84. Band Heft 1
ausgegeben am 22. 1. 1982

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1982

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende dieses Heftes zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 74,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 80 30 76
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 84, Heft 1

1. Abteilung

J. Frehse: Capacity Methods in the Theory of Partial Differential Equations 1
F. Bachmann: Emanuel Sperner in memoriam 45

2. Abteilung

Buchbesprechungen

Aumann, G./Haupt, O., Einführung in die reelle Analysis, Bd. II: Differentialrechnung der Funktionen mehrerer Veränderlicher (*M. Fischer*) *1*
Leichtweiß, K., Konvexe Mengen (*R. Schneider*) *2*
Marti, J., Konvexe Analysis (*S. Papadopoulou*) *3*
Köthe, G., Topological Vector Spaces II (*R. Meise*) *4*
Targonski, G., Topics in Iteration Theory (*H. Engl*) *5*
Schmeißer, G./Schirmeier, H., Praktische Mathematik (*K.-H. Hoffmann*) *8*

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

D. van Dalen: Braucht die konstruktive Mathematik Grundlagen?

S. Papadopoulou: Stabile konvexe Mengen

H. O. Peitgen: Topologische Perturbationen beim globalen numerischen Studium nichtlinearer Eigenwert- und Verzweigungsprobleme

A. Pietsch: Approximationszahlen, Eigenwerte und Spuren von Operatoren in Banachräumen

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1 1/2, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1 1/2, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein
84 (1982) 1–44

Capacity Methods in the Theory of Partial Differential Equations

J. Frehse, Bonn

This paper is directed to younger scientists working in the field of partial differential equations and it intends to give a first idea of the numerous applications of the notion of capacity in the theory of partial differential equations. The paper is not intended as a review of the literature on capacity theory which is too extensive to make a readable review possible. Rather it is hoped that it will provide the reader with a minimum of knowledge in order to use capacity methods in the field of "soft" non linear analysis. We mainly deal with the "variational" capacity; only a few classical results about potential theory and potential capacity are presented.

Contents

§ 1 Definition and Geometric Properties of Capacity
§ 2 Sobolev Spaces and Capacity
§ 3 Capacity and the Regularity of Solutions of Elliptic Equations
§ 4 Existence of Weak Solutions to Non-Linear Problems by capacity Methods

§ 1 Definition and Geometric Properties of Capacity

The capacity of a compact set Let K be a compact subset of $\mathbf{R}^n$ and $Q \subset \mathbf{R}^n$ an open subset containing K. The *p-capacity of the set* K with respect to the set Q is defined by

$$\text{p-cap}\,(K, Q) = \inf \left\{ \int_Q |\nabla\varphi|^p dx \,\middle|\, \varphi \in C_0^\infty(Q), \varphi \geqslant 1 \text{ on } K \right\}.$$

We shall write p-cap K or cap K for p-cap (K, Q) if it is clear from the context that Q and $p \in [1, \infty)$ is fixed. Usually one may think that $Q = \mathbf{R}^n$ or that Q is a large ball while K will stand for "complicated" sets. For $p \geqslant n$ we always assume that $Q \subset\subset \mathbf{R}^n$, i.e. Q is compactly contained in $\mathbf{R}^n$, since p-cap $(K, \mathbf{R}^n) = 0$ for $p \geqslant n$. The capacity measures the thickness of sets of $\mathbf{R}^n$. With the notion of capacity one frequently succeeds to give very precise statements in the theory of partial differential equations. The capacity of more general sets and other capacities are treated below.

0012–0456/82/01 0001–44 $08.80/0

Physical interpretation Let $p = 2$, $n = 3$, and imagine K and Q to be metallic conductors. Up to a constant factor, the capacity 2-cap (K, Q) gives the amount of electrical charge which is carried by this configuration provided the electric potential at K is one and is zero at ∂Q.

The potential theoretic capacity Let μ be a measure on $\mathbf{R}^n$ with support in the compact set K. The Riesz potential U_α^μ is defined by

$$U_\alpha^\mu(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}, \qquad 0 < \alpha < n$$

and the energy of μ (of order α) by

$$I(\mu) = \int U_\alpha^\mu(x)\, d\mu(x).$$

Let $\quad V = \inf\{I(\mu) \mid \operatorname{supp}\mu \subset K,\ \mu(\mathbf{R}^n) = 1\}.$

Then one defines the potential theoretic capacity of K by

$$\operatorname{cap}_\alpha K = \frac{1}{V}$$

(for $\alpha = n = 2$ the logarithmic potential is used, cf. [8], Ch. I, § 3).
It has been proved by Frostman [5] that the infimum in the definition of V is attained. For $p = 2$, $n \geqslant 3$, the potential theoretical and variational capacity coincide (up to a factor). It has been shown by Mazzeu [12] that for $p = 2$ the definition of variational capacity and potential theoretical capacity are dual in the sense of Fenchel's duality theory for convex functions.

Other capacities Mazja [10], § 2.3 defines the (p, Φ)-capacity of a compact set by

$$(p, \Phi)\text{-cap}\,(K, Q) = \inf\left\{ \int_Q \Phi(x, \nabla\varphi)^p dx \,\middle|\, \varphi \in C_0^\infty(Q),\ \varphi \geqslant 1 \text{ on } K \right\}.$$

Choquet [4] presents

$$f\text{-cap}\,(K, Q) = \inf\left\{ \int_Q f(x, \varphi, \nabla\varphi)\, dx \,\middle|\, \varphi \in C_0^\infty(Q),\ \varphi \geqslant 1 \text{ on } K \right\}.$$

as an example of his general theory about capacity.
In § 2 the f-capacity with $f(x, \varphi, \nabla\varphi) = |\varphi|^p + |\nabla\varphi|^p$ will be important for the study of Sobolev spaces. Its relation to p-capacity has been studied in [3].

"*Every problem has its own capacity*". Clearly, certain properties of Φ and f are assumed so that these general capacities share the properties listed below. We note that an equivalent definition of the variational p-capacity is

$$p\text{-cap}\,(K, Q) = \inf\left\{ \int_Q |\nabla\varphi|^p dx \,\middle|\, \varphi \in C_0^{0,1}(Q),\ \varphi \geqslant 0,\ \varphi = 1 \text{ on } K \right\}.$$

Here $C_0^{0,1}(Q)$ is the space of Lipschitz continuous functions on Q which vanish at ∂Q.
This equivalence can be established for higher order capacities, say

$$(p, m)\text{-cap}\,(K, Q) = \inf\left\{ \int_Q \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha\varphi|^p dx \,\middle|\, \varphi \in C_0^\infty(Q),\ \varphi \geqslant 1 \text{ on } K \right\}$$

and different classes of admissible function have been used, cf. [10], pp. 144, [11]. In this paper we deal only with first order capacities (m = 1).

General properties of capacity In the following theorem, cap K stands for p-cap (K, Q) or f-cap (K, Q) with $f(x, \varphi, \nabla\varphi) = |\varphi|^p + |\nabla\varphi|^p$.

Theorem 1.1 *The non-negative set function* cap *defined on the compact subsets* K *of* Q *has the following properties:*

(1.1) $\operatorname{cap} \emptyset = 0$ *and* $K_1 \subset K_2$ *implies* $\operatorname{cap} K_1 \leqslant \operatorname{cap} K_2$

(1.2) *For every antitone sequence* (K_j) *of compact subsets of* Q *we have*

$$\operatorname{cap} \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j = \lim_{j\to\infty} \operatorname{cap} K_j$$

(1.3) $\operatorname{cap} K_1 \cup K_2 + \operatorname{cap} K_1 \cap K_2 \leqslant \operatorname{cap} K_1 + \operatorname{cap} K_2$.

R e m a r k. A set function with the property (1.3) is called *convex*. Clearly, this implies super additivity.

A non negative function which is defined on compact sets and satisfies the properties (1.1)–(1.3) is called Choquet-capacity. The importance of this notion consists in the fact that the capacity function can be extended in a natural way to very general sets.

P r o o f of theorem 1.1 Property (1.1) is obvious, (1.2) can be proved in the following way:
It is clear that

$$\operatorname{cap} \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \leqslant \lim_{j\to\infty} \operatorname{cap} K_j$$

For proving the reverse inequality let $\varphi \in C_0^\infty(Q)$ such that

$$\varphi \geqslant 1 \text{ on } K = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \quad \text{and} \quad \int |\nabla\varphi|^p dx = \operatorname{cap} K + \epsilon$$

Setting $\psi = a\varphi$, $a > 1$, we have $\int |\nabla\psi|^p dx = a^p(\operatorname{cap} K + \epsilon)$ and $\int |\nabla\psi|^p dx \geqslant \operatorname{cap} K_j$, $j \geqslant j_0$. The result follows as $j \to \infty$, $a \to 1$, $\epsilon \to 0$. Property (1.3) follows from the fact that

$$\int_Q |\nabla(\varphi_1 \vee \varphi_2)|^p dx + \int_Q |\nabla(\varphi_1 \wedge \varphi_2)|^p dx = \int_Q |\nabla\varphi_1|^p dx + \int_Q |\nabla\varphi_2|^p dx$$

where $\varphi_1 \vee \varphi_2 = \max(\varphi_1, \varphi_2)$ and $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = \min(\varphi_1, \varphi_2)$.

Extension of Choquet-capacities The *inner capacity* of a set E is defined by

$$\operatorname{cap}_* E = \sup\{\operatorname{cap} K \mid K \subset E, K \text{ is compact}\}.$$

The *capacity* of an *open set* Ω is defined by

$$\operatorname{cap} \Omega = \operatorname{cap}_* \Omega.$$

The *outer capacity* of a set E is defined by

$$\operatorname{cap}^* E = \inf\{\operatorname{cap} \Omega \mid \Omega \supset E, \Omega \text{ is open}\}$$

The outer capacity satisfies

(1.4) *For every monotone increasing sequence of sets* $E_i \subset Q$ we have

$$\mathrm{cap}^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \lim_{i \to \infty} \mathrm{cap}^* E_i$$

A set E is *capacitable* if

$$\mathrm{cap}^* E = \mathrm{cap}_* E;$$

in this case its capacity is defined by

$$\mathrm{cap}\, E = \mathrm{cap}_* E = \mathrm{cap}^* E.$$

With this definition, open and closed sets are capacitable, furthermore we have

Choquet's Theorem *Analytic sets are capacitable if the capacity function is the above extension of a Choquet-capacity.*

This implies that Borel sets and level sets of functions in Sobolev spaces are capacitable. (One has to take the approach of § 2 to Sobolev spaces).
Recall that the system of Borel sets is the smallest σ-algebra of subsets of $\mathbf{R}^n$ which contains the compact sets. For the definition of the more general analytic sets see e.g. [6], § 7.5. For the proof of Choquet's theorem see [4] and books about potential theory say [8], [6].

Explicit calculation of the variational-capacity of simple sets

(i) The 2-capacity of a point in $\mathbf{R}^2$ is zero. The 2-capacity of an $(n-2)$-dimensional set in $\mathbf{R}^n$ is zero.

(ii) The p-capacity of a countable set in $\mathbf{R}^n$ is zero for $p \leqslant n$.

(iii) The p-capacity of a point in $\mathbf{R}^n$ does not vanish for $p > n$. (Recall $Q \subset\subset \mathbf{R}^n$.)

(iv) Let B_R and B_r concentric balls of radius R and r, $R > r > 0$. Then, for $n = p$,

$$\text{p-cap}\,(B_r, B_R) = \omega_n |q|^{p-1} |R^q - r^q|^{1-q}, \qquad q = \frac{p-n}{p-1}$$

and, for $p = n$,

$$\text{p-cap}\,(B_r, B_R) = \omega_n \left(\log \frac{R}{r} \right)^{1-n}$$

Here ω_n is the $(n-1)$-dimensional volume of the surface of the unit ball.

Statement (i) follows by constructing a minimizing sequence, (ii) follows from (i) via the countable subadditivity of capacity. Statement (iii) follows from Sobolev's theorem about the imbedding of the space C^α of Hölder continuous functions into the Sobolev space $H^{1,p}$, $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$.

The proof of (iv) can be found in Mazja [10], § 2.3.4, where also the capacity of $(n-1)$-dimensional balls in $\mathbf{R}^n$ is calculated (Lemma 4.2 of [10]). Mazja's book [10] contains a lot of interesting inequalities about capacity.

In [8], Ch. II. § 3, pp. 165, explicit formulas of the 2-capacity of several geometric objects (ellipsoid, torus, disc etc.) in $\mathbf{R}^3$ are listed.

Sets of capacity zero A set with inner capacity zero is called *a polar set* [6], [8]. This notion is of particular importance; just as in measure theory where certain equations or properties may hold "up to a set of measure zero" it frequently happens in the theory of partial differential equations that a certain equation or property holds "up to a set of capacity zero". If an equation or property holds in a set Ω with the possible exception of a set of capacity zero one says that it holds "approximately everywhere in Ω" or also "quasi everywhere in Ω".
Some books about potential theory define the notion of polarity without using capacity, cf. [6], § 7.1.

Capacity and Hausdorff measure Sets of capacity zero must have the n-dimensional Lebesgue measure zero but the converse need not be true. In fact, for $n > p$, the following estimate holds

$$\text{p-cap}\,(E, \mathbf{R}^n) \geqslant \omega_n^{p/n}\, n^{1-p/n} \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} m_n(E)^{1-p/n}$$

(m_n = n-dim. Lebesgue measure)
For the proof, see [10], § 2.3, where also the case $p \geqslant n$ is presented.

We recall the definition of Hausdorff measure and Hausdorff dimension. Let h be a monotone increasing function and $h(0) = 0$. The h-Hausdorff measure $H_h(E)$ of a set $E \subset \mathbf{R}^n$ is defined by

$$H_h(E) = \lim_{t \to 0}\ \inf \left\{ \sum_i h(r_i) \,\middle|\, \bigcup_i \bar{B}(x_i, r_i) \supset E,\ r_i \leqslant t \right\}$$

$B(x_i, r_i)$ = ball of radius r_i with center x_i, and the Hausdorff-dimension of E by

$$\dim_H E = \inf\{\alpha > 0 \mid H_h(E) = 0,\ h(r) = r^\alpha\}.$$

It is known, see [6] and [14] that

$$\text{p-cap}\,(E, Q) = 0 \text{ implies } \dim_H E \leqslant n - p,\ E \subset Q.$$

This result can be strengthened by assuming that the capacity density function vanishes, i.e.

$$\text{p-cap}\,(x, E) = \lim_{r \to 0} r^{p-n}\,\text{p-cap}\,(B(x, r) \cap E, B(x, 2r)) = 0$$

Conversely, if $H_h(E) < \infty$ where $h(r) = r^{n-p}$ for $p \in (1, n)$ and $h(r) = (\ln(1/r))^{1-n}$ for $p = n$, $0 < r < 1/2$ then p-cap $E = 0$. For the proof, cf. [9], [6].
The 1-capacity can be used for the definition of the *perimeter* of a set, see [10], 2.3.5.
The potential theoretical capacity $\text{cap}_\alpha K$ of a compact set K can be shown to be equal to the so called generalized transfinite diameter of K (up to a factor $A(n, \alpha)$). With this the capacity cap K could be defined without using derivatives or measures, see [8].

Comparison of variational and potential theoretical capacity Wallin [15] proved that

$$\operatorname{cap}_\alpha E = 0 \quad \text{implies } (n-\alpha)\text{-cap } E = 0 \quad \text{for } 0 < \alpha < n-2$$
$$\text{and} \quad (n-\alpha-\epsilon)\text{-cap } E = 0 \quad \text{for } 0 \leqslant n-2 < \alpha < n-1, \ \ \epsilon > 0.$$

Furthermore he proved that, for $1 \leqslant p \leqslant n$,

$$p\text{-cap } E = 0 \quad \text{implies} \quad \operatorname{cap}_{n-p} E = 0 \quad \text{if } 1 \leqslant p \leqslant 2$$
$$\text{and} \quad \operatorname{cap}_{n-p+\epsilon} E = 0 \quad \text{if } 2 < p \leqslant n, \ \epsilon > 0.$$

Brief historical and bibliographical remarks to § 1

The physical problem of the capacity of a condenser dates to the 19th century. The first mathematical application of capacity was done by Norbert Wiener 1923. He found a characterization of the so-called irregular points of the boundary of a region (i. e. the points at which the continuity of the solution of the Dirichlet problem may be violated) using the notion of capacity, see [2]. For the systematic treatment of capacities as set functions in potential theory see Kellogg [7], 1929. Frostman's thesis [5], 1935, may be seen as the beginning of capacity theory. The notion of inner and outer capacity is due to Brelot [1], 1940, cf. also Monna [13]. Choquet [4], 1954, developed his general theory of capacity.

A lot of important names has not been mentioned here; we refer the reader to books on potential theory [6], [8], for literature from 1940 up to 1965 see also [2], for a survey on higher order capacities see the paper of Mazja-Khavin [11].

Bibliography to § 1

[1] Brelot, M.: Ponts irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel. J. math. pures et appl. **19** (1940) 319–337

[2] Carleson, L.: Selected problems on exceptional sets. Princeton: Van Nostrand 1967

[3] Chicco, M.: Confronto tra due modi di definire le disuguaglianze per le funzioni di $H^{1,p}(\Omega)$. Boll. Un. Mat. Ital. **4** (1971) 668–676

[4] Choquet, G.: Theory of capacities. Ann. Inst. Fourier **5** (1955) 131–295

[5] Frostman, O.: Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des functions. Thesis, Lunds Univ. Mat. Sem. **3** (1935) 1–118

[6] Helms, L. L.: Einführung in die Potentialtheorie. Berlin – New York: Walter de Gruyter 1973. Original titel: Introduction to potential theory. New York: Wiley 1963

[7] Kellogg, O. D.: Foundations of potential theory. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1966

[8] Landkov, N. S.: Foundations of modern potential theory (transl. from Russ.) Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1972

[9] Martio, O.: Capacity and measure densities. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **4** (1978/1979) 109–118

[10] Mazja, W.: Einbettungssätze für Sobolewsche Räume. Tl. 1. (Transl. from Russ.) Leipzig: Teubner 1979

[11] Mazja, W., Khavin, V. P.: Non-linear potential theory. Russ. Math. Surveys **27** (1972) 71–148

[12] Mazzeu, M.: Sistemi di complementarità e approssimazione delle capacità relative a operatori ellittici del secondo ordine. Boll. Un. Mat. Ital. **10** (1974) 412–428

[13] Monna, A. F.: On the Dirichlet problem and the method of sweeping out. Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. **43** (1939) 491–498

[14] Väisälä, J.: Capacity and measure. Michigan Math. J. **22** (1975) 1–3

[15] Wallin, H.: A connection between α-capacity and L^p-classes of differentiable functions. Ark. Mat. **5** (1964) 331–341

[16] Wiener, N.: Discontinuous boundary conditions and the Dirichlet problem. Trans. Amer. Math. Soc. **25** (1923) 307–314

§ 2 Sobolev Spaces and Capacity

Let Ω be an open subset of $\mathbf{R}^n$ and $\tilde{H}^{1,p}(\Omega)$ be the space

$$\tilde{H}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega |\nabla u|^p dx < \infty \right\}$$

with norm

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p .$$

Here $\|u\|_p = (\int |u|^p dx)^{1/p}$ denotes the usual $L^p(\Omega)$-norm and $p \in \,]1, \infty[$.
Let $\mathscr{C}(\tilde{H}^{1,p}(\Omega))$ be the space of Cauchy-sequences in $\tilde{H}^{1,p}$ and $N \subset \mathscr{C}(\tilde{H}^{1,p}(\Omega))$ the space of null sequences. A common way of introducing the Sobolev space $H^{1,p}(\Omega)$ is to define it as the quotient space

$$H^{1,p}(\Omega) := \mathscr{C}(\tilde{H}^{1,p}(\Omega))/N$$

equipped with the induced norm which is also denoted by $\|.\|_{1,p}$. The elements of $H^{1,p}(\Omega)$ are equivalence classes of Cauchy sequences $(u_m)_{m=1}^\infty$. Thus (u_m) converges in $L^p(\Omega)$ to an element $u \in L^p(\Omega)$ and if $(\tilde{u}_m)$ is equivalent to (u_m) i.e. $(\tilde{u}_m - u_m)_{m=1}^\infty \in N$ then we have also $\tilde{u}_m \to u$ in $L^p(\Omega)$. This fact allows a natural imbedding of $H^{1,p}(\Omega)$ into $L^p(\Omega)$, and if one does so, elements of $H^{1,p}(\Omega)$ may be considered as classes of functions which are defined up to a set of Lebesgue measure zero and have generalized first derivatives in L^p.

However, it is well known that one can prove by a more careful analysis that the elements of $H^{1,p}$ may considered as classes of functions which are defined up to a set of *p-capacity zero*, cf. [5].

This fact is useful for many purposes. One frequently has to deal with the restriction of an element $u \in H^{1,p}(\Omega)$ onto a set $E \subset \Omega$ of non vanishing capacity. If E has Lebesgue measure zero and u is a class of functions defined up to a set of measure zero it is not possible to define $u|_E$ or – if $u \in H^{1,p}(\Omega)$ – one has to construct a restriction operator. This is not necessary if $H^{1,p}(\Omega)$ is defined via the notion of capacity. The first part of this chapter is devoted to this matter.

Definition *A sequence* $(u_m)_{m=1}^\infty$ *of Borel functions* $u_m : \Omega \to \mathbf{R}$ *is said to* c o n v e r g e q u a s i - u n i f o r m l y *to the function* $u : \Omega \to \mathbf{R}$ *if for every* $\epsilon > 0$ *there exists a set* $E \subset \Omega$ *such*

(a) $\operatorname{cap} E < \epsilon$

(b) $u_m \to u$ *uniformly on* $\Omega - E (m \to \infty)$

Here cap stands for any Choquet-capacity; clearly, the notion "quasi-uniform" depends on which capacity is used.

The following definition is an analogue to "convergence in measure"

Definition *A sequence* $(u_m)_{m=1}^\infty$ *of Borel functions* $u_m : \Omega \to \mathbf{R}$ *is said to be* c a p a c i t y - c o n v e r g e n t *to the function* $u : \Omega \to \mathbf{R}$ *if for every* $\epsilon > 0$

$$\operatorname{cap} \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, |u_m - u|(x) \geqslant \epsilon \right\} \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

We also say "$u_m \to u$ in the capacity-sense".

Lemma 2.1 *Let* $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ *be a sequence of Borel functions* $u_m : \Omega_0 \to \mathbf{R}$ *such that*

$$u_m \to u, \; u_m \to \tilde{u} \qquad (m \to \infty)$$

in the capacity sense. Then $u = \tilde{u}$ *approximately everywhere in* Ω_0.

Proof. If $u \neq \tilde{u}$ on a set of non vanishing capacity then one of the sets

$$E_{1/k} = \left\{ x \in \Omega_0 \,\middle|\, |u - \tilde{u}|(x) \geqslant \frac{1}{k} \right\}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

must have non vanishing capacity. This is true on account of the countable subadditivity of capacity. Hence cap $E_\epsilon \geqslant \delta > 0$ for some $\epsilon > 0$.
Let $G_m = \{x \in E_\epsilon \,|\, |\tilde{u} - u_m|(x) \geqslant \epsilon/2\}$. Then

$$E_\epsilon - G_m = \left\{ x \in E_\epsilon \,\middle|\, |\tilde{u} - u_m|(x) < \frac{\epsilon}{2} \right\}$$

and

$$\text{(2.1)} \quad E_\epsilon - G_m \subset \left\{ x \in E_\epsilon \,\middle|\, |u - u_m|(x) \geqslant \frac{\epsilon}{2} \right\}.$$

Since cap $G_m \to 0$ $(m \to \infty)$ we obtain that cap $(E - G_m) \to$ cap $E_\epsilon > 0$. This contradicts (2.1) since the capacity of the right hand side of (2.1) tends to zero $(m \to \infty)$. ■

Remark *If* $u_m \to u$ *quasi-uniformly* $(m \to \infty)$ *then* $u_m \to u$ *pointwise except a set of capacity zero.*

In the following we treat the two cases

$$\text{(2.2)} \quad \text{cap } E = \text{p-cap}\,(E, Q) = \inf \left\{ \int_Q |\nabla\varphi|^p dx \,\middle|\, \varphi \in C_0^\infty(Q), \varphi \geqslant 1 \text{ on } E \right\}$$

and

$$\text{(2.3)} \quad \text{cap } E = \text{p-cap}_\Omega \; E = \inf \left\{ \int_Q [|\varphi|^p + |\nabla\varphi|^p] dx \,\middle|\, \varphi \in C^\infty(\Omega), \varphi \geqslant 1 \text{ on } E \right\}$$

for compact sets $E \in \overline{\Omega}$ and a fixed open set $Q \supset\supset \Omega$, say, $Q = \mathbf{R}^n$ if $p < n$.

Theorem 2.1 *Let* $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ *be a Cauchy sequence in* $\tilde{H}^{1,p}(\Omega)$. *Then there is a function* $u : \Omega \to \mathbf{R}$ *with the following properties:*

(i) *For every compact set* $K \subset \Omega$ *we have* $u_m \to u$ *in the capacity sense* $(m \to \infty)$.

(ii) *There exists a subsequence* $(u_k ; k \in \Lambda)$ *such that* $u_k \to u$ $(k \to \infty, k \in \Lambda)$ *quasi-uniformly on every compact set* $K \subset \Omega$.

(iii) *If* $\tilde{u}$ *is a function which shares the properties* (i) *or* (ii) *of* u *then* $u = \tilde{u}$ *on* Ω *with the possible exception of a set of capacity zero.*

(iv) *If* $\partial\Omega$ *is Lipschitz or if the notion* (2.3) *of capacity is used then the convergence in* (i) *and* (ii) *holds on* Ω.

(v) *The function* u *has first generalized derivatives in* $L^p(\Omega)$.

Proof. We first prove (ii). Since (u_m) is a Cauchy sequence in $\tilde{H}^{1,p}$ there is a subsequence still denoted by $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ such that

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int 2^{mp} |\nabla u_m - \nabla u_{m+1}|^p dx < \infty$$

and for $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\psi = 1$ on K, $v_m = \psi u_m$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int 2^{mp} |\nabla v_m - \nabla v_{m+1}|^p dx < \infty.$$

Thus, for every $\epsilon > 0$ there exists an m_0 such that

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \int 2^{mp} |\nabla v_m - \nabla v_{m+1}|^p dx < \epsilon$$

Obviously, using (2.2),

$$\text{p-cap}\, \{x \in K \,|\, |u_m - u_{m+1}|(x) \geqslant 2^{-m}\} \leqslant \int 2^{mp} |\nabla v_m - \nabla v_{m+1}|^p dx$$

and from the subadditivity of capacity

$$p - \text{cap}\, E_\epsilon < \epsilon$$

where $E_\epsilon = \{x \in K \,|\, |u_m - u_{m+1}|(x) \geqslant 2^{-m},\ m = m_0, m_0 + 1, \ldots\ldots\}$.

On $K - E_\epsilon$ we have

$$|u_m - u_k| \leqslant 2 \cdot 2^{-m}, \qquad k \geqslant m \geqslant m_0,$$

i.e. (u_m) converges uniformly on $K - E_\epsilon$. This proves (ii). By (ii) there is a subsequence $(u_{m(i)})_{i=1}^\infty$ and a function $u : \Omega \to \mathbf{R}$ such that $u_{m(i)} \to u$ uniformly on $K - E_\epsilon$ with $E_\epsilon \subset K$, p-cap $E_\epsilon < \epsilon$. From this one concludes easily that $u_{m(i)} \to u$ on K in the capacity-sense. Since $\|u_i - u_{m(i)}\|_{1,p} \to 0$ it follows that $u_i - u_{m(i)} \to 0$ on K in the capacity-sense and statement (i) follows from the additivity of convergence in the sense of capacity.
If $\tilde{u}$ is another function satisfying (i) we conclude from (ii) that there is a subsequence (u_k) such that $u_k \to u$ *and* $u_k \to \tilde{u}$ quasi-uniformly on all compact sets $K \subset \Omega$, $(k \to \infty, k \in \Lambda)$. From this we obtain the equality $u = \tilde{u}$ approximately everywhere.
The proof of (iv) works analogously to (i)–(iii), or (in the case that $\partial\Omega$ is Lipschitz) results of [4] are used.
Statement (v) follows since $(\nabla u_m)_{m=1}^\infty$ converges in $L^p(\Omega)$.
If (u_m) and (v_m) are two Cauchy sequences in $H^{1,p}(\Omega)$ such that $u_m - v_m \to 0$ in $H^{1,p}$ and $u_m \to u$, $v_m \to v$ in the sense of capacity, then it now is easy to prove that $u = v$ approximately everywhere.
Thus we may assign to every element of $H^{1,p}(\Omega) = \mathscr{C}(\tilde{H}^{1,p}(\Omega))/N$ an equivalence class of functions $u + \mathscr{N}$ where $\mathscr{N}$ consists of the space of functions which vanish approximately everywhere. The assignment is the natural one via the defining Cauchy sequence as stated in theorem 2.1.
From theorem 2.1, part (ii) one obtains the capacity analogue of Lusin's theorem for measurable functions. ∎

Definition *A function* $u : \Omega_0 \to \mathbf{R}$ *is called* quasi-continuous *if for every* $\epsilon > 0$ *there exists a set* $E_\epsilon \subset \Omega_0$ *of capacity smaller than* ϵ *such that the* *restricted function* $u : \Omega_0 - E_\epsilon \to \mathbf{R}$ *is uniformly continuous on bounded subsets of* $\Omega_0 - E_\epsilon$.

Theorem 2.2 *Let* $u \in H^{1,p}(\Omega)$. *Then* u *can be represented by a function which is quasi-continuous on compact subsets of* Ω. *If* $\partial\Omega$ *is Lipschitz or the capacity* (2.3) *is used then* u *can be represented by a function which is quasi-continuous on* Ω.

The following theorem is an analogue to Egoroff's theorem in measure theory.

Theorem 2.3 *Let* $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ *be a convergent sequence in* $H^{1,p}(\Omega)$. *Then there exists a subsequence* $(u_m ; m \in \lambda)$ *which converges quasi-uniformly on compact subsets of* Ω.
If $\partial\Omega$ *is Lipschitz or the capacity* (2.3) *is used the subsequence can be selected such that* u_m *converges quasi-uniformly on* $\overline{\Omega}$.

The question arises whether the *weak* convergence of a sequence in $H^{1,p}$ implies the existence of a quasi-uniformly convergent subsequence. Such a theorem would have great importance for non linear analysis (see § 4) but unfortunately is not true, cf. [7].

In the following we use only the capacity (2.2).

Theorem 2.4 *Let* E *be a capacitable subset of the open set* Q *and* $Q \supset\supset E$. *Then there is a "capacity potential"* $\varphi \in H_0^{1,p}$ *such that*

$$\int_Q |\nabla \varphi|^p dx = \text{p-cap}\,(E, Q)$$

and $\quad \varphi = 1$ *on* E *approximately everywhere.*

P r o o f. (i) Let E be compact. Then there exists a sequence of Lipschitz continuous functions φ_m such that $\varphi_m = 1$ on E, $\varphi_m \in H_0^{1,p}(Q)$ and $\int |\nabla \varphi_m|^p dx \to$ cap E. We may assume that $\varphi_m \to \varphi$ weakly in $H^{1,p}(Q)$. By the Banach-Saks theorem a subsequence of convex combinations v_m of the φ_m exists such that $v_m \to \varphi$ strongly in $H^{1,p}(Q)$. We have $v_m = 1$ on E, $\int |\nabla \varphi|^p dx =$ cap E, and by theorem 2.3. that $\varphi = 1$ on E approximately everywhere.

(ii) Let E be open and $E = \mathcal{O} \subset\subset Q$. Since $\mathcal{O}$ is capacitable we have

$$\text{cap}\,\mathcal{O} = \sup \text{cap}\,\{K \mid \mathcal{O} \supset K, K \text{ compact}\}.$$

Hence there exists a monotone increasing sequence of compact sets $K_i \subset \mathcal{O}$ such that

$$\text{cap}\,K_i \to \text{cap}\,\mathcal{O} \qquad (i \to \infty).$$

Let $\varphi_i \in H_0^{1,p}(Q)$ and $\int |\nabla \varphi_i|^p dx = \text{cap}\,K_i$, assume $\varphi_i \to \varphi$ weakly in $H^{1,p}$. Similar as in (i) we obtain $\varphi = 1$ on E approximately everywhere. By lower semicontinuity $\int |\nabla \varphi|^p dx \leqslant \text{cap}\,\mathcal{O}$ and the reverse inequality follows from the variational inequality

$$\sum_{i=1}^{n} (|\nabla \varphi_i|^{p-2} \varphi_i, \nabla \varphi_i - \nabla \omega) \leqslant 0$$

setting $w = \varphi_{i+k}$ and passing to the limit $k \to \infty$.

(iii) For general capacitable E there is a monotone decreasing sequence of open sets $\mathcal{O}_i \supset E$ such that cap $\mathcal{O}_i \to$ cap E. Let φ be a weak $H^{1,p}$-limit of the generalized capacity potentials of $\mathcal{O}_i$ which exist on account of (ii). As before one proves $\int |\nabla \varphi|^p dx = \text{cap } E$, $\varphi = 1$ on E approximately everywhere. ∎

As an example of the importance of the above approach to Sobolev spaces we mention

Theorem 2.5 *Let* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *be a domain and* $u \in H^{1,p}(\mathbf{R}^n)$. *Then* $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ *if and only if* u *vanishes approximately everywhere on* $\partial\Omega$. *Here* $H_0^{1,p}(\Omega)$ *denotes the closure of the space* $C_0^\infty(\Omega)$ *of test functions in* $H^{1,p}$.

Proof. The "only-if-part" follows from theorem 2.3. For the "if-part" let u be a representative from $H^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ such that $u = 0$ on $\partial\Omega$. We confine ourselves to the case that $\partial\Omega$ is compact. By a truncation argument we may assume $u \geqslant 0$.
Let $u_\ell = \min\{u, \ell\}$. By theorem 2.2 we know that to every $\epsilon > 0$ there exists an open set E_ϵ such that cap $E_\epsilon < \epsilon$ and $u_\ell : \Omega - E_\epsilon \to \mathbf{R}$ is uniformly continuous. Hence there is a neighbourhood U_δ of $\partial\Omega$ such that $u_\ell < \delta$ on $U_\delta - E_\epsilon$ where $\delta > 0$ is given. Thus $v_{\ell\delta} := \max\{u_\ell - \delta, 0\} = 0$ on $U_\delta - E_\epsilon$. Let $\varphi_\epsilon \in H_0^{1,p}(Q)$, $Q \supset\supset \Omega$, be the capacity potential of E_ϵ whose existence is guaranteed by theorem 2.4. Then $1 - \varphi_\epsilon = 0$ approximately every where on E_ϵ and we conclude that $(1 - \varphi_\epsilon)v_{\ell\delta}$ has compact support in Ω. Since this function is contained in $H^{1,p}(\Omega)$ we obtain $(1 - \varphi_\epsilon)v_{\ell\delta} \in H_0^{1,p}(\Omega)$. Passing to the limit $\delta \to 0$, $\epsilon \to 0$ and finally $\ell \to \infty$ we obtain $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$. ∎

Theorem 2.5* *Let* $u \in H^{1,p}(\mathbf{R}^n)$, $u = 0$ *on* $C\bar{\Omega}$ *where* $\partial\bar{\Omega} = \partial\Omega$ *and* (3.20) *holds quasi-everywhere on* $\partial\Omega$. *Then* $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$.

This theorem plays an important role in the theory of Grigorieff [9] and Stummel [16], [17] concerning the approximation and pertubation theory of elliptic boundary value problems. In this theory one frequently has to deal with the situation that a function $u \in H^{1,2}(\mathbf{R}^n)$ is the weak limit of the solutions to approximations of a Dirichlet problem and that one wants to prove that u satisfies the zero boundary condition. For this the above theorem is useful. Grigorieff and Stummel use the stronger condition that Ω has the *segment-property* (cf. [1]). The condition $\partial\Omega = \partial C\bar{\Omega}$ or $\partial\Omega = \partial\bar{\Omega}$ defines the so called Caratheodory domains which is a common hypothesis in the stability theory of the Dirichlet problem in potential theory, cf. [10], § 5, No. 16–22.

We illustrate the above discussion by a simple example:

Theorem 2.6 *Let* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *be a bounded domain satisfying the conditions of* theorem 2.5* *and* Ω_m *be a sequence of bounded domains such that*

(i) *For every compact set* $K \subset \Omega$ *we have* $K \subset \Omega_m$ *for almost all* m.

(ii) *The Lebesgue measure of* $\Omega_m - \Omega_m \cap \Omega$ *tends to zero* $(m \to \infty)$.

Then the solutions $u_m \in H_0^{1,2}(\Omega_m)$ *of*

$$-\Delta u_m = f \in L^2$$

converge weakly in $H^{1,2}(\mathbf{R}^n)$ *to the solution* $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ *of* $-\Delta u = f$ $(m \to \infty)$.

Theorem 2.6 holds, e.g., if the Laplace operator Δ is replaced by a general coercive second order operator. We note that for the non homogenous boundary condition $u = g$ on $\partial\Omega$ with continuous g a necessary and sufficient condition for the stability of the Dirichlet problem is the *Wiener condition*, cf. [10], § 5.5. Note that theorem 2.6 does not cover the case $\Omega_m = \Omega - E_m$, where $E_m \in \Omega$ is closed and lower dimensional. This case can be treated by assuming a uniform *Wiener condition*. We state a general condition for Ω and Ω_m which covers this case and yields the above stability result.

Definition *We say that the point* $x_0 \in \mathbf{R}^n$ *satisfies a* uniform Wiener condition *with respect to the sequence* $(\partial\Omega_m)_{m=1}$ *if the series*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^m$$

where $\delta_j^m = R_j^{2-n}(2\text{-cap}\,(B_{R(j)} \cap \Omega_m,, B_{2R(j)}))$, $B_{R(j)} = B_{R(j)}(x_0)$, $B_{2R(j)} = B_{2R(j)}(x_0)$, $R_j = R(j) = 2^{-j}$, *diverges uniformly with respect to almost all* $m = 1, 2, \ldots$.

By this we mean that to any $C > 0$ there exists a number $N = N(x_0, C)$ such that

$$\sum_{j=1}^{N} \delta_j^m \geqslant C \quad \text{for almost all m.}$$

Remark A sufficient condition for the above property is that

$$2\text{-cap}\,(B_R \cap \partial\Omega_m,\, B_{2R}) \geqslant cR^{n-2}, \qquad B_R = B_R(x_0), \qquad B_{2R} = B_{2R}(x_0),$$

uniformly for $m \geqslant m_0$, $0 < R < R_0$, with some constant $c > 0$.

The following condition will replace Caratheodory's condition:

$$\partial\Omega = \partial\overline{\Omega} \cup \Gamma \tag{2.4}$$

where Γ *is closed and the points of* Γ *satisfy (with the possible exception of a set of capacity zero) a uniform Wiener condition with respect to* $(\partial\Omega_m)$.

Theorem 2.7 *The statement of* theorem 2.6 *remains valid if condition* (2.4) *holds and* $\partial\overline{\Omega}$ *satisfies* (3.20) *quasi-everywhere.*

Proof. We assume $f \in L^\infty$. By a standard argument we prove $u_m \to u$ weakly in $H^1(\mathbf{R}^n)$ for a subsequence and $-\Delta u = f$ in Ω weakly. With the preceeding methods and those of [9], [16], we obtain $u \in H_0^1(\overline{\Omega})$ since $u_m \in H_0^1(\overline{\Omega}_m)$. (We consider $H_0^1(\Omega)$, $H_0^1(\overline{\Omega})$ as subspaces of $H^1(\mathbf{R}^n)$ by extending H_0^1-functions by zero). Thus $u = o$ on $\partial\overline{\Omega}$ approximately everywhere.
Let $G = G_z$ be the fundamental solution of $-\Delta$, i.e.

$$-\Delta G = \delta \quad \text{in } \mathbf{R}^n, \quad n \geqslant 3,$$

where $\delta = \delta_z$ is the Dirac functional. Let $\delta^\rho = 0$ on $\mathbf{R}^n - B_\rho(z)$ and $\delta^\rho = |B_\rho|^{-1}$ on $B_\rho(z)$.
Define the "discrete" fundamental solution by

$$-\Delta G_\rho = \delta^\rho \quad \text{in } \mathbf{R}^n, \quad n \geqslant 3,$$

where $G_\rho(x) \to 0$ as $|x| \to \infty$. For $n = 2$ we require $G_\rho(x) = O(\log|x|)$.

Let $\tau : \mathbf{R}^n \to [0, 1]$ be a Lipschitz function such that $\tau = 1$ on $B_R(x_0)$, $\tau = 0$ on $CB_{2R}(x_0)$, $|\nabla\tau| \leqslant R^{-1}$. We choose the function $u_m G_\rho \tau^2$ as test function and obtain

(2.6) $\quad (\nabla u_m, \nabla(u_m G_\rho \tau^2)) = (f, u_m G_\rho \tau^2).$

Note that $u_m \in L^\infty$ since $f \in L^\infty$. We take into account that $G_\rho \geqslant 0$ and

$$(\nabla(u_m^2\tau^2), \nabla G_\rho) = |B_\rho|^{-1} \int_{B_\rho(z)} u_m^2\tau^2 dz \to u_m^2(z)$$

as $\rho \to 0$ if $z \in B_{R/2}(x_0)$ which we want to assume.
By simple calculations we obtain from (2.6) that

$$\int |\nabla u_m|^2 G\tau^2 dx + \frac{1}{2} u_m^2(z)$$
$$\leqslant 2\int |\nabla u_m||u_m|\tau|\nabla\tau| G dx + \int u_m^2 \tau|\nabla\tau||\nabla G| dx + \int |f||u_m|\tau^2 G dx;$$

The last inequality implies

$$u_m^2(z) \leqslant KR^{-n} \int_R^* u_m^2 dx + KR^2.$$

Here $\int_R^*$ denotes integration over $B_{2R}(x_0) - B_R(x_0)$.
Note that we used the fact that $\|u_m\|_\infty \leqslant K$ uniformly and $|\nabla G| \leqslant KR^{1-n}$ on $B_{2R}(x_0) - B_R(x_0)$. We now apply Poincaré's inequality which is discussed later. Since $u_m = 0$ approximately everywhere on $\partial\Omega$ we derive from theorem 2.9 that

$$R^{-n} \int_R^* u_m^2 dx \leqslant \frac{K}{\delta_j^m} R^{2-n} \int_R^* |\nabla u_m|^2 dx \leqslant \frac{K}{\delta_j^m} \int_R^* |\nabla u_m|^2 G_{x_0} dx$$

where $\delta_j^m = R_j^{2-n} \cdot (2\text{-cap}\,(B_{R(j)} \cap \partial\,\Omega_m, B_{2R(j)}),\qquad B_{R(j)} = B_{R(j)}(x_0).$

Hence $\delta_j^m u_m^2(z) \leqslant \overline{K} \int_R^* |\nabla u_m|^2 G_{x_0} dx + \widetilde{K} R^2 \delta_j^m,\ R = R(j).$

We perform the summation from j_0 up to $J \geqslant j_0$ and obtain

$$\left(\sum_{j=j_0}^{J} \delta_j^m\right) u_m^2(z) \leqslant \overline{K} \int_{B_{2R_0}(x_0)} |\nabla u_m|^2 G_{x_0} dx + \widetilde{K} R_0^2 \sum_{j=j_0}^{J} \delta_j^m$$

Choosing $u_m G_\rho$ as a test function we derive that the quantities $\int_{\Omega_m} |\nabla u_m|^2 G dx$ are uniformly bounded:

$$\int |\nabla u_m|^2 G_\rho dx + \frac{1}{2}(\nabla(u_m^2), \nabla G_\rho) = (\nabla u_m, \nabla(u_m G_\rho)) = (f, u_m G_\rho) \leqslant K.$$

Hence $u_m^2(z) \leqslant \overline{K}\left(\sum_{j=j_0}^{J} \delta_j^m\right)^{-1} + \widetilde{K} R_0^2.$

Choosing R_0 small and J large we obtain in view of the uniform Wiener condition for $x_0 \in \Gamma$ that

$$u_m^2(z) \leqslant \epsilon^2, \qquad z \in B_R(x_0),\ R = R_0 2^{-J-1}.$$

Therefore

$$u^2(z) \leqslant \epsilon^2, \qquad z \in B_R(x_0),\ R = R_0 2^{-J-1}.$$

Employing the capacity-analogue of Lusin's theorem and the methods of proving theorem 2.5 we obtain from this that $u = 0$ approximately everywhere on Γ. Thus $u = 0$ on $\partial\overline{\Omega} \cup \Gamma$ approximately everywhere and, in view of theorem 2.5, we have $u \in H_0^1(\Omega)$ which concludes the proof of theorem 2.7. (For $f \in L^2$ see the following remark.)

Remarks (i) Theorem 2.7 can be extended to the case that the right hand side f has the form $f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i g_i$, $g_i \in L^2$. For this, one has to approximate g_i by Lipschitz functions g_i^ϵ such that $\|g_i - g_i^\epsilon\|_{L^2} < \epsilon$.
Since the stability theorem holds for the solutions u_m^ϵ, u^ϵ of $-\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial_i g_i^\epsilon$ and since the errors $\|u_m - u_m^\epsilon\|_{H^1}$ are uniformly small for $\epsilon \to 0$ we can treat also the case $f \in H^{-1}(\Omega)$.

(ii) Condition (2.4) is satisfied in the case $\Omega_m = \Omega - (\Gamma + \epsilon_m)$ where Ω is a Caratheodory domain and Γ is an $(n-1)$-dimensional smooth manifold with boundary and (ϵ_m) is a sequence of vectors $\in \mathbf{R}^n$ tending to zero ($m \to \infty$). (In fact, no condition on $\partial\Omega$ is necessary.)

(iii) Grigorieff [9] and Stummel [16], [17] have a general theory for obtaining a stability theory for the eigenvalue problem, say,

$$-\Delta u = \lambda u, \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$

with Ω bounded. The "capacity-techniques" presented here can be applied in order to prove that the conditions of Grigorieff-Stummel are satisfied also in the case (2.4) where the segment property may be violated.

Poincaré's inequality An important technical tool for many considerations is Poincaré's inequality of which we want to give two versions, the second one saying something about the asymptotic behaviour of the constant in Poincaré's inequality. In the following we shall denote the set of zeros of an $H^{1,p}(\Omega)$-function u by

$$N = N(u) = \{x \in \Omega \mid u(x) = 0\}.$$

By a *Sobolev domain* we mean a connected open subset of $\mathbf{R}^n$ such that the imbedding of $H^{1,p}(\Omega)$ into $L^p(\Omega)$ is compact. Conditions on $\partial\Omega$ which guarantee that Ω is a Sobolev domain are well known cf. [1], [12] and the discussion of Mazja's result below.

Theorem 2.8 Let Ω *be a bounded Sobolev domain*, $p \in [1, \infty)$, *and* $\mathscr{C}_\epsilon^p$ *be the class of all* $H^{1,p}(\Omega)$-*functions* u *such that*

$$p\text{-cap } N(u) \geqslant \epsilon.$$

Then there exists a constant $K = K(\Omega, n, p, \epsilon)$ *such that*

$$\int_\Omega |u|^p dx \leqslant K \int_\Omega |\nabla u|^p dx \tag{2.7}$$

for all $u \in \mathscr{C}_\epsilon^p$.

P r o o f. Otherwise there is a sequence of functions $u_m \in H^{1,p}(\Omega)$ with the properties

$$\int_\Omega |u_m|^p dx = 1, \qquad \int_\Omega |\nabla u_m|^p dx \to 0 \qquad (m \to \infty)$$

and $\quad$ p-cap $N(u_m) \geqslant \epsilon$.

Since Ω is a Sobolev domain we may assume that $u_m \to u$ in $H^{1,p}(\Omega)$. We have $\int |u|^p dx = 1$ and $\int |\nabla u|^p dx = 0$. Thus $u = \text{const} \neq 0$ in Ω. By the capacity analogue of Egoroff's theorem (cf. theorem 2.3) we have for a subsequence $u_m \to u$ uniformly in $\Omega - E$ with some exceptional set E whose capacity satisfies p-cap $E < \epsilon/2$. Since $u = \text{const.} \neq 0$ it follows that $N(u_m) \subset E$ for almost all m of the subsequence which contradicts the hypothesis $u_m \in \mathscr{C}_\epsilon^p$. ■

R e m a r k. Choose the capacity (2.3) if $\partial\Omega$ is not Lipschitz.

It can be shown that the constant $K = K(\Omega, n, p, \epsilon)$ in theorem 2.8 behaves like ϵ^{-1}. For this we restrict ourselves to the case that Ω is the unit ball B; more general situations can be obtained easily by using diffeomorphisms or adapting the method of the following proof.

Theorem 2.9 *Let* $p \in [1, \infty)$. *There exists a constant* $K = K(p, n)$ *such that*

$$\text{(2.8)} \qquad \int_B |u|^p dx \leqslant \frac{K}{\text{p-cap } N(u)} \int_B |\nabla u|^p dx$$

for all $u \in H^{1,p}(B)$, $\|\nabla u\|_p \neq 0$.

P r o o f. We shall use an inhomogenous form of Poincaré's inequality, namely

$$\text{(2.9)} \qquad \int_B |u - \bar{u}|^p dx \leqslant C \int_B |\nabla u|^p dx, \qquad u \in H^{1,p}(B),$$

where $\bar{u}$ is the $(n-1)$-dimensional mean value of u taken over the *boundary* ∂B. The set N(u) does not occur in (2.9). This inequality can be proved indirectly: Suppose that (2.9) were not true. Then there exist functions u_m such that $\bar{u}_m = 0$, $\int |u_m|^p dx = 1$, $\int |\nabla u_m|^p dx \to 0$. For a subsequence we obtain $u_m \to u$ weakly in $H^{1,p}(B)$ and u has the properties $\int |u|^p dx = 1$, $u = \text{const}$, $\bar{u} = 0$ which contradict each other. Thus (2.9) is established. Clearly, the above proof gives no estimate for the constant in (2.9), however it is also easy to give direct proofs of (2.9) which give some estimate for this constant.
Because of homogeneity, it suffices to prove (2.8) for all $u \in H^{1,p}(B)$ such that $\bar{u} = 1$ where $\bar{u}$ always mean the mean value of u taken over ∂B.
We now use the fact that every function $u \in H^{1,p}(B)$ has an extension $\tilde{u}$ onto the ball $B_2 = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, |x| \leqslant 2\}$ such that

$$\text{(2.10)} \quad \|\nabla \tilde{u}\|_{L^p(B_2)} \leqslant K_0 \|\nabla u\|_{L^p(B)}.$$

This can be proved by some reflection argument. Let $\tau : B_2 \to [0, 1]$ be a Lipschitz function such that $\tau = 1$ on B and $\tau = 0$ on ∂B_2. Obviously, the function

$$\psi = \tau(\bar{u} - u)$$

is equal to 1 on N(u) and 0 on ∂B_2. Hence

$$(2.11)\quad \text{p-cap}\,(N(u), B_2) \leqslant \int_{B_2} |\nabla(\tau(\bar{u} - u))|^p dx$$
$$\leqslant \widetilde{K} \int_{B_2} |\nabla \tilde{u}|^p dx + \widetilde{K} \int_{B_2} |\bar{u} - u|^p dx \leqslant K \int_B |\nabla u|^p dx.$$

Note that we have used (2.10) and an analogue of (2.9), namely

$$\int_{B_2} |\bar{v} - v|^p dx \leqslant K \int_{B_2} |\nabla v|^p dx, \qquad v \in H^{1,p}(B_2),$$

where $\bar{v}$ again stands for the mean value of v taken over ∂B.
From inequality (2.11) we obtain

$$(2.12)\quad \bar{u} \leqslant \frac{K}{\text{p-cap}\, N(u)} \int_B |\nabla u|^p dx$$

for all $u \in H^{1,p}(B)$, $\|\nabla u\|_p \neq 0$, and we have replaced p-cap $(N(u), B_2)$ by p-cap $N(u)$ = p-cap $(N(u), Q)$, $Q \supset\supset B$, and $Q \subset\subset \mathbf{R}^n$ if $p < n$. This is possible because of the corresponding equivalence theorems which state estimates between different relative p-capacities (or just by adapting our proof).
From (2.9) and (2.12) we obtain

$$\int_B |u|^p dx \leqslant 2^{p-1} \left[\int_B |u - \bar{u}|^p dx + \int_B |\bar{u}|^p dx \right] \leqslant \left[K + \frac{K}{\text{p-cap}\, N(u)} \right] \int_B |\nabla u|^p dx$$

which proves the theorem.

Remark. In [13], Nikodym constructs a bounded domain Ω and a function $u \in L^1(\Omega)$ such that u is *not* contained in $L^2(\Omega)$ but $\nabla u \in L^2$. Nikodym's function vanishes on a set of positive capacity and can be proved to be the limit of a sequence of $H^{1,2}(\Omega)$-functions which vanish on a (uniform) set of positive capacity. This shows that theorem 2.8 does not hold for arbitrary bounded domains. A convenient reference for Nikodym's example is Mazja's book [12], § 3.4, pp. 182.

Another, somewhat related question, concerns Poincaré's inequality for functions $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ where Ω is *unbounded*, i.e. we ask for inequalities of the type

$$(2.13)\quad \int_\Omega |u|^p dx \leqslant K \int_\Omega |\nabla u|^p dx$$

for, say, $u \in C_0^\infty(\Omega)$. It is well known that such an inequality does not hold, in general, for unbounded Ω, for example if $\Omega = \mathbf{R}^n$. Inequality (2.13) holds if Ω is bounded in one direction or if the measure of $\Omega \cap (\mathbf{R}^n - B_R)$ tends sufficiently fast to zero as $R \to \infty$. Furthermore one is interested in inequalities of the type

$$(2.14)\quad \int_\Omega |u|^p \mu(dx) \leqslant K \int_\Omega |\nabla u|^p dx$$

and more general

$$(2.14')\quad \int_\Omega |u|^q \mu(dx) \leqslant K \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx \right)^{q/p}$$

with a measure μ different from the Lebesgue measure. If $\Omega = \mathbf{R}^n$, inequality (2.14) holds with

$$\mu(dx) = \rho(x)dx, \qquad \rho(x) = \min\{1, |x - x_0|^{-q(p,n)}\}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

It is clear that inequalities of the above type are of interest for spectral theory of elliptic operators. For p = 2 inequality (2.13) implies that the operators. $-\Delta$ is bounded from below on $C_0^\infty(\Omega)$ (in the sense of bilinear forms).
In his book [12], Mazja gives necessary and sufficient conditions for the domain Ω such that inequality (2.14′) holds. In his criteria, the notion of capacity is important. For illustration we present a special case of his results:
Let p = 2 and

$$\beta = \sup\left\{\frac{\mu(F)}{\operatorname{cap}(F, \Omega)}\,\middle|\, F \subset \Omega,\ F \text{ is compact}\right\}.$$

Note that β might be infinite. With this he proves the following theorem (see [12], § 2.5, theorem 6.11, page 126).

Theorem 2.10 (i) *For all* $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *the inequality*

(2.15) $$\int_\Omega |u|^2 \mu(dx) \leqslant C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

holds with $C \leqslant 4\beta$.

(ii) *If* (2.15) *holds for all* $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *then* $\beta \leqslant C$.

Furthermore, Mazja [12], § 2.5, p. 118, gives criteria which are equivalent to the compactness of bounded sets in $H_0^{1,2}(\Omega)$ for unbounded Ω. One of his criteria is

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup\left\{\frac{\mu(F)}{\operatorname{cap}(F, \Omega)}\,\middle|\, F \subset \Omega \cap CB_\rho,\ \operatorname{diam} F \leqslant 1,\ F \text{ compact}\right\} = 0.$$

Bibliographical remarks to § 2

The fact that functions from Sobolev spaces are defined up to a set of capacity zero was worked out first in Deny-Lions [5], 1953. A very general setting about this subject is presented in the paper of Aronszajn-Smith [2], where many types of spaces and capacities are studied. Before the work of Deny-Lions it was known that the space $H^{1,2}(\Omega)$ can be defined as the space of functions which are absolutely continuous on almost all parallel coordinate axes (see Beppo Levi [11] and Nikodym [13]). Theorem 2.2 and 2.3 are proved in [5].

The capacity analogue (2.3) of Egoroff's theorem implies that a sequence (u_m) of functions which converges strongly in $H^{1,p}$ has a *subsequence* which converges pointwise except a set of capacity zero. For Fourier series of $H^{1,2}$-functions one need not select a subsequence, the whole series converges pointwise except a set of capacity zero (see [20], pp. 194). This well known theorem can be seen as capacity analogue of the famous theorem of Carleson [3] about the almost everywhere convergence of the Fourier series of an L^2-function although Carleson's theorem is much more difficult to prove.

The earliest reference for Poincaré's inequality seems to be his paper [14] from 1894. There are some variants of Poincaré's inequality, usually one refers to the inequality

$$\int_\Omega |u|^p dx \leqslant K \int_\Omega |\nabla u|^p dx + K \left| \int_\Omega u \, dx \right|^p$$

which holds for a general class of domains Ω, the so called Poincaré's domains (see [5]). In this paper we have only been interested in the inequality

$$\int_\Omega |u|^p dx \leqslant K \int_\Omega |\nabla u|^p dx$$

where the capacity of the set of zeros of u enters.

According to [6], [18] theorem 2.8 and 2.9 have been conjectured by Stampacchia (he certainly must have known the simple proof of theorem 2.8). For $p = 2$ theorem 2.9 was first proved by Donoghue [6]. He gave good estimates for the constants.
The case $p \neq 2$ was done by Gariepy-Ziemer [8] and independently but later by Terreni [18].
For the bibliography concerning the stability of the Dirichlet problem we refer to Stummel's work [17] and to the references in Landkof's book [10], Ch. V, § 5.

Many interesting references to the subjects discussed can be found in the book of Schulze-Wildenhain [15].

Bibliography to § 2

[1] Agmon, S.: Lectures on elliptic boundary value problems. New York: Van Nostrand 1965

[2] Aronszajn, N.; Smith, K. T.: Functional spaces and functional completion. Ann. Inst. Fourier **6** (1955/56) 125–185

[3] Carleson, L.: On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. Uppsala **116** (1966) 137–157

[4] Chicco, M.: see § 1.

[5] Deny, J., Lions, J. L.: Les espaces du type de Beppo Levi. Ann. Inst. Fourier **5** (1953/54) 305–370

[6] Donoghue, W., Jr.: A coerciveness inequality. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **20** (1966) 589–593

[7] Frehse, J.: Eine Verfeinerung des Rellichschen Satzes.

[8] Gariepy, R.; Ziemer, W. P.: Behaviour at the boundary of solutions of quasilinear elliptic equations. Arch. Rational Mech. Anal. **56** (1974) 372–384

[9] Grigorieff, R. D.: Diskret kompakte Einbettungen in Sobolewschen Räumen. Math. Ann. **197** (1972) 71–85

[10] Landkof, N. S.: see § 1.

[11] Levi, B.: Sul principio di Dirichlet. R. C. Palermo **22** (1906) 293–359

[12] Mazja, W.: see § 1.

[13] Nikodym, O.: Sur une classe de fonctions considérées dans le problème de Dirichlet. Fund. Math. **21** (1933) 129–150

[14] Poincaré, H.: Sur les équations de la Physique mathématique. R. C. Palermo **8** (1894) 57–155

[15] Schulze, B. W.; Wildenhain, G.: Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Basel-Stuttgart: Birkhäuser 1977

[16] Stummel, F.: Diskrete Konvergenz linearer Operatoren. Part I: Math. Ann. **190** (1970) 45–92; Part II: Math. Zeitschr. **120** (1971) 231–264; Part III: Proc. Oberwolfach Confer. Linear Operators and Approximation 1971. Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1972. Int. Series Numer. Math. 20

[17] S t u m m e l , F.: Pertubation theory for Sobolev spaces. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 73 A, 1 (1974/75) 5–49
[18] T e r r e n i , B.: Una disequaglianza di Poincaré. Unpublished (but good!) manuscript. Pisa 1976
[19] W i e n e r , N.: see § 1.
[20] Z y g m u n d , A.: Trigonometric series. Cambridge: Cambridge University Press 1959

§ 3 Capacity and the Regularity of Solutions of Elliptic Equations

The first mathematical application of the notion of capacity has been given by Norbert Wiener 1923. He used it to state a precise condition on the boundary of a domain Ω in order to guarantee the continuity of generalized solutions to Dirichlet's problem. Thus one may say that the first application of capacity has been given in the regularity theory of elliptic equations. A "simple" proof of Wiener's criterion is given later.

Another important application of capacity are the theorems about the removability of singularities of solutions of elliptic equations. There are numerous papers containing results of the type: "If u is a solution of an elliptic equation in an open set $\Omega - K$ where $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ is open and $K \subset \Omega$ compact and cap $K = 0$ then under certain conditions u can be extended as a solution of the equation in all of Ω". As an example, we present a theorem of this type which can be proved by "soft" methods.

We consider the following system of elliptic equations with diagonal principal part

$$(3.1) \qquad -\sum_{i=1}^{n} \partial_i F_i^\nu + F_0^\nu = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, r$$

where $F_i^\nu = F_i^\nu(x, u, \nabla u) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x, u)\partial_k u_\nu, \quad i = 1, \ldots, n; \nu = 1, \ldots, r,$

$$F_0^\nu = F_0^\nu(x, u, \nabla u), \qquad u = (u_1, \ldots, u_r), \nu = 1, \ldots, r$$

We shall assume for $i, k = 1, \ldots, n$, and $\nu = 1, \ldots, r$

(3.2) $a_{ik}(x, u)$ *and* $F_i(x, u, \eta)$ *is measurable in* x *and continuous in* (u, η)

(3.3) $|F_0^\nu(x, u, \eta)| \leqslant K + K|\eta|^2, \quad x \in \Omega, |u| \leqslant C, \eta \in \mathbf{R}^{nr}$

(3.4) $|a_{ik}(x, u)| \leqslant K, \quad x \in \Omega, |u| \leqslant C$

$$(3.5) \qquad \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, u)\xi_i\xi_k \geqslant \lambda|\xi|^2, \qquad x \in \Omega, |u| \leqslant C, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n,$$

with a, K, $\lambda > 0$ *some constants.*

$$(3.6) \qquad \sum_{\nu=1}^{r} F_0^\nu(x, u, \eta)u^\nu \geqslant -c|\eta|^2 - K_0, \qquad x \in \Omega, |u| \leqslant C, \eta \in \mathbf{R}^{nr},$$

with K_0 *and* $c < \lambda$ *some constants.*

By a local weak solution u of the system (3.1) in a domain D we mean an $H^{1,2}_{loc}(D)$-function satisfying

$$\sum_{i=0}^{n} \int_D F_i^\nu \partial_i \varphi dx = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, r$$

for all $\varphi \in C_0^\infty(D)$.

Theorem 3.1 *Let* $u \in H^{1,2}_{loc}(D) \cap L^\infty(D)$ *be a local weak solution of* (3.1) *in the domain* $D = \Omega - K$ *where* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *is open and* K *is compact and has 2-capacity zero. In addition, let the regularity, growth and ellipticity conditions* (3.2)–(3.6) *for the data be satisfied. Then* u *can be extended to a function* $u \in H^{1,2}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *which is a weak solution of* (3.1) *in* Ω.

P r o o f. Since 2-cap K = 2-cap* K = 0 there is a compact set $K_\epsilon \supset\supset K$ such that 2-cap $K_\epsilon < \epsilon$. Let φ_ϵ be the capacity potential of K_ϵ which exists on account of theorem 2.4. Since $u \in L^\infty(D) \cap H^{1,2}_{loc}(D)$ and $1 - \varphi_\epsilon = 0$ in a neighbourhood of K the functions $u_\epsilon = u(1 - \varphi_\epsilon)$ and $u_\epsilon(1 - \varphi_\epsilon)$ can be extended as functions of $H^{1,2}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Since u is a weak solution of (3.1) we have in view of the growth conditions for the F_i that

$$\sum_{i=0}^{n} \int_\Omega F_i \partial_i (u_\epsilon(1 - \varphi_\epsilon)\psi^2) dx = 0 \tag{3.7}$$

where $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi \geqslant 0$, $\psi = 1$ in U(K).
From (3.7) and the conditions (3.5) and (3.6) we deduce a uniform bound for the $H^{1,2}(\Omega)$-norms of $u(1 - \varphi_\epsilon)\psi$, ψ fixed, as $\epsilon \to 0$. We may select a subsequence such that

(3.8) $\quad u_\epsilon \psi \rightharpoonup v$ *weakly in* $H^{1,2}(\Omega)$,

($\epsilon \to 0$) with some limit function $v \in H^{1,2}(\Omega)$. We define $\tilde{u} = v + (1 - \psi)u$.
We intend to prove that the convergence (3.8) holds strongly in $H^{1,2}(\Omega)$.
From (3.1) we obtain

$$\sum_{i=0}^{n} \int_\Omega F_i \partial_i [u(1 - \varphi_\epsilon - 1 + \varphi_\delta)^2 \psi^2] dx = 0$$

and from (3.5), (3.6) and the hypotheses $u \in L^\infty(D)$ we obtain

$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon - \nabla u_\delta|^2 \psi^2 dx \leqslant \overline{K}(\delta + \epsilon) \tag{3.9}$$

Note that we used the uniform boundedness of $u_\epsilon \psi$ in $H^{1,2}(\Omega)$ and the fact that

$$\int_\Omega \varphi_\epsilon^2 dx \leqslant K \int_\Omega |\nabla \varphi_\epsilon|^2 \leqslant K\epsilon \quad \text{etc.}$$

Inequality (3.9) implies that $(u_\epsilon \varphi)_{\epsilon \to 0}$ is a Cauchy sequence in $H^{1,2}(\Omega)$ and, hence, the convergence (3.8) holds in the strong sense. Now we show that $\tilde{u}$ is a local weak solution of (3.1) in Ω. For this, it suffices to prove that

$$\sum_{i=0}^{n} \int_\Omega F_i(x, \tilde{u}, \nabla \tilde{u}) \partial_i \tau dx = 0 \quad \text{for } \tau \in C_0^\infty(U(K)) \tag{3.10}$$

where $U(K) = \{x \in \Omega \mid \psi(x) = 1\}$.

From (3.1) we conclude

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{\Omega} F_i \partial_i (\tau(1-\varphi_\epsilon)^2) dx = 0$$

from which we deduce that

$$(3.11) \quad \sum_{ik=1}^{n} a_{ik}(x, u) \partial_k u_\epsilon \partial_i [\tau(1-\varphi_\epsilon)] dx + \int_{\Omega} F_0(x, u, \nabla u)(1-\varphi_\epsilon)^2 \tau dx = O(\sqrt{\epsilon})$$

For the sake of a simple notation, $u_\epsilon \tau$ and $F_0 \tau$ has to be understood as a scalar product in $\mathbf{R}^r$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_r)$.
We now use the fact that $u = \tilde{u}$ almost everywhere in Ω and, as a consequence of the strong $H^{1,2}_{loc}(\Omega)$-convergence $u_\epsilon \to \tilde{u}$, that

$$F_0(x, u, \nabla u)(1-\varphi_\epsilon)^2 \to F_0(x, \tilde{u}, \nabla \tilde{u}) \quad \text{in } L^1_{loc}(\Omega)$$

In equation (3.11) we pass to the limit $\epsilon \to 0$ and obtain (3.10). ∎

Remark Theorem 3.1 can be formulated as a theorem about "removable singularities" if an interior regularity theorem is available for $H^{1,2}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$-solutions. In our case, C^α-regularity follows from the condition

$$(3.12) \quad \|u\|_\infty a < \lambda$$

cf. Hildebrandt-Widman [26], Wiegner [42], and $C^{2+\alpha}$-regularity follows if

(3.13) a_{ik} *is Lipschitz continuous*

(3.14) $F_0^\nu \in C^\alpha$.

For an elegant new method of proving $C^{2+\alpha}$-regularity cf. [15].
Theorem 3.1 implies in particular that any solution $u \in C^2(\Omega - K) \cap L^\infty(\Omega - K)$ of (3.1) can be extended to a solution $\tilde{u} \in C^2(\Omega)$ of (3.1) provided that K is compact, 2-cap K = 0 and that the conditions (3.2)–(3.6) and (3.12)–(3.14) hold.

There are many results on the removability of singularities of solution of elliptic equations. Given a certain a-priori regularity of a solution of an elliptic equation one wants to conclude that sets of singularities with vanishing s-capacity are removable where s depends on the structure of the data and the a-priori regularity of the solution. (It has turned out that capacity is the adequate notion for "measuring" the set of singularities). Early results on this subject can be found in Carlesons book [9]; it also contains a complete list of the older bibliography about this subject. A short survey containing more recent results on the removability of singularities (also for higher order equations) is presented in [38], chap. IX, § 8.3. Here, we state only a result of Serrin [39], 1966. Serrin considers (as special case) the equation

$$(3.15) \quad -\sum_{i=1}^{n} \partial_i a_i(x, \nabla u) = 0$$

and assumes that there exists a number $p \in]1, \infty[$ and constants K, $c > 0$ such that

(3.16) $|a_i(x, \xi)| \leqslant K|\xi|^{p-1} + K, \qquad \xi \in \mathbf{R}^n, x \in \Omega, i = 1, \ldots, n,$

and

(3.17) $\sum_{i=1}^{m} a_i(x, \xi)\xi_i \geqslant c|\xi|^p$

He then proves

Theorem 3.2 *Let* Ω *be a domain of* $\mathbf{R}^n$ *and* $Q \subset \Omega$ *be a compact set with* s-cap $Q = 0$ *for some* $s \in [p, n]$. *Let* $q > s(p-1)/(s-p)$ *and* $u \in L^q(\Omega - Q) \cap H^{1,p}_{loc}(\Omega - Q)$ *be a local weak solution of equ.* 3.15. *Then* u *can be extended to a continuous local solution of* (3.15).

Note that this theorem is not as trivial as theorem 3.1 whose proof is based on the fact that $u\varphi \in H^{1,2}_{loc}(\Omega - Q)$ if $u \in L^\infty \cap H^{1,2}_{loc}(\Omega - Q)$ and $\varphi \in H^1(\Omega)$. With the method of the proof of theorem 3.1 one obtains only that sets of singularities of vanishing s-capacity are removable provided that $u \in L^q(\Omega - Q)$, $q = \dfrac{sp}{s-p}$ i.e. q is such that $u\nabla\varphi \in L^p$ if $\nabla\varphi \in L^s$.
For proving the stronger result as stated in theorem 3.2 one has to analyse the growth of the singularity of u near the set Q. One should try to extend Serrin's result to the case of elliptic systems under the conditions of theorem 3.1, the hypothesis $u \in L^\infty$ replaced by $u \in L^q$.
The minimal surface equation

$$(3.18) \quad -\sum_{i=1}^{2} \partial_i\left(\frac{\partial_i u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0$$

has the interesting property that the analogue of theorem 3.1 is true even *without* the assumption $u \in L^\infty$ or $u \in L^q$:

Theorem 3.3 *Let* Ω *be a domain of* $\mathbf{R}^2$ *and* $Q \subset \Omega$ *be a compact set with vanishing linear Hausdorff measure. Let* $u \in C^2(\Omega - Q)$ *be a solution of* (3.18). *Then* u *can be extended to a solution* $\in C^2(\Omega)$ *of* (3.18).

Theorem 3.3 was first stated by Bers [6] for the case that Q consists of a single point. This case was generalized to other equations, e.g. [12], [33], and in 1965 the case 1-cap Q = 0 was treated independently by De Giorgi-Stampacchia (see [34]) and J. C. C. Nitsche [34] (Nitsche allowed $Q \subset \bar{\Omega}$). The proof is based on an extension of the maximum principle. It states that any solution u of (3.18) in $\Omega - Q$ is bounded by the values of u on $\partial\Omega$ which gives an L^∞-estimate. From here one can proceed as in the proof of theorem 3.1 (with some additional difficulties due to the fact that p = 1). For a recent survey on this subject see [35].

Wiener's criterion and the continuity of the solution of Dirichlet's problem at the boundary Let Ω be a bounded domain of $\mathbf{R}^n$ and $g : \partial\Omega \to \mathbf{R}$ be continuous. We consider the Dirichlet problem: Find $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ such that

(3.19) $\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = g \quad \text{on } \partial\Omega.$

Wiener's criterion [43] from 1923 gives a necessary and sufficient condition on the points of $\partial\Omega$ such that there exists a solution of (3.19) for all continuous functions

$g : \partial\Omega \to \mathbf{R}$. Furthermore this criterion gives a necessary and sufficient condition on single points x_0 of $\partial\Omega$ such that generalized solutions of (3.19) are continuous at x_0.

For a generalized solution several definitions are possible. The "Sobolev space solution" is defined by

$$u \in H^{1,2}(\Omega), \qquad u - g_0 \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = 0 \quad \text{for all } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Here g_0 is a function $\in H^{1,2}(\Omega)$ such that $g_0 = g$ on $\partial\Omega$ approximately everywhere.

The "potential theoretical solution" is defined as the supremum of all subharmonic functions v such that $v \leqslant g$ on $\partial\Omega$. Here, we refer only to the "Sobolev space solution". The case where g is not a restriction of a function $g_0 \in H^{1,2}(\Omega)$ can be treated by an approximation argument. Wiener's criterion holds for a general class of linear and nonlinear elliptic equations.

We present it in an equivalent form using the variational capacity. Let $x_0 \in \partial\, \Omega$ and let (B^i) be a sequence of concentric balls $B^i = B(x_0, \rho^i)$ with center x_0 and radius ρ^i where $\rho \in]0, 1[$, say $\rho = 1/2$.
Define

$$\delta_i(x_0) = \delta_i = \rho^{i(2-n)}(2\text{-cap}\,((B^i - B^{i+1}) \cap \complement\, \Omega, B^{i-1}).$$

We say that *Wiener's condition* is satisfied at the point x_0 with respect to Ω if

$$(3.20) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(x_0) = \infty$$

Remarks (i) It was shown in [27] that one can use the full balls B^i rather than the crowns $B^i - B^{i+1}$ for the definition of δ_i:

$$\tilde{\delta}_i = 2\text{-cap}\,(B^i \cap \complement\Omega, B^{i-1}) \cdot \rho^{i(2-n)}$$

The conditions (3.20) and $\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\delta}_i = \infty$ are equivalent (see [27]). Several other conditions can be shown to be equivalent to condition (3.20), see books about potential theory [29], Ch. V, or [25], § 10.5.
Condition (3.20) can also be formulated using integrals rather than sums.

(ii) Condition (3.20) can be used for the definition of regular points. A point $x_0 \in \partial\Omega$ is called a *regular* point of $\partial\Omega$ if (3.20) holds and it is called *irregular* if the converse is true.
In books about potential theory the regularity of a point $x_0 \in \partial\Omega$ frequently is defined in a different way, for example if the generalized "potential theoretical" solutions of Dirichlets problem are continuous at x_0 for all $g \in C(\partial\Omega)$.
For the definition of regular points in a general setting cf. below.

Theorem 3.4 (Wiener) *Let Ω be a bounded domain of $\mathbf{R}^n$. The Dirichlet problem* (3.19) *has a solution for all continuous functions* $g : \partial\Omega \to \mathbf{R}$ *if and only if condition* (3.20) *is satisfied for all* $x_0 \in \partial\Omega$.

Theorem 3.5 (Wiener) *Let Ω be a bounded domain of $\mathbf{R}^n$. The generalized solutions of Dirichlet's problem* (3.19) *are continuous at $x_0 \in \partial\Omega$ for all continuous functions $g : \partial\Omega \to \mathbf{R}$, if and only if condition* (3.20) *is satisfied at the point x_0.*
(For the "Sobolev space solution" we require also $g = g_0|_{\partial\Omega}$, $g_0 \in H^{1,2}(\Omega)$).

We give a simple proof of the statement that Wiener's condition implies continuity. For the reverse part we refer the reader to books about potential theory [29], [25].
First we remark that it suffices to prove theorem 3.4 for functions g which are the restrictions of Lipschitz continuous functions $g_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. For general continuous g there is a sequence of Lipschitz continuous functions $g_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ such that

$$\|g - g_i\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \to 0 \qquad (i \to \infty).$$

From the maximum principle it follows that for the corresponding solutions u_i of $\Delta u_i = 0$, $u_i = g_i$ on $\partial\Omega$ we have

$$\|u_i - u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|g_i - g_k\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \to 0 \qquad (i, k \to \infty).$$

Hence $u_i \to u$ uniformly and $u \in C(\overline{\Omega})$ since $u_i \in C(\overline{\Omega})$. Furthermore, it is well known how to establish that $u \in C^2(\Omega)$ and $\Delta u = 0$, see [29], [25].
Thus it suffices to prove theorem 3.5 in the case that g_0 is Lipschitz. (The general case stated in theorem 3.5 can also be proved by an approximation argument, but this is more involved.) Thus we assume that x_0 is a point satisfying (3.20) and $g = g_0|_{\partial\Omega}$, g_0 Lipschitz. Let G be the fundamental solution of the Laplacean with singularity at x_0 and G_z be the one with singularity at z. This means that

$$-\Delta G = \delta(. - x_0), \qquad -\Delta G_z = \delta(. - z)$$

where $\langle \delta(. - x_0), \varphi\rangle = \varphi(x_0)$ etc. Furthermore, let

$$-\Delta G^r = \delta_r(. - x_0), \qquad -\Delta G_z^r = \delta_r(. - z)$$

where $(\delta_r(. - x_0), \varphi) = |B_r|^{-1} \int \varphi\chi(B_r(x_0))dx$, etc., with X being the characteristic function.
We have the following properties

$$G > 0, \quad G_z > 0, \quad G^r > 0, \quad G_z^r > 0$$

in $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$, or in the interior of $B(x_0, \rho)$ for $z \in B(x_0, 1 - \rho)$ if $n = 2$. For $r \to 0$ the convergences $G^r \to G$ or $G_z^r \to G$ hold pointwise and in $H^{1,q}$, $q < n/(n - 1)$, and in $H^{1,\infty}_{loc}(\mathbf{R}^n - x_0)$ or $H^{1,\infty}_{loc}(\mathbf{R}^n - z)$.
Furthermore, G^r, $G_z^r \in H^{1,\infty}_{loc}(\mathbf{R}^n)$, but not uniformly as $r \to 0$. From the differential equation we obtain

$$(3.21) \quad (\nabla u, \nabla[(u - g)\tau^2 G_z^r]) = 0$$

where τ is a Lipschitz function such that $\tau = 1$ on $B(x_0, \rho^{i+1})$, $\tau = 0$ on $CB(x_0, \rho^i)$ and $|\nabla\tau| \leqslant K\rho^{-i}$.
From (3.21) we conclude

$$\int |\nabla u|^2\tau^2 G_z^r dx + \frac{1}{2}\int \nabla(u - g)^2\nabla(\tau^2 G_z^r)dx = \int \nabla g(u - g)\nabla(\tau^2 G_z^r)dx$$

and $\int |\nabla u|^2\tau^2 G_z^r dx + \frac{1}{2}\int \nabla[\tau^2(u-g)^2]\nabla G_z^r dx$

$$= -\int \nabla(u-g)^2\tau\nabla\tau G_z^r dx + \int (u-g)^2\tau\nabla\tau\nabla G_z^r dx + \int \nabla g(u-g)\nabla(\tau^2 G_z^r)dx.$$

By the definition of G_z^r we have

$$\int \nabla[\tau^2(u-g)^2]\nabla G_z^r dx = |B_r|^{-1}\int \tau^2(u-g)^2 X(B_r(z))dx.$$

(We have set $u - g = 0$ on $C\Omega$). We now assume that

$$|x_0 - z| < \frac{1}{2}\rho^{i+1},\ z \in \Omega.$$

Since $\nabla\tau = 0$ on $B(x_0, \rho^{i+1})$ we then obtain

$$\nabla\tau\nabla G_z^r \to \nabla\tau\nabla G_z \quad \text{in } L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^n)\ (r \to 0).$$

(Note that the singularity z is contained in the interior of $B(x_0, \rho^{i+1})$ where $\nabla\tau = 0$). So we may pass to the limit $r \to 0$ and arrive at the inequality

$$\int |\nabla u|^2\tau^2 G_z dx + \frac{1}{2}(u-g)^2(z)$$
$$\leqslant -\int \nabla(u-g)^2\tau\nabla\tau G_z dx + \int (u-g)^2\tau|\nabla\tau|\nabla G_z dx + \int \nabla g(u-g)\nabla(\tau^2 G_z)dx.$$

We have used Fatou's lemma and the fact that $u - g \in C(\Omega)$ and $u \in L^\infty(\Omega)$. Using Young's inequality we obtain

$$\frac{1}{2}\int |\nabla u|^2\tau^2 G_z dx + \frac{1}{2}(u-g)^2(z) \tag{3.22}$$
$$\leqslant 2\int (u-g)^2|\nabla\tau|^2 G_z dx + \int (u-g)^2\tau|\nabla\tau||\nabla G_z|dx + \int |\nabla g||u-g||\nabla(\tau^2 G_z)|dx$$

If $|x_0 - z| < \frac{1}{2}\rho^{i+1}$ we have on the set $B(x_0, \rho^i) - B(x_0, \rho^{i+1})$ that

$$K^{-1}R^{2-n} \leqslant G_z \leqslant KR^{2-n}, \qquad R = \rho^{i+1}, \text{ for } n \geqslant 3 \tag{3.23}$$

and $\quad K^{-1}\log\frac{1}{R} \leqslant G_z \leqslant K\log\frac{1}{R}, \qquad R = \rho^{i+1}, \text{ for } n = 2$

and further

$$|\nabla G_z| \leqslant KR^{1-n}, \qquad R = \rho^{i+1}. \tag{3.24}$$

Thus we obtain from (3.22) with $R = \rho^{i+1}$

$$\frac{1}{2}(u-g)^2(z) \leqslant KR^{-n}\int |u-g|^2 X_i^* dx + KR \tag{3.25}$$

if $n \geqslant 3$ and an additional factor $\ln(1/R)$ on the right hand side of (3.25) if $n = 2$. Here $X_i^* = X(B(x_0, \rho^i) - B(x, \rho^{i+1}))$. Note that we have estimated the last summand in inequality (3.22) by KR or KE $\ln(1/R)$, respectively.
From Poincaré's inequality (cf. theorem 2.9) we obtain the estimate

$$\delta_i R^{-n}\int |u-g|^2 X_i^* dx \leqslant KR^{2-n}\int |\nabla u - \nabla g|^2 X_i^* dx, \qquad R = \rho^i. \tag{3.26}$$

Here the basic domain where Poincaré's inequality is applied is the crown $B(x_0, \rho^i) - B(x_0, \rho^{i+1})$. On can prove this variant by first treating the case with basic domain $B(x_0, 1) - B(x_0, \rho)$ similar to the proof of theorem 2.9 and then performing a homothety which yields the factor R^2 in Poincaré's inequality. The 2-capacity is transformed with the factor R^{2-n}.
From (3.23), (3.25) and (3.26) we obtain

$$(3.27)\quad \delta_i(u-g)^2(z) \leqslant K \int |\nabla u - \nabla g|^2 G X_i^* dx + KR \log \frac{1}{R}$$

with $R = \rho^i$. This holds for all $z \in B(x_0, \rho^{i+1}/2)$.
We are now in the position to prove the continuity of u at x_0. Let $\epsilon > 0$ be given. Choose an integer j such that $KR \log (1/R) < \epsilon^2/2$ where $R = \rho^j$ and K is the constant in (3.27). Performing in (3.27) the summation $i = j, \ldots, m$ we obtain

$$(\Sigma_j^m)(u-g)^2(z) \leqslant K \int_\Omega |\nabla u - \nabla g|^2 G\, dx + (\Sigma_j^m)\frac{\epsilon^2}{2}$$

where $\Sigma_j^m = \sum_{i=j}^{m} \delta_i$.

Since $\Sigma_j^m \to \infty$ $(m \to \infty)$ on account of (3.20) there exists an $m = m(\epsilon)$ such that

$$(\Sigma_j^m)^{-1} K \int_\Omega |\nabla u - \nabla g|^2 G dx < \frac{\epsilon^2}{2}.$$

Note that the integral $\int_\Omega |\nabla u - \nabla g|^2 G dx$ is finite on account of (3.22) with $z = x_0$.
Thus

$$(u-g)^2(z) < \epsilon^2 \quad \text{for } z \in B\left(x_0, \frac{1}{2}\rho^{m+1}\right)$$

and the continuity of u at x_0 has been proved.
The above proof works also for uniformly elliptic equations with measurable coefficients, say

$$-\sum_{i,k=1}^{n} \partial_i(a_{ik}(x)\partial_i u) + B(x, u, \nabla u) = 0$$

and quasilinear elliptic equations

$$(3.28)\quad -\sum_{i=1}^{n} \partial_i(a_i(x, u, \nabla u)) + B(u, u, \nabla u) = 0$$

One has to use the fundamental solution of the operator $-\sum_{i,k=1}^{n} \partial_i(a_{ik}(x)\partial_i u)$ or the fundamental solution of the linearized principal part in (3.28). For the lower order term quadratic growth in ∇u is admissible. For details we refer the reader to [17], [18].

Variational inequalities with irregular obstacles Let us consider the simple variational inequality:

Find $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ such that

$$u \in \mathbf{K} := \{w \in H_0^{1,2}(\Omega) \mid w \geqslant \psi \text{ approximately everywhere in } \Omega\}$$

and

$$(3.29)\quad \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla(u - v) + f(u - v)]dx \leqslant 0 \quad \text{for all } v \in \mathbf{K}.$$

Here Ω is a bounded domain of $\mathbf{R}^n$, $f \in L^\infty$, and the obstacle $\psi : \Omega \to \mathbf{R}$ is a function such that $\mathbf{K} \neq \emptyset$ (which implies some compatibility condition at the boundary $\partial\Omega$). It is well known that the solution of (3.29) has Lipschitz continuous first derivatives if the same holds for ψ. Furthermore, continuity of ψ implies continuity of u. We refer to books about variational inequalities [28], [2] or the survey [14]. However, recent developments in the theory and applications of variational inequalities have brought some motivation to the study of regularity-problems for variational inequalities with *irregular* obstacles. We refer, in particular, to the so called quasi-variational inequalities of obstacle type, see [4], [5]. These problems exhibit the special feature that the obstacle ψ is not prescribed *a priori* by the data but it can only be specified *ex post* from the solution u itself, via some mapping

$$\psi = M(u).$$

It frequently happens that the mapping M behaves badly in Sobolev spaces and that for $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ the function Mu is *not* continuous. In order to obtain existence results thus one needs regularity results and a-priori-estimates for variational inequalities with *irregular* obstacles. The first result in this setting which was applied to quasi-variational inequalities has been presented in [16], [17] and [5]. Clearly, the classical case of a variational inequality with an irregular obstacle is the one which satisfied by capacity potentials. If the points of a compact set $E \subset \mathbf{R}^n$ are all regular in the sense of Wiener then the corresponding capacity potential is continuous. This gives an example of a variational inequality with a *discontinuous* obstacle $\psi = X(E)$ (i.e. the characteristic function of E) but with *continuous* solution.

In [16] it was proved that the solution of (3.29) is Hölder continuous provided that the obstacle is *monotone* in n linearly independent directions or if it satisfies a one-sided Hölder condition.

In [18] a more general class of obstacles – the so-called *Wiener obstacles* – is presented for which the continuity of the solution of the variational inequality can be proved. The Wiener obstacles are defined by the following condition which has to hold for each x_0:

There exist numbers $\rho \in\,]0, 1[$, $\alpha \geqslant 1$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha > \beta$, *such that for all* $\epsilon > 0$ *and all* $x_0 \in \Omega$ *the sets*

$$T(R) = T(\epsilon, R, x_0)$$
$$= \{x \in B(x_0, \alpha R) - B(x_0, \beta R) \mid \psi(y) \leqslant \psi(x) + \epsilon,\ y \in B(x_0, R)\}$$

satisfy the "Wiener condition"

$$(3.30)\quad \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i = \infty$$

where $\delta_i = \rho^{(2-n)i}(2\text{-cap}\,(T(\rho^i), B(x_0, 2\alpha\rho^i))$.

We cite here only the local result from [18]; it holds for a fairly general class of elliptic differential operators but we confine ourselves to the case (3.29).

Theorem 3.6 *Let* $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ *be the solution of the variational inequality* (3.29), *let* $f \in L^\infty(\Omega)$ *and* ψ *be a Wiener obstacle. Then* $u \in C(\Omega)$.

Due to the classical results of Wiener it is clear that condition (3.30) is the weakest general condition which still yields continuity of the solution of the variational inequality.
For the regularity up to the boundary and other generalizations we refer the reader to [18].

Thin sets and the fine topology A set $E \subset \mathbf{R}^n$ is called to be *thin at the point* $x_0 \in \mathbf{R}^n$ if there exists a number $\rho \in]0, 1[$ such that

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i < \infty$$

where $\delta_i = \rho^{(2-n)i} \operatorname{cap}^*(B(x_0, \rho^i) \cap E, B(x_0, \rho^{i-1})$

or, equivalently,

$$\delta_i = \rho^{(2-n)i} \operatorname{cap}^*((B(x_0, \rho^i) - B(x_0, \rho^{i+1})) \cap E, B(x_0, \rho^{i-1}).$$

In potential theory, usually a less technical definition is given, for example by requiring that a potential has a strict discontinuity at x_0.
If Ω is an open set of $\mathbf{R}^n$ then a point x_0 is an irregular point of $\partial\Omega$ if $\complement\Omega$ is thin at x_0.

The following theorem is fundamental for potential theory.

Theorem 3.7 *Let* $E \subset \mathbf{R}^n$. *The sets of points of* E *where* E *is thin has capacity zero.*

Here, "capacity" is understood in the potential theoretic sense. For the proof see e.g. [25], § 10, or [29], Ch. V.
As a consequence of theorem 3.7 and 3.5 one obtains that the set of points $x_0 \in \partial\Omega$ where the generalized solution of Dirichlet's problem (3.19) with continuous boundary data may be *discontinuous* has 2-*capacity zero.*
The concept of "thinness" leads to the definition of the *fine topology* in $\mathbf{R}^n$.
A set $U \subset \mathbf{R}^n$ is called a "fine" neighbourhood of the point x_0 if the set $\mathbf{R}^n - U$ is thin at x_0. The system of "fine" neighbourhoods defines the fine topology. One can prove that the fine topology is the weakest topology for which the potentials (corresponding to the capacity which is used) are continuous functions. If 2-capacity is used the fine topology is also the weakest topology for which subharmonic functions are continuous, see [25]. The following theorem is due to Fuglede [20]:

Theorem 3.8 *Let* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *be open and* $u : \Omega \to \mathbf{R}^n$ *be quasi-continuous. Then* u *is continuous with respect to the fine topology.*

A convenient reference for the proof is [38].

The set of singularities of solutions of nonlinear elliptic systems As model problem we consider the elliptic system

(3.31) $\sum_{i=1}^{n} \partial_i a_i(\nabla u) = 0$

in a domain $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, where

(3.32) $a_i \in C^1(\mathbf{R}^{nr}, \mathbf{R}^r)$

and

(3.33) $\left|\frac{\partial}{\partial \eta} a_i(\eta)\right| \leqslant K, \qquad \eta \in \mathbf{R}^{nr}$

(3.34) $\sum_{ik}\sum_{\mu\nu} (\partial/\partial\eta_{k\nu}) a_i^{\nu}(\eta)\xi_{i\mu}\xi_{k\nu} \geqslant c|\xi|^2 \qquad (i, k = 1, \ldots, n; \mu, \nu = 1, \ldots, r), \ \xi, \eta \in \mathbf{R}^{nr}$.

Here $c > 0$ and K are constants not depending on ξ and η.

It is well known (see the survey [22]) that for $r \geqslant 2$ even bounded singularities of weak solutions $u \in H^{1,2}(\Omega, \mathbf{R}^r)$ are not necessarily removable, i.e. there are examples of systems of type (3.31) whose solution is bounded or Lipschitz but not $\in C^2(\Omega)$.

One has to confine oneselve to prove *partial regularity results.* These results are of the type that a solution $u \in H^{1,2}(\Omega)$ of (3.31) is regular, say $\in C^2$, in an open subset $\Omega_0 \subset \Omega$ where the exception set $\Omega - \Omega_0$ is "small".

In the simple case discussed here the following holds (see [23], theorem 7.1).

Theorem 3.8 *Let* $u \in H^{1,2}(\Omega, \mathbf{R}^r)$ *be a solution of the elliptic system* (3.31) *whose data are assumed to satisfy* (3.32)–(3.34). *Then there is an open set* $\Omega_0 \subset \Omega$ *such that* $u|_{\Omega_0} \in C^2(\Omega_0)$ *and for the exception set we have*

$$\Omega - \Omega_0 \subset \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

where $$\Sigma_1 = \left\{x \in \Omega : \liminf_{R\to 0} ⨍_R |\nabla u - (\overline{\nabla u})_R|^2 dx > 0\right\}$$

$$\Sigma_2 = \left\{x \in \Omega : \sup_R (|u_R| + |(\nabla u)_R|) = \infty\right\}$$

Here $⨍_R f\,dx = \bar{f}_R = \bar{f}_R(x)$ denotes the mean value of the function f, taken over $B_R(x)$.

The above theorem holds also in cases where a_i depends on x and u.

For the proof we refer to the work of Morrey, Giusti, Miranda, Nečas, Giacquinta, Modica, which is discussed in Giacquinta's survey [22] on elliptic systems. Here our concern is to illustrate the proof that the sets Σ_1 and Σ_2 have *2-capacity zero.* Up to now the authors draw the weaker conclusion that $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ has $(n - 2 + \epsilon)$-dimensional vanishing Hausdorff measure, see [24]. For proving that the $(n - 2)$-dimensional Hausdorff measure vanishes, Giacquinta-Modica and others established an $H^{2,p}_{loc}(\Omega)$-regularity for the solution u, with some $p > 2$.

Theorem 3.9 *Let* $v \in H^{1,2}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *and let*

$$\Sigma_1 = \left\{x \in \Omega \,\middle|\, \limsup_{R\to\infty} ⨍_R |v - \bar{v}_R|^2 dx \neq 0\right\}.$$

Then 2-cap $\Sigma_1 = 0$.

P r o o f. By theorem 2.2 the function v is quasi continuous in Ω and by Fuglede's theorem there is a set E of capacity zero such that v is fine-continuous in $\Omega - E$. We may assume that the mean values $\bar{v}_R(x_0)$ of v taken over the ball $B_R(x_0)$ converge to $v(x_0)$ for $x_0 \in \Omega - E$, $(R \to 0)$, $R \in \Lambda$). This follows since $\bar{v}_R \to v$ in $H^{1,2}_{loc}(\Omega)$, $(R \to 0)$.
We intend to prove that for $x_0 \in \Omega - E$

$$\liminf ⨍_R |v - \bar{v}_R(x_0)|^2 dx = 0 \qquad (R \to 0)$$

where the mean value $⨍_R$ is taken over $B_R(x_0)$.
Since v is fine-continuous at x_0 there is a set $V = V(x_0)$ which is thin at x_0 and has the property

(3.35) $|v(x) - v_R(x_0)|^2 < \epsilon$ for $x \in B_R(x_0) - V$, $0 < R < R(\epsilon)$, $R \in \Lambda$.

Since V is thin at x_0 there is a sequence of capacity potentials $\tau_i \in H^{1,2}_0(B(x_0, \rho^{i-1}))$ such that $\tau_i = 1$ on $V \wedge B(x_0, \rho^i)$ and

$$\rho^{i(n-2)} \int |\nabla \tau_i|^2 dx \to 0 \quad (i \to \infty).$$

We may assume that $\Lambda \subset \{\rho, \rho^2, \ldots\}$. From Poincaré's inequality we obtain

$$\rho^{in} \int \tau_i^2 dx \leqslant K \rho^{i(n-2)} \int |\nabla \tau_i|^2 dx \to 0 \qquad (i \to \infty).$$

This and (3.35) imply with $R = \rho^i \in \Lambda$, $R < R(\epsilon)$

$$⨍_R |v - \bar{v}_R(x_0)|^2 dx = ⨍_R |v - \bar{v}_R(x_0)|^2 (1 - \tau_i^2) dx + ⨍_R |v - v_R(x_0)|^2 \tau_i^2 dx$$
$$\leqslant \epsilon + 2K \|v\|_\infty \rho^{in} \int \tau_i^2 dx \to \epsilon \qquad (i \to \infty).$$

This concludes the proof of the theorem. ∎

We now want to get rid of the hypothesis that $v \in L^\infty$ and want to replace this condition by one which can be derived from the differential equation. Since $\bar{v}_R \to v$ in $H^{1,2}_{loc}(\Omega)$, $(R \to 0)$ it is clear that the set

$$\left\{ x_0 \in \Omega \,\middle|\, \liminf_{R \to 0} \left| \bar{v}_R(x_0) \right| = \infty \right\}$$

has vanishing 2-capacity. For the stronger statement that the set

$$\Sigma_0 = \left\{ x_0 \in \Omega \,\middle|\, \limsup_{R \to 0} \left| \bar{v}_R(x_0) \right| = \infty \right\}$$

has vanishing 2-capacity the following theorem is applicable.

Theorem 3.10 *Let* $v \in H^{1,2}_{loc}(\Omega)$ *and*

$$\int_{B_R} |\nabla v|^2 dx \leqslant K R^{-2} \int_{B_{2R}} |v - v_{2R}|^2 dx + K_0 R^{n-2}$$

for all concentric balls $B_R \subset B_{2R} \subset \Omega$ *and* K, K_0 *some constants. Then* 2-cap $\Sigma_0 = 0$.

We omit the proof which uses ideas of the following

Theorem 3.11 *Let* $v \in H^{1,2}_{loc}(\Omega)$ *and*

$$\int_{B_R} |\nabla v|^2 dx \leqslant K R^{-2} \int_{B_{2R}} |v - v_{2R}|^2 dx + K_0 R^{n-2}$$

for all concentric balls $B_R \subset B_{2R} \subset \Omega$ *and* K, K_0 *some constants.*

Then the set

$$\Sigma_1 = \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, \liminf_{R\to 0} \textstyle\fint_R |v - v_R|^2 dx = 0 \right\}$$

has vanishing 2-capacity.

Proof. It suffices to prove that

$$\text{2-cap } \Sigma_1 \cap \Omega_0 = 0, \qquad \Omega_0 \subset\subset \Omega.$$

We know that

$$\bar{v}_R(.) \to v \quad \text{in } H^1(\Omega_0)\ (R \to 0)$$

and from § 2 we conclude that

$$v_R(.) \to v \quad \text{in the capacity-sense } (R \to 0)$$

for the *full* sequence $R \to 0$. Hence

$$\text{2-cap } \{x_0 \in \Omega_0 \,|\, |\bar{v}_R(x_0) - v(x_0)| \geqslant \epsilon\} \to 0 \qquad (R \to 0)$$

and there exists a subsequence $\Lambda \subset (R \to +0)$ such that

$$\bar{v}_R(x_0) \to v(x_0)$$

for all $x_0 \in \Omega_0 - E$, 2-cap $E = 0$.
We now proceed as in the proof of theorem 3.9 (with some modifications).
We assume $n \geqslant 3$. The case $n = 2$ can be treated similarly.

$$(3.36)\quad \textstyle\fint_R |v - \bar{v}_R(x_0)|^2 dx = \underbrace{\fint_R |v - \bar{v}_R(x_0)|^2 (1 - \tau_i^2) dx}_{=A} + \underbrace{\fint_R |v - \bar{v}_R(x_0)|^2 \tau_i^2 dx}_{+B}$$

We have

$$B \leqslant (\textstyle\fint_R \tau_i^n dx)^{2/n} (\fint_R |v - v_R(x_0)|^{2n/(n-2)} dx)^{(n-2)/n} \leqslant K\delta_i^{2/n} R^2 \fint_R |\nabla v|^2 dx$$

where $\delta_i = R^{2-n} \int |\nabla \tau_i|^2 dx$, $\rho^{i+1} \leqslant R \leqslant \rho^i$, $i \geqslant i_0$.
From the hypothesis we obtain

$$(3.37)\quad B \leqslant K\delta_i^{2/n} \textstyle\fint_{2R} |v - v_{2R}(x_0)|^2 dx + K\delta_i^{2/n}.$$

With $\quad \Phi_h^r(x_0) = \sup \{\fint_R |v - \bar{v}_R(x_0)|^2 dx \,|\, h < R \leqslant r\}$

we obtain from the above inequalities that

$$\Phi_h^r(x_0) \cdot (1 - K\delta_i^{2/n}) \leqslant \sup_{h \leqslant R \leqslant r} \textstyle\fint_R |v - v_R(x_0)|^2 (1 - \tau_i^2) dx + K\delta_i^{2/n}.$$

Since v is fine-continuous at $x_0 \in \Omega - E$, 2-cap $E = 0$, we have that $\fint_R |v|^2 (1 - \tau_i^2) dx$ is bounded as $R \to 0$.
Together with theorem 3.10 we obtain that $\Phi_h^r(x_0)$ remains bounded as $r, h \to 0$.
Thus we obtain that

$$\Phi(x_0) = \limsup_{R\to 0} \textstyle\fint_R |v - v_R(x_0)|^2 dx < \infty$$

for $x_0 \in \Omega_0 - E'$, 2-cap $E' = 0$.
From (3.37) it follows that $B \to 0$ as $R \to 0$ and from (3.36) for $R \in \Lambda$, $R < R(\epsilon)$,

$$\textstyle\fint |v - v_R(x_0)|^2 dx \leqslant 2\fint_R |v - v(x_0)|^2 (1 - \tau_i^2) dx + 2\fint_R |v(x_0) - \bar{v}_R(x_0)|^2 dx + \epsilon.$$

We conclude $⨍_R |v - \bar{v}_R(x_0)|^2 dx < e\epsilon$, $R \to 0$, $R \in \Lambda$ since v is fine continuous. The theorem follows. ∎

As an application we obtain from theorem 3.8–3.11

Theorem 3.12 *Under the assumptions* (3.31)–(3.34) *there is an open set* $\Omega_0 \in \Omega$ *such that for every solution* $u \in H^{1,2}(\Omega, \mathbf{R}^n)$ *we have the partial regularity result*

$$u \,|\, \Omega_0 \in C^2(\Omega_0)$$

and 2-cap $(\Omega - \Omega_0) = 0$.

P r o o f. One has to apply theorem 3.9 and 3.10 to the function $v = \nabla u$. The assumption

$$\int_{B_R} |\nabla^2 u|^2 dx \leqslant KR^{-2} \int_{B_{2R}} |\nabla u - (\overline{\nabla u})_R|^2 dx + K_0 R^{n-2}$$

can be derived easily from the assumption (3.33) and (3.34) with $K_0 = 0$ ∎

Bibliographical remarks to § 3

The first results about the removability of singularities of solutions of elliptic equations date back to the nineteenth century, namely the fact that isolated singularities of bounded holomorphic functions are removable.

Important papers on the removability of singularities of solutions of elliptic equations except the ones which have been mentioned in the text are (among others) Serrin [40], Littmann [30, 31], Adams–Polking [1].

The Wiener criterion for the Laplace operator has been stated and proved in several ways by Kellogg–Vasilesco [27], De la Vallée Poussin [11], Frostman [19], Brelot [7, 8]. More general operators have been treated by Püschel [37], Tautz [41], Oleinik [36]. The case of operators with measurable coefficients was treated by Litman–Stampacchia–Weinberger [32], the non-linear case in the L^p-setting was partially treated by Gariepy–Ziemer [21].

The notion of thinness is due to Brelot [7]. The fine topology was introduced by Cartan [10] already in 1946. These notions are important in modern potential theory and also in the axiomatic approach [3], [7].

For bibliography on the singular set of non linear elliptic systems we refer the reader to Giacquinta's survey [22].

Bibliography to § 3

[1] Adams, D. R.; Polking, J. C.: Removable singularities of solutions of partial differential equations. Acta Math. **125** (1970) 39–56

[2] Baiocchi, C.; Capelo, A.: Disequazioni variazionali e quasi variazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera. Vol. 1 and 2. Bologna: Pitagora Editrice 1978

[3] Bauer, H.: Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1966

[4] Bensoussan, A.; Lions, J. L.: Applications des inequations variationelles en contrôle stochastique. Paris: Dunod 1978

[5] Bensoussan, A.; Frehse, J.; Mosco, U.: A stochastic impuls control problem with quadratic growth Hamaltonian and the corresponding quasi variational inequality.

[6] Bers, L.: Isolated singularities. Ann. Math. **53** (1951) 364–386

[7] Brelot, M.: Sur la théorie moderne du potentiel. Compt. R. C. Acad. Sci Paris **209** (1939) 828–830

[8] Brelot, M.: Eleménte de la théorie classique du potentiel. Les cours de Sorbonne. Paris 1959

[9] Carleson, L.: see § 1.

[10] Cartan, H.: Théorie générale du balayage en potentiel newtonien. Ann. Univ. Grenoble **22** (1946) 221–280

[11] De la Vallée Poussin, C.: Points irreguliers. Détermination des masses par les potentiels. Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. de Sci. **24** (1938) 368–384 and 672–689

[12] Finn, R.: Isolated singularities of solutions of non linear partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953) 385–404

[13] Finn, R.: On partial differential equations (whose solutions admit no isolated singularities). Scripta Math. **26** (1961) 107–115

[14] Frehse, J.: On the smoothness of solutions of variational inequalities with obstacles. Proceedings Semester Partial Differential Equations Warszawa 1978. Banach Center Publ.

[15] Frehse, J.: On the regularity of solutions to differential inequalities. Ann. de Math. de la Decision. Boston: Birkhäuser.

[16] Frehse, J.; Mosco, U.: Variational inequalities with one sided irregular obstacles. Manuscripta Math. **28** (1979) 219–233

[17] Frehse, J.; Mosco, U.: Irregular obstacles and quasivariational inequalities of stochastic impuls control.

[18] Frehse, J.; Mosco, U.: Wiener obstacles.

[19] Frostman, O.: see § 1.

[20] Fuglede, B.: Finely harmonic functions. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1972·= Lecture Notes Mathematics Vol. 289

[21] Gariepy, R.; Ziemer, W. P.: see § 2.

[22] Giaquinta, M.: Sistemi ellittici non lineari. Teoria della regolarità. Boll. Un. Mat. Ital. **16-A** (1976) 259–283

[23] Giaquinta, M.; Modica, M.: Almost – everywhere regularity results for solutions of non linear elliptic systems. Manuscripta math. **28** (1978) 109–158

[24] Giusti, E.: Precisazione delle funcziosi di $H^{1,p}$ e singolarità delle soluzioni deboli di sistemi ellittici non lineari. Boll. Un. Mat. Ital. **2** (1969) 71–76 – Un'aggiunta alla mia nota: Regolarità parziale delle soluzioni di sistemi ellittici quasi lineari di ordine arbitrario. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **27** (1973) 161–166

[25] Helms, L. L.: see § 1.

[26] Hildebrandt, S.; Widman, K. O.: On the Hölder continuity of quasi linear elliptic systems of second order. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (Ser. IV) **4** (1977) 145–178

[27] Kellogg, O. D.; Vasilesco, F.: A contribution to the theory of capacity. Amer. J. Math. **51** (1929) 515–526

[28] Kinderlehrer, D.; Stampacchia, G.: An introduction to variational inequalities and their applications. New York – London – Toronto: Academic Press 1980

[29] Landkov, N. S.: see § 1.

[30] Littmann, W.: A connection between α-capacity and (m-p)-polarity. Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967) 862–866

[31] Littmann, W.: Polar sets and removable singularities of partial differential equations. Ark. Math. **7** (1967) 1–9

[32] Littmann, W., Stampacchia, G., Weinberger, H. F.: Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **17** (1963) 43–77

[33] Nitsche, J. C. C.: Über ein verallgemeinertes Dirichletsches Problem für die Minimalflächengleichung und hebbare Unstetigkeiten ihrer Lösungen. Math. Ann. **158** (1965) 203–214

[34] Nitsche, J. C. C.: Vorlesungen über Minimalflächen. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1975

[35] Nitsche, J. C. C.: Non removable singularities for nonlinear elliptic differential equations. Vorlesungsreihe SFB 72. Analysisseminar Aachen – Bochum – Bonn – Düsseldorf, Sommersemester 1980. pp. 47–54

[36] Oleinik, O. A.: On the Dirichlet problem for equations of elliptic type (Russ.). Math. Sb. N. S. **24** (1949) 3–14
[37] Püschel, W.: Die erste Randwertaufgabe der allgemeinen selbstadjungierten elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung für beliebige Gebiete. Math. Z. **34** (1931) 535–553
[38] Schulze, B. W.; Wildenhain, G.: see § 2.
[39] Serrin, J.: Local behavior of solutions of quasi-linear equations. Acta Math. **111** (1964) 247–302
[40] Serrin, J.: Removable singularities of solutions of elliptic equations. Arch. Rat. Mech. Anal. **17** (1964) 67–78
[41] Tautz, G.: Zur Theorie der ersten Randwertaufgabe. Math. Nachr. **2** (1949) 273–303
[42] Wiegner, M.: A-priori Schranken für Lösungen gewisser elliptischer Systeme. Manuscripta Math. **18** (1976) 279–297
[43] Wiener, N.: see § 1.

§ 4 Existence of Weak Solutions to Non-Linear Problems by Capacity Methods

The purpose of this chapter is to illustrate the importance of the notion of quasi-uniform convergence for non-linear problems.

Lower semi-continuity of variational integrals Let Ω be a bounded domain of $\mathbf{R}^n$ and let

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u, \nabla u)dx,$$

where $F : \Omega \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^{nr} \to \mathbf{R}^1$ is continuous and $u \in H^{1,2}(\Omega, \mathbf{R}^r)$, i.e. u is an r-vector function with components in $H^{1,2}$. For simplicity we assume that $F(x, u, \nabla u)$ has at most quadratic growth in $(u, \nabla u)$. The $J : H^{1,2}(\Omega, \mathbf{R}^r) \to \mathbf{R}$. We consider the variational problem

(4.1) $\quad J(u) = \min!, \qquad u \in H_0^{1,2}(\Omega, \mathbf{R}^r).$

It is well known that (4.1) is solvable if J is coercive, i.e.

(4.2) $\quad J(u) \to \infty$ if $\|u\|_{1,2} \to \infty$

and if J is *lower semi-continuous* with respect to *weak convergence* in $H_0^{1,2}$, i.e.

(4.3) $\quad J(u) \leqslant \liminf J(u_i) \qquad (i \to \infty)$

for every sequence $(u_i \in H_0^{1,2})$ which converges weakly to u.
The following conditions are sufficient for (4.3):

(4.4) $\quad F \in C(\Omega \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^{nr})$

(4.5) $\quad F \geqslant -K \quad$ on $\Omega \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^{nr}$

(4.6) $\quad F(x, u, \eta)$ is convex with respect to $\eta \in \mathbf{R}^{nr}$.

For the proof cf. Morrey's book, § 4, [8]. A "simple" proof is also contained in [3]. Condition (4.6) is reasonable in the case $r = 1$ but for $r > 1$ it is not satisfied in many applications. Another condition which is more adequate for $r > 1$ is

(4.7) $\quad J(u) \geqslant -\int_\Omega g(x, u)dx, \qquad F(x, u, \nabla u)$ quadratic in ∇u,

where g is continuous and has, say, quadratic growth at infinity with respect to

the second argument u. Condition (4.6) together with (4.4) guarantee that J is lower semicontinuous in the weak topology of $H^{1,2}(\Omega)$.
Unfortunately, condition (4.6) is still not general enough to treat the cases where some experts conjecture lower semi-continuity.
In fact, there are examples of problems coming from elasticity theory where lower semi-continuity has been established under conditions not covered by (4.6) or (4.7), see [1]. One of the open problems consists in the question whether the *Legendre-Hadamard* condition implies lower semi-continuity in the weak topology of $H^{1,2}$. The function F is said to satisfy the Legendre-Hadamard condition if

(4.8) $(\partial^2/\partial\eta_{i\nu}\partial\eta_{k\mu})F(x, u, \eta)\xi_i\xi_k\lambda_\nu\lambda_\mu \geqslant c|\xi|^2|\lambda|^2$

for all $x \in \Omega$, $u \in \mathbf{R}^r$, $\eta \in \mathbf{R}^{rn}$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}^n$ with c some positive constants. Here a summation convention $i, k = 1, \ldots, n$, $\nu, \mu = 1, \ldots, r$ is assumed. If $F(x, u, \eta)$ is constant in x and u and quadratic with respect to η then (4.8) implies (by Fourier transform)

$$J(u) \geqslant c_0 \int |\nabla u|^2 dx, \qquad u \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

($c_0 > 0$) and hence the quadratic functional is convex and, therefore, lower semi-continuous in the weak topology. If $F(x, u, \eta)$ is continuous with respect to x, constant with respect to u and satisfies (4,8) than one can use a partition of unity and can prove "Garding's inequality"

$$J(u) \geqslant c_0 \int |\nabla u|^2 dx - K \int u^2 dx$$

with c_0, $K > 0$ some constants. Thus J(u) is the difference of a lower semi-continuous functional $J(u) + K \int u^2 dx$ and a continuous functional $K \int u^2 dx$ (always with respect to the weak topology of $H^{1,2}(\Omega)$. Hence J(u) itself is lower semi-continuous.

We now consider the case

(4.9) $F(x, u, \eta) = a_{ik}^{\mu\nu}(x, u)\eta_{i\nu}\eta_{k\mu}$

($\eta_{i\nu}$ stands for $(\partial/\partial x_i)u_\nu$.) For the a_{ik} we assume

(4.10) $a_{ik}^{\mu\nu} \in C(\Omega, \mathbf{R}^r) \cap L^\infty(\Omega, \mathbf{R}^r)$

We always assume the summation convention $i, k = 1, \ldots, n$, $\mu, \nu = 1, \ldots r$.
The Legendre-Hadamard condition then has the form

(4.11) $a_{ik}^{\mu\nu}(x, u)\xi_i\xi_k\lambda_\nu\lambda_\mu \geqslant c|\xi|^2|\lambda|^2$

with $c > 0$ some constant. It is not known yet whether the functional J is lower semi-continuous under the conditions (4.9), (4.10), (4.11).
However one can prove

Lemma 4.1 *Let* $u_m \in H^{1,2}(\Omega, \mathbf{R}^r)$ *be a sequence which has the following properties*

(4.12) $u_m \to u$ *weakly in* $H^{1,2}$

(4.13) $u_m \to u$ *quasi-uniformly in* Ω

(4.14) $\int_E |\nabla u_m|^2 dx < \delta$

uniformly with respect to m *if*

$$2\text{-cap } E < c(\delta)$$

$c(\delta) > 0$.

(4.15) $\|u_m\|_\infty \leqslant K$.

Then the conditions (4.9), (4.10), (4.11) *imply*

$$J(u) \leqslant \liminf J(u_m) \qquad (m \to \infty).$$

Proof. Since $u_m \to u$ quasi-uniformly there is a set E such that 2-cap $E < \epsilon$ and $u_m \to u$ uniformly on $\Omega - E$. We may assume that $u|_{\Omega - E}$ is uniformly continuous. We have

(4.16) $J(u_m) = J(u_m(1 - \varphi)) + O(\sqrt{\epsilon})$

since $\|u_m\|_\infty + \|u_m\|_{1,2} \leqslant K$ uniformly as $m \to \infty$.
The coefficients $a_{ik}^{\mu\nu}(x, u_m)$ have the property that for every $x_0 \in \Omega$, $\delta > 0$, there exists a neighbourhood $U(x_0)$ and a constant $c(x_0)$ such that

$$|a_{ik}^{\mu\nu}(x, u_m(x)) - c(x_0)| < \delta, \qquad x \in U(x_0) \cap \Omega - E.$$

Since $1 - \varphi = 0$ on E we obtain via partition of unity and Fourier transform

$$J(v(1 - \varphi)) \geqslant c_0 \int |\nabla(v(1 - \varphi)|^2 dx - K \int |v(1 - \varphi)|^2 dx$$

for all $v \in H_0^{1,2}(\Omega, \mathbf{R}^r)$ with K, $c_0 > 0$ some constants. Hence the functional $J_0(v(1 - \varphi))$ is lower semi-continuous and thus, in view of (4.16),

$$J(u(1 - \varphi)) \geqslant \liminf J(u_m) + O(\sqrt{\epsilon}) \qquad (m \to \infty)$$

The lemma follows by passing to the limit $\epsilon \to 0$. ■

Remark The condition $\|u_m\|_\infty \leqslant K$ can be replaced by the condition

(4.17) $|a_{ik}^{\mu\nu}(x, u)u_\mu| + |a_{ik}^{\mu\nu}(x, u)u_\nu| \leqslant K$

(no summation convention!) uniformly for $x \in \Omega$, $u \in \mathbf{R}^r$.

Unfortunately, the additional hypothesis is difficult to verify if one wants to apply the lemma to a minimizing sequence of a variational problem. An example where the conditions are satified is the following.
Let

$$J(u) = \int_\Omega a_{ik}^{\mu\nu}(x, u)\partial_i u_\mu \partial_k u_\nu dx$$

with a summation convention i, k = 1, . . ., n, μ, ν = 1, . . ., r. Consider the variational problem

Minimize

(4.18) $J(u) - \int_\Omega f u dx$

for $u \in \mathbf{K} = \left\{ v \in H_0^{1,2}(\Omega, \mathbf{R}^r) \,\middle|\, \int_\Omega |\nabla v|^p dx \leqslant C \right\}$

where

(4.19) $f \in L^2(\Omega, \mathbf{R}^r)$

and

(4.20) $p > 2$

are given.

Theorem 4.1 *Under the assumptions* (4.9)–(4.11), (4.17) *and* (4.19), (4.20) *there exists a minimum* $u \in \mathbf{K}$ *of the variational problem* (4.18).

P r o o f. The conditions of Lemma 4.1 with (4.15) replaced by (4.17) are satisfied for a minimizing sequence (u_m) of problem (4.18). Hypothesis (4.14) follows from the uniform boundedness of the numbers $\int |\nabla u_m|^p dx$ via Hölder's inequality and the fact that a set with small capacity has small measure, see § 1. The quasi-uniform convergence follows from a refinement of Rellich's theorem below. Since the lower semi-continuity of a minimizing sequence is established, the theorem follows via the classical direct methods. ■

Remark It would be of interest to generalize theorem 4.1 to the case $p = 2$ which will be less trivial.

The following theorem can be considered as a refinement of Rellich's theorem.

Theorem 4.2 *Let* Ω *be a bounded domain of* $\mathbf{R}^n$ *and* $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ *be a bounded sequence in* $H_0^{1,p}(\Omega)$.
Then there exists a subsequence Λ *such that*

$$u_m \to u \ (m \to \infty,\ m \in \Lambda)$$

q*-quasi-uniformly for all* $q < p$.

P r o o f. It suffices to prove that for every $\epsilon > 0$ the q-capacity of the set

$$E^m = \{x \in \Omega \,|\, |u_m - u|(x) \geqslant \epsilon\}$$

tends to zero as $m \to \infty$. For proving this let φ_m be the q-capacity potential of E^m. It satisfies the variational inequality

$$(|\nabla \varphi_m|^{q-2} \nabla \varphi_m, \nabla \varphi_m - \nabla w) \leqslant 0$$

for all $w \in H_0^{1,2}(Q)$, $Q \supset\supset \Omega$, such that $w \geqslant 1$ approximately everywhere on E_m. We choose the function

$$w = (2/\epsilon) \max \{|u_m - u| - \epsilon/2, 0\}$$

as test function. This is possible since $w \in H_0^{1,2}(Q)$ and $w \geqslant 1$ on E^m. We obtain

$$\|\nabla \varphi_m\|_q^q \leqslant (|\nabla \varphi_m|^{q-2} \nabla \varphi_m, \nabla w) \leqslant \|\nabla \varphi_m\|_q^{q-1} \|\nabla w\|_q$$

and by Hölder's inequality

$$\|\nabla \varphi_m\|_q \leqslant \|\nabla w\|_q \leqslant |W|^{1/q - 1/p} \|\nabla w\|_p$$

where $|W|$ is the Lebesgue measure of the set

$$W = \{x \in \Omega \,|\, \nabla w(x) \neq 0\}.$$

With the above choice of w we obtain

$$\|\nabla\varphi_m\|_q \leqslant |\{|u_m - u| \geqslant \epsilon/2\}|^{1/q-1/p} \|\nabla u_m - \nabla u\|_p$$

where $\{|u_m - u| \geqslant \epsilon/2\} = \{x \in \Omega \,|\, |u_m - u|(x) \geqslant \epsilon/2\}$.

By Rellich's theorem there is a subsequence Λ such that $u_m \to u$ in $L^p(\Omega)$ $(m \to \infty, m \in \Lambda)$.

Hence $|\{|u_m - u| \geqslant \epsilon/2\}| \to 0 \quad (m \to \infty, m \in \Lambda)$

and $\nabla\varphi_m \to 0$ in L^q, $(m \to \infty, m \in \Lambda)$. ■

Remark (i) It is not true that every bounded sequence $(u_m \in H_0^{1,p}(\Omega))$, Ω bounded, has a subsequence which converges p-quasi-uniformly, see [6].

(ii) Another refinement of Rellich's theorem is due to Stampacchia [9], who applied it to the calculus of variations and corresponding lower semi-continuity theorems. Stampacchia [9] proved that every bounded sequence in $H_0^{1,p}(\Omega)$ has a subsequence which converges uniformly on the set $\Omega - E$ where the exceptional set E has s-dimensional projections with arbitrarly small s-dimensional Lebesgue-measure, $s = s(p, n)$.

A further refinement of Rellich's theorem is presented at the end of § 4.

Solvability of non linear elliptic boundary value problems We consider the system of equation

(4.21) $\Delta u_j = F^j(x, u, \nabla u), \quad j = 1, \ldots, r$

in a bounded domain $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. The functions F^j are supposed to have the following properties

(4.22) $F^j(x, \mu, \eta)$ *is measurable with respect to* $x \in \Omega$ *and continuous with respect to* (μ, η) $\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^{nr}$.

(4.23) $|F^j(x, \mu, \eta)| \leqslant K|\eta|^2 + g(x)$

for all $j = 1, \ldots, r$, $x \in \Omega$, $\mu \in \mathbf{R}^r$, $\eta \in \mathbf{R}^{nr}$, *with* K *some constant and* $g \in L_+^2(\Omega)$ *some function.*

(4.24) $\sum_{j=1}^{r} F^j(x, \mu, \eta)\mu_j \geqslant -(1 - \delta_0)|\eta|^2 - g(x)$

for all $x \in \Omega$, $\mu \in \mathbf{R}^r$, $\eta \in \mathbf{R}^{nr}$ with $\delta_0 \in]0, 1[$ *some constant.*

For $u \in H_0^{1,2}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ and $v \in L^\infty \cap H_0^{1,2}(\Omega, \mathbf{R}^r)$ we define

$$(Au, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega F(x, u, \nabla u) \cdot v\, dx.$$

A weak solution $u \in H_0^{1,2}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ satisfies, by definition,

(4.25) $(Au, \varphi) = 0 \quad$ for all $\varphi \in L^\infty \cap H_0^{1,2}(\Omega; \mathbf{R}^r)$.

Condition (4.24) implies that A is coercive on

$H_0^{1,2}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, i.e.

(4.26) $(Au, u)/\|u\|_{1,2} \to \infty \; (\|u\|_{1,2} \to \infty, u \in L^\infty)$.

Property (4.26) and the other conditions (4.21)–(4.24) imply that finite dimensional approximations of (4.25) have solutions, i.e. if V is a finite dimensional linear subspace of $L^\infty \cap H_0^{1,2}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ then there is a solution of the problem:

Find $u \in V$ such that

(4.27) $(Au, \varphi) = 0 \quad$ for all $\varphi \in V$.

The passage to the limit as $\dim V \to \infty$ however cannot be justified easily. This is due to the fact that the theory of Leray-Lions and the theory of pseudo-monotone operators is not applicable in the above setting. The following terms do not necessarily converge to zero as $m \to \infty$

$$B_m = \int_\Omega F(x, u^{(m)}, \nabla u^{(m)}) \cdot (u^{(m)} - w^{(m)})dx \quad .$$

Here $u^{(m)}, w^{(m)} \in L^\infty \cap H_0^{1,2}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ and $u^{(m)} \rightharpoonup u$ weakly in H^1 and $w^{(m)} \to u$ strongly in H^1.

Otherwise we could argue in the following standard way: Let $u_m \in V_m$ be a solution of (4.27). For a subsequence we have $u_m \rightharpoonup u$ weakly in H^1 and there is a sequence $w_m \in V_m$ such that $w_m \to u$ strongly in H^1. (The spaces V_m have to be chosen appropriately.) Then

$$(Au_m, u_m - w_m) = 0$$

and if we knew that $B_m \to 0$ we could conclude that

$$\int \nabla u_m \cdot (\nabla u_m - \nabla w_m)dx = (Au_m, u_m - w_m) - B_m \to 0$$

and $\quad \int |\nabla u_m - \nabla w_m|^2 dx \to 0 \qquad (m \to 0)$

and hence $\nabla u_m \to \nabla u$ strongly in L^2.

This would allow the passage to the limit $0 = Au_m \rightharpoonup Au$ weakly $(m \to \infty)$.

Unfortunately this argument cannot be applied on account of the growth behaviour (4.23) which does not imply that $B_m \to 0$. Therefore, it is better to use another approximation of equation (4.21) where more additional properties of the approximate solution u_m can be expected.

We approximate equation (4.21) by

(4.28) $\Delta u_m = mF_m/(m + |F_m|)$

where $F_m = (F_m^1, \ldots, F_m^r)$, $F_m^j = F_m^j(x, u_m, \nabla u_m)$.

Since the right hand side of (4.28) is bounded in L^∞ for fixed m we obtain the existence of a weak solution $u_m \in L^\infty \cap H_0^{1,2}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ of (4.28) via the theory of Leray-Lions [7]. By (4.24) we have that

$$\|u_m\|_{1,2} \leq K_0 \qquad (m \to \infty)$$

and if

(4.29) $g \in L^\infty$

also $\|u_m\|_\infty \leq K_0$, $(m \to \infty)$.

The latter estimate follows from the differential inequality

$$\frac{1}{2} \Delta u_m^2 \geq g \cdot u_m .$$

We may assume that $u_m \rightharpoonup u$ weakly in H^1 (for a subsequence, $m \to \infty$). In order to justify the passage to the limit $m \to \infty$ it would suffice to have the *quasi-uniform convergence* $u_m \to u$:

Lemma 4.2 *Let* $u_m \in H_0^{1,2}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ *be a solution of* (4.28) *such that* $u_m \to u$ *quasi-uniformly in* Ω *for some subsequence* ($m \to \infty$). *Suppose that* (4.22), (4.23) *and* (4.24) *is satisfied. Then* $u_m \to u$ *strongly in* H^1 *and* u *is a weak solution of* (4.21).

P r o o f. By the assumption there exists a set $E_\epsilon \in \Omega$ such that 2-cap $E_\epsilon < \epsilon$ and $u_m \to u$ uniformly on $\Omega - E_\epsilon$ ($m \to \infty$, $m \in \Lambda$). Let $\varphi_\epsilon \in H_0^{1,2}(Q)$, $Q \supset\supset \Omega$ be the capacity potential of E_ϵ.

Then $\int F_m^j(1-\varphi_\epsilon)(u_m - u)dx \to 0 \qquad (m \to \infty, m \in \Lambda)$

and hence, in view of (4.28),

$$(\nabla u_m, \nabla((1-\varphi_\epsilon)^2(u_m - u))) \to 0$$

and thus

$$\int |\nabla u_m - \nabla u|^2 (1-\varphi_\epsilon)^2 dx \to 0 \qquad (m \to \infty, m \in \Lambda) \tag{4.29}$$

From equation (4.28) we obtain for $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u_m \cdot \nabla(\psi(1-\varphi_\epsilon)^2)dx + \int_\Omega F_m \cdot \psi(1-\varphi_\epsilon)^2 dx = 0$$

and by (4.29) we may pass to the limit m and obtain

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(\psi(1-\varphi_\epsilon)^2)dx + \int_\Omega F \cdot \psi(1-\varphi_\epsilon)^2 dx = 0.$$

Passing to the limit $\epsilon \to 0$ we conclude that u is a weak solution of (4.21). ∎

Note that our discussion holds also for more general principal parts, say

$$(Lu)_j = -\sum_{i,k=1}^n \partial_i(a_{ik}(x,u)\partial_k u_j), \qquad j = 1, \ldots, r,$$

where the a_{ik} are Lipschitz and satisfy the condition of uniform ellipticity. For the sake of simplicity we confine ourselves to the case $(Lu)_j = \Delta u_j$. Furthermore it is sufficient to require growth conditions for F only for $|u| \leqslant C$ where C is an a-priori-estimate for $\|u\|_\infty$.

Up to now existence theorems for equ. (4.21) have been obtained mainly by proving that the sequence (u_m) occuring in Lemma 4.2 satisfies a uniform Hölder condition as $m \to \infty$. Hence $u_m \to u$ uniformly for a subsequence and the quasi-uniform convergence is established. For our model problem this has been done only in the case of two dimensions [4] although we expect that the existence of weak solutions of (4.21) can be obtained via capacity methods for all dimensions. Up to now, the solvability of (4.21) has been obtained only in cases where "full" regularity (i.e. $u \in C^{2+\alpha}$) for the solution can be derived (besides the case that (4.21) comes from an Euler equation of a regular variational integral). Examples of elliptic systems of type (4.21) for which the solvability is derived via C^α-a-priori estimates (which implies full $C^{2+\alpha}$-regularity) can be found in papers of Hildebrandt-Widman, Wiegner-Hildebrandt-Giaquinta, and others. Another class of equations (always of type

(4.21)) coming from *stochastic game* theory will be presented in a paper of Bensoussan and the author [2]. It contains a class of elliptic systems where the one-sided condition (4.24) may be violated but where still L^∞- and C^α-estimates can be obtained.

In the following we present a model problem where the condition of Lemma 4.2 and thus an existence theorem for equation (4.21) can be established although the solution need not be regular.

We consider the system

$$(4.30)\quad \begin{aligned} -\Delta u_1 + a|\nabla u_1|^2 u_1/(1+|u|^2)^2 + 2\nabla u_1 \nabla u_2 u_2/(1+|u|^2)^2 = f_1 \\ -\Delta u_2 + b|\nabla u_2|^2 u_2/(1+|u|^2)^2 + 2\nabla u_1 \nabla u_2 u_1/(1+|u|^2)^2 = f_2 \end{aligned}$$

with the boundary condition

$$u \in H_0^{1,2}(\Omega).$$

Here a and b are numbers such that

$$(4.31)\quad a > 1, \quad b > 1$$

and the functions f_1, f_2 satisfy

$$(4.32)\quad f_1, f_2 \in L^2(\Omega), \qquad f_1 \geqslant 0, f_2 \geqslant 0.$$

If, in addition, $f_1, f_2 \in L^\infty$ then the results of Bensoussan and the author [2] imply that the above system has a non-negative solution $(u_1, u_2) \in C^\alpha \cap H^{2,p}(\Omega)$, $p < \infty$. Since we assume merely $f_1, f_2 \in L^2$ we cannot expect that $u \in C^\alpha$ for $n \geqslant 4$ and the solvability of (4.21) cannot be established via C^α-a-priori-estimates. We shall prove the solvability via capacity methods and obtain

Theorem 4.3 *Under the assumptions* (4.31) *and* (4.32) *the system* (4.30) *has a weak solution* $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$.

P r o o f. Let $f_1^m = \min\{f_1, m\}$, $f_2^m = \min\{f_2, m\}$ and $u_1^m, u_2^m \in H_0^{1,2}(\Omega)$ be a solution of (4.21) with f_1, f_2 replaced by f_1^m, f_2^m. The results of [2] guarantee that u_1^m, u_2^m exist and are Hölder continuous. For simplicity we assume some boundary regularity which implies that u_1^m, u_2^m are Hölder continuous up to the boundary although this is not necessary for the proof.

From the maximum principle and (4.32) we obtain that $u_1^m, u_2^m \geqslant 0$ and from (4.31) we obtain by choosing u_1^m and u_2^m as testfunctions that the sequences (u_1^m) and (u_2^m) are uniformly bounded in H^1 as $m \to \infty$. We select a subsequence Λ such that

$$u_1^m \rightharpoonup u_1, \qquad u_2^m \rightharpoonup u_2 \qquad (m \to \infty, m \in \Lambda)$$

weakly in $H_0^{1,2}(\Omega)$.

Since $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ there exists a set F_ϵ with 2-cap $E_\epsilon < \epsilon$ such that

$$|u| \leqslant L = L(\epsilon) \quad \text{on } \Omega - E_\epsilon$$

Let $\varphi = \varphi_\epsilon \in H_0^{1,2}(Q)$, $Q \supset\supset \Omega$ be the capacity potential of E_ϵ. We choose

$$\psi_1 = (1-\varphi) g(u_1^m - u_1) \exp(1 + |u_1^m|^2)^{-1}, \qquad g(\xi) = \exp(\lambda \operatorname{arctg} \xi) - 1,$$

as test function for the first equation (4.21) and

$$\psi_2 = (1-\varphi)g(u_2^m - u_2)\exp(1+|u_2^m|^2)^{-1}$$

as test function in the second one.
We then obtain

$$(\nabla u_1^m, \nabla\psi_1) + (F_1, \psi_1) = (f_1, \psi_1)$$

where F_1 is the lower order term in (4.30).
We take into account that $\psi_1 \rightharpoonup 0$ weakly in H^1, $(m \to \infty)$, and obtain with

$$v_1^m = u_1^m - u_1, \qquad \exp = \exp(1/(1+|u_1^m|^2).\exp(\lambda\operatorname{arctg}(v_1^m - v_1)).$$

(4.33) $\lambda \int \exp\cdot(1-\varphi)|\nabla v_1^m|^2(1+|v_1^m|^2)^{-1}dx$
$\leqslant K\int \exp\cdot(1-\varphi)|\nabla v_1^m|^2(1+|u_1^m|^2)^{-1}dx + 0(1)$

as $m \to \infty$.
We use the fact that $|u| \leqslant L$ on the set where $(1-\varphi) \neq 0$. Hence we may estimate $(1+|u_1^m|^2)^{-1} \leqslant K(1+|v_1^m|^2)^{-1}$. Choosing $\lambda = \lambda(K)$ sufficiently large we obtain from (4.33) that

(4.34) $\int \exp((1+|u_m|^2)^{-1})(1-\varphi)|\nabla v_1^m|^2(1+|v_1^m|^2)^{-1}dx \to 0 \qquad (m\to\infty)$

and a similar convergence for v_2^m. We estimate

$$\exp((1+|u_m|^2)^{-1}) \leqslant \exp(K^{-1}(1+|v_m|^2)^{-1})$$

on the set where $(1-\varphi) \neq 0$ and set

$$h(\xi) = (1+|\xi|^2)^{-1}\exp(K^{-1}/(1+|\xi|^2).$$

We then obtain

(4.35) $\int |\nabla v_1^m|^2 h(v_1^m)(1-\varphi)^2 dx \to 0 \qquad (m \to \infty).$

Let $H(\zeta) = \int_0^\zeta \sqrt{h(\xi)}d\xi$. By (4.35)

$$\int |\nabla(H(v_1^m)(1-\varphi))|^2 dx \to 0 \qquad (m\to\infty)$$

and $\quad H(v_1^m)(1-\varphi) \to 0 \quad$ quasi-uniformly.

Since $\quad \operatorname{cap}\{y \mid \varphi \geqslant \sqrt[4]{\epsilon}\} \leqslant \sqrt{\epsilon}$

we obtain that

$$H(v_1^m) \to 0 \quad \text{quasi-uniformly}$$

on a set with capacity smaller $\sqrt{\epsilon}$. Since H is strictly monotone and $H(0) = 0$ we conclude that $v_m^1 \to 0$ quasi-uniformly except on a set with capacity smaller than $\sqrt{\epsilon}$. This implies that $u_m^1 \to u^1$ quasi-uniformly in Ω. The convergence $u_m^2 \to u^2$ is proved analogously. The theorem follows in view of Lemma 4.2.

Remark It is not hard to generalize theorem 4.3 by using more general test functions, say

$$\psi_1 = \exp(\lambda w(v_1^m))\exp(a(u)).$$

We hope that the quasi-uniform convergence $u_m \rightharpoonup u$ can be shown in the general setting of Lemma 4.2 by a refinement of Rellich's theorem [6]. We state this theorem in the limiting case p = n.
For the formulation we need some abbreviations and definitions. Let Ω be a bounded domain of $\mathbf{R}^n$ and $(u_m \mid m \in \lambda)$ be a sequence in $H^{1,p}(\Omega)$, $p \geqslant 1$.

Let $\quad E_\epsilon^m = \{x \in \Omega \mid |u_m - u| \geqslant \epsilon\}$

$$\mathbf{R}_h^n = \{x = (m_1 h, \ldots, m_n h) \mid m_i \text{ integers}\}$$

$$Q_h(x) = \left\{ y \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, y_i \in \left[x_i - \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \right[\right\} .$$

where $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$.
Let $\mathscr{M}(m, h, \delta, \epsilon)$ be the set of cubes $Q_h(x)$, $x \in \mathbf{R}_h^n$, such that

$$\text{p-cap}\,(Q_h(x) \cap E_\epsilon^m ; Q_{2h}(x)) \geqslant \delta h^{n-2}.$$

We say that the sequence $(u_m \mid m \in \Lambda)$ converges partially quasi-uniformly to the function u if the following property holds: To every $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, $\epsilon_0 > 0$ there exists a number $h_0 > 0$ such that

$$\text{p-cap} \bigcup \left\{ Q_h(x) \cap E_\epsilon^m \,\middle|\, x \in \mathscr{M}(m, h, \delta, \epsilon) \right\} < \epsilon_0$$

for all $h \in \,]0, h_0]$ and all $m \geqslant m_0(h, \delta, \epsilon, \epsilon_0)$.
Roughly spoken if $u_m \to u$ partially quasi-uniformly then the set E^m is not too large in the sense that either $Q_h(x) \cap E_\epsilon^m$ has small relative capacity ($< \delta$) or that all the other sets $Q_h(x) \cap E_\epsilon^m$ are contained in a set of capacity smaller ϵ_0.

Theorem 4.4 *Let Ω be a bounded domain of* $\mathbf{R}^n$ *and* (u_m) *be a bounded sequence of* $H_0^{1,p}(\Omega)$ *with* p = n. *Then there is a subsequence* $(u_m \mid m \in \Lambda)$ *which converges partially quasi-uniformly to a function* $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$.

We do not present the proof since we believe that the final version for theorems of the above type have not yet been found.

References to § 4

[1] Ball, J. M.: Convexity conditions and existence theorems in non-linear elasticity. Arch. Rat. Mech and Anal. **63** (1977) 337–403
[2] Bensoussan, A.; Frehse, J.: Non-linear elliptic systems in stochastic game theory. To appear
[3] Frehse, J.: Über die Konvergenz von Differenzen- und anderer Näherungsverfahren bei nicht-linearen Variationsproblemen. Basel – Stuttgart: Birkhäuser. = Intern. Schriftenreihe z. Num. Math. Bd 15, S 29–44
[4] Frehse, J.: On two-dimensional quasi-linear elliptic systems. Manuscripta Math. **28** (1979) 21–49
[5] Frehse, J.: Cf. § 3, No [15].
[6] Frehse, J.: Eine Verfeinerung des Rellichschen Satzes.

[7] Leray, J.; Lions, J. L.: Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques nonlineare par le méthode de Minty-Browder. Bull. Soc. Math. France **93** (1965) 97–107
[8] Morrey, C. B., jr.: Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1966. = Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Bd. 130.
[9] Stampacchia, G.: Sopra una classe di funzioni in n variabili. Ricerche d. Mat. **1** (1952) 27–54

Additional bibliography added in proof:

Papers concerning the constant in Poincaré's inequality (Theorem 2.9):

Hedberg, L. I.: Spectral synthesis in Sobolev spaces and uniqueness of solutions of the Dirichlet problem. Theorem 4.1, 4.2. To appear in Acta Math.

Meyers, N. G.: Integral inequalities of Poincaré and Wirtinger type. Arch. Rat. Mech. Anal. **68** (1978) 113–120

Mazja, W.: On (p, ℓ)-capacity, imbedding theorems, and the spectrum of selfadjoint elliptic operators. Izw. Akad. Nauk. SSSR, ser. Mat. **37** (1973) 355–385

Theorem 3.8, 3.9 and 3.10, are special versions of the general fact that the *set of Non-Lebesgue points of an* H^1*-function has capacity zero*, cf.:

Bagby, T.; Ziemer, W. P.: Pointwise differentiability and absolute continuity. Trans. Amer. Math. Soc. **191** (1974) 129–148

Calderon, C. P.; Fabes, E. G.; Rivière, N. M.: Maximal smoothing operators. Indiana Univ. Math. J. **23** (1974) 889–898

Meyers, N. G.: Taylor expansion of Bessel potentials. Indiana Univ. Math. J. **23** (1974) 1043–1049

Another new proof with interesting connections to Γ-convergence has recently been given by Longo and Maso.

For the equivalence of higher order capacities as far as the admissible sets $\{\varphi \in C_0^\infty(Q) \mid \varphi = 1 \text{ on } E\}$ and $\{\varphi \in C_0^\infty(Q) \mid \varphi \geqslant 1\}$ on E are concerned see the paper:

Adams, D. R.; Polking, J. C.: The equivalence of two definitions of capacity. Proc. Amer. Math. Soc. **37** (1973) 529–534

Prof. Dr. J. Frehse
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität
Beringstr. 4–6
D-5300 Bonn 1

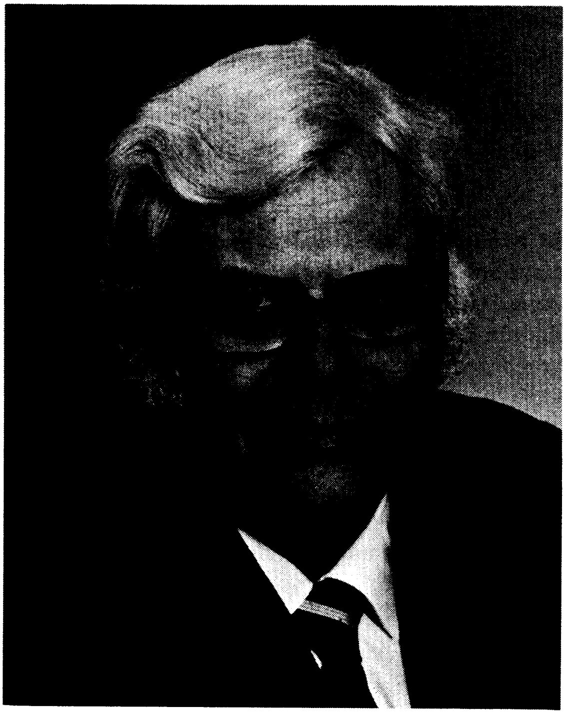
(*Eingegangen: 1. 6. 1981*)

Jber d. Dt. Math.-Verein
84 (1982) 45–55
AMS subject classification: 01 A 70

Emanuel Sperner

in memoriam

F. Bachmann, Kiel



Emanuel Sperner war Schlesier, am 9. Dezember 1905 in Waltdorf, einem kleinen Ort im Einzugsgebiet der vom Schneegebirge kommenden Glatzer Neiße, flußabwärts von der Stadt Neiße, geboren. Den auf alttestamentarische Weissagung zurückgehenden Vornamen Emanuel, „Gott mit uns", führte Sperner mit einem gewissen Stolz und empfand dabei auch eine Gemeinsamkeit mit Immanuel Kant, zu dessen Bewunderern er gehörte.

Aufgewachsen ist Sperner als Sohn eines Grundstücksmaklers in Neiße; dort besuchte er das humanistische Gymnasium Carolinum. Sein Leben lang hat er dankbar der Förderung gedacht, die er durch seinen Mathematiklehrer K. Blaschke und, was logische Gedankenführung und deutliches Argumentieren anlangt, durch

0012–0456/82/01 0045–11 $02.20/0

seinen Deutschlehrer G. Janocha erfahren hat. Studium und Beruf haben Sperner von Schlesien fortgeführt. Er sprach aber mit Anhänglichkeit von seiner Heimat, „dem Land Eichendorffs"[1]). Sperners Jugend fiel in den Zeitraum der zweihundert Jahre, in denen Schlesien eine preußische Provinz war. Was die Preußen-Könige angeht, so sprach Sperner mit Anerkennung von Friedrich Wilhelm I, dessen Verdienste zu Unrecht durch den Ruhm des Sohnes verdunkelt seien; in dem Vater erblickte er den Staatsgründer, der mit den Tugenden eines guten Hausvaters Fundamente geschaffen hat.

Als junger Student hatte Sperner eine Krankheit zu überwinden. Trotzdem erwarb er bereits im Alter von 22 Jahren, am 15. November 1928, mit seiner Arbeit „Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes" den Doktorgrad, nachdem er von 1925 an zunächst an der Universität Freiburg und dann an der jungen Universität Hamburg studiert hatte, die in kurzer Zeit ein Zentrum der Mathematik geworden war.

Sperner besaß eine starke kombinatorische Begabung. In seiner Dissertation verwendete er das „Spernersche Lemma":

Im reellen affinen Raum seien ein n-Simplex S mit Ecken 0, 1, . . ., n und eine simpliziale Zerlegung von S in n-Simplexe

$$(*) \qquad S_1, S_2, \ldots, S_m$$

gegeben (Der Durchschnitt von je zwei verschiedenen Simplexen der Zerlegung sei leer oder ein gemeinsames Seitensimplex). Die Eckpunkte der Zerlegung mögen nun mit Zahlen aus der Menge $\{0, 1, \ldots, n\}$ beziffert werden; einzige Bedingungen sind: Die Ecken von S behalten ihre ursprüngliche Bezifferung, und die auf der Gegenseite des Punktes i von S liegenden Eckpunkte der Zerlegung werden mit Zahlen $\neq i$ beziffert. Dann hat von den Simplexen (*) wenigstens eines die Eigenschaft, daß seine Ecken mit sämtlichen Zahlen 0, 1, . . ., n beziffert sind.

Der Beweis wird durch Induktion nach n geführt; zu diesem Zweck wird die Behauptung wie folgt verstärkt: Die Anzahl a der Simplexe (*), welche die in der Behauptung genannte Eigenschaft haben, ist ungerade. Zum Nachweis hiervon betrachte man diejenigen $(n-1)$-dimensionalen Seiten von Simplexen (*), deren Ecken mit allen Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ beziffert sind. Diese Seiten mögen ausgezeichnete Seiten heißen. Die Anzahl a' der ausgezeichneten Seiten, welche in der „Grundseite" von S (der Gegenseite des Punktes n) enthalten sind, ist nach Induktionsannahme ungerade, und eine abzählende Überlegung lehrt, daß $a \equiv a'$ mod 2 ist.

Mit Hilfe seines Lemmas führte Sperner elementare Beweise für Sätze der Dimensionstheorie: für den Lebesgueschen Pflastersatz, für den Satz von der Invarianz der Dimension, auch für den Satz von der Invarianz des Gebietes. Damit erregte er in der Zeit des Aufblühens der Topologie Aufsehen. B. Knaster, C. Kuratowski und S. Mazurkiewicz griffen alsbald das Spernersche Lemma auf und bewiesen mit ihm den Brouwerschen Fixpunktsatz[2]).

---

[1]) Eichendorff, im südlichsten Schlesien geboren, verbrachte seine letzten Lebensjahre in Neiße.

[2]) P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie I. Springer 1935. – Hingewiesen sei auf Sperners Vortrag „Fifty Years of Further Development of a Combinatorial Lemma" von 1979 und die dort zusammengestellte Literatur ([34], [35]).

Über die Vorgeschichte seiner Promotion hat Sperner erzählt: Als er sich im Sommer 1927 zu einer Kur in Görbersdorf in Schlesien aufhielt, schrieb ihm O. Schreier, daß in einem von ihm, Schreier, und E. Artin veranstalteten Seminar Lebesgues Note „Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des espaces à n et n + p dimensions“[3]) behandelt werden sollte, daß man die Note aber unverständlich fände. Sperner nahm dies als Anregung auf und entwickelte noch während der Kur den Kern seiner späteren Dissertation. Eine schriftliche Darlegung, die er an Schreier sandte, legte dieser als gleichfalls unverständlich beiseite. Als Sperner dann, nach Hamburg zurückgekehrt, Schreier seine Überlegungen mündlich vortrug, war Schreier so beeindruckt, daß er vorschlug, sie unverzüglich als Dissertation einzureichen. W. Blaschke, dem Sperner vorgestellt wurde, unterstützte den Vorschlag. Schreier übernahm das Referat, Artin das Korreferat.

Ein anderes kombinatorisches Lemma hatte Sperner zu Anfang des Jahres 1927 der Mathematischen Zeitschrift eingereicht. Eine Teilmenge U einer teilweise geordneten Menge werde eine Antikette genannt, wenn je zwei verschiedene Elemente aus U unvergleichbar sind (U enthalte nicht Elemente a, b mit $a < b$). In dem Booleschen Verband $V(n), \subseteq$ aller Teilmengen einer n-elementigen Menge bilden sowohl alle $\left[\frac{n}{2}\right]$-elementigen als alle $\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)$-elementigen Teilmengen Antiketten der Mächtigkeit

$$\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

Sperners Lemma sagt, daß alle anderen Antiketten aus $V(n), \subseteq$ kleinere Mächtigkeit haben[4]).

Im Winter 1929/30 hielt Sperner seine erste Vorlesung „Analytische Geometrie und Algebra II“ an der Universität Hamburg, auf Grund eines Lehrauftrages, der bis zu seiner Habilitation im Sommer 1932 erneuert wurde. Im Sommer 1929 war Schreier gestorben. Den Plan, seine Vorlesungen über Analytische Geometrie und Algebra in Buchform herauszugeben, hatte er nicht verwirklichen können. Sperner übernahm es nun, dies Vorhaben seines Lehrers durchzuführen und konnte dabei eigene Vorlesungs-Erfahrungen mit einbringen. 1931 und 1935 erschienen die beiden Bände von O. Schreier und E. Sperner, „Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra“[5]). Dies Werk hat eine tiefgreifende Wirkung gehabt und wesentlich dazu beigetragen, daß an unseren Universitäten die Anfänger-Vorlesungen über Analytische Geometrie durch eine algebraische Grundvorlesung ersetzt wurden, die vorwiegend von Linearer Algebra handelt.

Im Jahre 1932 wurde Sperner von der China Foundation for the Promotion of Education and Culture eingeladen, an die National University of Peking zu kommen. Mitte August 1932 trat er über Nordamerika und Japan die Reise nach

---

[3]) Math. Ann. **70** (1911), 166–168.

[4]) H. Lüneburg, Kombinatorik. Birkhäuser 1971. S.21 ff. – M. Aigner, Kombinatorik II. Springer 1976. Abschnitt VIII,3: Sperner Theorie.

[5]) Als Vorläufer von Band II erschienen 1932 die „Vorlesungen über Matrizen“.

China an, wo er Ende September eintraf. In Peking genoß er in den Jahren 1932 bis 1934 die zuvorkommende Gastlichkeit der Chinesen und hielt an der genannten staatlichen Universität eine Reihe mathematischer Vorlesungen vor rein chinesischem Hörerkreis. Auf diesem Aufenthalt basierte seine Verbindung mit Ky Fan und S. S. Chern.

Im Herbst 1934 wurde Sperner als Nachfolger von K. Reidemeister an die Universität Königsberg berufen. Kurz nach seiner Ernennung heiratete er Annemarie Voss aus Rinkerode im Münsterland, die in Hamburg Mathematik studiert hatte und die ihn bei der Arbeit am „Schreier-Sperner" unterstützt hat. In der Königsberger Zeit wandte Sperner sein Interesse den Grundlagen der Geometrie zu.

1940 verlor Sperner seine Frau; sie starb nach der Geburt einer Tochter an einer Blutkrankheit. Im Sommer 1941 erhielt der Chronist auf Betreiben von Sperner einen Lehrauftrag an der Universität Königsberg. Sperner, der selbst eine natürliche Lehrbegabung hatte, riet ihm, eine gut verständliche Vorlesung zu halten, aber in den Übungen die Zügel umso straffer anzuziehen und überreichte ihm eine Sammlung hinreichend harter Aufgaben. Sperner konnte sich an Aufgaben inspirieren. Zu jener Zeit traf er sich regelmäßig mit dem Indologen H. v. Glasenapp zum Studium fernöstlicher Weisheit und besuchte die Sitzungen der Königsberger Kant-Gesellschaft; er hielt dort einmal einen Vortrag über Unmöglichkeits-Beweise und beteiligte sich an Diskussionen über den Raum als Anschauungsform. In der Kant-Gesellschaft ging es mitunter recht lebhaft zu. Zu Anfang des Jahres 1941 war der Verhaltensforscher und spätere Nobelpreisträger K. Lorenz nach Königsberg berufen. Kants Lehren wurden nun mit den Positionen eine Naturforschers konfrontiert, der von der Evolution ausging. Man diskutierte etwa die Frage, ob das, was Kant apriorisch nannte, der äonenhaften stammesgeschichtlichen Anpassung zuzuschreiben sei[6]).

Am 22. Juni 1941, einem strahlenden Sommertag, begann der Rußland-Feldzug. Kurz nach ihrem 400jährigen Jubiläum ging die 1544 im Zeichen der Reformation gegründete Albertus-Universität zu Königsberg in Preußen unter.

Sperner arbeitete vom Frühjahr 1942 an als Hilfsregierungsrat bei der Meteorologischen Versuchsgruppe des Marine-Wetterdienstes. Während dieser Kriegstätigkeit nahm er 1943 einen Ruf an die Universität Straßburg an. Im Herbst 1944 wurde er von der Marine entlassen und unabkömmlich gestellt für das Mathematische Forschungsinstitut in Oberwolfach, dem er dann mehrere Jahre lang als Mitarbeiter und stellvertretender Direktor angehört hat. Er stand damals in enger Verbindung mit W. Süss und wurde einer der Pioniere des Oberwolfacher Instituts. Von 1946 wirkte er gleichzeitig als Gastprofessor an der Universität Freiburg. 1942 hatte er in zweiter Ehe Antonie Schwörer aus Biberach an der Riss geheiratet; aus dieser Ehe sind zwei Mathematiker hervorgegangen.

In jener Zeit entwarf Sperner seine Theorie der Ordnungsfunktionen, deren Ziel es zunächst war, den Umgang mit geometrischer Anordnung durch einen Kalkül zu organisieren.

---

[6]) K. Lorenz hat sein Buch „Die Rückseite des Spiegels" der Erinnerung an Königsberg und seine Königsberger Freunde gewidmet. Vermutlich wurde Kants Lehrstuhl verdoppelt und am 1. Januar 1941 mit E. Baumgarten als Philosoph und K. Lorenz als Psychologen besetzt, so daß sie zusammen die letzten Inhaber des Kantischen Lehrstuhles waren.

In einer affinen Ebene ist eine Ordnungsfunktion eine Abbildung o der Menge der Paare (g, A), wobei g eine Gerade und A ein nicht auf ihr liegender Punkt ist, in die multiplikative Gruppe der ganzen Zahlen 1, −1. Bei gegebener Ordnungsfunktion o definiert man für nicht auf g liegende Punkte A, B:

g liegt zwischen A und B, wenn $o(g, A) \cdot o(g, B) = -1$ ist.

(Man sagt hierfür auch: A und B liegen auf verschiedenen Seiten von g.) Aus dieser Definition ergibt sich sogleich folgende mit dem Paschaxiom verwandte Aussage: Sind A, B, C Punkte, die nicht mit g inzidieren, und liegt g zwischen A und B, so liegt g entweder zwischen A und C oder zwischen B und C. Eine Ordnungsfunktion o heißt regulär, wenn gilt: Sind A, B, C kollineare Punkte und g, h Geraden durch B, die nicht mit A oder C inzidieren, so ist

$$o(g, A) \cdot o(g, C) = o(h, A) \cdot o(h, C).$$

Liegt etwa g zwischen A und C, so gilt hiernach dasselbe für h. Ist eine reguläre Ordnungsfunktion gegeben, so definiert man für kollineare Punkte A, B, C mit $A, C \neq B$: B liegt zwischen A und C, wenn wenigstens eine durch B gehende Gerade zwischen A und C liegt.

In den ersten Nachkriegsjahren führte Sperner in Vorträgen vor, mit welch „spielerischer Leichtigkeit" sich Anordnungssätze durch Rechnen mit Ordnungsfunktionen beweisen ließen. In den Jahren 1948/49 erschienen von ihm fünf Arbeiten über Ordnungsfunktionen. Später haben vor allem H. Karzel, W. Junkers und J. Joussen die Theorie der Ordnungsfunktionen angewendet und weiter entwickelt.

In den Jahren 1948 und 1951 erschienen die beiden Bände der Spernerschen Version des „Schreier-Sperner" – unter dem alten Titel, aber nun, als verändertes Werk, nur mit einem Autor. Dies Lehrbuch wurde inzwischen mehrmals neu aufgelegt.

1949 erhielt Sperner Rufe der Universitäten Bonn und Heidelberg. Er nahm den Bonner Ruf an, blieb dort fünf Jahre und folgte 1954 dem ehrenvollen Angebot, in Hamburg die Nachfolge von W. Blaschke zu übernehmen. In Hamburg hat er dann 20 Jahre lang bis zu seiner Emeritierung gewirkt.

In diesem Zeitraum von insgesamt 25 Jahren sind in Sperners Umgebung eine stattliche Anzahl von Schülern, Enkelschülern und Mitarbeitern aufgewachsen, von denen inzwischen eine Reihe Professuren innehaben. Sperners erster Bonner Promovend war G. Ringel.

Im akademischen Jahr 1961/62 war Sperner als Visiting Andrew W. Mellon Professor an der University of Pittsburgh, Pennsylvania, tätig. Im Herbst 1966 war er Gastprofessor an der University of South Africa in Pretoria, im Herbst 1969 an der University of the Witwatersrand in Johannesburg und im Winter 1970 an der University of California in Berkeley. Auch als Emeritus hat Sperner Vorträge auf Kongressen gehalten, so in Israel und der Türkei.

Aus Sperners Bonner Zeit stammt ein Beitrag zur spiegelungsgeometrischen Begründung der ebenen absoluten Geometrie. Sei G eine Gruppe, S eine Menge von involutorischen Elementen von G, welche G erzeugt. Dem Paar (G, S) ordne man wie folgt eine geometrische Struktur zu: Man nenne die Elemente a, b, . . .

von S Geraden und definiere: Drei Geraden a, b, c liegen im Büschel, wenn

(*) $abc \in S$

gilt; bei $a \neq b$ heiße die Menge $\{c \in S: abc \in S\}$ das durch a, b bestimmte Geradenbüschel. Es wird nun gefordert, daß jedes involutorische Produkt abc in S liegt[7]), ferner die „Transitivität" der Relation (*):

(T) Aus $a \neq b$ und $abc, abd \in S$ folgt $acd \in S$.

Dann haben zwei verschiedene Geradenbüschel höchstens eine Gerade gemein. Ein Geradenbüschel, das mit jedem anderen genau eine Gerade gemein hat, heißt eigentlich.

Wenn S invariant ist, ist bekanntlich der Transitivitätssatz (T) mit dem Hessenbergschen Gegenpaarungssatz äquivalent[8]), und durch dreimalige Anwendung des Gegenpaarungssatzes hat Hessenberg einen „Realfall" des Satzes von Pappus bewiesen (Um Hilfsgeraden zu konstruieren, brauchte er, daß einige Konfigurationsgeraden eigentliche Geradenbüschel bestimmen). Unter den genannten axiomatischen Voraussetzungen und gewissen Eigentlichkeits-Voraussetzungen hat nun Sperner einen Realfall des Satzes von Desargues bewiesen[9]). Der Beweis ist ein bewunderungswürdiges Beispiel Spernerscher Beweiskunst; freilich konnte – und das dürfte in der Natur des Problems liegen – auch nach eigenen Äußerungen von Sperner die geometrische Klarheit von Hessenbergs Beweis des Satzes von Pappus nicht erreicht werden. Gleichwohl hat sich die Untersuchung der unter den obigen axiomatischen Voraussetzungen definierten „Ebenen der Geraden und Geradenbüschel" dank Arbeiten von H. Karzel, E. Ellers und Sperner, R. Lingenberg, U. Ott, W. Nolte zu einem Teilgebiet der Spiegelungsgeometrie mit schönen und eindrucksvollen Resultaten entwickelt[10]).

Aus Hilberts „Grundlagen der Geometrie" weiß man: Es gibt nicht-desarguessche affine Ebenen, aber sie sind nicht Ebenen eines affinen Raumes. Um nicht-desarguessche affine Ebenen in raumartige Strukturen einbetten zu können, betrachtete Sperner eine Verallgemeinerung des Begriffs „affiner Raum". Ein „verallgemeinerter affiner Raum" im Sinne von Sperner ist eine Inzidenzstruktur (bestehend aus einer Punktmenge, einer Geradenmenge, einer Inzidenzrelation), auf deren Geradenmenge zusätzlich eine Äquivalenzrelation „parallel" gegeben ist und für die folgende Axiome gelten: 1) Je zwei verschiedene Punkte inzidieren mit genau einer Geraden; 2) alle Geraden inzidieren mit gleichviel Punkten, es gibt zwei Punkte; 3) zu jeder Geraden gibt es durch jeden Punkt genau eine Parallele. Über diese Strukturen berichtete Sperner zum ersten Mal 1959 auf einer Tagung in Utrecht, auf der G. Ewald über beinahe dasselbe Problem sprach. Die Idee, verallgemeinerte affine Räume zu studieren, wurde kurz darauf von italienischen Geometern, zuerst von A. Barlotti, M. Curzio, R. Permutti, L. A. Rosati aufgegriffen und diesseits der Alpen von H. J. Arnold.

---

7) Hieraus folgt insbesondere, daß S invariant gegen innere Automorphismen von G ist.

8) F. Bachmann, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. 2. Aufl. Springer 1973, S. 306.

9) Der Satz von Desargues handelt von zehn Elementen aus S und zehn Aussagen vom Typ (*); er sagt, daß aus neun von diesen Aussagen die zehnte folgt.

10) R. Lingenberg, Metric Planes and Metric Vector Spaces. New York etc. 1979.

In seiner Rektoratsrede „Moderne Denkweisen der Mathematik" hat Sperner über Hilberts Neubegründung der Geometrie gesprochen; wir zitieren daraus:

> „Sie war die entscheidende Siegestat über eine Menge von Schwierigkeiten und Vorurteilen, eine geistige Großtat, welche trotz ihres damaligen speziellen Zweckes durch die Allgemeingültigkeit ihrer Methoden und Denkweisen der modernen Axiomatik die Tore zu allen Zweigen der Mathematik öffnete."

Nicht minder eindrucksvoll hatte schon früher W. Süss, der Gründer des Oberwolfacher Institutes, aus anderer Perspektive von dem Aufbruch gesprochen, den Hilberts Neubegründung der Geometrie bewirkt hat[11]). Es war ein Wunsch von Süss, daß in Oberwolfach, neben der traditionellen Geometrie-Tagung, Tagungen über die Grundlagen der Geometrie abgehalten werden. Solche Tagungen haben dann, auch nachdem Th. Schneider, später M. Barner die Leitung des Instituts übernommen haben, jährlich stattgefunden. Tagungsleiter waren, von gelegentlichen Kooptionen abgesehen, R. Baer, H. Freudenthal, Sperner und der Chronist; erst vor wenigen Jahren wurde der Turnus gelockert und die Leitung in jüngere Hände gelegt. Für nicht wenige Mathematiker wird die Erinnerung an Sperner verknüpft bleiben mit der Erinnerung an die Tage, die sie zusammen mit ihm in Oberwolfach verlebt haben.

Sperner war nicht nur ein ordentlicher Professor, sondern, wie es in der alten Dienstbezeichnung hieß, ein ordentlicher öffentlicher Professor. Er wollte in eine Öffentlichkeit hineinwirken; gern ergriff er bei allerlei Zusammenkünften das Wort und liebte es, einen Kreis von Gesprächspartnern um sich zu scharen.

Sperner ist viel Vertrauen entgegengebracht worden: von Fakultäten, die seinen Namen auf Berufungslisten setzten, von akademischen Gremien, die ihm Funktionen in der Selbstverwaltung übertragen haben, von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, die ihn in ihren Vorstand wählte[12]), von Kollegen und Studenten. Dem Dienst an gemeinsamen Anliegen wollte er sich nicht entziehen. Die Ämter, die er im Laufe seines Lebens übernommen hat, sind zahlreich. In den Jahren 1963/65 war er Rektor der Universität Hamburg. Während seines Rektorats konnte ein Haus in der Rothenbaumchaussee als Gästehaus der Universität eingerichtet werden.

Sperner war ein kritischer Betrachter. Abwägende Bedachtsamkeit verband sich in ihm mit Initiative, ja Dynamik. Man kannte ihn als einen Mann von gutem Mute. Es steckte eine Lebensfreude in ihm, und es ist viel Ermutigung von ihm und von seiner Freude an der Mathematik ausgegangen.

Sperner hat auch viel Anerkennung gefunden. Er wurde vielfach geehrt. Er war Mitglied der Königsberger Gelehrten Gesellschaft, der Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, der späteren Rheinisch-Westfälischen Akademie der Wissenschaften, der Joachim-Jungius-Gesellschaft der Wissenschaften zu Hamburg. 1958 wurde ihm die Medaille der Universität Helsinki verliehen, 1973 die Ehrenmitgliedschaft der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg 1975 die Ehrendoktorwürde des Fachbereichs Mathematik der Freien Universität

---

[11]) Süss hat nebenbei erzählt, daß er während des Ersten Weltkrieges ein Exemplar von Hilberts „Grundlagen der Geometrie" im Marschgepäck mit sich geführt hat.

[12]) 1935–1936 war er Schriftführer, dann bis 1944 Herausgeber des Jahresberichts, 1957 Vorsitzender der DMV.

Berlin. 1978 wurde sein Goldenes Doktor-Jubiläum mit einem Colloquium und einer Feier begangen.

Deutschlands südwestlicher Ecke, der Schwarzwald-Gegend, hat Sperner seit langem eine besondere Sympathie entgegengebracht. Dort hat er sich nach seiner Emeritierung in Sulzburg-Laufen, in der Nähe von Badenweiler, einen Alterssitz gebaut, und dort ist er am 31. Januar 1980, am Vorabend einer geplanten Reise, einem Herzinfarkt erlegen.

Wie eines Stromes Dringen
Geht unser Lebenslauf.
...
Kein Bett darf er hier finden.
Wohl in den Tälern schön
Siehst du sein Gold sich winden,
Dann plötzlich meerwärts drehn. (J. v. Eichendorff)

Der Verfasser dankt allen, die ihn durch Rat und Hilfe unterstützt haben, vor allem Frau A. Sperner und den Herren W. Benz, H. Karzel, B. Schoeneberg, P. Sperner.

Für E. Sperner haben zwei Gedenk-Colloquien stattgefunden, am 2. Juli 1980 in Bayreuth und am 15. November 1980 in Hamburg. Die beim ersten Colloquium gehaltenen Vorträge von W. Benz „Begegnungen mit Emanuel Sperner“ und H. Karzel „Zum mathematischen Werk E. Sperners: Emanuel Sperner als Begründer einer neuen Anordnungstheorie“ hat die Universität Bayreuth veröffentlicht (Gedenkkolloquium Emanuel Sperner 1980).

Liste der bei E. Sperner entstandenen Dissertationen[12a])

R i n g e l , Gerhard, geb. 28. 10. 1919 Kollnbrunn/Niederösterreich
Datum des Rigorosums: 17. 2. 1951; Ort: Univ. Bonn
Thema: Farbensatz für nicht-orientierbare Flächen beliebigen Geschlechts

K a r z e l , Helmut, geb. 15. 1. 1928 Schöneck/Westpreußen
Datum des Rigorosums: 23. 7. 1951; Ort: Univ. Bonn
Thema: Beziehungen zwischen Ordnungsfunktionen, Normierungen und Zweiteilungen

M e i s e l , Wolf-Dietrich, geb. 1.5.1928 Kötzschenbroda/Sachsen
Datum des Rigorosums: 26. 2. 1954; Ort: Univ. Bonn
Thema: Ordnungsfunktionen und Polyeder

K a n n e n b e r g , Rüdiger, geb. 17. 4. 1928 Reinfeld
Datum des Rigorosums: 28. 7. 1954; Ort: Univ. Bonn
Thema: Grundgedanken einer Theorie der Gebilde zweiter Ordnung in Schiefkörpergeometrien

E l l e r s , Erich, geb. 11. 9. 1928 Berlin
Datum des Rigorosums: 25. 8. 1959; Ort: Univ. Hamburg
Thema: Einbettung einer gruppentheoretisch-absoluten Ebene in ein projektive

J o u s s e n , Jakob, geb. 28. 4. 1931 Düsseldorf
Datum des Rigorosums: 25. 6. 1960; Ort: Univ. Hamburg
Thema: Ordnungsfunktionen in freien Ebenen

A r n o l d , Hans-Joachim, geb. 31. 3. 1932 Berlin
Datum des Rigorosums: 24. 7. 1965; Ort: Univ. Hamburg
Thema: Die Fernräume schwach affiner Räume

[12a]) Zusammengestellt von H. Karzel.

B i a l l a s , Dieter, geb. 19. 6. 1936 Eydtkuhnen/Ostpreußen
Datum des Rigorosums: 24. 7. 1965; Ort: Univ. Hamburg
Thema: Verallgemeinerte Doppelverhältnisse und Endomorphismen von Vektorräumen

J u n k e r s , Wilhelm, geb. 1. 8. 1928 Rheydt
Datum des Rigorosums: 15. 7. 1969; Ort: Univ. Bonn
Thema: Mehrwertige Ordnungsfunktionen

S e i e r , Werner, geb. 8. 12. 1941 Hamburg
Datum des Rigorosums: 18. 2. 1971; Ort: Univ. Hamburg
Thema: Kollineationen verallgemeinerter affiner Räume

D ü h l , Gerd, geb. 20. 12. 1942 Norden/Ostfriesland
Datum des Rigorosums: 25. 2. 1972; Ort: Univ. Hamburg
Thema: Eine Algebraisierung der affinen Ebenen durch verallgemeinerte Vektorräume

K h a l i f a h , Mohammed Fayez, geb. 14. 1. 1942 Al-Zaafaran/Ägypten
Datum des Rigorosums: 13. 5. 1974; Ort: Univ. Hamburg
Thema: Verallgemeinerte Möbiusräume und ihre Darstellung in halbprojektiven Räumen

P e t e r s , Thomas, geb. 5. 2. 1950 Hamburg
Datum des Rigorosums: 26. 5. 1976; Ort: Univ. Hamburg
Thema: Über die Struktur der Semimoduln

J a b a l l a , Ibrahim, geb. 4. 5. 1952 Sousse/Tunesien
Datum des Rigorosums: 29. 6. 1977; Ort: Univ. Hamburg
Thema: Konstruktion schwach affiner Räume

S i e s , Hermann, geb. 18. 7. 1947 Bohlenberge (Kreis Friesland)
Datum des Rigorosums: Juli 1979; Ort: Univ. Hamburg
Thema: Abbildungsgrad und Spernersches Lemma

Schriftenverzeichnis[13])

Abhandlungen

1. Note zu der Arbeit von Herrn B. L. van der Waerden: „Ein Satz über Klasseneinteilungen von endlichen Mengen". Abh. a. d. Math. Sem. Hamburg **V** (1927) 232
2. Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. Abh. a. d. Math. Sem. Hamburg **VI** (1928) 265–272
3. Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge. Math. Z. **27** (1928) 544–548
4. Über einen kombinatorischen Satz von Macauly und seine Anwendungen auf die Theorie der Polynomideale. Abh. Math. Sem. Hamburg **VII** (1929) 149–163
5. Topologische Fragen der Differentialgeometrie XV. Flächengewebe. Abh. Math. Sem. Hamburg **VII** (1929) 287–300
6. Über die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene. Abh. Math. Sem. Hamburg **X** (1934) 1–48
7. Zur Begründung der Geometrie im begrenzten Ebenenstück. Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft. Math. Naturw. Kl. (Halle a. d. S. 1938)
8. Die Ordnungsfunktionen einer Geometrie. Arch. d. Math. **I** (1948) 9–12
9. Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Anordnung. Arch. d. Math. **I** (1948) 148–153
10. Die Ordnungsfunktionen einer Geometrie. Math. Ann. **121** (1949) 107–130

---

13) Von Sperners Hand. (Details der Zitierweise wurden bei der Drucklegung geändert, die Titel 33–35 nachgetragen.)

11. Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Anordnung. Sitz.-Ber. d. Heidelb. Akad. d. Wiss. Jg. 1949, 10. Abh., 413–448
12. Konvexität bei Ordnungsfunktionen. Abh. Math. Sem. Hamburg **XVI** (1949) 140–154
13. Grundlagen der Geometrie, Bericht. Naturforschung u. Medizin in Deutschland 1939–1946 (Fiat Reviews). Bd. 2, Teil II, 113–132
14. Eine mathematische Analyse der Luftdruckverteilungen in großen Gebieten. Veröffentlichungen d. Arbeitsgemeinschaft f. Forschung d. Landes Nordrhein-Westfalen, Heft 27 (1954)
15. Ein gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Desargues in der absoluten Axiomatik. Arch. d. Math. **V** (1954) 458–468
16. Generalizzazioni del Teorema sul punto unito. Veröffentlichungen des ‚Istituto Matematico dell' Universita di Roma', Rom (1956)
17. Il problema dei colori sulle superfizie chiuse. Veröffentlichungen des ‚Istituto Matematico dell'Universita di Roma', Rom (1956)
18. Kongruenz und Bewegung. Mitt. d. Math. Gesellsch. in Hamburg, **IX** (1959) Heft 1, 5–11
19. Affine Räume mit schwacher Inzidenz und zugehörige algebraische Strukturen. Crelle'sches J. f. d. reine u. angewandte Math. **204** (1960) 205–215
20. Verallgemeinerte affine Räume und ihre algebraische Darstellung. Algebraical and topological Foundations of Geometry. Proceedings of a Colloquium, held in Utrecht, August 1959. London: Pergamon Press 1962, S. 167–172
21. Projektive Einbettung eines Desarguesschen Ebenenkeimes. Gemeinsam m. E. Ellers. Abh. Math. Sem. Hamburg **25** (1962) 206–230
22. Zum Gedenken an Wilhelm Blaschke. Abh. Math. Sem. Hamburg **26** (1964) 111–118
23. Moderne Denkweisen der Mathematik. Abh. Math. Sem. Hamburg **29** (1965) I–XX
24. On non-desarguesian geometries. Seminari dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica 1962–63, Rom (1964)
25. Modern Geometric Structures. Lecture Notes, taken by S. P. Lipshitz, University of South Africa, edited April 1967 (Pretoria)
26. Weak affine spaces and their algebraic representation. Wiskunde-Seminare, Universiteit van Stellenbosch (Südafrika) (1966) 86–124
27. Zur Geometrie der Quasimoduln. Istituto Nazionale di Alta Matematica, Symposia Matematica, Vol. V (1970) S. 421–438
28. Über die kombinatorischen Grundlagen gewisser simplizialer Sätze. Atti del Convegno di Geometria Combinatoria e sue Applicazioni (Perugia) (1970) 385–401
29. Kombinatorik bewerteter Komplexe. Abh. Math. Sem. Hamburg **39** (1973) 21–43
30. Combinatorics of Valuated Complexes. Atti dei Convegni Lincei 17. Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatorie (Roma 1973), Tomo II, Roma 1976, 61–69
31. Wie ist geometrisches Schließen möglich? Axiomatisierung geometrischen Denkens, aufgezeigt an einem elementargeometrischen Sachverhalt. Mitt. d. Math. Ges. in Hamburg **10** (1976) 297–310
32. Geometrie und Mengenlehre. Beiträge zum Mathematikunterricht (1977) 266–276
33. Ein kombinatorischer Umschließungssatz nebst Anwendungen. Game Theory and Related Topics. Bonn/Hagen, September 1978. North-Holland 1979, S. 207–218
34. Fifty Years of Further Development of a Combinatorial Lemma, Part A. Numerical Solution of Highly Nonlinear Problems. Symposium on Fixed Point Algorithms and Complementarity, Southampton, July 1979. North-Holland 1980, S. 183–197
35. Fifty Years of Further Development of a Combinatorial Lemma, Part B. Loc. cit. S. 199–214

Bücher

1. Vorlesungen über Matrizen, von O. Schreier u. E. Sperner, Leipzig: B. G. Teubner, 1932
2. Einführung in die analytische Geometrie und Algebra, von O. Schreier u. E. Sperner. Leipzig: B. G. Teubner. Bd. I, 1931, Bd. II 1935

3. Einführung in die analytische Geometrie und Algebra (Neubearbeitung von Nr. 2). Göttingen: Vandenhoeck u. Ruprecht, Bd. I 1.–6. Aufl. 1948–1963, Bd. II 1.–5. Aufl. 1951–1963

Herausgegebene Zeitschriften und Sammelwerke

1. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Herausgeber von 1936–1943
2. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Verlag Springer, Heidelberg. Mitherausgeber seit 1940
3. Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Verlag B. G. Teubner. Mitherausgeber von Bd. I (Algebra und Zahlentheorie) von Juni 1949–1956 gemeinsam mit Prof. Dr. H. Hasse, Hamburg und Prof. Dr. M. Deuring, Göttingen
4. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. Verlag Vandenhoeck u. Ruprecht, Göttingen. Mitherausgeber seit 1955.

Prof. Dr. F. Bachmann
Mathematisches Seminar
der Universität
Olshausenstr. 40 – 60
2300 Kiel 1

(*Eingegangen: 27. 5. 1981*)

Buchbesprechungen

Aumann, G., Haupt, O., Einführung in die reelle Analysis, Band II: Differentialrechnung der Funktionen mehrerer Veränderlicher, Berlin – New York: de Gruyter Verlag 1979, 313 S., gebunden, DM 128,–

Dies ist der zweite Band eines auf 3 Bände gelegten Werkes, der Neufassung des alten Haupt-Aumann-Pauc. Als der Rezensent vor 26 Jahren das Studium begann, wurde jener als Literatur „für höhere Ansprüche" genannt. Dieses Attribut trifft auch für die Neufassung zu: Es handelt sich um ein Werk, das nicht mit der Elle des Standardkurses in Analysis gemessen werden kann und wohl auch nicht so gemeint ist.

Doch zunächst zum Inhalt: Es beginnt mit 34 Seiten über Lineare Algebra (von der Vektorraum-Definition bis zu alternierenden Multilinearformen) und 30 Seiten über Topologie (von „Rastern im weiteren Sinn" bis zur Äquivalenz aller Normen auf endlich-dimensionalen reellen Vektorräumen). Der Zweite Teil ist der Untersuchung von Abbildungen aus dem $\mathbf{R}^n$ in den $\mathbf{R}^m$ ohne Differentialrechnung gewidmet: Lipschitz-Abbildungen, Ungleichungen und Konvexität sowie eine recht abstrakt-grundsätzliche Abhandlung über Vertauschung von Grenzübergängen. Der Dritte Teil, der die zweite Hälfte des Buchs einnimmt, behandelt die Differentialrechnung von $\mathbf{R}^m$-wertigen Abbildungen aus dem $\mathbf{R}^n$. Auf eine ausführliche Diskussion des Differenzierbarkeitsbegriffes – auch für Randpunkte des Definitionsbereichs – (Stichworte: Differenzierbarkeit (=: D.), gelockerte D., partielle D., Richtungsableitung, Derivativ und Funktionalmatrix, halbfrei partielle Ableitungen, freie D. (nach einem Vektor bzw. in einem Punkt), stetige D., gleichmäßige D., laterale Ableitungen) folgen die Untersuchung von impliziten Funktionen (dieser Terminus wird nicht benutzt) und von Extremumproblemen (bis zu hinreichenden Bedingungen für das Vorliegen echter lokaler Extrema bei regulären Nebenbedingungen), Existenz-, Eindeutigkeits- und Abhängigkeitssätze für gewöhnliche Differentialgleichungen sowie etliche das Vorstehende anwendende Paragraphen, u. a. über das Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwangs, Einhüllende von Kurven- und Flächenscharen, Interpolation.

Das Buch ist also für eine "Einführung" ungewöhnlich inhaltsreich. Hinzu kommt, daß die Autoren stets bestrebt sind, die Sätze unter möglichst schwachen Voraussetzungen zu beweisen und die Begriffsbildungen in einen recht (manchmal: zu) allgemein-abstrakten Rahmen zu fassen. Andererseits bleiben sie in der Beschränkung der eigentlichen Analysis aufs Endlichdimensionale durchaus klassisch-„konkret".

Multum *et* multa auf 300 Seiten zu bringen, gelingt den Autoren mit Hilfe einer klaren, aber sehr gedrängten Sprache, komprimierter Beweise, reichlicher Verwendung von Abkürzungen (wie VR, rat. konv.) und Symbolen im Text sowie von Quantoren in den Formeln, und weitgehendem Verzicht auf konkrete Beispiele. Die Bezeichnungen entfernen sich dabei gelegentlich vom Üblichen; das Bemühen um prägnante und gleichzeitig exakte Symbolik läßt diese manchmal etwas schwerfällig und überladen werden – die Druckfehler-Anfälligkeit erhöht sich! Jedenfalls erfordert die Lektüre einige Anstrengung – auch vom Kenner, sofern er nur isolierte Abschnitte lesen will (vollständigere Register würden solches erleichtern).

Einem durchschnittlichen Mathematik-Studienanfänger kann der Rezensent dieses Buch kaum empfehlen: Es ist zu „schwer", die Sprechweise ist vom Stil der sonstigen, auch der weiterführenden Literatur zu verschieden, und – vor allem – die Gefahr, daß ein solcher Leser sich in dem Reichtum des Buches verirrt und nicht merkt, welche Begriffe, Zusammenhänge, Theoreme die für ihn wichtigen sind, ist zu groß.

Hingegen findet ein guter fortgeschrittener Student, der sich genau und grundsätzlich über Analysis informieren will, hier eine gründliche und (bis auf Druckfehler) verläßliche Hilfe zu einem vertieften Verständnis der Begriffe und zu einer präzisierten Kenntnis der Sachverhalte. Auch als Dozent wird man dem Buch noch manche Anregung entnehmen können.

Ein Wort noch zum Äußeren: Es ist ein Genuß, in einem wirklich schön und sorgfältig gesetzten Buch wie diesem zu lesen. Leider trüben mehrere hundert Druckfehler (oft ärgerliche in Formeln), inkonsequent durchgeführtes Lay-out und die Unsitte, auch kürzere Formeln im Text ggf. auf zwei Zeilen zu verteilen, diesen Genuß mehr, als man bei einem Buch in dieser Preislage erwarten möchte.

Bremen W. Fischer

Leichtweiß, K., Konvexe Mengen, Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1980, 330 S., 40 Abb., Gbd. DM 48,– (DDR-Ausgabe: Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften)

Wer sich in Lehrveranstaltungen mit verschiedenen Aspekten der Konvexität befaßt hat, wird das Fehlen passender neuerer Lehrbücher eines allgemeinen, systematisch einführenden Charakters sicher gelegentlich empfunden haben. Für den klassischen Bereich der Geometrie der konvexen Körper im euklidischen Raum wird eine derartige Einführung hier vorgelegt. Die Kapitelüberschriften lauten: Geometrische Eigenschaften konvexer Mengen, Analytische Darstellung konvexer Mengen, Funktionale kompakter konvexer Mengen, Symmetrisierung, Ungleichungen in der Theorie der konvexen Mengen. Den Standard-Stoff, den der Kundige in diesen Zusammenhängen erwarten mag, wird er im vorliegenden Buch in ausführlicher Darstellung finden. Aus den behandelten Gegenständen seien daher im folgenden nur einige derjenigen herausgegriffen, die über das zu Erwartende hinausgehen und teilweise vielleicht nicht so zum Allgemeingut der Konvexgeometer gehören: In Kap. I die von P. C. Hammer eingeführten Semiräume und eine von Dvoretzky stammende Umkehrung des Satzes von Helly; in Kap. II zwei geometrische Ungleichungen in Minkowski-Räumen, die analytische Beschreibung konvexer Körper vermöge der Stützelemente durch die vom Verfasser eingeführte Halbachsenfunktion, Minkowski-Räume mit symmetrischer Transversalität; in Kap. III die vektoriellen Gegenstücke der gemischten Volumina und Quermaßintegrale; in Kap. IV die Ungleichung von Rogers und Shephard für das Volumen des Differenzenkörpers; in Kap. V der Busemannsche Satz vom Brunn-Minkowskischen Typ, isoperimetrische und isodiametrische Ungleichung der Minkowski-Geometrie, die Fenchel-Aleksandrovschen Ungleichungen für die gemischten Volumina und der allgemeine Brunn-Minkowskische Satz sowie der Satz von Aleksandrov-Fenchel-Jessen über konvexe Körper mit übereinstimmenden m-ten Krümmungsfunktionen.

Es war der erklärte Wille des Verfassers, sich bei seiner Einführung in die Theorie der konvexen Mengen zu beschränken auf einen Stoff, der als der klassische Bestand der Geometrie der konvexen Körper im $\mathbf{R}^n$ und der wichtigen einschlägigen Ungleichungen und Extremalprobleme umrissen werden kann. (Eine allgemeiner gehaltene Einführung in die Konvexität unter Berücksichtigung auch der Anwendungen und etwa funktionalanalytischer Aspekte würde also auch neben diesem Werk noch ihren Platz haben.) In diesem Rahmen ist ein wohlüberlegtes, inhaltsreiches und gründliches Lehrbuch entstanden. Dabei ist die Absicht des Autors erkennbar, das Schwergewicht auf eine lückenlose und auch in Einzelheiten ausformulierte Darstellung der Beweise zu legen. Diese Sorgfalt wird mancher Lernende sicher dankbar begrüßen. Gegenüber Genauigkeit und Ausführlichkeit der Darstellung treten Einfachheit und Eleganz eher in den Hintergrund. Neben einer gewissen Tendenz zu komplizierten Formulierungen und Bezeichnungen fällt ins Auge, daß bisweilen von mehreren möglichen Zugängen ein aufwendigerer gewählt wurde und daß wohl nicht jede Gelegenheit zur Vereinfachung der Darstellung und zur Verkürzung der Beweise (ohne Preisgabe der Exaktheit) ausgenutzt wurde. Wenn dies auch gegenüber den Verdiensten des Buches natürlich weniger ins Gewicht fällt, so wäre es doch schade, wenn hierdurch dem Lernenden der Blick auf die geometrische Eleganz der dargestellten Gegenstände verschleiert würde.

Besonders zu begrüßen ist die vollständige Darstellung von Aleksandrovs erstem Beweis für die Fenchel-Aleksandrovschen Ungleichungen und der anschließenden Folgerungen, wie der Verallgemeinerung des Satzes von Brunn-Minkowski mit Gleichheitsdiskussion und des Eindeutigkeitssatzes von Aleksandrov-Fenchel-Jessen. Es wäre zu wünschen, daß die nunmehr leichtere Zugänglichkeit dieser schönen Theorie auch zu deren Weiterentwicklung beitragen möge.

Freiburg R. Schneider

Marti, J., Konvexe Analysis (Mathematische Reihe, Band 54), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1977, 274 S., Gbd. DM 68,–

Das Buch gibt eine Einführung in die Theorie der konvexen Mengen und einen Überblick über deren Zusammenhang mit verschiedenen Problemen der reinen und angewandten Mathematik.

Nach Behandlung der elementaren Eigenschaften werden Trennungssätze für disjunkte konvexe Mengen bewiesen, die dann auf Fragen über die Existenz von Lösungen von Gleichungs- und Ungleichungssystemen angewandt werden. Die Extremalpunkte konvexer Mengen werden eingehend untersucht, insbesondere wird der Satz von Krein-Milman bewiesen. Anhand gewisser Sätze über Funktionenräume, deren Beweis auf der Bestimmung von Extremalpunkten beruht, wird die Bedeutung der Extremalpunkte klar. Unter anderem werden der Satz von Banach-Stone und der Satz von Haar-Kolmogoroff (über die Existenz und Eindeutigkeit einer besten Approximation im Raum C(S) der stetigen Funktionen auf einem kompakten Raum S) bewiesen.

Die Stützpunkte konvexer Mengen in Banachräumen werden ausführlich untersucht, besonders bezüglich ihrer Reichhaltigkeit. Ferner werden spezielle Stützpunkte (die exponierten und die regulären Punkte) behandelt. Ein Kapitel wird den Fixpunktsätzen von Brouwer, Schauder-Tychonoff und Markoff-Kakutani gewidmet, wobei auch ihre Anwendungen in der Approximationstheorie und auf Existenzfragen für Lösungen von Differentialgleichungen besprochen werden. Ferner werden Charakterisierungen von konvexen Mengen durch die Eindeutigkeit von nächsten Punkten und die Reichhaltigkeit der regulären Punkte gegeben.

Sehr ausführlich werden die konvexen Funktionen auf Teilmengen von $\mathbf{R}^n$ behandelt. Dabei werden Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften diskutiert und Sätze über die Konvergenz von Folgen von konvexen Funktionen bewiesen. Ferner werden einige Resultate über Minima konvexer Funktionen hergeleitet, die für die Optimierungstheorie wichtig sind.

Ein besonderer Schwerpunkt liegt in der Untersuchung der endlich-dimensionalen konvexen Mengen. So werden die Sätze von Carathéodory und Helly bewiesen und mehrere Anwendungen davon angegeben, unter anderem Sätze über die Existenz von Lösungen von Ungleichungssystemen. Der Raum der kompakten konvexen Teilmengen von $\mathbf{R}^n$ mit der Hausdorffschen Metrik wird betrachtet und der Auswahlsatz von Blaschke wird bewiesen. Im letzten Kapitel wird die Approximation konvexer Mengen durch konvexe Polyeder bzw. durch reguläre konvexe Mengen sowie die dadurch erreichte Berechnung von Volumen und Oberflächen behandelt.

Der Stoff wird durch eine Vielzahl von gut ausgewählten Aufgaben ergänzt, die oft sehr interessante Anwendungen der Theorie enthalten.

Das Buch ist im großen und ganzen sehr klar geschrieben und auch Studenten in den ersten Semestern zugänglich. Die Beweise sind im allgemeinen ausführlich und gut gegliedert. Man vermißt aber oft eine geometrische Veranschaulichung. Leider erschwert eine große Anzahl von Druckfehlern die Lektüre des Buches. Außerdem sind einige wenige falsche Behauptungen und Unklarheiten (besonders im Kapitel über die konvexen Funktionen) zu beklagen.

Stil und Stoffauswahl lassen dieses Buch als Grundlage für Proseminare besonders geeignet erscheinen.

Erlangen S. Papadopoulou

Köthe, G., Topological Vector Spaces II (Grundlehren der mathem. Wissensch., Band 237), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1979, 2 Fig., xii + 331 S., cloth, DM 79,50

Die Monographie „Topologische lineare Räume I" erschien 1960 und etablierte sich innerhalb kurzer Zeit als einflußreiches Standardwerk dieses Gebietes. In der Einleitung versprach der Autor einen zweiten Band, der sich mit der Theorie der linearen Abbildungen befassen sollte sowie mit Raumklassen, die für die Analysis wichtig sind. Dieses Versprechen hat er nach zwanzig Jahren eingelöst, wobei ihm die in der Zwischenzeit eingetretene Entwicklung zu einer Änderung der ursprünglichen Inhaltsplanung veranlaßte. Daher vorab einige Bemerkungen zur Entwicklung des Gebietes.

Die Theorie der lokalkonvexen Vektorräume wurde in den vierziger und fünfziger Jahren entscheidend vorangetrieben und geprägt durch die Arbeiten von Dieudonné, Grothendieck, Schwartz und den Autor. Wesentliche Impulse ergaben sich durch die Einführung der Distributionen und Untersuchungen von Vektorräumen holomorpher bzw. stetiger Funktionen. Dabei erwies sich die von der Banachschen Schule entwickelte Theorie als unzureichend, so daß neue Konzepte nötig wurden. Die Grundlagen für eine umfassende Theorie, welche viele klassischen Resultate umfaßte und in allgemeinem Rahmen neu einordnete, waren Anfang der fünfziger Jahre gelegt. Ihre Tragfähigkeit wurde eindrucksvoll demonstriert durch die Arbeiten Grothendiecks, dessen Untersuchungen zum Schwartzschen Satz vom Kern zur Entwicklung der topologischen Tensorprodukte und der nuklearen Räume führte. Als Grothendieck sich anderen Fragen zuwendete, hinterließ er eine Reihe ungelöster Probleme und weite Bereiche, die zwar erkundet waren, aber noch besser verstanden und zugänglich gemacht werden mußten. Wesentliche Fortschritte und Lösungen der Grothendieckschen Probleme ergaben sich bei der Charakterisierung der nuklearen Räume in der ersten Hälfte der sechziger Jahre; optimale Graphensätze wurden ebenfalls in den sechziger Jahren entwickelt. 1972 löste Enflo das Approximationsproblem und gleichzeitig das noch ältere Basisproblem negativ. Mit der Konstruktion nuklearer Frécheträume ohne beschränkte Approximationseigenschaft durch Dubinsky 1978 waren dann die in Grothendiecks Thèse gestellten Probleme im wesentlichen gelöst.

Daraus sollte man aber nicht folgern, daß das Gebiet nun abgeschlossen ist. Denn seit geraumer Zeit hat bei den nuklearen Frécheträumen eine sich beschleunigende Entwicklung eingesetzt, bei der die nach dem Autor benannten Folgenräume eine zentrale Rolle spielen. Hier wurden Methoden entwickelt und tiefliegende Resultate gewonnen, die über Grothendieck hinausgehen, und die vielfältige Beziehungen zu Fragen aus Gebieten der Analysis haben.

Aus den angesprochenen Themenkreisen hat der Autor diejenigen ausgewählt, die mit linearen und multilinearen Abbildungen zu tun haben und sie als Kapitel sieben und acht dem ersten Band hinzugefügt.

Kapitel sieben beginnt mit der dualen Charakterisierung von Homomorphismen, d. h. stetigen linearen Abbildungen, für welche die zugehörige kanonische Injektion ein Isomorphismus auf das Bild ist. Danach werden die klassischen Charakterisierungen für Homomorphismen zwischen Banach- und Frécheträumen hergeleitet. Zwei Abschnitte sind den verschiedenen Möglichkeiten gewidmet, wie man den Satz von der offenen Abbildung bzw. dem abgeschlossenen Graphen für Frécheträume auf andere Raumklassen ausdehnen kann. Die Ansätze von Pták bzw. Y. Komura hierzu und damit zusammenhängende Fragen und Resultate werden ausführlich diskutiert. Dann wird die Theorie de Wildes vorgestellt, welche für die Anwendungen wohl die besten Resultate bringt. In ihr werden in Verfeinerung klassischer Ansätze Räume mit Gewebe (webbed spaces) eingeführt. Diese Raumklasse umfaßt die Frécheträume und zeichnet sich aus durch gute Vererbungseigenschaften und die Gültigkeit folgender Aussagen: Ist E ein induktiver Limes von Banachräumen und hat F ein Gewebe, so ist jede folgenabgeschlossene lineare Abbildung $A : E \to F$ stetig und jede stetige lineare Surjektion $B : F \to E$ ein Homomorphismus. Damit ist insbesondere eine Vermutung von Grothendieck bewiesen, andere Beweise für die Richtigkeit dieser Vermutung gehen zurück auf Raikow, Schwartz und Martineau. Das siebte Kapitel schließt mit Untersuchungen über lineare Abbildungen, die nicht notwendigerweise stetig sind und enthält Ergebnisse, welche die für Hilberträume bekannten verallgemeinern.

In dem achten Kapitel werden zunächst lokalkonvexe Topologien auf Räumen stetiger linearer bzw. hypostetiger bilinearer Abbildungen eingeführt und die klassischen Aussagen aus diesem Bereich bewiesen. Sie bilden die Grundlagen für die Einführung des projektiven und des injektiven Tensorproduktes nach Grothendieck und des ϵ-Produktes nach Schwartz. Im Zusammenhang damit stehen ein Abschnitt über kompakte und nukleare Operatoren sowie ein Abschnitt über die Approximationseigenschaft (A.E.). Letzterer enthält verschiedene Interpretationen der A.E., geht auf Räume mit Basis ein und gibt die klassischen Beispiele für Räume mit A.E. Das Gegenbeispiel von Enflo wurde leider nicht aufgenommen, stattdessen ist Johnsons universeller Raum aufgeführt, der aufgrund von Enflos Ergebnis ebenfalls ein Gegenbeispiel ist. Das achte Kapitel schließt mit einem Abschnitt über die Dualität topologischer Tensorprodukte, in dem auch integrale lineare Abbildungen und die klassische Situation des Hilbertraumes behandelt werden.

Einen Abschnitt über nukleare Räume und die abstrakte Fassung des Satzes von Kern mittels topologischer Tensorprodukte hat der Autor nicht aufgenommen, sondern hierzu auf das Buch von Pietsch und ein geplantes Buch von Mityagin verwiesen. Damit fehlt in dem breit angelegten Werk leider eine Raumklasse, die durch ihre Querverbindungen zu vielen anderen Bereichen auch für Nicht-Spezialisten interessant ist.

Neben den oben erwähnten Themen enthält das Buch noch eine ganze Reihe schöner, bisher noch nicht zugänglicher Einzelergebnisse und Beispiele. Für die behandelten Gebiete liefert es einen umfassenden Überblick über die Entwicklung bis etwa 1977, ist aber auch als Einführung gut geeignet. Daher wird es ebenso wie der erste Band eine vielbenutzte Hilfe in Lehre und Forschung sein.

Düsseldorf R. Meise

Targonski, G., Topics in Iteration Theory (Studia Mathematica, Skript 6), Göttingen – Zürich: Vandenhoeck & Ruprecht 1981, 292 S., kart., DM 45,–

Dieses Buch, das aus einer Jahresvorlesung an der Universität Marburg hervorging, führt den Leser in vielen Fragestellungen der Iterationstheorie bis an den aktuellen Stand der Forschung heran. Da der Autor regelmäßig die heuristischen Gedankengänge schildert, die zu den formulierten Ergebnissen geführt haben, ist es ausgezeichnet geeignet, den Leser zu eigener Forschung anzuregen. Im folgenden sollen an Hand ausgewählter Ergebnisse der einzelnen Kapitel die im Buch behandelten Fragestellungen vorgestellt werden. Gleich hier sei festgehalten, daß der Autor die Anwendungen der Iterationstheorie in der Numerik nicht behandelt.

Das 1. Kapitel ist dem Studium der Orbits einer Abbildung f gewidmet, das sind die Äquivalenzklassen unter der Relation „$x \underset{f}{\sim} y :\Leftrightarrow \exists (m, n \in \mathbf{N}) f^m(x) = f^n(y)$".

Die Untersuchungen sind von Bedeutung für die „Abelsche Funktionalgleichung" $\psi(f(x)) = \psi(x) + 1$; diese besitzt eine Lösung ψ (dann gleich unendlich viele) genau dann wenn kein Orbit von f einen Zyklus unter f enthält.

Die Orbitstruktur einer Abbildung einer endlichen Menge in sich kann mit Hilfe des charakteristischen Polynoms der „Abbildungsmatrix" recht gut beschrieben werden. Die Frage der Anzahl (wesentlich) verschiedener Orbitstrukturen auf einer Menge wird nur angeschnitten.

Es folgt ein Kapitel über iterative Wurzeln von Funktionen. Einer der Ursprünge der Iterationstheorie liegt ja in dem von Babbage 1815 gestellten Problem der Charakterisierung der iterativen Wurzeln der Identität, i.e., der Funktionen $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $\varphi^n := \varphi^{n-1} \circ \varphi = \mathrm{id}$. Die Existenz iterativer Wurzeln ist wichtig für das später behandelte Problem der Einbettbarkeit der (diskreten) Iterierten einer Funktion in eine (von einem kontinuierlichen Parameter abhängigen) Iterationshalbgruppe. Es werden hauptsächlich Resultate angegeben, deren Wert darin liegt, zu erkennen, wann iterative Wurzeln nicht existieren. Bemerkenswerte Ausnahmen sind folgende Sätze:

a) Eine bijektive strikte Kontraktion in einem überabzählbaren metrischen Raum besitzt iterative Wurzeln jeder Ordnung.

b) Eine streng monoton wachsende stetige bijektive Selbstabbildung von **R** besitzt iterative Wurzeln jeder Ordnung.

c) Das Tschebyscheffpolynom T_n $(n \geqslant 2)$ hat eine iterative Wurzel der Ordnung p^k (p prim) genau dann, wenn $n^p \equiv n \pmod{p^{k+1}}$ und $p^k \leqslant n - 1$.

Für die Behandlung der i. a. ungelösten Frage der Konstruktion iterativer Wurzeln schlägt der Autor die Verwendung der Abbildungsmatrix (im Fall endlicher Mengen) vor.

Das 3. Kapitel behandelt das schon erwähnte Problem, die Iterierten f^n einer Funktion f in eine „Iterationshalbgruppe" $f^t(\cdot)$, die die „Translationsgleichung" $f^t \circ f^s = f^{t+s}$ erfüllt, einzubetten. Dazu werden Eigenschaften von Lösungen der Translationsgleichung studiert, wobei teilweise zugelassen wird, daß der Parameter eine beliebige Halbgruppe durchläuft.

Eng zusammenhängend mit den Lösungen der Translationsgleichung sind Lösungen der Abelschen (siehe oben) und der Schröderschen Funktionalgleichung $\varphi(f(x)) = \lambda\varphi(x)$. Ist beispielsweise φ eine bijektive Lösung der letzteren Gleichung, so ist $f^t(x) := \varphi^{-1}[\lambda^t\varphi(x)]$ eine Iterationshalbgruppe.

Ein Abschnitt dieses Kapitels ist einer schwer zugänglichen Arbeit von M. Zdun über Iterationshalbgruppen auf **R** gewidmet. Dabei werden verschiedene Arten der Abhängigkeit der Halbgruppe von t und x (meßbar, stetig, differenzierbar) und deren Zusammenhänge untersucht. Beispielsweise gilt für eine Iterationshalbgruppe f: Falls für alle x die Abbildung $t \to f^t(x)$ meßbar ist, so ist diese Abbildung sogar stetig.

Eine genaue Beschreibung solcher „stetiger Iterationshalbgruppen" liefert gute notwendige Bedingungen für die Einbettbarkeit von Iterationsfolgen. Ein bemerkenswertes Resultat ist ferner, daß aus der Differenzierbarkeit (in x) aller f^t die Differenzierbarkeit aller Funktionen $t \to f^t(x)$ (in t) folgt.

Schließlich werden Iterationshalbgruppen in der Ebene behandelt und ein auf S. Andrea zurückgehender Einbettungssatz für fixpunktfreie Homöomorphismen angegeben.

Das folgende Kapitel ist einem Verfahren zur Lösung der Translationsgleichung gewidmet, das die von R. Liedl definierte „Pilgerschritttransformation" verwendet:

Sei a: $[0, 1] \to \mathbf{R}^+$ stetig mit $a(0) = 1$ („Pfad"). Die Pilgerschritttransformation von a ist definiert als m(1), wobei m (in Abhängigkeit von t) definiert ist als Lösung des Anfangswertproblems

$$m'(\tau) = t \cdot \frac{a'(\tau)}{a(\tau)} \cdot m(\tau), \; m(0) = 1.$$

Die Lösung ist der Pfad $a(1)^t$, der vom speziellen Pfad a nicht abhängt (sondern nur von seinem Endpunkt) und die Translationsgleichung erfüllt.

Durch formale Anwendung der Eulermethode zur Lösung des obigen Anfangswertproblems kann man die Pilgerschritttransformation einführen für Pfade in beliebigen topologischen Gruppen. Motiviert durch den eindimensionalen Fall lautet die „Hauptvermutung": Falls die Folge der Iterierten, die durch wiederholte Anwendung der Pilgerschritttransformation auf einen Pfad entsteht, gleichmäßig konvergiert, so erfüllt der Grenzpfad die Translationsgleichung. Die Hauptvermutung ist für zusammenhängende kommutative endlichdimensionale reelle Liegruppen richtig (die Iteration führt sogar in einem Schritt zu einer Lösung der Translationsgleichung). Anschließend an dieses Resultat werden lokale Ergebnisse (bei denen die „Startpfade" in einer Umgebung des Einselements liegen müssen) für die Hauptvermutung in Matrizengruppen angegeben.

In Kapitel 5 wird eine spezielle Anwendung in der Funktionalanalysis behandelt. Zuerst wird gezeigt, daß (unter gewissen Bedingungen) ein linearer Operator A auf L^p mit $A(xy) = (Ax) \cdot (Ay)$ (für $x, y, x \cdot y \in L^p$) von der Form eines „Substitutionsoperators" $Ax: = x \circ h$ ist. Davon ausgehend werden Halbgruppen multiplikativer linearer Operatoren auf L^p studiert, die wegen obigem Resultat als „Substitutionshalbgruppen" $A^t x: = x \circ h_t$ darstellbar sind. Damit lassen sich Ergebnisse aus Kapitel 3 auf diese Situation übertragen. Insbesondere erhält man einen Satz über Einbettbarkeit eines Substitutionsoperators in eine Substitutionshalbgruppe. Schließlich werden infinitesimale Generatoren solcher Halbgruppen in L^p und in $C[a, b]$ untersucht.

Es schließt ein kurzes Kapitel über analytische Iteration an. Hier geht es im wesentlichen um Lösungen $f^t(z)$ der Translationsgleichung, die in z analytisch sind. Der Autor begnügt sich mit Literaturhinweisen und dem Referieren ausgewählter Ergebnisse, wie etwa zum von L. Reich behandelten Problem der analytischen Iteration (formal biholomorpher) formaler Potenzreihen.

Nun kehrt der Autor wieder zurück zum Studium von diskreter Iteration. Im 7. Kapitel untersucht er hauptsächlich Eigenschaften der Menge $L(x)$ der Häufungspunkte einer Iterationsfolge $f^n(x)$. Ein Resultat von M. Kuczma gibt beispielsweise an, daß in einem lokalkompakten T_2-Raum mit 1. Abzählbarkeitsaxiom gilt: Ist f auf $L(x)$ stetig, so bildet $L(x)$ einen Zyklus unter f, falls es endlich ist; ist $L(x)$ unendlich und diskret, so enthält es keinen Zyklus unter f.

Kapitel 8 ist den Beziehungen der Iterationstheorie zur topologischen Dynamik gewidmet. Einleitend wird der Begriff der (topologischen) Entropie zuerst anschaulich erklärt, dann formal definiert. Darauf folgt das bekannte Resultat von A. Šarkovskii, das u.a. besagt, daß eine stetige Selbstabbildung eines Intervalls Zyklen aller Längen besitzt, falls sie einen Zyklus der Länge 3 hat. Es wird ein graphentheoretischer Beweis angegeben. Darauf folgen eine $\mathbf{R}^n$-Version des Šarkovskiischen Satzes und das berühmte Resultat von T. Li und J. Yorke, daß die Existenz eines Zyklus der Länge 3 Chaos impliziert. Dabei bedeutet „Chaos" die Existenz von Zyklen aller Längen und die Existenz einer überabzählbaren Menge von Startwerten so, daß die entstehenden Iterationsfolgen nicht asymptotisch periodisch sind und je zwei solcher Folgen einander beliebig nahe kommen, ohne gegeneinander zu konvergieren. Chaos ist übrigens generisch in $C[a, b]$, i.e., die Menge der chaotischen Funktionen enthält eine offene dichte Menge.

Es folgen kurze Bemerkungen über Anwendungen zur Generierung von Pseudozufallszahlen. Dann wird bewiesen, daß auch die Existenz eine Zyklus der Länge $k \neq 2^n$ Chaos impliziert. Schließlich werden Zusammenhänge zwischen Chaos und Entropie studiert. Chaos impliziert positive Entropie, die Gültigkeit der Umkehrung ist Inhalt einer Vermutung von J. Milnor und W. Thurnston. Für eine eingeschränkte Funktionenklasse gilt diese Vermutung.

Abschließend werden globale Eigenschaften der Funktionenfolge f^n untersucht. In Kapitel 9 werden die Änderung des Iterationsverhaltens (insbesondere in Hinblick auf Chaos) bei Änderung der Funktion studiert (und etwas zögernd mit dem Wort „Bifurkation" umschrieben) und Stetigkeitseigenschaften der Entropie in Abhängigkeit von der Abbildung herausgearbeitet.

Das nächste Kapitel beschäftigt sich kurz mit ausgewählten außermathematischen Anwendungen, insbesondere in der Ökologie (Fibonaccis Modell des Bevölkerungswachstums, ein Räuber-Beute-Modell, Epidemologie). Das letzte Kapitel untersucht die Iteration von durch spezielle Automaten definierten Funktionen. Das Literaturverzeichnis ist umfangreich und umfaßt sogar noch eine Arbeit aus dem Erscheinungsjahr des Buches (1981).

Als im Zentrum des Interesses stehend kann man rückschauend einerseits das Problem der Einbettung diskreter in kontinuierliche Iterationen erkennen, andererseits die Untersuchung von Eigenschaften der bei diskreter Iteration entstehenden Mengen, wie etwa Chaos. Die beiden Themenkreisen gewidmeten Kapitel sind (fast) unabhängig voneinander lesbar.

Das Buch kann jedem, der in den angegebenen Gebieten an den Stand der Forschung herangeführt werden möchte und der bereit ist, für viele Beweise die angegebene Literatur zu konsultieren, uneingeschränkt empfohlen werden. Numerische Anwendungen gehören allerdings nicht zu den hier behandelten "Topics in Iteration Theory".

Linz H. Engl

Schmeißer, G., Schirmeier, H., Praktische Mathematik (de Gruyter Lehrbuch), Berlin – New York: W. de Gruyter Verlag 1976, 314 S., DM 36,–

Der Verlag de Gruyter setzt mit der Herausgabe dieses Lehrbuches eine gute Tradition fort, die nach 1945 mit dem Erscheinen der zweiten Auflage (1950) der „Methoden der praktischen Analysis“ von F. A. Willers in dieser Reihe wieder begonnen wurde.

Vieles hat sich seit dieser Zeit auf dem Gebiet der praktischen Mathematik getan. Die modernen Großrechenanlagen haben neue Dimensionen in der Größenordnung der behandelbaren Probleme gesetzt, alte Lösungsverfahren – etwa die graphischen – in ihrer Bedeutung verdrängt, neue Methoden in ihrer Entwicklung geprägt und höchste Anforderungen in der Genauigkeitsfrage gestellt. In dieser Situation ist es kein leichtes Unterfangen, mit einem Lehrbuch in mathematisch sauberer Form die stürmischen Entwicklungen der letzten zwanzig Jahre systematisch darzustellen. Den Autoren ist es gelungen, frei von augenblicklichen Modeerscheinungen, die Grundlagen der praktischen Mathematik in der heute üblichen Sprechweise und der nötigen Exaktheit, dem etwa durch die Anfängervorlesungen der ersten zwei Semester vorgebildeten Leser verständlich zu präsentieren. So fließen in der Auswahl und Darstellung des Stoffes sowohl einfache funktionalanalytische Gesichtspunkte wie auch mehr algorithmisch orientierte Gedanken ein. Das Buch vereint in einer gelungenen Synthese den klassichen Stoff der praktischen Mathematik mit bereits bewährten neueren Entwicklungen aus theoretischer Sicht, ohne praktische Gesichtspunkte zu vernachlässigen.

Nach einer kurzen Einführung über mögliche Fehlerquellen beim numerischen Rechnen werden Iterationsverfahren, bei denen der Banach'sche Fixpunktsatz im Mittelpunkt steht, wie das Newton-Verfahren und die Regula falsi, behandelt. Es schließen sich Verfahren zur Berechnung von Nullstellen bei Polynomen an. Der Stoff ist hier klassisch – Sturmsche Kette, Verfahren von Newton, Bairstow und Graeffe. Ihrer Bedeutung entsprechend nimmt die numerische lineare Algebra (lineare Gleichungssysteme, lineare Optimierung, Eigenwerte bei Matrizen) einen breiten Raum in diesem Buch ein. Teilweise wird der Versuch unternommen, zu einer Beurteilung der Verfahren durch eine Aufwandsanalyse zu kommen. Am Schluß eines jeden Kapitels stellen die Autoren in Anmerkungen (Kleindruck) den gebotenen Stoff nochmals in größere Zusammenhänge und geben weitere Ausblicke. Der Abschnitt über Interpolation enthält neben der Hermite- und Lagrange-Interpolation auch einen einführenden Exkurs über die Grundbegriffe der Spline-Interpolation mit Fehlerabschätzungen und einem algorithmischen Berechnungsschema. Wie auch in allen anderen Paragraphen bringen die Verfasser umfangreiches Beispielmaterial, das bis zu abschließenden numerischen Resultaten und anschaulichen Plots die Verfahren eindrucksvoll illustriert. Die klassische Theorie der numerischen Integration wird im Abschnitt 8 dargestellt und durch Überlegungen zur Konvergenzbeschleunigung in Abschnitt 9 teilweise ergänzt (Richardson Extrapolation – Romberg Verfahren). Den Abschluß des Buches bildet eine Kompaktdarstellung der Diskretisierungsprinzipien zur numerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen, wobei in den Anmerkungen wertvolle Hinweise zu einer detaillierteren Beschäftigung mit dieser Materie enthalten sind.

Das Buch stellt in seiner Betonung der mathematischen Ideen in der praktischen (numerischen) Mathematik eine wertvolle Ergänzung zur bereits existierenden Literatur dar. Es wird als Quelle, neben den Standardvorlesungen in numerischer Mathematik zu benutzen, sicher seinen Platz einnehmen.

Berlin K.-H. Hoffmann

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Hinweise für Autoren

Für den Abdruck vorgesehene Manuskripte sind in einwandfrei leserlicher und völlig satzfertiger Form (einseitig beschriebenes Manuskript, Schreibmaschinenschrift 1 1/2-zeilig) und entsprechend den nachstehenden Richtlinien ausgezeichnet einzureichen.

Der Beginn von Absätzen oder neuen Abschnitten sollte deutlich durch Einrücken gekennzeichnet sein. In jedem Fall sollte ein Hinweis für den Setzer, in dem alle Besonderheiten aufgeführt sind, beigefügt werden.

Ferner sollten die Manuskripte entsprechend dem Subject Classification Schemes der Mathematical Reviews (AMS/MOS) klassifiziert sein. Am Ende der Manuskripte sollte die genaue Anschrift des oder der Verfasser angegeben werden. Zuschriften sowie die Versendung der Korrekturabzüge erfolgen, sofern nicht anders vermerkt, immer an den erstgenannten Autor.

Zeichnungen sollten fortlaufend numeriert werden und auf gesonderten Blättern in Form von klaren Bleistiftzeichnungen im richtigen maßstäblichen Verhältnis möglichst in doppelter Größe dem Manuskript beigefügt werden. Am linken Rand des Textes sollte ein Hinweis auf die jeweils einzufügende Figur angebracht werden.

Fußnoten sollten auf der jeweiligen Seite, auf die sie Bezug nehmen, angebracht werden (nicht am Ende des Textes). Literatur sollte in folgender Weise zitiert [1] und dann am Ende des Textes in alphabetischer Reihenfolge zusammengestellt werden. Verweise sollten in folgender Form vorgenommen werden:

[1] Neven, J.: Martingale Problems. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **79** (1957) 175–180

[2] Wittenburg, J.: Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart: Teubner 1977. = Leitfäden der Angewandten Mathematik und Mechanik Bd. 33.

Um eine rasche Veröffentlichung zu erreichen, erhalten die Autoren nur einen Korrekturabzug. Die Autoren werden gebeten, nur Druckfehler zu korrigieren. Sollten weitere Korrekturen wie Einfügungen oder Streichungen vorgenommen werden, müssen diese dem Autor berechnet werden. Die von den Autoren durchgesehenen Korrekturabzüge sind umgehend an den Herausgeber zurückzusenden.

Die Autoren erhalten von ihren Arbeiten nach Veröffentlichung 75, von Buchbesprechungen 2 Sonderdrucke unentgeltlich. Zusätzliche Sonderdrucke können gegen entsprechende Berechnung zum Zeitpunkt der Rückgabe der Korrekturen bestellt werden.

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Auszeichnungen für den Satz

Die im Manuskript enthaltenen Formelbuchstaben werden generell steil gesetzt. Besondere Schriftarten sind entsprechend den folgenden Richtlinien farblich auszuzeichnen.

gestrichelte schwarze Unterstreichung	– S p e r r u n g
doppelte schwarze Unterstreichung	– **halbfett** (nur im laufenden Text zu verwenden, nicht in Formeln)
grüne Unterstreichung	– *kursiv* (nur im laufenden Text zu verwenden, nicht in den Formeln)
doppelte grüne Unterstreichung	– **halbfette lateinische Buchstaben** (in Formeln)
rote Unterstreichung	– griechische Buchstaben
lila Unterstreichung	– Groteskbuchstaben
doppelte lila Unterstreichung	– halbfette Groteskbuchstaben z. B. für **R**, **N**, **C** usw.
blaue Unterstreichung*)	– Fraktur
gelbe Unterstreichung	– Großbuchstabe O (zur Unterscheidung von der Ziffer Null)
gelb eingekastelt*)	– Skript
lila eingekastelt	– logische und mengentheoretische Symbole wie z. B. $\exists$, $\forall$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, sowie Malkreuz x und Verknüpfungszeichen $\circ$
grün eingekastelt	– Kleinbuchstabe ℓ (zur Unterscheidung zur Ziffer eins (1))

Die Bezeichnungen Theorem, Lemma, Korollar, Proposition, Definition usw. werden üblicherweise halbfett gesetzt. Der danach folgende Text (bis auf Formelbuchstaben) wird kursiv gesetzt. Die Bezeichnungen Beweis, Bemerkung, Hinweis usw. werden normal gesetzt, jedoch gesperrt. Der nachfolgende Text wird in normaler Schrift gesetzt.

Mathematische Formeln sollten so deutlich geschrieben werden, daß kein Mißverständnis möglich ist. Die Autoren werden gebeten, insbesondere deutlich zu unterscheiden zwischen Großbuchstaben und Kleinbuchstaben, Null sowie kleinem o und großem O, griechischen Buchstaben φ, Φ, κ, K, θ, Θ, Strich (z. B. Ableitungsstrich) und Apostroph. Ferner sollte darauf geachtet werden, daß keine Verwechslung zwischen k, K, r, u, v (lateinisch) und κ, μ, ν (griechisch) sowie $\in$ und ϵ (griechisch) möglich ist.

*) Von der Verwendung dieser Schriftarten ist beim Composersatz nach Möglichkeit abzusehen.

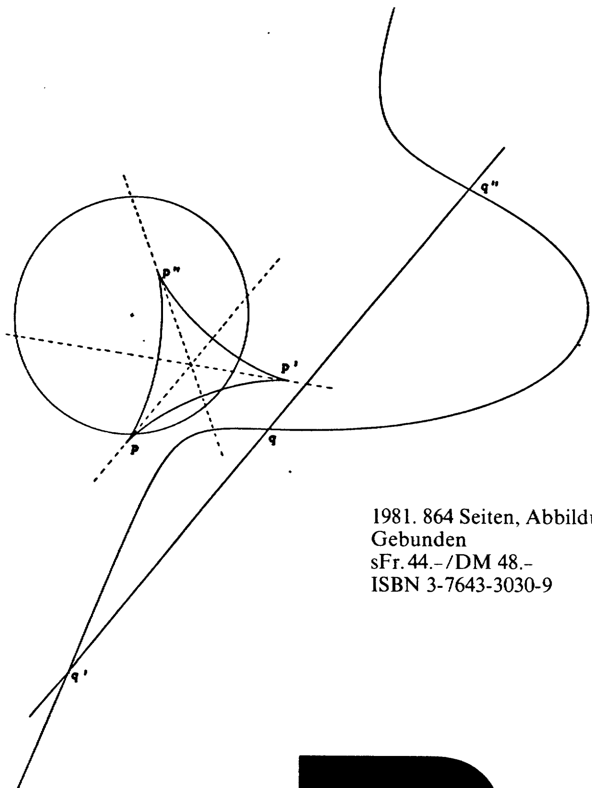
B. G. Teubner, Postfach 80 10 69, D-7000 Stuttgart 80

Neu

Egbert Brieskorn
Universität Bonn
Horst Knörrer
Leyden University

Ebene algebraische Kurven

Der vorliegende Band ist eine ungewöhnliche Einführung in die Theorie der ebenen algebraischen Kurven und ihrer Singularitäten.
Der Text beginnt mit den klassischen Kurven der griechischen Mathematik und illustriert Ursprung und Geschichte der Kurven in Mathematik, Naturwissenschaften, Technik und Kunst, um dann im ersten Teil die elementare komplex-analytische projektive Geometrie der ebenen Kurven zu entwickeln. Etwas ausführlicher werden die kubischen Kurven in der Ebene studiert.
Der zweite Teil behandelt detailliert die Singularitäten ebener Kurven und ihre Beziehung zu globalen Invarianten. Die wichtigsten Themen sind: Puiseux-Entwicklung, Auflösung von Singularitäten, Topologie von Singularitäten, die Plücker-Formeln sowie adjungierte Kurven und Abelsche Differentiale.
Diese Einführung legt Wert auf die Motivation, auf die Entwicklung von Anschauung und Verstehen grundlegender Ideen und ist damit Voraussetzung für ein sinnvolles Studium moderner Arbeiten über Singularitäten.



1981. 864 Seiten, Abbildungen.
Gebunden
sFr. 44.-/DM 48.-
ISBN 3-7643-3030-9

Bitte bestellen Sie bei Ihrem Buchhändler
oder beim Birkhäuser Verlag, P.O. Box 34, CH-4010 Basel/ Switzerland
oder bei Birkhäuser Boston Inc., 380 Green Street, Cambridge, MA 02139/USA

Birkhäuser Verlag
Boston · Basel · Stuttgart