klardruck und eine deutsche Übersetzung von E. Schuhmann. Schließlich hat H. Wussing das Ganze erneut kommentiert. Das Tagebuch beginnt am 30. 3. 1796, als Gauß die Konstruierbarkeit des regelmäßigen 17-Ecks entdeckte. Bis zum Jahre 1801 finden sich viele Eintragungen; sie enthalten viele Notizen über Entdeckungen aus der Zahlentheorie, aber auch aus der Analysis, vor allem über elliptische Integrale und die Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels. Im 19. Jahrhundert werden die Notizen spärlicher; sie betreffen aber auch astronomische und physikalische Entdeckungen und enden im Jahre 1814.

Hamburg

W. Burau

Barnes, D. W., Mack, J. M., An Algebraic Introduction to Mathematical Logic (Graduate Texts in Mathematics, vol. 22), Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag 1975, IX + 121 S., cloth, DM 26,50.

Die Autoren beabsichtigen, mit diesem Buch Mathematikern, die in anderen Gebieten arbeiten, einen Zugang zur mathematischen Logik zu geben. Der Referent ist der Meinung, daß dies in der Auswahl und Zusammenstellung der behandelten Themen ausgezeichnet gelungen ist, daß jedoch die Form der Darstellung den Zugang zur mathematischen Logik möglicherweise erschwert.

In dem vorliegenden Buch werden ausgehend von der Aussagenlogik (Kapitel II und III) über die reine Prädikatenlogik (Kapitel IV) die wichtigsten Sätze (wie „Vollständigkeitssatz", „Kompaktheitssatz" und „Satz von Löwenheim und Skolem") der Identitätslogik (Kapitel V) systematisch entwickelt.

In Kapitel VII werden einige wichtige modelltheoretische Konstruktionen wie etwa das Ultraprodukt von Strukturen gleichen Typs vorgestellt. Als eine Anwendung des Arbeitens mit Ultraprodukten wird die Existenz des algebraischen Abschlusses eines Körpers bewiesen. Als eine weitere Anwendung logischer Methoden werden in Kapitel VIII die von A. Robinson eingeführten „Enlargements" behandelt, die in der Nicht-Standard-Analysis gewöhnlich zum Beweis von „Standard"-Sätzen benutzt werden. Die Anfänge der Nicht-Standard-Analysis werden in § 6 dieses Kapitels dargestellt.

In Kapitel IX werden die wichtigsten Unentscheidbarkeitsresultate behandelt. Es wird die Unentscheidbarkeit der Arithmetik und der Prädikatenlogik bewiesen. Insbesondere wird auch der Gödelsche Unvollständigkeitssatz für die Arithmetik bewiesen. Die zum Beweis dieser Sätze nötigen Begriffe und Sätze aus der Theorie der rekursiven Funktionen werden ebenfalls in diesem Kapitel entwickelt.

In Kapitel VI wird die Formalisierung der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre vorgeführt – in Kapitel X werden Ausblicke auf das 10. Hilbertsche Problem und das Wortproblem der Gruppentheorie gegeben.

Neben diesen eben besprochenen Kapiteln spielt das Kapitel I – Universelle Algebra – eine Sonderrolle. Es wird durch die von den Autoren gewählte Behandlung des Formelbegriffes notwendig. Der Begriff „Formel" taucht nirgends in diesem Buch explizit auf. Statt dessen wird mit Elementen einer freien Algebra modulo einer ziemlich komplizierten Kongruenzrelation gearbeitet. (Hierbei handelt es sich um Kongruenzklassen von „Formeln", wobei zwei „Formeln" kongruent sind, falls sie durch „Umbenennung" von „gebundenen Variablen" auseinander hervorgehen.)

Die Autoren sind der Meinung, daß dies dem Verständnis dienlich sei und darüber hinaus zu Vereinfachungen führe. Letzteres ist für einige Sätze unbestritten richtig. Nach Ansicht des Referenten ist jedoch der Formelbegriff einer der zentralsten Begriffe der mathematischen Logik, der in keiner Einführung in dieses Gebiet fehlen sollte. Darüber hinaus darf wohl bezweifelt werden, daß durch das Arbeiten mit den oben beschriebenen Äquivalenzklassen viel gewonnen wurde. Spätestens in Kapitel IX, in dem tiefere Sätze der Logik behandelt werden, kommen die Autoren doch nicht umhin, implizit von Formeln zu sprechen.

Abgesehen von dieser Eigenheit handelt es sich bei diesem Buch jedoch um eine sehr schöne Darstellung der wichtigsten Gebiete und Begriffe der mathematischen Logik. Die Autoren haben sich dabei offensichtlich nicht an schon vorhandene Darstellungen angelehnt, sondern bieten einen gut durchdachten und manchmal frappierend einfachen Zugang. Die Darstellung ist sehr suggestiv, aber knapp. Das Buch kann als Orientierungshilfe den Veranstaltern von einführenden Vorlesungen in das Gebiet der mathematischen Logik wärmstens empfohlen werden.

Der trotz des umfangreichen Inhaltes geringe Umfang des Buches erklärt sich dadurch, daß die Autoren sehr viele technische Details von Beweisen dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. Dies macht das oberflächliche Lesen leicht, erschwert aber sicherlich dem Laien die Einarbeitung in dieses Gebiet. Ab und zu haben sich auch kleine Fehler eingeschlichen (z. B. ist Übung VII, 3.6 falsch).

A. Prestel

Konstanz

Kummer, E. E., Collected Papers, Vol. 1: Contributions to Number Theory, hrsg. von A. Weil, Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag 1975, 1 Portrait, VIII + 957 S., cloth, DM 98,–.

Endlich gibt es auch gesammelte mathematische Werke von E. E. Kummer (1810–1893); der vorliegende Band enthält die Beiträge zur Zahlentheorie. Man muß sich wundern, daß eine solche Ausgabe nicht schon bald nach dem Tode von Kummer in Angriff genommen wurde. Viele Faktoren mögen für dieses lange Warten verantwortlich sein; wir möchten darüber nicht spekulieren. An der eminenten Bedeutung des Mathematikers Kummer gab es jedenfalls weder zu seinen Lebzeiten noch danach irgendeinen Zweifel. So muß man dem Springer-Verlag sehr dankbar sein, daß er diese empfindliche Lücke in unseren Bücherregalen gefüllt hat.

Wir möchten hier nicht in den Fehler verfallen, die Bedeutung von Kummer für die Entwicklung der Zahlentheorie zu behandeln und zu dokumentieren. Das würde dazu führen, daß man weit in das vorige Jahrhundert zurückgehen und weite Teile der seitherigen Entwicklung der Mathematik nachzeichnen müßte. Insbesondere verläuft der Hauptstrom der Entfaltung der algebraischen Zahlentheorie über Kummer. Ein Großteil des zahlentheoretischen Schaffens von Kummer ist gerichtet auf die große Vermutung von Fermat, wonach die Gleichung $x^{n+2} + y^{n+2} = z^{n+2}$ in natürlichen Zahlen x, y, z, n nicht gelöst werden kann. Es ist hinlänglich bekannt, daß sich im Zusammenhang damit Kummer hauptsächlich mit Kreisteilungskörpern, Klassenzahlen, „Idealen Zahlen", Reziprozitätsgesetzen, Bernoulli-Zahlen, p-adischer Analysis u. ä. befaßt hat.

Nun einiges zum vorliegenden Band! Da ist eine Einleitung vom Herausgeber André Weil von 14 Seiten. Darin wird eine kurze Einführung in das Werk von Kummer gegeben in historischer und sachlicher Beziehung; es wird auf die Höhepunkte in Kummers Schaffen hingewiesen und der Versuch gemacht, die Ausdrucksweise von damals mit der von heute in Beziehung zu bringen. Es schließt sich an der Nachruf (1893) von E. Lampe mit dem 92 Titel umfassenden Schriftenverzeichnis von Kummer. Es folgt die Gedächtnisrede (1910) von K. Hensel mit 37 Seiten; das ist eine überaus wichtige Beigabe zur Erschließung des Werkes von Kummer. Neben einigen Briefen an seine Mutter kommen auf den folgenden 60 Seiten Briefe an Kronecker, dem Schüler und Freund aus gemeinsamen Liegnitzer Tagen. Gerade diese Briefe geben uns wichtige Einblicke in die Entstehung vieler Überlegungen und Entdeckungen. Erst jetzt folgen die zahlentheoretischen Arbeiten von Kummer und zwar in der Reihenfolge nach der Datierung von Kummer. Trotz gelegentlich geäußerter gegenteiliger Ansicht sind die Arbeiten von Kummer leicht lesbar. In ausführlichen Einleitungen werden dem Leser erst die Problematik, die Vorgeschichte, die Methode und die Ergebnisse nahegebracht, ehe in den eigentlichen Gegenstand in allen Einzelheiten eingetreten wird; als Beispiel dafür mag die große Arbeit (1858/59) über die allgemeinen Reziprozitätsgesetze (dieser Band S. 699–839) dienen. Methodisch baut Kummer in erster Linie auf Gauß und Dirichlet auf und in geringerem Maße auf Jacobi und Eisenstein. Es ist zu wünschen, daß diese gesammelten Abhandlungen von vielen Mathematikern in die Hand genommen werden; die Lektüre verspricht auch für den heutigen Mathematiker zu einem großen Gewinn zu werden.

Hannover G. J. Rieger

Rieger, G. J., Zahlentheorie (Mathematische Lehrbücher, Bd. 29), Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1976, 219 S., kart., DM 39,–.

Der vorliegende Band aus der bewährten Reihe ,,Studia Mathematica . Mathematische Lehrbücher" des Vandenhoeck & Ruprecht-Verlages ist aus zweisemestrigen Vorlesungen des Verfassers über Zahlentheorie hervorgegangen. Das Buch gibt eine Einführung in die elementare Zahlentheorie, d. h. die Zahlentheorie des Ringes der ganzen rationalen Zahlen; Themen aus der algebraischen Zahlentheorie werden nicht behandelt. Die einzelnen Kapitel erfordern im allgemeinen nur geringe Vorkenntnisse, so daß der Band schon von Studienanfängern benützt werden kann und sowohl als begleitender Text zu Vorlesungen wie auch zum Selbststudium geeignet erscheint.

Es ist dem Verfasser gelungen, auf gut 200 Seiten eine beachtliche Fülle von Material unterzubringen. Dies wird erreicht durch klar gegliederte, kompakte (trotzdem i. allg. gut lesbare) Beweise, durch Verwendung logischer Symbole und anderer Abkürzungen und durch Verzicht auf ausführlichen Text zwischen den Formelzeilen. Auch Übungsaufgaben hat der Verfasser der Kürze des Textes geopfert. Den einzelnen Kapiteln sind kurze Einführungen vorangestellt, die zur Motivation dienen und den Inhalt des jeweiligen Kapitels umreißen. Im Nachwort werden Dinge hervorgehoben, die im Anschluß an die einzelnen Kapitel studiert werden könnten. Algebraische Begriffe werden bewußt im Hintergrund gehalten, die Zahlentheorie wird deswegen als eigenständige Disziplin aufgebaut; eine stärkere Heranziehung algebraischer Methoden und Ideen hätte einerseits mehr Vorkenntnisse erfordert, aber andererseits die Verbindungen zu anderen Teilgebieten der Mathematik gefördert; Ziel des Verfassers war offenbar, die benötigten Vorkenntnisse möglichst gering zu halten.

Der Stil des Buches ist mehr an Landau orientiert als etwa an Halberstam/Roths „Sequences“. Gelegentlich leidet die Lesbarkeit durch Mangel an verbindenden Worten oder Heraushebung der im Hintergrund stehenden Ideen; so muß der Leser etwa bei der Behandlung der Selbergschen Siebmethode (Satz 1.1, Seite 113, 114) erst 13 Abkürzungen aufnehmen, bevor er in den Beweis eintreten kann.

Im einzelnen werden in den fünfzehn Kapiteln des Buches folgende Gegenstände behandelt: 1. Primfaktorzerlegung, größter gemeinsamer Teiler, euklidischer Algorithmus und lineare diophantische Gleichungen. – 2. Kongruenzen, prime Restklassen, Primitivwurzeln modulo p (die Struktur der primen Restklassengruppe modulo m wird nicht näher untersucht). – 3. Quadratische Reste, Lemma von Gauss, Reziprozitätsgesetz. – 4. Elementare Primzahlverteilung, Satz von Tchebycheff. – 5. Zahlentheoretische Funktionen, Möbius-Inversion, asymptotische Formeln, ausführliche asymptotische Behandlung „K – leerer“ Zahlen und des quadratfreien Kerns. 6. Summen von zwei und vier Quadraten. 7. Basissatz für endliche abelsche Gruppen, Charaktere, Dirichlets Primzahlsatz. 8. Selbergs Siebmethode (Abschätzungen nach oben) und einige Anwendungen. 9. g-adische Darstellung natürlicher Zahlen, p-adische Zahlkörper. 10. Farey-Brüche, Approximationssätze von Dirichlet und Kronecker, Pellsche Gleichung. 11. Kettenbrüche. 12. Algebraische und transzendente Zahlen, Liouville-Zahlen. 13. Bilinearformen. 14. Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion, Primzahlsatz mit Restglied, Primzahlen in arithmetischen Folgen. 15. Behandlung des Waringschen Problems mit der elementaren Methode von Linnik.

Zum Schluß des Werkes findet man ein Namen-, Sach-, und Symbolverzeichnis sowie eine Bibliographie mit 22 Buchtiteln (unter denen freilich die Bücher von Halberstam/Roth, Hasse, Hardy/Wright, Knopfmacher, Kubilius, Kuipers/Niederreiter und andere fehlen, aber auch alle Hinweise auf Lehrbücher der algebraischen Zahlentheorie, wie Artin, Eichler, Goldstein, Hasse, Hecke, Lang u. a.).

Zusammengefaßt kann das Buch Studierenden vor dem Vordiplom und interessierten Studienräten als Einführung in die elementare Zahlentheorie empfohlen werden, die mit geringen Vorkenntnissen auskommt, dabei aber eine Vielzahl von Teilgebieten der Zahlentheorie anspricht und damit einen guten Eindruck vom Umfang der Disziplin gibt.

Frankfurt (Main) W. Schwarz

Kuipers, L., Niederreiter, H., Uniform Distribution of Sequences, Chichester-New York: John Wiley & Sons Ltd. 1974, 406 S., £ 13.30.

Dieses Werk handelt von den verschiedenen Aspekten der Gleichverteilung. Es richtet sich an den Spezialisten auf diesem Gebiet wie auch an denjenigen Mathematiker, der erst in den Gegenstand eindringen will. Es ist den Autoren vorzüglich gelungen, einerseits den Stoff lehrbuchartig darzubieten und andererseits durch ausgiebige Anmerkungen und Literaturangaben einen nahezu erschöpfenden Überblick zu vermitteln. Die Bibliographie enthält nahezu 1000 Titel.

Die Gleichverteilungslehre hat ihren Ursprung im Approximationssatz von Kronecker: Es bezeichne (α) den Bruchteil der reellen Zahl α; für jedes irrationale α ist die Folge (α), $(2\,\alpha)$, $(3\,\alpha)$, ... dicht im Interval $[0, 1]$. In diesem Zusammenhang sind Tschebyscheff (1866), Hermite (1879) und Kronecker (1884) zu nennen. Durch die grundlegende Arbeit von H. Weyl (1916) wurde die Gleichverteilung zu einem selbständigen Gebiet, das seither eine stürmische Entwicklung genommen hat. Die Autoren haben es hervorragend verstanden, einen Eindruck davon zu vermitteln. Das Buch gliedert sich in fünf Kapitel (Gleichverteilung mod 1, Diskrepanz, Gleichverteilung in kompakten Räumen, Gleichverteilung in topologischen Gruppen, Zahlen- und Polynomfolgen), die alle weiter in Paragraphen unterteilt sind. Bemerkenswert ist, daß neben den interessanten Anmerkungen über nicht näher abgehandelte, aber genau belegte Ergebnisse noch viele Übungsaufgaben gestellt werden. Die Gewichtung der Anmerkungen ist weitgehend dem Leser überlassen. Offene Probleme werden meist nicht ausdrücklich genannt; doch kann man sich meist unschwer vorstellen, wie die Entwicklung eigentlich weitergehen müßte.

Gewisse wichtige Anwendungen des Approximationssatzes von Kronecker vermißt man. Wir denken etwa an die Entdeckung von H. Bohr (1911), daß die Riemannsche Zeta-Funktion in der Halbebene $\sigma > 1$ beliebig klein wird. Diese Entdeckung ist ja der Ausgangspunkt für das Buch von P. Turán, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen,* Budapest 1953.

Das Verlagshaus hat seinen hohen Standard an Buchausstattung gehalten, was heute nicht mehr selbstverständlich ist.

Alles in allem handelt es sich um ein sehr anregendes Buch, dem man viele Leser wünschen möchte. Es ist zu erwarten, daß es die Forschung auf diesem Gebiet entscheidend vorantreiben hilft.

Hannover G. J. Rieger

Vasconcelos, W., V., The Rings of Dimension Two (Lecture notes in pure and applied mathematics, vol. 22), New York-Basel: Marcel Dekker 1976, VII + 101 S., SFr. 49,–.

Seit Hilbert hat sich die Theorie der noetherschen Ringe zu einem weiten imposanten Gebäude entwickelt, das zwar unverkennbar noch Lücken aufweist, das aber mit Recht als Herzstück der Kommutativen Algebra zu bezeichnen ist. Läßt man die noethersche Endlichkeitsbedingung in der Theorie der kommutativen Ringe fallen, wird die Situation schlagartig dunkler. In den letzten Jahrzehnten ist hier einige Pionierarbeit geleistet worden. Das vorliegende Büchlein gibt einen detailierten, sorgfältigen Bericht über neuere Ergebnisse der nicht-noetherschen Kommutativen Algebra, der gut lesbar ist, auch wenn für einzelne Beweise bisweilen auf die Originalliteratur verwiesen wird. Als Einführung und Bericht gleichermaßen gut geeignet ist dieses Buch ohne Konkurrenz und jedem, der sich mit Ringtheorie oder Kommutativer Algebra beschäftigt, warm zu empfehlen. Trotz des Schreibmaschinendruckes sollte man allerdings die Kardinalzahlen $\aleph$ nicht mit griechischen Buchstaben χ schreiben.

Zum Inhalt: Zentrales Thema des Buches sind diverse homologische Dimensionsbegriffe für kommutative Ringe, wie globale Dimension, endlich-projektive Dimension, Tor-Dimension und ihre Beziehungen untereinander und zu anderen Dimensionsbegriffen wie der Krull-Dimension. Ist eine Dimension 0, gehört der Ring zu einer schon lange bekannten Ringklasse. Die Struktur der Ringe mit globaler oder Tor-Dimension 1 ist immer noch übersichtlich, die Ringe von endlich-projektiver Dimension 1 sind wesentlich unbekannter. Bei globaler Dimension 2 ist die lokale Theorie durch den Verfasser gut erhellt: Lokale Ringe globaler Dimension 2 setzen sich in bestimmter Weise aus einem (noetherschen) lokalen regulären Ring der Dimension 2 und einem Bewertungsring zusammen. Die globale Situation wird allerdings nur unter zusätzlichen Endlichkeits-Voraussetzungen diskutiert. Zum Schluß des reichhaltigen Berichtes wird der Begriff der λ-Dimension diskutiert. Hat man einen endlich erzeugten R-Modul E, so bilden die Relationen zwischen den Erzeugern wieder einen R-Modul. Ist dieser endlich erzeugt, so kann man diese Relationenbildung iterieren und erhält eine Auflösung von E durch endlich erzeugte freie R-Moduln. Der Ring R hat nun λ-Dimenion $\leqslant$ n, wenn sich jede solche Auflösung, die bereits die Länge n besitzt, beliebig verlängern läßt. Also bedeutet λ-Dimension 0, daß R noethersch ist,

λ-Dimension 1, daß R kohärent ist. Während sich aber nach Hilberts Basissatz die Eigenschaft noethersch zu sein auf Polynomringe vererbt, ist das für die Kohärenz bereits nur noch unter Zusatzvoraussetzungen der Fall – z. B. wenn der Ring globale Dimension 2 hat.

Erlangen W.-D. Geyer

Mumford, D., Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 221), Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag 1976, X + 186 S., geb., DM 36,–.

Vom Verfasser des vorliegenden, auf mehrere Bände angelegten Werkes ist bekannt, daß er ein vorzüglicher Kenner aller Gebiete der algebraischen Geometrie, vor allem ihrer modernsten Teile, ist. Was Mumford bisher geschrieben hat, ist demnach nicht als leicht zu bezeichnen. Dies gilt erfreulicherweise nicht im gleichen Maße von dem vorliegenden Buch, das sich zunächst auf komplexe projektive Mannigfaltigkeiten beschränkt. Mit Recht bemerkt der Verfasser in der Einleitung, daß dies den Leser besser zu einem Verständnis des gesamten Gebietes führt, als wenn man ihm gleich zu Beginn die moderne Schematheorie zumutet. Außerdem scheut sich der Verfasser nicht, einfache Zeichnungen zur Veranschaulichung heranzuziehen. Freilich setzt das Buch immer noch reifere Leser voraus, die bereits Grundkenntnisse auf folgenden Gebieten in jeweils moderner Form besitzen: 1) Topologie, 2) Differentialgeometrie, 3) Komplexe Analysis, 4) Kommutative Algebra. Bei diesen Voraussetzungen und vermittels eines sehr prägnanten Stils gelingt es dann dem Verfasser, wesentliche Dinge auf engem Raum zu bringen. Kennzeichnend dafür ist es, daß die grundlegenden Begriffe der algebraischen Mengen und Varietäten des komplex-affinen $\mathbf{C}^n$ sowie der Zariski-Topologie des $\mathbf{C}^n$ bereits auf S. 1 eingeführt werden.

Das Buch ist in 8 Kapitel mit folgenden Titeln eingeteilt: 1) Affine, 2) Projektive Varietäten, 3) Struktur der Korrespondenzen, 4) Chow's Theorem, 5) Grad einer projektiven Varietät, 6) Linearsysteme, 7) Kurven und ihr Geschlecht, 8) Die birationale Flächengeometrie. In den Kap. 1 und 2 wird der bekannte Unterschied zwischen algebraischer Geometrie im affinen $\mathbf{C}^n$ sowie im komplexen projektiven P^n dargelegt, glatte und singuläre Punkte der Varietäten werden unterschieden. Ferner wird in § 2 bereits die Segresche Produktmenge $S_{n,m}$ eines P_n und P_m eingeführt sowie algebraische Teilmengen in $S_{n,m}$ erklärt, mit denen dann Korrespondenzen zwischen P_n und P_m definiert werden. Einiges Weitere über Korrespondenzen enthält dann das Kap. 3. Im Kap. 4 werden vorübergehend auch die allgemeineren analytischen Mengen eingeführt; der Zweck ist der Beweis des folgenden Satzes von Chow: Die einzigen geschlossenen analytischen Teilmengen des P_n sind die algebraischen Mengen. Die Einführung der Ordnungszahl einer algebraischen Varietät in Kap. 5 führt dann notwendig zur Definition der Schnittvielfachheit in einem isolierten Schnittpunkt zweier Varietäten sowie zum Satz von Bézout. Am Ende von Kap. 5 werden Kählersche Metriken eingeführt, die Theorie von de Rham herangezogen und die algebraischen Varietäten als Minimalgebilde bei solchen Metriken behandelt. Diese Dinge werden nur fragmentarisch behandelt, und sie fallen wohl auch etwas aus dem Rahmen des Buches heraus. Das umfangreiche Kap. 6 über Linearsysteme berührt wiederum Gegenstände, die auch den Geometern älterer Schule vertraut sind. Hier findet auch das Hilbertpolynom einer Varietät seinen Platz. Als Anhang zu Kap. 6 wird die schwierige Multiplizitätstheorie nach Weil-Samuel behandelt. Die letzten beiden Kapitel bewegen sich wieder auf dem seit langem vertrauten Gebiet der Theorie algebraischer Kurven und Flächen. In Kap. 7 wird die Existenz eines singularitätenfreien Modells innerhalb jeder Klasse birational äquivalenter Kurven gezeigt, und es wird der Satz von Riemann-Roch sowohl nach Hirzebruch als auch in der klassischen Fassung bewiesen. Im letzten Kap. 8 beschränkt sich der Verfasser dann auf singularitätsfreie Modelle algebraischer

Flächen, betrachtet aber alle möglichen birationalen Abbildungen zwischen 2 solchen Flächen. Als Beispiel hierfür wird die birationale Verwandtschaft zwischen einer Quadrik und einer allgemeinen kubischen Fläche des P^3 behandelt.

Hamburg W. Burau

Fischer, G., Complex Analytic Geometry (Lecture Notes in Mathematics, vol. 538), Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag 1976, VII + 201 S., soft cover, DM 23,–.

Unter komplexer analytischer Geometrie versteht man neuerdings – in Analogie zur algebraischen Geometrie – das Gebiet der Mathematik, welches alles das umfaßt, was mit der Untersuchung der Nullstellengebilde lokaler oder globaler komplex-analytischer Funktionen zusammenhängt. Dem Autor ist es mit diesen Lecture Notes in hervorragender Weise gelungen, die wichtigsten Begriffsbildungen und fundamentalen Resultate und Methoden der analytischen Geometrie darzustellen. Dabei ist besonders zu loben, daß durch eine konsequente Straffung des technischen Apparates eine gut verständliche Darstellung auch der im allgemeinen nicht so leicht zugänglichen Teilbereiche der analytischen Geometrie gelungen ist. Zudem wurde eine Fülle von neueren Resultaten mit aufgenommen, die man bislang nur verstreut in Einzeldarstellungen finden konnte. Diese Lecture Notes geben daher nicht nur eine willkommene Aufbereitung und Zusammenstellung des Stoffes für komplexe Analytiker, sie dürften auch dem mit der analytischen Geometrie nicht vertrauten Mathematiker und Studenten einen gut verständlichen Zugang zu diesem Gebeit bieten.

Hier eine Auswahl aus dem Inhalt: Ausgehend vom Garbenbegriff wird zunächst in die Theorie der komplexen Räume und der kohärenten Garben eingeführt. Zeitraubende Beweise der nunmehr fundamentalen Sätze wie der Kohärenzsätze von Oka und Cartan, des Hilbertschen Nullstellensatzes, der Theoreme A und B von Cartan oder des Bildgarbensatzes von Grauert werden ausgeklammert. Dafür werden ausführlich Aspekte und Konsequenzen dieser Sätze behandelt. Dinge, die insbesondere für Studenten nicht so gut zugänglich sind, wie Quotientenräume und Faserprodukte von komplexen Räumen oder lineare Faserräume werden ausführlicher behandelt, ebenso wie die Definition der Steinschen Räume. Jedoch könnte man sich eine Einführung kleineren Umfanges der analytischen Mengen und ihrer Dimension, auf die der Autor ganz verzichtet hat, wünschen.

Ein eigenes Kapitel ist der Einführung des holomorphen Tangentialraumes und der holomorphen Differentialformen auf komplexen Räumen mit Singularitäten gewidmet. Die analytischen Ausnahme- bzw. Entartungsmengen von Räumen, Garben und Abbildungen werden ausführlich besprochen, ebenso eine Reihe von wichtigen Konstruktionen, wie der Normalisierung eines komplexen Raumes. Ein weiterer Abschnitt über die geometrischen Aspekte der Plattheit schließt die Diskussion der komplexen Räume und ihrer Abbildungen ab. Im letzten Kapitel über Modifikationen und meromorphe Funktionen wird die monoidale Transformation (σ-Modifikation) bei beliebigem Zentrum ausführlich konstruiert und die relative Version des Satzes von Chow bewiesen. Den Abschluß bildet eine klärende Behandlung der meromorphen Funktionen auf komplexen Räumen sowie ein Beweis von Remmert des Satzes von Weierstraß-Siegel-Thimm über die algebraische Abhängigkeit von meromorphen Funktionen auf kompakten komplexen Räumen.

Ein weiterer Vorzug dieser Lecture Notes besteht darin, daß viele neuere und elegante Beweise aufgenommen worden sind, die teilweise noch nicht veröffentlicht waren. Abgesehen von den erwähnten fundamentalen Theoremen sind fast alle anderen Sätze relativ vollständig bewiesen. Unbewiesene Aussagen sind durch präzise Hinweise in einem recht umfangreichen Literaturverzeichnis belegt. Viele Beispiele sowie hilfreiche Diagramme und einige schöne Zeichnungen runden den positiven Eindruck ab, wobei auch das sehr schöne Schriftbild nicht unerwähnt bleiben soll. – Der Autor äußert in seinem Vorwort die Hoffnung, daß diese Lecture Notes als teilweiser Ersatz für ein lange fälliges Kompendium der „Elemente der analytischen Geometrie“ dienen könnten. Nach der Lektüre muß man dies bestätigen und sogar feststellen, daß jedes solche Kompendium zumindest den Maßstab berücksichtigen muß, der durch diese Lecture Notes gesetzt ist.

Kaiserslautern G. Trautmann

Mayer, O., Opera Matematica, Volumul I. Note si Memorii 1919–1941, Bukarest: Editura Akademiei 1974, 535 S., Lei 35.

Die Arbeiten des rumänischen Geometers Octav Mayer (1895–1966) waren bisher schwer zugänglich. Hier werden zunächst 23 Publikationen (davon eine in Italienisch, alle anderen in Französisch verfaßt) gesammelt. Mayer hat vor allem algebraische Geometrie und Differentialgeometrie in der Ebene und im Raum untersucht. Regelflächen, W-Kurven, Projektivminimalflächen sind Leitmotive, die immer wieder auftauchen. Etwa 150 Seiten nehmen seine sehr systematischen Untersuchungen zur zentralaffinen Differentialgeometrie der Ebene und des Raumes ein. Sie entstanden etwas früher als Salkowskis „Affine Differentialgeometrie“ von 1934 und bieten in Methode und Inhalt vielfach anderes. Es ist zu wünschen, daß die ideenreichen, vorbildlich aufgebauten Arbeiten Mayers weiter wirken. Die Herausgeber haben ausgezeichnete Arbeit geleistet.

Darmstadt D. Laugwitz

Ostrowski, A., Aufgabensammlung zur Infinitesimalrechnung, Band 3: Integralrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen (Mathematische Reihe, Bd. 56), Basel-Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1977, 398 S., Kunstld., DM 68,–.

Der vorliegende 3. Band der Aufgabensammlung behält die gleiche Aufteilung in Aufgaben, Hinweise und Lösungen bei, die sich bei den Bänden 1, 2 A und 2 B (ds. Jber. 71 (1971) und 74 (1972/73)) bereits bewährt hat. Dadurch, daß die Aufgaben aus dem 3. Band der „Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung“ herausgenommen und zusätzlich die Lösungen in zwei Schritten bereitgestellt werden, wird auch diese Sammlung zu einer wertvollen Ergänzung des Lehrbuches von A. Ostrowski. Der Übungsstoff ist vorwiegend dem Bereich der Integralrechnung mehrerer Veränderlichen entnommen, betrifft aber auch die komplexen Zahlen, die Integration spezieller Funktionen einer Veränderlichen, eigentliche und uneigentliche bestimmte Integrale, die Gammafunktionen, sowie die Fourier-Reihen und Integrale. Den einzelnen Abschnitten werden kurz die zugehörigen mathematischen Begriffe und Aussagen vorangestellt. Danach folgen jeweils die zahlreichen, nach ihrer Schwierigkeit gestaffelten Aufgaben. Diese dienen sowohl der Einübung des Stoffes, als auch der Aneignung und Erweiterung spezieller Kenntnisse über den Vorlesungsstoff hinaus.

So ist das Buch für den Studierenden zur Übung und zum Selbststudium sehr gut geeignet. Es liefert aber auch dem Hochschullehrer eine Fülle interessanter Beispiele und Ergänzungen zu seinen Vorlesungen und Übungen.

Bochum F. Sommer

Rivlin, T. J., The Chebyshev Polynomials, New York-London-Sydney-Toronto: John Wiley & Sons 1974, VI + 186 S., geb., £ 12.65 bzw. $ 21.40.

Čebyšev-Polynome treten in zahlreichen Bereichen der Mathematik auf, u. a. in der Interpolations- und Approximationstheorie, in der numerischen Analysis, im Zusammenhang mit orthogonalen Polynomen, in der Ergodentheorie sowie in weiteren Gebieten. Ausgehend von dieser Tatsache, hat das vorliegende Buch ein zweifaches Ziel: Einmal eine Einführung in die genannten mathematischen Teilgebiete anhand der Čebyšev-Polynome und andererseits einen Überblick über die wichtigsten Eigenschaften der Čebyšev-Polynome zu geben. Dieser Aufgabenstellung wird das Buch in vollem Umfang gerecht. Der umfangreiche Stoff wird klar dargestellt, manchmal werden die Beweise jedoch nicht ausgeführt bzw. wird lediglich auf weitere Literatur verwiesen. Eine große Fülle von Eigenschaften der Čebyšev-Polynome wird in Form von Übungsaufgaben (häufig mit hilfreichen Hinweisen) dargeboten. Dadurch wird der Leser angeregt, sich beim Durcharbeiten des Buches intensiv mit der Materie zu beschäftigen und vor allem auch weiterführende und ergänzende Literatur zu studieren. Insofern darf man dieses Buch mit vollem Recht als Arbeitsbuch bezeichnen.

Aus der Fülle des in 4 Kapiteln dargestellten Materials sei folgendes erwähnt:

Im 1. Kapitel wird besonderes Augenmerk auf Lagrange- und Hermite-Fejér-Interpolation an den Nullstellen der Čebyšev-Polynome gerichtet (Lebesgue-Funktion, Normverhalten der Interpolationsoperatoren). Weiter werden Fragen im Zusammenhang mit Orthogonalitätseigenschaften der Čebyšev-Polynome T_n (als Spezialfall der Jacobi-Polynome) behandelt: Differentialgleichung 2. Ordnung für T_n, Rekursionsformel, Approximation im Raum $L_{2,w}(I)$ (mit dem Intervall $I = [-1, 1]$ und der Gewichtsfunktion $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$). Daran schließt sich ein Abriß der Gauß-Integration bezüglich der Gewichtsfunktion w an (einschl. Konvergenzaussagen) sowie die Konvergenz der Lagrange-Interpolationsoperatoren L_n bzgl. der Nullstellen der T_n im Raum $L_{2,w}(I)$.

Das 2. Kapitel ist Extremaleigenschaften gewidmet: Ausgehend von der Tatsache, daß T_n dasjenige Polynom n-ten Grades mit Höchstkoeffizient 1 ist, das die kleinste Supremums-Norm auf $I = [-1, 1]$ besitzt (d. h. die 0 auf I am besten gleichmäßig approximiert), wird ein kurzer Abriß der gleichmäßigen (oder Čebyšev-) Approximation gegeben: Charakterisierungsaussagen, Čebyšev-Systeme und Eindeutigkeitsproblem bei gleichmäßiger Approximation. Die angegebene Extremaleigenschaft der Čebyšev-Polynome kann auch im Rahmen der Maximierung linearer Funktionale auf P_n, dem Raum der Polynome vom Grad $\leqslant n$, gesehen werden. Dementsprechend schließen sich Untersuchungen an, solche lineare Funktionale auf P_n zu bestimmen, für die T_n maximales Element ist. Im einzelnen werden folgende Fragen behandelt: Wachstum von Polynomen außerhalb $[-1, 1]$, Größe der Koeffizienten von Polynomen, Größe der Ableitungen von Polynomen (Bernstein-Ungleichung), Markov-Ungleichung und Verallgemeinerungen.

Das 3. Kapitel behandelt die Entwicklung von Funktionen nach Čebyšev-Polynomen. Hier wird zunächst die beste $L_{2,w}$-Approximation einer stetigen Funktion f auf I durch Linearkombinationen von Čebyšev-Polynomen vom Grad $\leqslant n$ betrachtet und der auftretende Fehler $S_n(f)$ mit der Approximationskonstanten $E_n(f)$ verglichen. Weiter werden der Vergleich von $E_n(f)$ mit Koeffizienten der Entwicklung einer Funktion nach Čebyšev-Polynomen (insbesondere zur Gewinnung von unteren Schranken für $E_n(f)$) sowie der Zusammenhang von Regularitätseigenschaften von f und dem Größenverhalten der Entwicklungskoeffizienten eingehend untersucht. Daran anschließend werden Methoden zur (numerischen) Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten behandelt.

Im abschließenden 4. Kapitel werden die Halbgruppeneigenschaften der Čebyšev-Polynome behandelt. Bekanntlich gilt für $m, n \in \mathbf{N}$ die Beziehung $T_m \circ T_n = T_{mn}$, wobei „$\circ$" die Komposition von Abbildungen bedeutet. Hiervon ausgehend werden Eigenschaften vertauschbarer Polynome (d. h. mit $P \circ Q = Q \circ P$) untersucht und gezeigt, welche Sonderrolle hier die

Čebyšev-Polynome (sowie Monome p_n) spielen. Anwendungen dieser Halbgruppeneigenschaft der Čebyšev-Polynome im Bereich der Maßtheorie bilden den Abschluß dieses Buches.

In den einzelnen Bereichen werden anhand der Čebyšev-Polynome jeweils Spezialfälle allgemeinerer Theorien behandelt. Das Buch will damit eine Anregung geben, zu diesen Theorien weiterzuschreiten. Dies kommt im Vorwort des Autors besonders schön zum Ausdruck: „The Čebyšev polynomial is like a fine jewel that reveals different characteristics under illumination from varying positions, and I feel that apart from its great intrinsic interest it is an ideal vehicle for giving the student a taste of these various areas".

Duisburg W. Haussmann

Berg, C., Forst, G., Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 87), Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag 1975, VII + 197 S., cloth, DM 59,–.

Ausgangspunkt nahezu aller potentialtheoretischen Untersuchungen der letzten 30 Jahre ist der um 1930 entdeckte enge Zusammenhang zwischen klassischer Potentialtheorie und der Brownschen Bewegung im $\mathbf{R}^3$. Danach können die zentralen Objekte der klassischen Theorie, nämlich der Laplace-Operator Δ und der Newtonsche Kern $N(x) = 1/|x|$, wie folgt beschrieben werden: Δ ist der infinitesimale Erzeuger der Brownschen Halbgruppe; das Integral dieser Halbgruppe ist (von einem Normierungsfaktor abgesehen) das Maß mit der Dichte N bezüglich des Lebesgueschen Maßes. Dieses Resultat beruht entscheidend auf der Gruppenstruktur des $\mathbf{R}^3$ und der Translationsinvarianz der klassischen Potentialtheorie.

Der vorliegende Ergebnisbericht behandelt den Teil der modernen Potentialtheorie, welcher sich ergibt, wenn man die Brownsche Halbgruppe auf dem $\mathbf{R}^3$ durch eine transiente Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t>0}$ sub-Markovscher positiver Maße auf einer abelschen lokalkompakten Gruppe G ersetzt. Es ist demnach $(\mu_t)_{t>0}$ eine Familie positiver Radon-Maße auf G mit $\mu_t(G) \leqslant 1$, $\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$ für alle $s, t > 0$, $\lim_{t\to 0} \mu_t = \epsilon_0$ (= Einheitsmasse im Nullpunkt) im Sinne der vagen Konvergenz und mit vag konvergentem Integral $\kappa = \int_0^\infty \mu_t \, dt$ (als Bedingung für die Transienz). Das so definierte positive Radon-Maß κ ist der Potentialkern der Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t>0}$. Die sich aus $(\mu_t)_{t>0}$ ableitende Potentialtheorie wird nahezu ausschließlich als analytische Theorie entwickelt. Die mögliche wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation spielt eine untergeordnete Rolle und dient fast ausschließlich nur der Erhellung des Hintergrundes. Dementsprechend stehen Methoden der Fourier-Analysis im Vordergrund.

Der Bericht gliedert sich in drei Kapitel. Kapitel I gibt eine kurze, klare Einführung in die wichtigsten Resultate der Fourier-Analysis. Naturgemäß werden im Kapitel I nicht alle benötigten Ergebnisse bewiesen. Es genügen häufig Hinweise auf die für dieses Gebiet reiche Lehrbuchliteratur. Für den Rest des Buches werden aber – von Ausblicken und Ergänzungen abgesehen – alle Beweise mitgeliefert. Im Mittelpunkt der Betrachtungen von Kapitel II stehen die zu den Faltungshalbgruppen $(\mu_t)_{t>0}$ auf G vermöge der Fourier-Transformation dualen Objekte, nämlich die von I. J. Schoenberg eingeführten und vor allem von A. Beurling und J. Deny untersuchten negativ definiten Funktionen auf der zu G dualen Charaktergruppe Γ von G. Jeder Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t>0}$ auf G entspricht eine stetige negativ definite Funktion ψ auf Γ derart, daß für die Fourier-Transformierten von μ_t gilt

$$\hat{\mu}_t = e^{-t\psi} \qquad (t > 0).$$

Umgekehrt definiert jede stetige negativ definite Funktion ψ auf G eine Faltungshalbgruppe auf G. Kapitel III ist vom Inhalt und von der Seitenzahl her das Hauptkapitel des Buches. Hier wird aufbauend auf die Transienz der zugrunde gelegten Faltungshalbgruppe die Potentialtheorie entwickelt. Insbesondere werden die potentialtheoretischen Prinzipien (Balayage, Domination, vollständiges Maximumprinzip etc.) diskutiert und exzessive Maße als Analoga zu den superharmonischen Funktionen der klassischen Theorie untersucht. Der Bericht erreicht seinen Höhepunkt bei der Darstellung der berühmten Resultate von J. Deny, wonach genau diejenigen positiven Radon-Maße κ auf G Potentialkerne von transienten Faltungshalbgruppen sind, welche einer fundamentalen Familie assoziiert sind, sowie bei der Beschreibung des infinitesimalen Erzeugers von $(\mu_t)_{t>0}$ durch das Lévy-Maß und die Herleitung der Lévy-Khinchin-Formel für den Fall symmetrischer Faltungshalbgruppen (nach der Methode von K. Harzallah). Dies erlaubt abschließend die Beschreibung der Faltungshalbgruppen vom lokalen Typ. Als Ausblick ergibt sich so der Anschluß an die Beschreibung solcher Halbgruppen auf dem $\mathbf{R}^n$ durch einen Differentialoperator zweiter Ordnung.

Der Bericht beeindruckt durch die Eleganz und Durchsichtigkeit der Darstellung. Herauszuheben ist dabei die Illustration der allgemeinen Theorie durch viele explizit durchgerechnete, wichtige Beispiele. Den Autoren ist das Kunststück gelungen, einen Ergebnisbericht spannend wie ein gutes Lehrbuch zu schreiben. Vom Inhalt her füllt dieser Bericht eine echte Lücke.

Erlangen H. Bauer

Arveson, W., An Invitation to C*-Algebras (Graduate Texts in Mathematics, vol. 39), Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag 1976, X + 106 S., cloth, DM 31,30.

Durch das vorliegende Buch sollen Studenten in die Darstellungstheorie der C*-Algebren eingeführt werden. Dabei werden elementare Kenntnisse der Funktionalanalysis (Hilbertraum-Theorie, Abelsche C*-Algebren) und der Maßtheorie vorausgesetzt. Entwickelt wird die Darstellungstheorie der separablen G.C.R.-Algebren (C*-algèbre postliminaire in der Bezeichnung von J. Dixmier). Diese Wahl ist einleuchtend, da nur für separable G.C.R.-Algebren die vollständige Klassifizierung der Darstellungen (in separablen Hilberträumen) bekannt ist.

Die Entwicklung der für diese Theorie notwendigen technischen Hilfsmittel nimmt den größten Raum des Buches ein. Kapitel 1 behandelt die Grundbegriffe der Theorie der C*-Algebren und der von Neumann Algebren, soweit sie im folgenden benötigt werden. Kapitel 2 gibt eine Einführung in die Multiplizitätstheorie und gibt einige Anwendungen, insbesondere für Abelsche C*-Algebren. Im dritten Kapitel wird die Maßtheorie vertieft. Hier werden polnische Räume und Standardmaßräume behandelt. Schließlich im letzten Kapitel werden mit den entwickelten Methoden die Darstellungstheorie der separablen G.C.R.-Algebren behandelt.

Die Darstellung des Gebotenen scheint mir recht gut gelungen, so daß man ein recht brauchbares Lehrbuch vorliegen hat, welches sich auch zum Selbststudium gut eignen sollte.

Einige kritische Bemerkungen scheinen mir jedoch notwendig zu sein. Man hätte sich die Beispiele konkreter G.C.R.-Algebren zahlreicher gewünscht; zumal dieses Buch in erster Linie für Studenten gedacht ist. Kompakte Gruppen, Quantenmechanik und andere Beispiele würden sicherlich manchem Studenten die Fragestellung des Buches sinnvoller erscheinen lassen. Unglücklich ist die Wahl des Titels. Dadurch werden Erwartungen geweckt, die das Buch nicht erfüllt und die, nach der Anlage des Buches, wohl auch nicht beantwortet werden sollen. Dieses liegt daran, daß die hier gebotene Darstellungstheorie nur die von den Darstellungen erzeugten von Neumann-Algebren beschreibt und nur sehr geringe Rückschlüsse auf die zugrunde liegende C*-Algebra zuläßt. Das Schwergewicht des Buches liegt auf der Darstellungstheorie und nicht auf der Theorie der C*-Algebren, wie es der Titel verspricht.

Göttingen H. J. Borchers

Shubnikov, A. V., Koptsik, V. A., Symmetry in Science and Art, New York-London: Plenum Publishing Corporation 1974, XXV + 420 $., S 35.00.

Many books have been written in praise of symmetry. Among them, only the present one can be said to rival Weyl's classic (*Symmetry*, Princeton University Press, 1952). Shubnikov was probably the greatest Russian crystallographer since Federov. The first nine chapters of *Symmetry in Science and Art* are based on his Russian book of 1940, brought up to date with the help of Koptsik, who added his own valuable contributions in Chapters 10, 11, 12 and a *Resumé*.

The reader is introduced gently to the basic ideas of symmetry. For instance, page 8 uses two pairs of ink blots to illustrate the fact that the abstract group C_2 can be represented either by a reflection or by a half-turn. The various chapters deal in turn with "rosettes", finite solids, bands or friezes (one-sided and two-sided), rods, network patterns, lattices, and coloured patterns such as the most spectacular prints of M. C. Escher. (See especially Figures 228 and 229).

As Koptsik remarks on page 367, this book "occupies an intermediate position between popular and technical literature. The popular style of the first part changes to a professional discourse of scientific problems in the second".

The "first part" includes many beautiful drawings. Like Weyl, Shubnikov quotes Ernst Haeckel's *Challenger Monograph* for examples of symmetry in nature. These fascinating creatures should more correctly be called examples of symmetry in *art*. Sir D'Arcy Wentworth Thompson, in 1947 (one year before he died), wrote a letter to the reviewer which included these words:

As to Haeckel, I have the gravest doubt whether his pentagonal dodecahedron and various others ever existed outside his fertile fancy. I believe I may safely say that no type-specimens of these exist in the British Museum, or anywhere else. He was an artist, a pattern-designer, a skilled draughtsman. He had a minute professorial salary in a small University. The Challenger paid eight guineas apiece for as many plates as he chose to draw; he kept on drawing them, and lived on the proceeds (so they used to say) till the end of his life. He represents a thoroughly bad period in Natural Science.

In the "second part", Shubnikov develops a rather formidable notation (which is carefully compared with more familiar notations) so as to deal consistently with Fedorov's 17 two-dimensional and 230 three-dimensional space groups and with the far greater numbers of black-and-white and coloured space groups. (The colours may represent various physical properties.) The underlying group theory involves several ways of combining two groups: not only direct products but also semi-direct, quasi-direct and quasi-semidirect products.

Although symmetry operations are usually *isometries*, possibly combined with changes of colour, Koptsik considers also *similarities*, as in the beautiful spirals on page 304. The famous double helix of DNA is illustrated on page 369. Turning to literature, he represents the transformation of "compound inversion" by the verbally palindromic verse

Is it odd how asymmetrical
Is "symmetry"?
"Symmetry" *is* asymmetrical
How odd it is!

He points out (on page 361) that "the deep-seated unity of poetry and music is founded on their common temporal nature . . . and the existence of certain common laws of composition which may be reduced to three basic principles: the translationally identical (or similar), the contrasting (anti-symmetrical), and the varied (coloured) repetitions of structural elements in time (or space). . . . Music's obedience to the organizing laws is as important an aspect as music's refusal to follow them too exactly. Compare the reviewer's Regular Complex Polytopes (Cambridge, 1974), page 54.

Koptsik illustrates the approximate symmetry of poetry by analyzing fourteen lines (somewhat resembling a sonnet) from Pushkin's Eugene Onegin. The translator, G. D. Archard, has ingeniously composed two English versions: one which preserves the meaning and meter, though without rhyme, and one which preserves both meter and rhyme while parodying the meaning (pages 354, 355).

The book ends with a bibliography of nearly three hundred items, and an excellent index. It will make an ideal birthday gift for anyone interested in art, crystallography, geometry, physics, biology or literature.

Toronto H. S. M. Coxeter

Krasnosel'skii, M. A., Zabreyko, P. P., Pustylnik, E. I., Sobolevski, P. E., Integral Operators in Spaces of Summable Functions, a. d. Russischen von T. Ando, Leyden: Noordhoff International Publishing 1976, 536 S., cloth, Dfl 215,–.

Das 1966 in russischer Sprache im Moskauer Verlag „Nauka" erschienene, seit 1976 in englischer Übersetzung vorliegende Werk stellt eine umfassende, systematische Aufarbeitung der Theorie der Operatoren $A: L_\alpha \to L_\beta$ (mit $\alpha, \beta \geqslant 0$) dar, wie sie vorwiegend von russischen Mathematikern in den Jahren 1950–1966 erarbeitet wurde. Für $\alpha \geqslant 0$ ist hier L_α der Raum der zur Potenz $1/\alpha$ absolut integrierbaren (bzw. für $\alpha = 0$ der wesentlich beschränkten) meßbaren Funktionen über einer beschränkten meßbaren Teilmenge Ω des $\mathbf{R}^n$. Die Schreibweise mit reziproken Indizes ist dem mit den L_p-Räumen Vertrauten zunächst ungewohnt; sie bietet aber auch Vorteile: so ist z. B. $L_\alpha \subset L_\beta$ für $\alpha \leqslant \beta$ und $L_\alpha^* = L_{1-\alpha}$. Jeder Operator $A: L_\alpha \to L_\beta$ ist also auch ein Operator $L_{\alpha'} \to L_{\beta'}$ mit $\alpha' \leqslant \alpha$ und $\beta' \geqslant \beta$. Der zentrale Begriff des Buches ist der der L-Charakteristik L(A; def.); dies ist bei gegebenem A die Menge der Paare (α', β') im ersten Quadranten der Ebene mit der Eigenschaft, daß A auch Operator von $L_{\alpha'}$ nach $L_{\beta'}$ ist. Ein wesentlicher Teil des Buches wird der Untersuchung von L(A; def.) bei den verschiedensten Klassen von Operatoren gewidmet, bei den linearen stetigen Operatoren (hier spielen besonders die Interpolationssätze von M. Riesz, von Marcinkiewicz, von Stein und Weiß eine Rolle), bei den verschiedenen Typen von linearen Integraloperatoren (Operatoren vom Kantorovič-Typ, vom Potentialtyp), bei den nichtlinearen Operatoren (Superpositionsoperatoren, Uryson- und Hammersteinoperatoren) und bei weiteren Klassen. Meist werden parallel Aussagen über die analog erklärten Mengen L(A, cont.), L(A, comp.), L(A, reg.), L(A, unif. cont.) usw. der (α', β') gemacht, für die $A: L_{\alpha'} \to L_{\beta'}$, stetig, kompakt, regulär (d. h. im linearen Fall Differenz zweier nichtnegativer Operatoren), gleichmäßig stetig auf beschränkten Mengen usw. ist. Unter den wesentlich 3 Teilen des Buches (Kapitel 1 und 2 behandeln lineare, Kapitel 5 und 6 nichtlineare Operatoren) verdient der 2. Teil (mit den Kapiteln 3 und 4) eine von der Zielsetzung des Werkes unabhängige Beachtung wegen seiner systematischen Darstellung der Theorie der gebrochenen Potenzen für selbstadjungierte Operatoren und für Operatoren „vom positiven Typ" (dies sind dicht definierte Operatoren A in einem Banachraum E, deren Resolvente $(\lambda I + A)^{-1}$ für $\lambda \geqslant 0$ existiert und sich durch $c(1 + \lambda)^{-1}$ in der Norm abschätzen läßt). Es werden im Zusammenhang mit der Theorie der Halbgruppen insbesondere L-Charakteristiken von gebrochenen Potenzen dieser Operatoren untersucht und die Ergebnisse auf gewisse elliptische Differentialoperatoren angewandt. Das Buch schließt mit einer Übersicht über Möglichkeiten zur Anwendung der erarbeiteten Theorie auf Iterationsverfahren, Galerkinverfahren, Entwicklungen nach Eigenfunktionen elliptischer Operatoren, Cauchy-Operatoren bei inhomogenen Evolutionsgleichungen usw.

Nach dem Vorwort der Verfasser sind zum Verständnis des Buches lediglich Vorkenntnisse auf dem Gebiet der Funktionalanalysis im Umfang der wichtigsten Kapitel des einführenden Buches von Ljusternik-Sobolev ausreichend. Dieses mag zutreffen, sofern es dem Leser um eine Übersicht geht. Zur Bewältigung aller Details anhand der (manchmal nicht zitierten) Originalliteratur wird im allgemeinen einiges mehr an Einsatz erforderlich sein. In der (sonst sorgfältigen) Übersetzung von T. Ando hätten einige terminologische Unsauberkeiten bereinigt werden können; so werden z. B. schwache Cauchy-Folgen „schwach konvergent" genannt, und „schwach kompakte" Mengen sind solche, in denen jede beschränkte Folge eine schwache Cauchy-Folge enthält. Darüber hinaus wird das Buch dem mit der Materie Vertrauten eine wertvolle Hilfe bei der Arbeit, dem Anfänger mit den vielen Hinweisen auf lohnende Untersuchungen eine Fülle von Anregungen bieten. Insbesondere wird auch die Möglichkeit der Übertragung der Ergebnisse auf Orlicz-Räume, Sobolev-Räume und auf allgemeinere Maßräume, die Einbeziehung der Ergebnisse der Theorie der Vektormaße noch viel Stoff für künftige Untersuchungen bieten. Die der russischen Sprache weniger kundige mathematische Öffentlichkeit wird es dankbar begrüßen, daß ein mit so reicher mathematischer Erfahrung geschriebenes Werk jetzt in englischer Übersetzung vorliegt.

München J. Batt

Chillingsworth, D. R. J., Differential Topology with a View to Applications (Research Notes in Mathematics, vol. 9), London-San Fransisco-Melbourne: Pitman Publishing 1976, 291 S., pbk., £ 8.50.

Der Titel des Buches ist eigentlich irreführend, von Anwendungen ist nicht mehr die Rede, als in anderen Büchern über Differentialtopologie auch. Es handelt sich vielmehr um eine in Romanform erzählende Einführung in die Grundbegriffe der Differentialtopologie, im Hinblick auf die Theorie der dynamischen Systeme. Behandelt wird: 1. Ein bißchen allgemeine Topologie. 2. Eine moderne Version der Differentialrechnung mit einer kleinen Einführung in die Theorie der differenzierbaren Singularitäten. 3. Der Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit. 4. Grundlegende lokale und globale Sätze über dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten, insbesondere generische Eigenschaften.

Im 4. Kapitel findet man auch den Satz über die 7 Elementarkatastrophen und ähnlich Attraktives aus der Singularitätentheorie. Das Buch enthält fast keinen Beweis, und nach der Vorstellung des Autors sollte der an Anwendungen interessierte Naturwissenschaftler oder Sozialwissenschaftler hier unmittelbaren Zugang zu den für ihn wesentlichen Techniken finden, ohne sich auf die ermüdende Kleinarbeit des Einzelstudiums einlassen zu müssen. Freilich kann man kaum glauben, daß man differentialtopologische Techniken so zu benutzen lernen kann. Dazu fehlt es dem Buch schon an Übungen, Beispielen und expliziten Rechenvorschriften: Wie rechnet man aus, daß – sagen wir – die Gruppe U(3) eine Mannigfaltigkeit ist, und wie rechnet man ihr Tangentialbündel aus? Gerade der an Anwendungen interessierte sucht oft mehr nach dem Technischen und Einzelnen, nämlich nach einem Rechenverfahren, als nach allgemein-begrifflichem Verständnis.

Auch ein Student, der die Beweise der vorgetragenen Sätze nie gesehen hat, wird kaum immer fortschwimmend das ganze Buch durchlesen können.

Und doch ist dieses ein sehr gelungenes und nützliches Buch: Ein Student (auch ein bejahrter) der sich vielleicht schon ein Jahr mit Differentialtopologie beschäftigt hat und der nun über den Einzelheiten das Ganze nicht mehr sieht, ist der rechte Adressat des Buches. Es ist überaus anregend und überredend geschrieben; einige gelungene Zeichnungen helfen zum

Verständnis, wo die Sprache nicht genügt. Der erzählende Stil geht doch mit genauer und dem Verfasser immer gegenwärtiger Kenntnis auch der technischen Einzelheiten einher, und Schwierigkeiten und Tücken werden nicht verschwiegen, wo sie auftreten. Man muß also rühmen, daß der Verfasser sich die Mühe gemacht hat, sich selbst vieles Einzelne wieder vor Augen zu stellen, wovon er seinem Zuhörer dann nur gleichsam die Quintessenz erzählt. An Kleinigkeiten, die man auszusetzen hätte, sei allenfalls bemerkt, daß man „singulär" mit Recht meist anders definiert als der Verfasser; er verschließt sich ohne Not viele Anwendungen des Satzes von Sard.

Man darf, zumal bei uns, einem Buche weite Verbreitung wünschen, das in so anregender Form beschreibt, wovon die „Geometrie" heute handelt: Jedenfalls nicht nur von Punkten und Geraden.

Regensburg — Th. Bröcker

Santalo, L. A., Integral Geometry and Geometric Probability (Encyclopedia of Mathematics, vol. 1), London-Amsterdam-Don Mills (Ontario)-Sydney-Tokyo: Addison-Wesley 1977, XVII + 404 S., geb., DM 19,50.

Gegenstand dieses ersten Bandes der Encyclopedia of Mathematics and its Applications (G.-C. Rota, editor) ist die Wahrscheinlichkeitstheorie geometrischer Gebilde, oft auch „Integralgeometrie" oder „stochastische Geometrie" genannt. Buffon's Problem von der zufällig fallenden Nadel ist hier ein klassisches Thema, W. Maaks Formel für die Messung der inneren Oberflächen der Lunge ein bekannter Anwendungsfall. Der Verf. gibt mit ch. 1–4 eine Einführung in die klassischen Probleme über zufällige ebene Figuren, insbesondere Gerade, geht in ch. 5 auf zufällige ebene Streifen über. Ch. 6 und 7 tragen die Überschriften „Fundamental Formulas of Poincaré and Blaschke" und „The Group of Motions in the Plane: Kinematic Density" – ch. 8 „Lattices of Figures" betrifft Probleme der regelmäßigen Lagerung in der Ebene. Felix Klein's Erlanger Programm (1872) folgend, treten gruppeninvariante Maße ständig in den Vordergrund und beherrschen die in Teil II „General Integral Geometry" (ch. 9–16) vorgetragene Theorie der homogenen Räume weitgehend. Teil III „Integral Geometry in E_n" umfaßt ch. 13–16 und enthält u. a. die obengenannte Anwendung, Teil IV (ch. 17–19) ist der Integralgeometrie in Räumen konstanter Krümmung gewidmet und beschäftigt sich u. a. mit nichteuklidischer Integralgeometrie und neueren Untersuchungen von I. M. Gelfand und seinen Mitarbeitern.

Das Buch ist gut geschrieben. Es stellt zentrale Resultate sorgfältig dar und berichtet ausführlich über weiterführende Untersuchungen. Das Literaturverzeichnis umfaßt 736 Nummern.

Erlangen — K. Jacobs

Borowkow, A. A., Wahrscheinlichkeitstheorie (Mathematische Reihe, Bd. 53), a. d. Russischen von E. Rödel und H. Kühne, Basel-Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1976, 273 S., Pappband, DM 38,–.

Neben die bekannten Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitstheorie von Bauer, Feller, Loève und Rényi tritt hiermit ein neues, das sich durch knappen Umfang, vielseitige, überwiegend auf klassische Grenzwertsätze (z. T. einschließlich Abschätzungen von Konvergenzgeschwindigkeiten) abzielende Thematik und Zurückdrängung der Maßtheorie in die Rolle einer bloßen Hilfswissenschaft auszeichnet. Das Auftreten von Verteilungsfunktionen im Text kundet die enge Verbindung zur älteren Literatur. Es werden einige Teilgebiete neuerer Forschung angeschnitten: Erneuerungstheorie, Markowketten, Fluktuationstheorie, loglog-Sätze für den Wienerprozeß.

Ein Kapitelchen über Informationstheorie vermittelt rudimentäre Kenntnisse. Es ist schade, daß der loglog-Satz für unabhängige Zufallsvariable nicht vorkommt.

Das Buch ist eine im Detail gut gearbeitete Sammlung von wesentlichen Kostproben aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Die systematische Einordnung dieser Proben könnte in einer zweiten Auflage wohl noch erheblich besser herausgestellt werden.

Die Kapitelüberschriften lauten: 1. Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume, 2. Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume, 3. Zufallsgrößen und Verteilungsfunktionen, 4. Numerische Charakteristika von Zufallsgrößen, 5. Folgen unabhängiger Versuche mit zwei Ausgängen, 6. Charakteristische Funktionen, 7. Folgen unabhängiger Zufallsgrößen, Grenzwertsätze, 8. Elemente der Erneuerungstheorie, 9. Folgen unabhängiger Zufallsgrößen. Eigenschaften der gesamten Trajektorie $(0, S_1, S_2, \ldots)$, 10. Faktorisierungsidentitäten, 11. Folgen unabhängiger Versuche. Diskrete Markowsche Ketten, 12. Information und Entropie, 13. Einfache zufällige Prozesse.

Hierzu kommen vier Anhänge: 1. Ausdehnungssatz für Wahrscheinlichkeitsmaße, 2. Der Satz von Kolmogorow über die Existenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Produkträumen, 3. Integration, 4. Der Stetigkeitssatz für charakteristische Funktionen.

Das Buch ist für Studenten mittlerer und höherer Semester gut geeignet. Die nächste Auflage sollte auf besseres Papier gedruckt werden oder als paperback erscheinen.

Erlangen K. Jacobs

Bacry, H., Lectures on Group Theory and Particle Theory, New York-London-Paris: Gordon and Breach 1977, 580 S., $ 70.–.

Dieses reichhaltige Buch behandelt alle mathematischen Grundlagen, die für die moderne Anwendung der Gruppentheorie in der theoretischen Physik erforderlich sind.

Die ersten drei Kapitel enthalten sehr klare und effektive Einführungen in die Theorie der Gruppen und die der Vektorräume sowie in die Darstellungstheorie. In den Kapiteln 4 und 5 werden die Darstellungen linearer Gruppen sowohl vom kombinatorischen (Young Tableaux) als auch vom analytischen (Lie-Gruppen) Standpunkt entwickelt. Obwohl hier keine streng mathematische Behandlung der Lie-Gruppen angestrebt wird, gelingt es dem Autor, die wesentlichen Gesichtspunkte herauszuarbeiten. Dagegen ist die Klassifikation der halbeinfachen Lie-Algebren vollständig durchgeführt. Bemerkenswert ist es, daß auch in diesen mathematischen Kapiteln der Aspekt der physikalischen Anwendung immer wieder hervorgehoben wird.

In den folgenden Kapiteln werden die in der Physik relevanten Gruppen, wie orthogonale und unitäre Gruppen, behandelt. Besonders betont werden auch relativistische Symmetrien durch eine ausführliche Darstellung der Lorentz-Gruppe sowie der Poincaré-Gruppe. Es folgt eine Diskussion allgemeiner Erhaltungssätze und Quantenzahlen der Elementarteilchenphysik und daran anschließend die Klassifikation der Elementarteilchen im SU(3)- und SU(6)-Schema. Das Buch schließt mit der Diskussion von physikalischen Folgerungen aus diesen unitären Symmetrien.

Dem Leser wird eine Fülle von nützlichen Beispielen und Übungen angeboten, wobei auch mancher Beweis dem Leser zur Übung überlassen bleibt. Obwohl ein außergewöhnlich großes Stoffgebiet angesprochen wird, ist das Buch schwungvoll und interessant geschrieben. Die mathematische Darstellung ist durchwegs auf hohem Niveau, gefällt also dem Mathematiker, aber auch dem Physiker, weil der Autor auch in den mathematischen Kapiteln den Bezug zur Physik nicht vergißt und weil er eine reichhaltige Palette physikalischer Anwendungen bietet. Wieweit das Buch einem durchschnittlich begabten Studenten als Einführung dienen kann, wollen wir jedoch dahingestellt sein lassen.

Erlangen K. Klingenbeck, H. Kurzweil