

84. Band Heft 3
ausgegeben am 21. 7. 1982

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer



B. G. Teubner Stuttgart 1982

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ am Ende von Heft 84/1 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 74,- einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:

B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69

D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 80 30 76

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-8000 München 2, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: The appearance of the code at the bottom of the first page of an article in this journal indicates the copyright owner's consent that copies of the article may be made for personal or internal use, or for the personal or internal use of specific clients. This consent is given on the condition, however, that the copier pay the stated percopy fee through the Copyright Clearance Center, Inc., 21 Congress Street, Salem, Massachusetts 01970, for copying beyond that permitted by Sections 107 or 108 of the U.S. Copyright Law. This consent does not extend to other kinds of copying, such as copying for general distribution, for advertising or promotional purposes, for creating new collective works, or for resale.

© B. G. Teubner Stuttgart 1982 – Verlagsnummer 2897/3

Printed in Germany – ISSN 0012-0456

Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim

Druck: Schwetzingen Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 84, Heft 3

1. Abteilung

H.-O. Peitgen: Topologische Perturbationen beim globalen numerischen Studium nicht-linearer Eigenwert- und Verzweigungsprobleme	107
--	-----

2. Abteilung

Serre, J.-P., Trees (<i>H. Behr</i>)	23
Goodearl, K. R., Von Neumann Regular Rings (<i>F. Kasch</i>)	24
Davenport, J. H., On the Integration of Algebraic Functions (<i>W.-D. Geyer</i>)	25
Massey, W. S., Singular Homology Theory (<i>Th. Bröcker</i>)	27
Colton, D. L., Analytic Theory of Partial Differential Equations (<i>W. Wendland</i>)	28
Rolewicz, S., Funktionsanalysis und Steuerungstheorie (<i>W. Krabs</i>)	30

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

M. Denker: Schwache Invarianzprinzipien für Reguläre Funktionale von Verteilungsfunktionen

B. Grünbaum; G. C. Shephard: Filings, Patterns, Fabrics and Related Topics in Discrete Geometry

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 11/2, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen

Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 11/2, 8520 Erlangen

Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Topologische Perturbationen beim globalen numerischen Studium nichtlinearer Eigenwert- und Verzweigungsprobleme*)

H.-O. Peitgen**), Bremen

Inhalt

- I Einleitung
 - Abbildungsgrad und Kontinuitätsmethoden
 - Pontryagin-Konstruktion
- II Die $\bar{\epsilon}$ -Perturbation und eine PL-Entfaltung
 - Globale PL-Entfaltung
 - Aspekte der Numerik
 - Prinzipien von Leray-Schauder und Krasnosel'skii-Rabinowitz
- III Beschränkte und unbeschränkte Perturbationen
 - Bifurkation
 - Multiplizität
 - Elliptische Randwertprobleme mit parameterabhängiger Forcierung und parameterabhängigen Randwerten
 - d -Homotopie und Entfaltung von Bifurkationen
 - Spezielle Perturbationen
 - Kegelinvariante Operatoren
- IV Perturbationen in Gegenwart von numerischen Artefakten
 - Beispiel von Pohozaev und die Gelfand-Gleichung
 - Artefakte bei asymptotisch linearen, elliptischen Eigenwertproblemen

I Einleitung

Seit der bahnbrechenden Arbeit von J. L e r a y und J. P. S c h a u d e r [43] aus dem Jahre 1934 ist die sogenannte Leray-Schaudersche Kontinuitätsmethode eines der nützlichsten abstrakten Prinzipien beim Studium der Existenz von Lösungen linearer und nichtlinearer Operatorgleichungen geworden (Integralgleichungen, Differentialgleichungen, Probleme der Kontrolltheorie, variationelle Ungleichungen, etc.). Tatsächlich wird die Methode in vielen Varianten beschrieben. Bekanntest ist die Methode als

(1.1) *Homotopieinvarianz* des Leray-Schauder-Grades.

*) Hauptvortrag auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Dortmund, 1980.

**) Das Manuskript entstand, während der Autor einen von der Stiftung Volkswagenwerk geförderten Forschungsaufenthalt an der University of Utah in Salt Lake City verbrachte.

Weniger bekannt ist der eigentliche Inhalt des Prinzips in der Form

(1.2) Existenz eines *globalen Kontinuums* von Lösungen.

Letzteres ist aus heutiger Sicht eine Konsequenz aus (1.1) und einem grundlegenden topologischen Lemma, welches in vielen Arbeiten aus dem Gebiet der nicht-linearen Analysis G. T. W h y b u r n (vgl. [59]) zugeschrieben wird, tatsächlich aber schon K. K u r a t o w s k i [42] bekannt war (vgl. [2]):

(1.3) **Lemma** Sei K ein kompakter, metrischer Raum und seien $A, B \subset K$ abgeschlossen und nichtleer. Dann gilt:

- entweder gibt es in K ein Kontinuum C mit $A \cap C \neq \emptyset \neq B \cap C$,
- oder es gibt abgeschlossene Teilmengen $K_A, K_B \subset K$ mit

$$K_A \cap K_B = \emptyset \text{ und } K_A \cup K_B = K \text{ und } A \subset K_A, B \subset K_B.$$

Einen Beweis findet man etwa in [2, 23, 42, 74]. Genauer besagt das **T h é o r è m e F o n d a m e n t a l** in [43]:¹⁾

(1.4) **Theorem** (Leray-Schauder). Sei E ein Banachraum und $\Omega \subset E \times [a, b]$ eine offene und beschränkte Teilmenge. Es sei $H : \text{cl } \Omega \rightarrow E$ eine kompakte stetige Abbildung ($\text{cl} = \text{closure}$) und es bezeichne

$$\Omega_\lambda := \{u \in E : (u, \lambda) \in \Omega\} \text{ und } H_\lambda := H(\cdot, \lambda).$$

Ferner sei $S = \{(u, \lambda) \in \text{cl } \Omega : H(u, \lambda) = u\}$.

Falls $S \cap \partial\Omega = \emptyset$ (a priori Schranken) und $\deg(h_a, \Omega_a, 0) \neq 0$ (Lösungseigenschaft), $h_\lambda := \text{id} - H_\lambda$ so gilt:

(1.5) $S \cap \Omega_b \times \{b\} \neq \emptyset$

(1.6) Senthält ein Kontinuum C , welches S_a mit S_b verbindet ($S_\lambda = S \cap \Omega_\lambda \times \{\lambda\}$).

Dabei bezeichnet \deg den Leray-Schauder-Grad eines kompakten Vektorfeldes. Charakterisiert man den Abbildungsgrad axiomatisch, wie es H. A m a n n und S. W e i s s [10] getan haben, durch die fundamentalen Eigenschaften

- N o r m a l i s i e r u n g
- A d d i t i v i t ä t
- H o m o t o p i e i n v a r i a n z

so folgt (1.5) unmittelbar aus der sogenannten *verallgemeinerten Homotopieinvarianz* (vgl. (2.18))

(1.7) $\deg(h_\lambda, \Omega_\lambda, 0) \equiv \text{konstant}$ (vgl. (1.11)),

die ihrerseits eine einfache Konsequenz aus den Axiomen ist. Daß man tatsächlich aber die Lösungen von $H(u, b) = u$ aus den Lösungen von $H(u, a) = u$ durch „Fortsetzung entlang eines Kontinuums“ erhalten kann (vgl. Bild 1), ist eine wesentlich über (1.5) und (1.7) hinausgehende Folgerung, die zu erstaunlichen Konsequenzen führt. Beispielsweise kann man das heute viel beachtete globale Verzweigungs-

¹⁾ In [43] wird zusätzlich noch vorausgesetzt, daß $h_a^{-1}(0) \cap \Omega_a$ aus endlich vielen Lösungen besteht. Diese Voraussetzung ist jedoch überflüssig.

prinzip von P. R a b i n o w i t z [58] in gewisser Weise als Konsequenz aus (1.6) sehen. Andere Konsequenzen besprechen wir in III. und IV.

In letzter Zeit hat sich gezeigt, daß das Prinzip (1.4) Spezialfall einer großen Familie abstrakter Kontinuitätsprinzipien ist (vgl. [7]). In Bild 2 skizzieren wir die Beweisidee für (1.6) als Folgerung aus (1.3) und (1.7): Gäbe es kein Kontinuum C mit (1.6), so bezeichne $K = S$, $A = S_a$ und $B = S_b$. Aus (1.3) folgt dann, es gibt $K_A, K_B \subset K$ mit

$$K_A \cap K_B = \emptyset \quad \text{und} \quad A \subset K_A, B \subset K_B \quad \text{und} \quad K = K_A \cup K_B.$$

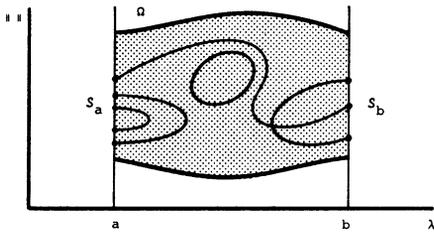


Bild 1

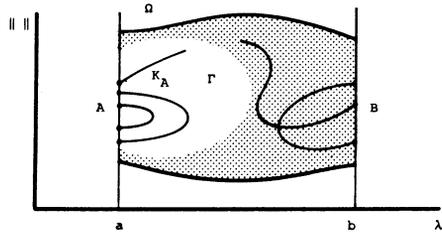


Bild 2

Dann kann man aber $\Gamma \subset E \times [a, b]$ offen und beschränkt so wählen, daß gilt:

$$K_A \subset \Gamma, \quad S \cap \partial\Gamma = \emptyset, \quad \Gamma_b = \emptyset.$$

Aus (1.7) folgt nun $d_a = \deg(h_a, \Omega_a, 0) = \deg(h_a, \Gamma_a, 0) = \deg(h_b, \Gamma_b, 0) = d_b$. Nach Voraussetzung ist $d_a \neq 0$ und wegen $\Gamma_b = \emptyset$ gilt $d_b = 0$. Dies ist ein Widerspruch. In II werden wir zeigen, daß (1.4) *numerisch konstruktiv* interpretiert werden kann. Dies ist insofern verblüffend, als der gerade vorgestellte Beweis indirekt ist. Es ist offensichtlich, daß man zu (1.4) verschiedene Varianten angeben kann, etwa die in Bild 3 illustrierte: ist $\deg(h_a, U, 0) \neq 0$ und $H(u, \lambda) \neq u$ auf $\partial\Omega \setminus (U \cup V)$, so gibt es ein Kontinuum von U nach V (hier ist $\partial\Omega$ in der Topologie von $E \times R$ zu bilden, $h_\lambda := \text{id} - H_\lambda$).

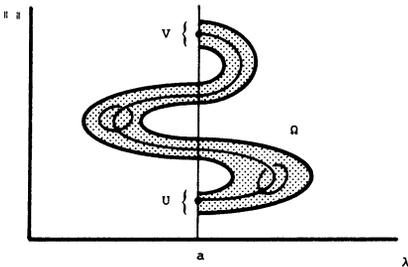


Bild 3

Das topologische Kondensat des 1971 von P. R a b i n o w i t z [58] vorgestellten globalen Verzweigungsprinzips ist das folgende

(1.8) **Theorem (Rabinowitz).** Sei $h : R^n \times R \rightarrow R^n$ stetig und $h(0, \lambda) = 0$ für alle $\lambda \in R$. Sei $[a, b]$ ein Intervall und 0 isolierte Lösung für $\lambda = a, b$ mit

$$d_1 = \deg(h_a, B_\epsilon(0), 0) \neq \deg(h_b, B_\epsilon(0), 0) = d_2$$

Bezeichnet $S = \text{cl} \{(x, \lambda) : h(x, \lambda) = 0 \text{ und } x \neq 0\} \cup \{0\} \times [a, b]$ und $C \subset S$ die Zusammenhangskomponente, die $\{0\} \times [a, b]$ enthält, so gilt:

- entweder C ist unbeschränkt in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$,
- oder $C \cap \{0\} \times (\mathbb{R} \setminus [a, b]) \neq \emptyset$.

$$(B_\epsilon(x) := \{y : \|y - x\| < \epsilon\})$$

Wir wollen aufzeigen, wie dieses Resultat mit der Leray-Schauderschen Kontinuitätsmethode verwandt ist. Dazu fixieren wir eine Klasse U von beschränkten Mengen in \mathbb{R}^{n+1} :

$\Omega \in U$ falls gilt:

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_\infty$$

mit $\Omega_0 = B_\epsilon(0) \times [a, b]$ mit $\epsilon > 0$ genügend klein (d. h. $B_\epsilon(0) \times \{a\}$ isoliert die Lösung $(0, a)$ bzw. $B_\epsilon(0) \times \{b\}$ isoliert die Lösung $(0, b)$)

Ω_∞ offen und beschränkt in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$

Ein typisches $\Omega \in U$ ist in Bild 4 dargestellt: ($D_\lambda = B_\epsilon(0) \times \{\lambda\}$).

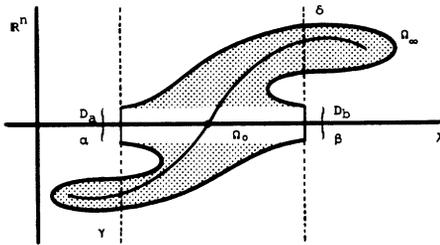


Bild 4

Offensichtlich ist Ω_λ offen in \mathbb{R}^n für alle λ und Ω ist beschränkt in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit

$$K = h^{-1}(0) \cap \text{cl } \Omega \text{ und mit}$$

$$A = \{0\} \times [a, b] \quad B = h^{-1}(0) \cap \partial\Omega \setminus (B_\epsilon(0) \times \{a\} \cup B_\epsilon(0) \times \{b\})$$

Wir wollen zeigen: es gibt ein Kontinuum von A nach B. Im Sinne von (1.3) ist zunächst zu zeigen, daß $B \neq \emptyset$. Wäre aber $B = \emptyset$ und bezeichnen wir mit (vgl. Bild 4)

$$\alpha = \deg(h_a, B_\epsilon(0), 0) \quad \beta = \deg(h_b, B_\epsilon(0), 0)$$

$$\gamma = \deg(h_a, \Omega_a \setminus \overline{(B_\epsilon(0) \times \{a\})}, 0) \quad \delta = \deg(h_b, \Omega_b \setminus \overline{(B_\epsilon(0) \times \{b\})}, 0)$$

so gilt wegen der verallgemeinerten Homotopieinvarianz (1.7)

$$(1.9) \quad \left. \begin{array}{l} \alpha + \gamma = \beta + \delta \\ \gamma = \delta (= 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \beta$$

im Widerspruch zu der Voraussetzung $\alpha \neq \beta$. Damit können wir (1.3) anwenden. Gäbe es nun kein Kontinuum von A nach B, so wäre

$$K = K_A \cup K_B \quad \text{mit} \quad K_A \cap K_B = \emptyset \quad \text{und} \quad A \subset K_A, B \subset K_B.$$

Dann gäbe es wieder ein $\Gamma \in \mathcal{U}$ mit $K_A \subset \Gamma$, $\partial\Gamma \cap h^{-1}(0) = \{(0, a), (0, b)\}$, $K_B \cap \Gamma = \emptyset$. Tatsächlich hätte man wieder eine Situation wie in Bild 4 und käme mit den gleichen Argumenten wie oben zu einem Widerspruch zu $\alpha \neq \beta$. Die Behauptung in (1.8) zeigt man nun indirekt: angenommen, C ist beschränkt und $C \cap \{0\} \times \mathbb{R} \setminus [a, b] = \emptyset$. Dann gibt aber C Anlaß zu einer Menge $\Omega \in \mathcal{U}$ mit $B = \emptyset$, und dies war bereits zum Widerspruch geführt worden. Die Verwandtschaft zwischen (1.4) und (1.8) besteht aber darin, daß in beiden Fällen die von Leray und Schauder erkannte Eigenschaft (1.7) stets ein Kontinuum von A nach B garantiert. In II werden wir zeigen, daß (1.8) ebenfalls *numerisch konstruktiv* interpretiert werden kann.

In der Numerik nichtlinearer Gleichungen sind Kontinuitätsmethoden (dort auch häufig Einbettungsmethoden genannt) ebenfalls seit langem bekannt. Dort haben sie allerdings durchweg eher einen lokalen Charakter (vgl. etwa Prädiktor-Korrektor-Methoden [18, 39, 64]). In jüngster Zeit sind allerdings diese eher klassischen Methoden derart verfeinert worden, daß sie mit gewissen Einschränkungen auch für die globale numerische Analyse von Kontinua in $h^{-1}(0)$ ($h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$) geeignet sind. Die Einschränkungen sind fast immer durch Singularitäten in $h^{-1}(0)$ gegeben (Umkehrpunkte, Verzweigungspunkte, . . .). Es ist wahrscheinlich das Verdienst von B. C. Eaves und H. Scarf [21, 22], numerische Kontinuitätsmethoden in einen allgemeinen topologischen Kontext gehoben zu haben. Dabei ist eine Anlehnung an J. Milnor [44] unverkennbar. Für eine Übersicht verweisen wir auf die sehr empfehlenswerten Übersichtsartikel von E. L. Allgower und K. Georg [5], E. L. Allgower [4] und H. J. Wacker [72]. Nimmt man einen mehr grundsätzlichen Standpunkt ein, muß man mindestens zwei Hauptentwicklungen unterscheiden: Methoden, die auf grundlegenden Eigenschaften der

- C^∞ -Kategorie, bzw. der
- PL-Kategorie (PL = Piecewise Linear)

aufbauen. Wir wollen dies etwas präzisieren, indem wir zunächst einige elementare und wohlbekannte Eigenschaften von Lösungsmannigfaltigkeiten in der C^∞ -Kategorie zusammentragen, um sodann, in Anlehnung an diese, die Verhältnisse in der PL-Kategorie zu beschreiben, die weniger bekannt sind. Es sei M eine kompakte $(n + 1)$ -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit (eventuell mit Rand ∂M) und $h : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^∞ -Abbildung. Wir interessieren uns für Lösungen der Gleichung

$$h(z) = 0, \quad z \in M.$$

Ist $0 \in \mathbb{R}^n$ ein regulärer Wert von h und $h|_{\partial M}$, so folgt aus dem Satz über implizite Funktionen: (0 regulär $\iff dh(z)$ max. Rang, $h(z) = 0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0 = h^{-1}(0) \text{ ist eine kompakte 1-dimensionale} \\ C^\infty\text{-Mannigfaltigkeit mit } \partial L_0 = \partial M \cap L_0. \end{array} \right.$$

Dies bedeutet für die Berechenbarkeit von L_0 natürlich eine ideale Situation, denn aus dem Satz über die Klassifikation von 1-Mannigfaltigkeiten [44] ist dann L_0 bis auf Diffeomorphie eine endliche Vereinigung von

Kopien von S^1 und $[0, 1]$ (vgl. Bild 5). Man würde etwa eine Parametrisierung nach der Bogenlänge wählen und die Kontinua mit einem Prädiktor-Korrektor-Verfahren [18, 39, 64] berechnen. Typisch für numerische Approximationen von nichtlinearen Eigenwertproblemen ist jedoch, daß $0 \in \mathbb{R}^n$ bestenfalls lokal (bezogen auf M) ein regulärer Wert ist, d. h. man hat beispielsweise Verzweigungen in

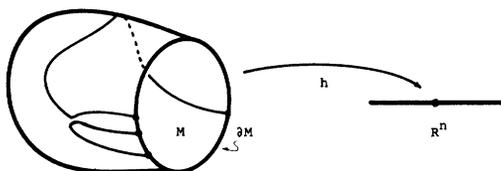


Bild 5

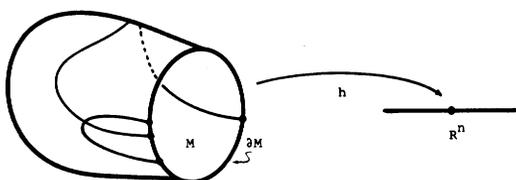


Bild 6

$h^{-1}(0)$ (vgl. Bild 6). Tatsächlich ist jedoch die Situation in Bild 5 generisch, d. h. als Folge des Satzes von Brown-Sard (z. B. [14]) trifft man „mit Wahrscheinlichkeit 1“ ein $\bar{e} \in \mathbb{R}^n$, \bar{e} nahe 0, so daß \bar{e} ein regulärer Wert von h und $h|_{\partial M}$ ist. Diese Tatsache machen sich moderne Kontinuitätsmethoden zunutze, die z. B. auf [1, 32, 40] zurückgehen (vgl. [4, 5, 27]). In dieser Sicht drängt sich eine Parallele zu einer der elegantesten Einführungen des Brouwer-Grades auf, die auf L. S. Pontryagin [55] zurückgeht (vgl. [8, 23, 44, 53]), und deren wesentlichen Inhalt wir zunächst zusammenfassen wollen: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge und

$$f : (\text{cl } U, \partial U) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

eine C^∞ -Abbildung. Sei $0 \in \mathbb{R}^n$ ein regulärer Wert. Man definiert

$$(1.10) \quad \text{deg}(f, U, 0) := \sum_{x \in f^{-1}(0)} \text{sign}(\det(f'(x))).$$

Ist $0 \in \mathbb{R}^n$ kein regulärer Wert, so findet man nahe bei 0 nach dem Satz von Brown-Sard einen regulären Wert \bar{e} und definiert

$$\text{deg}(f, U, 0) := \text{deg}(f - \bar{e}, U, 0).$$

Um allerdings die Unabhängigkeit dieser Definition von \bar{e} zu beweisen, benötigt man bereits die Homotopieinvarianz:

$$(1.11) \quad \text{deg}(h_\lambda, \Omega_\lambda, 0) \equiv \text{konstant},$$

falls $h : \text{cl } \Omega \subset \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h^{-1}(0) \cap \partial\Omega = \emptyset$, 0 regulärer Wert von $h|_{\Omega_0}$ und von $h|_{\Omega_1}$. Eine Idee für die Gültigkeit von (1.11) vermittelt Bild 7 ($\partial\Omega$ in der Topologie von $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$). Man stellt fest, daß je zwei Elemente der endlichen Menge $h_0^{-1}(0) \cup h_1^{-1}(0)$ durch genau eine orientierte glatte 1-Mannigfaltigkeit vom Typ $[0, 1]$ verbunden sind. Ist $m \subset h^{-1}(0)$ eine solche typische Mannigfal-

tigkeit, so gilt:

$$\partial m = \{(x, a), (y, b)\} \text{ mit } a, b \in \{0, 1\}.$$

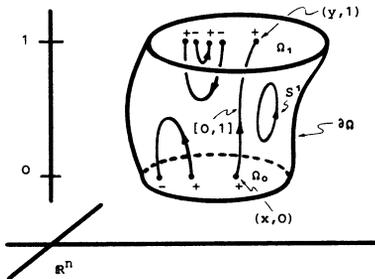


Bild 7

Nun hat man zwei Fälle:

$$(1.12) \left\{ \begin{array}{l} (a = 0 \text{ und } b = 1). \text{ Dann gilt:} \\ \text{sign}(\det(h'_0(x))) = \text{sign}(\det(h'_1(y))) \\ (a = 0 \text{ und } b = 0 \text{ oder } a = 1 \text{ und } b = 1). \text{ Dann gilt:} \\ \text{sign}(\det(h'_i(x))) + \text{sign}(\det(h'_i(y))) = 0 \text{ (} i = 0 \text{ oder } i = 1 \text{)}. \end{array} \right.$$

Mit (1.12) und (1.10) folgt dann sofort (1.11). Wir sehen aber auch, daß (1.11) zu einer „konstruktiven“ Sicht der Leray-Schauderschen Kontinuitätsmethode Anlaß gibt: ist $\text{deg}(h_0, \Omega_0, 0) \neq 0$ und $h^{-1}(0) \cap \partial\Omega = \emptyset$, so muß es eine 1-Mannigfaltigkeit vom Typ $[0, 1]$ geben, die Ω_0 und Ω_1 verbindet. Andernfalls wäre nämlich $\text{deg}(h_0, \Omega_0, 0) = 0$, denn Lösungsmannigfaltigkeiten, die in Ω_0 beginnen und auch dort enden, tragen zu $\text{deg}(h_0, \Omega_0, 0)$ nur den Wert 0 bei (vgl. (1.12)). Die in (1.7) formulierte Homotopieeigenschaft ($h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig) erhält man somit aus

$$(1.13) \left\{ \begin{array}{l} \text{Glättung von } h \text{ (Friedrichs-Mollifier)} \\ \text{Satz von Brown-Sard} \\ \text{Satz über implizite Funktionen} \\ \text{Satz über die Klassifikation von 1-Mannigfaltigkeiten} \end{array} \right.$$

Die üblichen Eigenschaften des Brouwer-Grades kann man dann als einfache Konsequenzen aus (1.7) erhalten (vgl. [53]).

Wir wollen nun PL-Kontinuitätsmethoden einleitend in Anlehnung an den oben diskutierten elementaren C^∞ -Kontext beschreiben. Absicht dieser Darstellung ist es, – einerseits aufzuzeigen, daß aus dieser Sicht PL- und C^∞ -Kontinuitätsmethoden auf einer gemeinsamen Idee beruhen, und

– andererseits dem mit dem C^∞ -Kontext vertrauten Leser einen „glatten“ Einstieg in die reichlich technische und verwirrende Literatur von PL-Methoden zu geben.

Diese Darstellung entspricht weniger der historischen Entwicklung der PL-Methoden. Wollte man mehr den historischen Ursprüngen Rechnung tragen, wäre eine Darstellung attraktiver, die das fundamentale Lemma von E. Sperner [67] von 1928 in den Mittelpunkt stellt (vgl. [46, 63]). Hier ziehen wir es vor, die Darstellung entlang (1.13) zu entwickeln und einen bemerkenswerten neuen Zugang zum Brouwerschen Abbildungsgrad zu diskutieren (vgl. [53]). Indem

wir die Eigenschaften des Abbildungsgrades benutzen, können wir zunächst L. E. J. Brouwers Definition bis zu einem gewissen Punkt „rückwärts“ lesen: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und

$$f : (cl U, \partial U) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

eine stetige Abbildung. Dann ist $\deg(f, U, 0)$ wohldefiniert. Sei nun T eine Triangulierung des \mathbb{R}^n und ($T^n = n$ -Gerüst von T)

$$U_T := \bigcup_{\sigma \in T^n \text{ und } \sigma \subset cl U} \sigma,$$

d. h. U_T ist selbst eine homogen n -dimensionale kompakte Menge, die von $T_U := T|_{U_T}$ trianguliert wird.

Nun bezeichne f_T die durch T und f eindeutig definierte PL-Abbildung, die mit f auf den Ecken von T übereinstimmt. Bezeichnet $\text{mesh}(T) = \delta$ die Maschenweite von T , so ist natürlich

$$\|f - f_T\| < \epsilon(\delta), \quad \text{wo } \epsilon \rightarrow 0 \text{ mit } \delta \rightarrow 0.$$

Also gilt:

$$f_T^{-1}(0) \cap cl U \setminus \overset{\circ}{U}_T = \emptyset$$

(\circ = offener Kern), falls nur δ genügend klein ist. Damit gilt

$$\deg(f, U, 0) = \deg(f_T, \overset{\circ}{U}_T, 0)$$

als Folge der Homotopieinvarianz und Additivität des Abbildungsgrades. Ist nun $0 \in \mathbb{R}^n$ ein regulärer Wert für f_T im PL-Sinne, d. h.

$$f_T^{-1}(0) \cap \partial \sigma = \emptyset \quad \text{für alle } \sigma \in T_U^n$$

so gilt wegen der Additivitätseigenschaft:

$$\deg(f_T, \overset{\circ}{U}_T, 0) = \sum_{\sigma \in T_U^n} \deg(f_T, \overset{\circ}{\sigma}, 0)$$

Nun bedeutet offensichtlich $0 \in f_T(\sigma)$ und $0 \notin f_T(\partial\sigma)$, daß $f_T|_{\sigma}$ ein affin-linearer Isomorphismus ist, der etwa gegeben wird durch

$$f_T|_{\sigma} = A_{\sigma} + b_{\sigma}$$

mit $A_{\sigma} \in GL(\mathbb{R}^n)$ und $b_{\sigma} \in \mathbb{R}^n$. Definiert man

$$\text{or}(\sigma) := \text{sign}(\det(A_{\sigma})), \text{ falls } 0 \in f_T(\sigma) \text{ und } f_T|_{\sigma} = A_{\sigma} + b_{\sigma},$$

$$\text{so gilt schließlich für } \sigma \in T_U^n \text{ mit } 0 \in f_T(\sigma)$$

$$\deg(f_T, \overset{\circ}{\sigma}, 0) = \text{or}(\sigma),$$

und damit

$$(1.14) \quad \deg(f, U, 0) = \sum_{\sigma \in T_U^n \text{ und } 0 \in f_T(\sigma)} \text{or}(\sigma)$$

Die Identität (1.14) ist ein PL-Analogon zu (1.10) und setzt zunächst noch die Annahme voraus, daß 0 ein regulärer Wert für f_T ist. L. E. J. Brouwer [15] überwand diese Annahme durch gewisse (nicht numerisch konstruktive) Approx-

mationsschritte. In Abweichung von Brouwer werden wir die Annahme in II so ausräumen, daß wir in konstruktiver Weise beliebig nahe bei 0 einen regulären Wert $\bar{\epsilon} \in \mathbb{R}^n$ angeben und uns dann auf die Betrachtung von $f_T - \bar{\epsilon}$ zurückziehen. Dazu sei

$$\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

die Kurve

$$\gamma(t) := (t, t^2, \dots, t^n).$$

Für $0 < \epsilon \ll 1$ benutzen wir auch die Abkürzung

$$\bar{\epsilon} = \gamma(\epsilon).$$

Wir werden sehen (vgl. (2.14)), daß es ein $\epsilon_0 = \epsilon_0(f, U, T) > 0$ gibt, so daß

$$0 \text{ ein regulärer Wert (im PL-Sinne) für } f_T - \bar{\epsilon} \text{ für alle } 0 < \epsilon < \epsilon_0$$

ist. Definiert man nun

$$S_T^f(U) := \{\sigma \in T_U^n : \bar{\epsilon} \in f_T(\sigma) \text{ für alle } 0 \leq \epsilon < \epsilon_0\}$$

so gilt schließlich das Lemma ($\sigma \in S_T^f(U)$ impliziert wieder, daß $f_{T|\sigma}$ ein affiner Isomorphismus ist)

$$(1.15) \text{ Lemma } \deg(f, U, 0) = \sum_{\sigma \in S_T^f(u)} \text{or}(\sigma).$$

Diese „endliche“ Darstellung des Brouwer-Grades ist insofern interessant, als sie gültig ist ohne jede Glattheits- und Regularitätsannahme und direkt zur Definition benutzt werden kann. Dieses Programm ist in [53] durchgeführt. In der Diskussion des C^∞ -Kontextes wurde deutlich, wie Abbildungsgrad und C^∞ -Kontinuitätsmethoden „zusammenspielen“. Dieses Zusammenspiel kann allerdings erst erkannt werden, wenn man in der generischen Situation ist. Die Richtigkeit von (1.15) ohne Regularitätsannahmen deutet an, daß die Wechselwirkung von PL-Kontinuitätsmethoden und Abbildungsgrad ebenfalls von Generizitätsannahmen frei ist. Darin liegt mindestens eine der überragenden Eigenschaften von PL-Methoden. In dieser Tatsache liegt auch die Erklärung für die oft beobachtete „numerische Stabilität“ von PL-Kontinuitätsmethoden: während C^∞ -Kontinuitätsmethoden in ihrem „Verhalten“ wesentlich von C^∞ -Information geprägt sind, die ihrerseits sehr sensitiv gegenüber kleinen Störungen ist, sind PL-Kontinuitätsmethoden in ihrem „Verhalten“ eher durch topologische Information geprägt, die durch den Abbildungsgrad beschrieben wird, und die ihrerseits robust gegenüber kleinen Störungen ist. Eine Einführung in die Geschichte des Abbildungsgrades gibt der Artikel von H. W. Sieberg [66].

II Die $\bar{\epsilon}$ -Perturbation und eine PL-Entfaltung

Nichtlineare Eigenwert- und Verzweigungsprobleme numerisch von einem abstrakten Standpunkt zu studieren bedeutet, 1-Parameterfamilien

$$h : \text{cl } \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad h(x, \lambda) = 0$$

zu untersuchen. Dabei stellt man sich vor, daß die stetige Abbildung h eine Diskretisierung eines vorgelegten nichtlinearen Eigenwertproblems

$$H : \text{cl } \Gamma \subset E \times \mathbf{R} \rightarrow E, \quad H(u, \lambda) = 0, \quad E - \text{norm. Raum}$$

ist. Wir stellen uns die Aufgabe, die Lösungen von $h(x, \lambda) = 0$ global zu studieren, d. h. $h^{-1}(0)$ in Abhängigkeit von λ zu verstehen. Diese Zielsetzung ist nicht nur eine bloße mathematische Herausforderung, sondern insbesondere auch von konkreter praktischer Relevanz. In naturwissenschaftlichen Anwendungen wird der reelle Parameter λ häufig mit einem externen Kontrollparameter (Temperatur, Lichtintensität, . . .) identifiziert und man fragt nach den qualitativen Änderungen des Systemzustandes u bei globaler Änderung von λ . Bei diesem Standpunkt ist das (lokale) Problem, eine einzige Lösung u (bei festem λ) möglichst genau und effizient numerisch zu berechnen, von sekundärer Bedeutung. Vielmehr ist man an der „ λ -Dynamik“ der Lösungen interessiert. Dieses Problem erscheint zunächst nur als geringfügige Erweiterung der klassischen (lokalen) Aufgabe. Deshalb soll zunächst herausgearbeitet werden, welche Erweiterung der Probleme sich in der globalen Fragestellung verbirgt. Die zwei Hauptprobleme einer globalen Analyse von $H^{-1}(0)$ scheinen zu sein:

- (2.1) Studium der Approximationseigenschaften von $h^{-1}(0)$ im Hinblick auf $H^{-1}(0)$.
- (2.2) Methoden und Algorithmen zur numerischen Berechnung von $h^{-1}(0)$.

Im Hinblick auf (2.1) kennt man inzwischen eine Vielzahl von Beispielen, die dadurch charakterisiert sind, daß sich $H^{-1}(0)$ selbst bei beliebig feiner Diskretisierung sowohl metrisch als auch strukturell erheblich von $h^{-1}(0)$ unterscheidet. Hierfür geben wir in IV einige Belege. Prinzipiell verbirgt sich in (2.2) neben den offensichtlichen Problemen im Zusammenhang mit

- der Berechnung einer gegebenen Komponente in $h^{-1}(0)$,
- der Auflösung von Singularitäten (Umkehrpunkte, Verzweigungspunkte),
- der Aufgabe, „alle“ Komponenten in $h^{-1}(0)$ zu finden,
- der Notwendigkeit, lokale Genauigkeit gegen globale Effizienz auszubalancieren,

zusätzlich ein weiteres Approximationsproblem vom Typ (2.1), welches allerdings noch unzugänglicher erscheint. Tatsächlich gibt es ja in der (klassischen) Numerik bereits eine Vielzahl von Methoden (etwa die Klasse der Prädiktor-Korrektor-Verfahren [19, 39, 64]), die geeignet sind, (2.2) teilweise zu behandeln. Wir stellen uns nun vor, daß $h^{-1}(0)$ mit irgendeinem Algorithmus berechnet worden ist. Wir bezeichnen die Gesamtheit der so numerisch gewonnenen Lösungen mit L . Natürlich ist i. A. L nicht identisch mit $h^{-1}(0)$, bestenfalls ist es „nahe“ an $h^{-1}(0)$. Es ist aber nicht offensichtlich, was „nahe“ bedeuten soll. Man würde zunächst an eine metrische Präzisierung denken, stellt aber sogleich fest, daß man gerade im Hinblick auf die Frage nach der „ λ -Dynamik“ mindestens genauso an einer Präzisierung in einem strukturellen Sinne interessiert ist. Wir stellen uns nun vor, es gäbe ein Problem $k_\epsilon(x, \lambda) = 0$, welches von einem Parameter $\epsilon \in \mathbf{R}^m$ abhinge und welches L gerade als exakte Lösungsmenge hätte, $L = L_\epsilon = k_\epsilon^{-1}(0)$. Dieser Vorstellung liegt die Annahme zugrunde, daß man einerseits alle Fehler (systematische

Fehler, Rundungsfehler, . . .) parametrisch erfassen könne und andererseits mit genügend großem Aufwand ($\epsilon \sim 0$) $h^{-1}(0)$ prinzipiell exakt berechnen könne. In diesem bereits sehr optimistischen Ansatz stellen sich somit die folgenden Probleme:

(2.3) Identifikationsproblem (bestimme k_ϵ aus L)

(2.4) Approximationsproblem (untersuche $k_\epsilon^{-1}(0)$ mit $\|\epsilon\| \rightarrow 0$)

Es ist aber offensichtlich, daß man (2.4) kaum ohne eine Lösung des Problems (2.3) behandeln kann. Nun mag man einwenden, dies sei eben ein prinzipielles Problem der Numerik (Fehleranalyse). Es scheint aber angemessen, darauf hinzuweisen, daß die hier angesprochenen Probleme mindestens in zweierlei Hinsicht von einer üblichen ‚a posteriori‘ Fehleranalyse abweichen:

- einerseits weiß man, daß i. A. $L_\epsilon = k_\epsilon^{-1}(0)$ sowohl metrisch als auch strukturell äußerst empfindlich von kleinen Änderungen in ϵ abhängen kann¹⁾, und
- andererseits ist es weder begrifflich noch methodisch offensichtlich, wie man den Prozeß

$$L_\epsilon \rightarrow h^{-1}(0) \quad \text{mit } \|\epsilon\| \rightarrow 0$$

beschreiben soll.

Der Erfolg der klassischen Numerik in dieser Hinsicht, der auf der Bewältigung von (lokalen) Fehleranalysen unter Verwendung von funktionalanalytischen Methoden und Begriffen beruht, mag hier eine falsche Erwartung nahelegen. Dort (in der lokalen Analyse) ist das Objekt vielleicht eine Funktion, die eine Differentialgleichung löst, die ein Element eines Vektorraumes ist, gegen die eine Folge von approximierenden Funktionen konvergiert, etc. Hier ist das Objekt L_ϵ eine (i. A. unbeschränkte) Menge, die $h^{-1}(0)$ approximieren soll. Da man neben den metrischen Approximationseigenschaften mindestens auch an strukturellen interessiert ist („ λ -Dynamik“), stellt man fest, daß die Funktionalanalysis als begrifflicher Hintergrund nicht ausreicht. Hingegen ist das strukturell aufgefaßte Problem der „Mengenkonvergenz“ in der algebraischen Topologie gut bekannt. Beispielsweise gründet sich ja bekanntlich die Konstruktion der Čechschen Kohomologietheorie auf die Idee, (komplexe) kompakte topologische Räume durch eine Sequenz von ausgezeichneten „schönen“ Kompakta, den *Nerven* des vorgegebenen Raumes (Polyeder), so zu approximieren, daß die Struktur (Kohomologie) im Limes die gleiche ist, oder vorsichtiger, sich im Limes „stabilisiert“. Tatsächlich haben erste Ansätze (vgl. [2]) gezeigt, daß die Čechsche Theorie in gleichsam natürlicher Weise begrifflich und methodisch geeignet zu sein scheint, den Prozeß $L_\epsilon \rightarrow h^{-1}(0)$ zu behandeln. Die folgende Darstellung der PL-Kontinuitätsmethoden kann als Versuch angesehen werden, in Analogie zur Idee der Čechschen Theorie die prinzipiellen Approximationsprobleme (2.1) und (2.4) anzugehen. Dabei kommt den L_ϵ in gewisser Weise die Bedeutung der Nerven in der Čechschen Konstruktion zu. D. h. den Standpunkt vortragen, das ‚a posteriori‘ Identifikationsproblem dadurch zu eliminieren, daß man ‚a priori‘ $H^{-1}(0)$ bzw. $h^{-1}(0)$ durch eine (parametrisierte)

¹⁾ W. B e y n [11] hat kürzlich gezeigt, daß für eine spezifische numerische Approximation in Abhängigkeit vom Hauptfehlerterm Sekundärverzweigung sowohl aufgelöst als auch reproduziert werden kann (vgl. [73]).

Sequenz von ausgezeichneten „schönen“ Problemen $L_\epsilon = k_\epsilon^{-1}(0)$ approximiert, deren Wahl sich an den folgenden Zielen orientiert:

- (2.5) L_ϵ sei eine Kollektion von Mannigfaltigkeiten,
- (2.6) k_ϵ sei in einfacher Weise algorithmisch zugänglich,
- (2.7) L_ϵ sei „sicher“, „effizient“ und „prinzipiell exakt“ berechenbar,
- (2.8) L_ϵ hänge trivial von ϵ ab,
- (2.9) L_ϵ approximiere $h^{-1}(0)$ metrisch und strukturell.

Wir werden (2.5–2.8) im Detail erläutern. Zu (2.9) werden wir zeigen, wie sich zwei für die nichtlineare Analysis wichtige Eigenschaften von Komponenten in $h^{-1}(0)$

- Existenz globaler Kontinua
- Existenz von globaler Bifurkation

auf L_ϵ vererben. Tatsächlich werden wir zeigen, daß die Leray-Schaudersche Kontinuitätsmethode und das Prinzip von Krasnosel'skii-Rabinowitz in L_ϵ in natürlicher Weise leben, und damit aber auch die Gültigkeit der Prinzipien für $h^{-1}(0)$ erhalten. In diesem Sinne ist das Folgende nicht (nur) als ein nützlicher numerischer Trick anzusehen, sondern als konzeptioneller Versuch, die prinzipiellen Probleme (2.1–2.4) zugänglich zu machen. In diesem Sinne ist die unten beschriebene $\bar{\epsilon}$ -Perturbation eine topologische Perturbation, da ihr Zweck ganz wesentlich darin besteht, das unzugängliche Problem $h^{-1}(0)$ in ein zugängliches und topologisch klar strukturiertes zu verwandeln. Die Wahl von k_ϵ vollzieht sich in zwei Stufen:

(2.10) **Approximation** Sei $h : \text{cl } \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Sei T eine Triangulierung von \mathbb{R}^{n+1} und es bezeichne

$$\Omega_T = \bigcup_{\sigma \in T^{n+1} \text{ und } \sigma \in \text{cl } \Omega} \sigma \quad (\Omega \text{ offen, beschränkt in } \mathbb{R}^{n+1})$$

(T^k bezeichnet das k -Gerüst von T). Damit ist Ω_T eine homogen $(n + 1)$ -dimensionale, triangulierbare, von T triangulierte Menge. Zu h definieren wir die eindeutig gegebene PL-Abbildung h_T (PL = Piecewise Linear) mit

$$h_T : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{für die} \quad h_{T|_{T^0}} = h_{|_{T^0}}. \quad (T^0 = \text{Ecken von } T)$$

Der Übergang von h zu h_T entspricht einer Glättung in der C^∞ -Kategorie. Die metrischen Approximationseigenschaften von h_T bzgl. h sind elementar und offensichtlich. Insbesondere gilt:

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} h^{-1}(0) \cap \partial\Omega = \emptyset \text{ impliziert } h_T^{-1}(y) \cap \text{cl } (\Omega \setminus \Omega_T) = \emptyset \\ \text{für alle } T \text{ mit } \text{mesh}(T) \text{ genügend klein und} \\ \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|y\| \text{ genügend klein} \end{array} \right.$$

(2.12) **Entfaltung** Sei $\bar{\epsilon} := (\epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^n) \in \mathbb{R}^n$. Setze

$$k_\epsilon(x, \lambda) = h_T(x, \lambda) - \bar{\epsilon}.$$

Es gilt: $k_\epsilon^{-1}(0)$ zerfällt auf Ω_T in endlich viele 1-dimensionale PL-Mannigfaltigkei-

ten, die homöomorph zu S^1 bzw. $[0, 1]$ sind. Ist $m_\epsilon \subset k_\epsilon^{-1}(0)$ ein typisches Exemplar, so ist

$$\begin{cases} \partial m_\epsilon = \emptyset, & \text{falls } m_\epsilon \cong S^1 \\ \partial m_\epsilon = m_\epsilon \cap \partial \Omega_T, & \text{falls } m_\epsilon \cong [0, 1] \end{cases}$$

Schließlich sind m_{ϵ_1} und m_{ϵ_2} homöomorph für $0 < \epsilon_1, \epsilon_2 < \epsilon_0 = \epsilon_0(h, \Omega, T)$

Der Übergang von h_T zu $h_T - \bar{\epsilon}$ entspricht der Wahl eines regulären Wertes in der C^∞ -Kategorie (Brown-Sard). Die Homöomorphie $m_{\epsilon_1} \cong m_{\epsilon_2}$ kann als „Stabilisierung“ der Struktur in $k_\epsilon^{-1}(0)$ für $\epsilon \rightarrow 0$ angesehen werden. Konzeptionell und numerisch besteht der Vorteil der PL-Kategorie an dieser Stelle darin, daß man PL-reguläre Werte parametrisiert und universell (d. h. bis auf ϵ_0 unabhängig von h) durch die „Spirale“ $\gamma(\epsilon) = (\epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^n)$ angeben kann. Schließlich werden wir sehen, daß $m_\epsilon \subset k_\epsilon^{-1}(\bar{\epsilon})$ elementar mit Techniken des „Linear Programming“ numerisch berechnet werden kann.

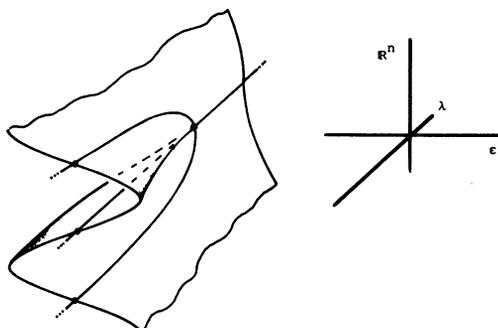


Bild 8

Bild 8 gibt die Entfaltung einer „Pitchfork-Bifurcation“ wieder. Zur präzisen theoretischen und numerischen Charakterisierung von $k_\epsilon^{-1}(0)$ benötigen wir eine geeignete Sprache:

(2.13) **Notation und Definition** *Im folgenden bezeichne $\Omega_T \subset \mathbb{R}^m$ stets eine homogen m -dimensionale, kompakte Menge (z. B. Vereinigung von m -Simplizes im \mathbb{R}^m), die durch eine ‚a priori‘ gegebene Triangulierung T des \mathbb{R}^m trianguliert ist. Mit einer stetigen Abbildung $g : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}^n$ assoziieren wir die durch g und T eindeutig beschriebene PL-Abbildung*

$$g_T : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Wir interessieren uns speziell für die Fälle $m \in \{n, n + 1\}$. Ist $m = n$, so bezeichnen wir in diesem Kapitel g mit f ; ist $m = n + 1$, so schreiben wir statt g stets h .

(1) $0 \in \mathbb{R}^n$ heißt regulärer Wert für g_T , falls

$$g_T^{-1}(0) \cap T^{n-1} = \emptyset.$$

(2) $\sigma \in T^n$ heißt reguläres n -Simplex für g_T , falls $0 \in g_T(\sigma)$ und falls 0 regulärer Wert für $g_{T|\sigma}$ ist.

(3) Sei $\bar{\epsilon} = (\epsilon, \dots, \epsilon^n)$ mit $\epsilon \geq 0$. Ein n -Simplex $\sigma \in T^n$ heißt $\bar{\epsilon}$ -reguläres n -Simplex für g_T , falls es ein $\epsilon_0 > 0$ derart gibt, daß σ reguläres

n -Simplex für $g_T - \bar{\epsilon}$ ist für alle ϵ mit $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$. (Offensichtlich ist dann $g_T(z) = \bar{\epsilon}$ in σ eindeutig lösbar). Die Menge aller $\bar{\epsilon}$ -regulären Simplexes für g_T in Ω_T bezeichnen wir mit $S_T^{\bar{\epsilon}}(\Omega_T)$.

(4) Sei $f : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $\sigma = [a^0, \dots, a^n]$ (= konvexe Hülle der affinen unabhängigen Punkte a^0, \dots, a^n) ein $\bar{\epsilon}$ -reguläres Simplex für f_T . Die Zahl

$$\text{or}(\sigma) := \text{sign det} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^0 & \dots & a^n \end{bmatrix} \text{sign det} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(a^0) & \dots & f(a^n) \end{bmatrix}$$

heißt **O r i e n t i e r u n g** von σ unter f . (Offensichtlich ist $f_T|_{\sigma} = A_{\sigma} + b_{\sigma}$ mit $A_{\sigma} \in GL(\mathbb{R}^n)$ und $b_{\sigma} \in \mathbb{R}^n$ und $\text{or}(\sigma) = \text{sign det}(A_{\sigma}) \in \{-1, +1\}$.)

(5) Sei $h : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $\sigma = [a^0, \dots, a^{n+1}]$ aus T^{n+1} mit $\bar{\epsilon}$ -regulärer Seite $\tau = [a^0, \dots, a^n] \subset \sigma$. Die Zahl

$$\text{ind}_h(\tau \subset \sigma) := \text{sign det} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^0 & \dots & a^{n+1} \end{bmatrix} \text{sign det} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h(a^0) & \dots & h(a^n) \end{bmatrix}$$

heißt **I n d e x** von τ in σ bezüglich h .

Mit diesen Definitionen können wir nun $k_{\epsilon}^{-1}(0)$ vollständig beschreiben.

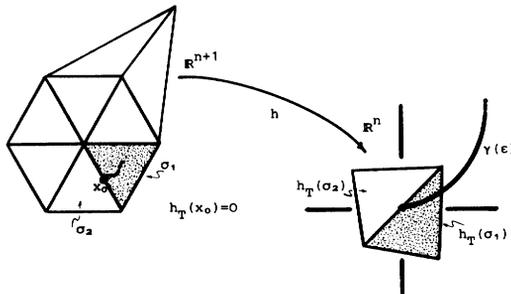


Bild 9

(2.14) **Lemma (PL-Brown-Sard).** Sei $g : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Es gibt ein $\epsilon_0 > 0$, $\epsilon_0 = \epsilon_0(g, \Omega_T, T)$, so daß für alle ϵ mit $0 < \epsilon < \epsilon_0$ gilt:

- (1) $0 \in \mathbb{R}^n$ ist regulärer Wert für $g_T - \bar{\epsilon}$.
- (2) $\sigma \in T^n$ ist ein reguläres n -Simplex für $g_T - \bar{\epsilon}$ (also ein $\bar{\epsilon}$ -reguläres Simplex) falls nur σ ein reguläres n -Simplex für $g_T - \bar{t}$ für ein t mit $0 < t < \epsilon_0$ ist (vgl. Bild 10).

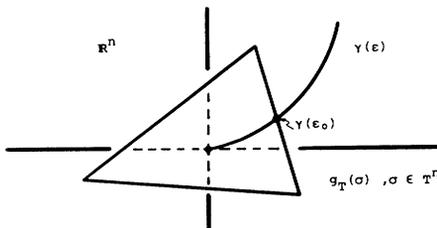


Bild 10

Die grundlegende Eigenschaft (1) folgt sofort aus der Beobachtung: Für jede Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ besteht $H \cap \gamma([0, \infty))$ aus höchstens n Punkten. Diese Tatsache zeigt man mit der *Vandermonde'schen* Determinante. Dann definiert man $\epsilon_0 := \min \{ \epsilon > 0 : \bar{\epsilon} \in g_T(T^{n-1}) \}$.

Die fundamentale Bedeutung C^∞ -regulärer Werte besteht ja darin, daß man mit dem Satz über implizite Funktionen lokale Mannigfaltigkeiten konstruieren kann. Auch dies hat ein PL-Analogon:

(2.15) **Lemma** Sei $h : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und sei $\sigma \in T^{n+1}$ ein $(n+1)$ -Simplex.

Dann gilt:

- entweder $h_T^{-1}(\bar{\epsilon}) \cap \sigma = \emptyset$, $\epsilon > 0$, d. h. σ hat keine $\bar{\epsilon}$ -reguläre n -Seite,
- oder σ hat genau zwei $\bar{\epsilon}$ -reguläre n -Seiten (vgl. Bild 11).

Dieses überraschende (elementare) Resultat gibt Anlaß zu einem kombinatorischen Konstruktionsprinzip in dem n -Gerüst von T . Dieses ist das Herzstück des fundamentalen PL-Algorithmus und ist ebenfalls der Schlüssel zum Verständnis von $k_\epsilon^{-1}(0)$. Deshalb wollen wir ein einfaches Argument geben:

Beweis. Sei $\tau_1 \subset \sigma$ eine $\bar{\epsilon}$ -reguläre n -Seite. Man wähle ϵ_0 gemäß (2.14) und fixiere $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Da $h_{T|\sigma}$ eine affine Abbildung ist, besteht $h_T^{-1}(\bar{\epsilon}) \cap \sigma$ aus einem Geradenstück, welches $\partial\sigma \subset T^n$ in genau einem zweiten Punkt trifft, der innerer Punkt einer damit als $\bar{\epsilon}$ -regulär erkannten Seite ist.

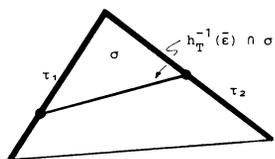


Bild 11

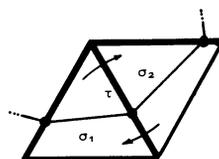


Bild 12

Die approximierende Lösungsmannigfaltigkeit $k_\epsilon^{-1}(0) \cap \sigma$ numerisch zu berechnen, läuft also darauf hinaus, algorithmisch die folgenden beiden Schritte auszuführen (dabei setzt man voraus, daß das $\bar{\epsilon}$ -reguläre Simplex τ_1 gegeben ist):

Pivot-Schritt: Man erzeuge $\sigma \in T^{n+1}$ mit $\tau_1 \subset \partial\sigma$.

LP-Schritt: Man bestimme $\tau_2 \subset \partial\sigma$, die eindeutig bestimmte zweite $\bar{\epsilon}$ -reguläre Seite.

Ist T eine Triangulierung des \mathbb{R}^{n+1} und τ ein n -Simplex von T , so ist τ Seite von genau zwei $(n+1)$ -Simplexes von T (vgl. Bild 12). Diese Alternative kommt einer „Richtungsfestlegung“ gleich.

Wiederholte Anwendung der beiden fundamentalen Schritte erzeugt offensichtlich eine Kette von $\bar{\epsilon}$ -regulären Simplexes in dem n -Gerüst von T , die wir mit

$$\text{ch}(\tau), \quad \tau \text{ ein } \bar{\epsilon}\text{-reguläres Simplex}$$

bezeichnen wollen. Die Abkürzung LP steht für „Linear Programming“. Bisher ist ein $\bar{\epsilon}$ -reguläres Simplex und damit auch seine numerische Berechnung noch explizit von ϵ abhängig. Es gilt aber die folgende Charakterisierung, die die Verbindung zum LP herstellt:

(2.16) **Lemma** Sei $\sigma = [a^0, \dots, a^n]$ ein n -Simplex. σ ist $\bar{\epsilon}$ -regulär für g_T genau dann, wenn die Inverse

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ & \dots & & \\ g(a^0) & & & g(a^n) \end{bmatrix}^{-1} \quad \text{existiert und lexikographisch positiv ist, d. h. das erste von Null verschiedene Element jeder Zeile ist positiv.}$$

Beweis: Man beachte, daß $\bar{\epsilon} \in g_T(\sigma)$ genau dann, wenn es $\lambda_0, \dots, \lambda_n \geq 0$ gibt mit

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ & \dots & & \\ g(a^0) & & & g(a^n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \epsilon \\ \vdots \\ \epsilon^n \end{bmatrix}$$

In dieser Charakterisierung ist die explizite ϵ -Abhängigkeit aufgehoben. Sie ist der Ausgangspunkt für die Formulierung eines fundamentalen Algorithmus zur Ausführung des LP-Schritts. Für die Details und alle wesentlichen numerischen Aspekte (effiziente Erzeugung von T , numerisch stabile und effiziente Ausführung des LP-Schritts) verweisen wir auf [5, 26]. Der fundamentale Algorithmus ist Ausgangspunkt einer Vielzahl von Varianten und Verfeinerungen, denen gemeinsam ist, lokale Genauigkeit und globale Effizienz zu steigern. Einige Literaturhinweise und Stichworte seien gegeben:

- virtuelle Triangulierungen [35]
- Separabilität und Linearität [5, 71]
- Prädiktor-Korrektor-Methoden [61, 62]

Wir können also nunmehr davon ausgehen, daß zu gegebenem $h : \text{cl } \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, T und einem $\bar{\epsilon}$ -regulären Simplex $\tau \in T^n$ eine Kette $ch(\tau) \subset T^n$ existiert. Ist $\sigma \in T^{n+1}$ so gewählt, daß 2 Seiten von σ zu $ch(\tau)$ gehören, so ist $h_T^{-1}(\epsilon) \cap \sigma$ ein Geradenstück. Insgesamt trägt $ch(\tau)$ somit eine 1-dimensionale PL-Mannigfaltigkeit, die prinzipiell bei Vorgabe von τ durch den fundamentalen Algorithmus ($\dots \rightarrow$ Pivot-Schritt \rightarrow LP-Schritt $\rightarrow \dots$) berechenbar ist. In Bild 13 ist angenommen, daß etwa $h_T^{-1}(0)$ eine Verzweigung in T^{n-1} besitzt (a), bzw. eine Entartung in (b) aufweist, d. h. $h_T^{-1}(0) \cap T^{n-1} \neq \emptyset$. Durch Übergang zu $h_T^{-1}(\bar{\epsilon})$ wird die Verzweigung entfaltet bzw. die Entartung aufgehoben. Genauer gilt das folgende

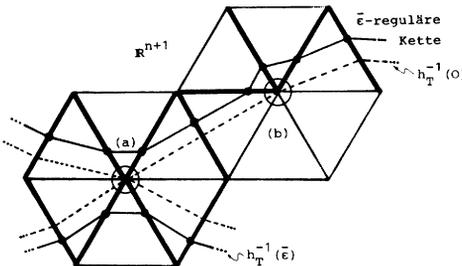


Bild 13 (Ketten $\bar{\epsilon}$ -regulärer n -Simplizes)

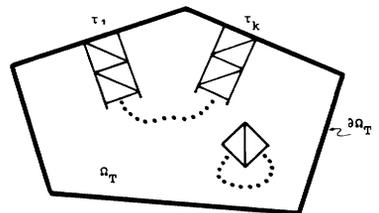


Bild 14

(2.17) **Lemma** Sei $h : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $\Omega_T \subset \mathbb{R}^{n+1}$ beschränkt.

(1) Es gibt ein $\epsilon_0 > 0$, so daß für alle ϵ mit $0 < \epsilon < \epsilon_0$ gilt: $k_\epsilon^{-1}(0) = h_T^{-1}(\bar{\epsilon})$ ist eine endliche Kollektion von kompakten 1-dimensionalen PL-Mannigfaltigkeiten.

(2) Ist $m \subset k_\epsilon^{-1}(0)$ ein Exemplar, so ist $m \cong S^1$ und $\partial m = \emptyset$ oder $m \cong [0, 1]$ und $\partial m = m \cap \partial \Omega_T$ (vgl. Bild 14).

(3) Ist $\tau \in T_\Omega^n$ ein $\bar{\epsilon}$ -reguläres Simplex und $ch(\tau)$ die von τ generierte Kette, so gilt:

(i) $ch(\tau) \cap \partial \Omega_T = \emptyset$ oder

(ii) $ch(\tau) \cap \partial \Omega_T = \{\tau_1, \tau_k\}$ und τ_1 bzw. τ_k ist Seite von genau einem Simplex σ_1 bzw. $\sigma_{k-1} \in T_\Omega^{n+1}$ und $ind_h(\tau_1 \subset \sigma_1) + ind_h(\tau_k \subset \sigma_{k-1}) = 0$.

(4) Gilt zusätzlich $\tau_1, \tau_k \subset \mathbb{R}^n \times \{a\} \cup \mathbb{R}^n \times \{b\}$ mit $a < b$, so gilt:

(i) $or(\bar{\tau}_1) + or(\bar{\tau}_k) = 0$, falls $\tau_1, \tau_k \in \mathbb{R}^n \times \{a\}$ oder $\tau_1, \tau_k \in \mathbb{R}^n \times \{b\}$

(ii) $or(\bar{\tau}_1) = or(\bar{\tau}_k)$, sonst.

Dabei bezeichnet $\bar{\tau} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, a) \in \tau \text{ bzw. } (x, b) \in \tau\}$ (vgl. Bild 15).

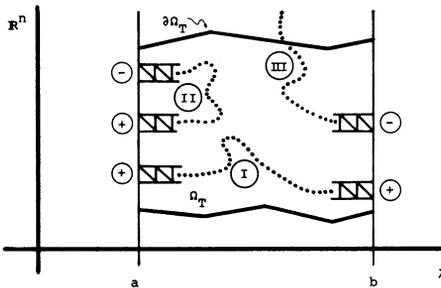


Bild 15

Die Beweise zu (1) und (2) folgen unmittelbar aus (2.15) und den Eigenschaften von T_Ω . Die Beweise zu (3) und (4) folgen elementar aus den Definitionen (2.13) und dem Determinantenentwicklungssatz (vgl. [5, 22, 53]). Lemma (2.17) und Bild 15 legt die folgende Interpretation nahe:

(2.18) **Lemma** Sei $h : cl \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig mit Ω offen und beschränkt in $\mathbb{R}^n \times [a, b]$. Sei (a priori-Schranken) $h^{-1}(0) \cap \partial \Omega = \emptyset$. ($\partial \Omega$ in der Relativtopologie von $\mathbb{R}^n \times [a, b]$). Dann gibt es ein $\delta = \delta(h, \Omega)$, so daß für alle Triangulierungen T des $\mathbb{R}^n \times [a, b]$ mit $mesh(T) < \delta$ gilt:

$$(1) d := \sum_{\tau \in S_{T^a}^h(\Omega_T \cap \mathbb{R}^n \times \{a\})} or(\tau) = \sum_{\tau \in S_{T^b}^h(\Omega_T \cap \mathbb{R}^n \times \{b\})} or(\tau)$$

(Dabei bezeichnet T^a bzw. T^b die auf $\mathbb{R}^n \times \{a\}$ bzw. $\mathbb{R}^n \times \{b\}$ induzierte Triangulierung.)

(2) Ist eine der Summen d in (1) verschieden von Null, so gibt es mindestens $|d|$ 1-dimensionale PL-Mannigfaltigkeiten $m \subset k_\epsilon^{-1}(0)$ mit

$$m_a \neq \emptyset \neq m_b,$$

$$(m_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, \lambda) \in m\})$$

Beweisskizze. Nach (2.11) gibt es $\delta > 0$, so daß für alle T mit $\text{mesh}(T) < \delta$

$$k_\epsilon^{-1}(0) \cap \text{cl}(\Omega \setminus \Omega_T) = \emptyset \quad (\text{cl} = \text{Abschluß})$$

für alle $0 < \epsilon \ll 1$. Damit entfällt die Möglichkeit (III) aus Bild 15, d. h. jede Kette $\bar{\epsilon}$ -regulärer Simplizes, die in $\mathbb{R}^n \times \{a\} \cup \mathbb{R}^n \times \{b\}$ beginnt, endet dort. Aus (2.17) (4) folgt dann Behauptung (1), denn jede Kette vom Typ (I) trägt zu den Summen auf beiden Seiten den gleichen Wert bei, während Ketten vom Typ (II) den Wert Null beitragen. Die Voraussetzung $d \neq 0$ in (2) garantiert somit mindestens $|d|$ Ketten von $\mathbb{R}^n \times \{a\}$ nach $\mathbb{R}^n \times \{b\}$.

Lemma (2.18) ist offensichtlich der Beweis der verallgemeinerten Homotopieinvarianz (1.7) des Brouwer-Grades, wenn man definiert:

$$\text{deg}(f, U, 0) = \sum_{\tau \in S_T^f(U_T)} \text{or}(\tau)$$

Eine vollständige Einführung des Brouwer Grades in diesem Sinne ist in [53] ausgearbeitet. Die Behauptung (2) kommt einer numerisch konstruktiven Version der Leray-Schauderschen Kontinuitätsmethode gleich (vgl. (1.4)). Im Sinne der einleitenden Diskussion dieses Kapitels ist aber auch gezeigt, daß man (2.9) partiell lösen kann: ist nämlich $C \subset h^{-1}(0)$ z. B. eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit, so kann man sich Ω etwa als Tubenumgebung vorstellen, und (2.18) stellt sicher, daß man eine metrisch und strukturell approximierende 1-dimensionale PL-Mannigfaltigkeit in $k_\epsilon^{-1}(0)$ findet, die numerisch berechenbar ist. Die numerische Bedeutung von (2.18) soll in Bild 16 illustriert werden: i. A. muß man nämlich davon ausgehen, daß $h^{-1}(0)$ über $[a, b]$ sehr komplex ist (z. B. Sekundärverzweigung); trotzdem liefert (2.18) stets einen numerischen Zugang von den Lösungen über $\{a\}$ zu den Lösungen über $\{b\}$. Letzteres ist dann von besonderem Gewicht, wenn z. B. h eine künstliche Homotopie ist.

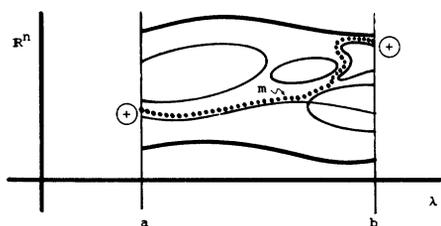


Bild 16

Mit den bisher elementar entwickelten Methoden können wir aber auch eine numerisch konstruktive Interpretation des globalen Verzweigungsprinzips von P. R a b i n o w i t z (1.8) angeben (vgl. [46, 56, 57]) und damit ein zweites Beispiel für (2.9) verifizieren:

(2.19) **Lemma** *Es erfülle $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Voraussetzungen von (1.8) und Ω sei eine beschränkte Umgebung der Klasse U (vgl. Bild 4). Sei T eine Triangulierung des \mathbb{R}^{n+1} , die Triangulierungen T^a von $\mathbb{R}^n \times \{a\}$ bzw. T^b von $\mathbb{R}^n \times \{b\}$ induziert. Weiter sei $\text{mesh}(T)$ genügend fein. Dann gibt es mindestens $|d_1 - d_2|$ 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten in $k_\epsilon^{-1}(0)$, die $D_a \cup D_b$ mit $\partial\Omega \setminus ((D_a \cup D_b))$ verbinden*

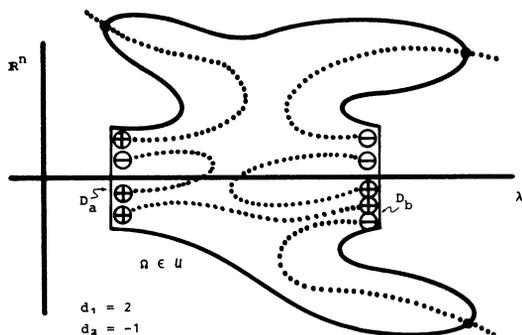


Bild 17

(vgl. Bild 17). (D_λ bezeichnet die Scheibe $B_\epsilon(0) \times \{\lambda\}$ und $d_i = \deg(h_i, D_i, 0)$, $i = a, b$).

Abschließend sei bemerkt, daß z. B. H. H o p f in [33] 1931 mit PL-Methoden, die mit (2.18) sehr verwandt sind, zeigt, daß die „Verschlingungszahl“ $\gamma(f)$ für Abbildungen $f : S^3 \rightarrow S^2$ eine Homotopieinvariante ist. In diesem Sinne sind die Ausführungen dieses Kapitels in Inhalt und Methode keineswegs so neu, wie die gegenwärtige (moderne) Literatur der PL-Algorithmien vorzugeben scheint, sondern entsprechen eher dem Geist der frühen algebraischen Topologie.

III Beschränkte und unbeschränkte Perturbationen

Typisch für nichtlineare Eigenwertprobleme

$$H : E \times \mathbb{R} \rightarrow E, \quad H(u, \lambda) = 0$$

ist, daß $H^{-1}(0)$

- a) Verzweigungen besitzt (vgl. Bild 18), bzw.
- b) Multiplizitäten (bezogen auf λ) hat (vgl. Bild 19).

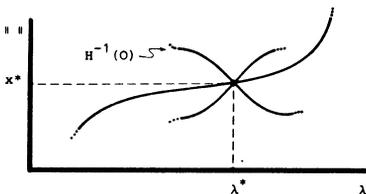


Bild 18 (Verzweigung bei $\lambda = \lambda^*$)

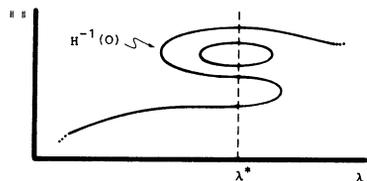


Bild 19 (5 Lösungen für $\lambda = \lambda^*$)

Im Sinne einer (experimentellen) globalen numerischen Analyse von $H^{-1}(0)$ wollen wir uns die folgenden Aufgaben stellen:

(3.1) **Verzweigung** Man ermittle möglichst (alle) viele der in $\lambda = \lambda_*$ verzweigten Kontinua.

(3.2) **Multiplizität** Ausgehend von einem gegebenen Kontinuum finde man möglichst (alle) viele der über $\lambda = \lambda_*$ existierenden Kontinua.

Zunächst soll eine grundlegende Idee (vgl. [35, 46]) zu (3.2) an mehreren Bildern intuitiv erläutert werden, die sowohl auf das vorgelegte Problem $H(u, \lambda) = 0$ (Existenz), als auch auf eine numerische Approximation $h(x, \lambda) = 0$ (numerischer Zugang) anwendbar ist. Wir stellen uns etwa vor, $H^{-1}(0)$ bestehe aus zwei Kontinua C_1 und C_2 wie in Bild 20.

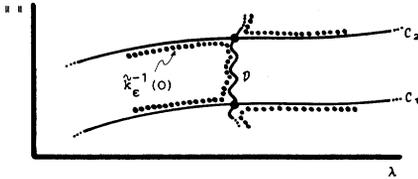


Bild 20

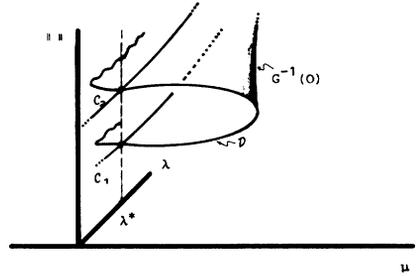


Bild 21 (Einhängung einer Lösungsfläche)

Das Ziel besteht nun darin, das Problem $H(u, \lambda) = 0$ geeignet zu perturbieren, so daß das perturbierte Problem $\tilde{H}(u, \lambda) = 0$ neben C_1 und C_2 zusätzlich ein Kontinuum D aufweist, welches (über eine künstliche Verzweigung) C_1 mit C_2 verbindet. Bezeichnet $\tilde{h}(x, \lambda) = 0$ eine zu \tilde{H} passende numerische Approximation, so könnte man dann etwa mit den in II dargestellten Methoden über $k_\epsilon(x, \lambda) = \tilde{h}_T(x, \lambda) - \bar{\epsilon}$ das (unbekannte) Kontinuum C_2 aus dem (bekannten) Kontinuum C_1 berechnen. Wir diskutieren nun die Frage: wie generiert man eine geeignete Perturbation? Im Sinne der Kontinuitätsmethoden wird man versuchen, das Problem $H(u, \lambda) = 0$ in ein Problem $G(u, \lambda, \mu) = 0$ so einzubetten, daß $G(u, \lambda, 0) = H(u, \lambda)$ und etwa die in Bild 21 dargestellte Situation für $G^{-1}(0)$ gegeben ist.

Bei geeigneter Parametrisierung kann man sich nun den Schnitt $D = G^{-1}(0) \cap E \times \{\lambda_*\} \times \mathbf{R}_+$ in die $E \times \mathbf{R}$ -Ebene geklappt vorstellen (vgl. Bild 22).

Konzeptionell ist die Idee so angelegt, daß man für das vorgelegte operatortheoretische Problem $H(u, \lambda) = 0$ neue Methoden zum Beweis von Existenzaussagen gewinnt und gleichzeitig neue numerische Techniken zur Behandlung von 1-Parameterproblemen erhält. Wir wollen nun in groben Zügen je einige Perturbationen zur Auflösung von Verzweigungsproblemen und mit etwas detaillierterer Darstellung einige Perturbationen für Multiplizitätsresultate vorstellen.

(3.3) Beschränkte Perturbationen bei Verzweigung Sei $h : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ und $C \subset h^{-1}(0)$ gegeben. Wir nehmen an, daß C über (a, b) parametrisiert ist, d. h. es gibt eine stetige Kurve

$$c : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^n$$

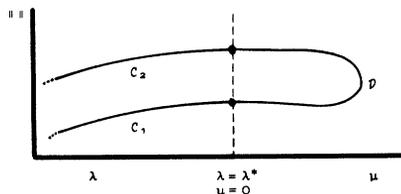


Bild 22

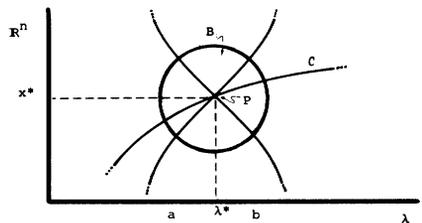


Bild 23

mit $c(\lambda) = C_\lambda$. Wir nehmen auch an, daß $h^{-1}(0)$ in $(x^*, \lambda^*) \in C$, $\lambda^* \in (a, b)$, einen (sekundären) Verzweigungspunkt hat. D. h. in jeder Umgebung von (x^*, λ^*) in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ hat $h(x, \lambda) = 0$ Lösungen, die nicht auf C liegen (vgl. Bild 23).

Wir betrachten das (lokale) numerische Problem, (x^*, λ^*) approximativ zu finden, als gelöst (Beobachtung von „sprunghaften“ strukturellen Änderungen in $k_\epsilon^{-1}(0)$,

Singularität in $\frac{\partial h}{\partial x}(c(\lambda), \lambda)$ in $\lambda = \lambda^*$, etc. . . .), denn zu diesem Problem gibt es

eine umfangreiche Literatur [28, 36, 37, 65]. Relativ gut verstanden ist auch der Fall, wo (x^*, λ^*) lokal durch den transversalen Schnitt zweier glatter Kurven gegeben ist (Verzweigung an einfachen Eigenwerten) (vgl. [17]). In unserem Zugang über $h_T^{-1}(\bar{\epsilon})$ ist dieser Fall zusammen mit (2.19) gelöst ($|d_1 - d_2| = 2$). Kaum behandelt ist der Fall, wo in (x^*, λ^*) mehrere Kontinua verzweigen („multiple“ Verzweigung). Fast alle bekannten Zugänge zur numerischen Auflösung von Verzweigung beruhen auf Linearisierungstechniken, die in Gegenwart von einfachen Eigenwerten gut verstanden sind (vgl. [38]), jedoch in allen anderen Fällen kaum numerisch zugänglich sind. Man darf aber erwarten, daß die von M. Golubitsky und D. Scheffler [30] in letzter Zeit gewonnenen Resultate betreffend die Klassifikation von Verzweigungen auch entscheidende, neue Anstöße für die Numerik geben werden. Sehr wirksam und nützlich ist allerdings die folgende elementare Idee zur Auflösung von „multipler“ Verzweigung (vgl. [35]).

Man wähle offene Kugeln B_r, B_R mit Radien $0 < r < R$ und Zentrum (x^*, λ^*) in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und definiere die Gebiete

$$X_i = \text{cl } B_r = \{(x, \lambda) : \|(x, \lambda) - (x^*, \lambda^*)\| \leq r\}$$

$$X_a = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus B_R$$

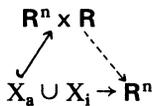
$$X_m = \{(x, \lambda) : r \leq \|(x, \lambda) - (x^*, \lambda^*)\| \leq R\}$$

(die Wahl von $\| \cdot \|$ hängt z. B. von dem bevorzugten Kontinuitätsverfahren ab: für PL-Methoden wird man $\|z\|_\infty = \max |z_i|$ bevorzugen (Triangulierung); für C^∞ -Methoden wird man $\|z\|_2 = (\sum |z_i|^2)^{1/2}$ wählen). Nun hat man zwei Möglichkeiten:

(3.4) **Innere Perturbation** Man definiert $\phi_g : X_a \cup X_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\phi_g(x, \lambda) = \begin{cases} h(x, \lambda), & (x, \lambda) \in X_a \\ g(x, \lambda), & (x, \lambda) \in X_i \end{cases}$$

und $\phi_g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ als stetige (glatte) Fortsetzung



Man wähle etwa $v : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig (glatt) mit

$$v(z) \in [0, 1] \text{ und } v(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } z \in X_a \\ 0 & \text{für } z \in X_i \end{cases}$$

Schließlich setze man

$$\phi_g(x, \lambda) = \nu(x, \lambda)h(x, \lambda) + [1 - \nu(x, \lambda)]g(x, \lambda)$$

(3.5) **Äußere Perturbation** Man definiert $\phi_g : X_a \cup X_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\phi_g(x, \lambda) = \begin{cases} g(x, \lambda), & (x, \lambda) \in X_a \\ h(x, \lambda), & (x, \lambda) \in X_i \end{cases}$$

und $\phi_g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ als stetige (glatte) Fortsetzung.

In beiden Fällen steht g für eine „künstliche“ Abbildung, die die Perturbation ϕ_g definiert. Natürlich wird das Verhalten von $\phi_g^{-1}(0)$ in X_m entscheidend von g abhängen. In gewisser Weise kann man ϕ_g als lokale Verheftung von h mit einem Testproblem g auffassen. Die g selbst kann man als Parameter der Perturbation auffassen, und das Ziel einer geeigneten Wahl von ϕ_g besteht darin, daß $\phi_g^{-1}(0)$ in X_m möglichst „alle“ Zweige von $h^{-1}(0) \cap X_a$ im Fall (3.4) (bzw. von $h^{-1}(0) \cap X_i$ im Fall (3.5)) mit $C \cap X_a$ (bzw. $C \cap X_i$) verbindet. Dabei gehen wir davon aus, daß $C \cap X_a$ (bzw. $C \cap X_i$) bekannt ist. Abhängig von den Kenntnissen über (x^*, λ^*) wird man g zwischen den Extremen „möglichst speziell“ und „möglichst allgemein“ wählen. Eine experimentell besonders erfolgreiche „allgemeine“ Wahl von g ist (vgl. Bilder 24 + 25)

(3.6) $g(x, \lambda) \equiv d, \quad d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (d\text{-Perturbation})$

Die Konstante d ist als numerischer Parameter aufzufassen, den man unter vielen Gesichtspunkten variieren kann. Von besonderer Bedeutung ist der Übergang von d zu $-d$. Hier darf man erwarten, daß das Arrangement von $h^{-1}(0) \cap X_m$ bezüglich $h^{-1}(0) \cap (X_a \cup X_i)$ in gewisser Weise „umklappt“, wodurch bei dem Wechsel von $\phi_d^{-1}(0)$ zu $\phi_{-d}^{-1}(0)$ neue Zweige zugänglich werden (vgl. die Diskussion in (3.32) und Bilder 24 + 25). Der Mechanismus wird in der folgenden Vermutung erklärt, die experimentell bestätigt ist:

(3.7) **d-Auflösung einer Multiplen Verzweigung** Sei eine multiple Verzweigung des Problems $h(x, \lambda) = 0$ von C in (x^*, λ^*) vorgelegt. Wir stellen uns vor, daß $h^{-1}(0)$ in einer beschränkten offenen Kugel B um (x^*, λ^*) ein B a u m B mit Knoten $p = (x^*, \lambda^*)$ ist (d. h. $B \setminus \{p\}$ ist eine endliche Vereinigung von 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten (Zweigen) homöomorph zu $(0, 1)$, entlang denen h regulär ist). Sei $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ fest gewählt (für den C^∞ -Fall zusätzlich regulär).

Dann zerfällt $B \setminus \{p\} = \bigcup_{i=1}^r B_d^i$ in disjunkte Teilmengen B_d^i , und jede der Mengen

B_d^i ist durch einen d -Zyklus in der folgenden Weise ausgezeichnet: Ist $B_d^i = \{\alpha_1^i, \dots, \alpha_{2s}^i\}$ (mit $\alpha_j^i \cong (0, 1)$), so gibt es in $(\phi_d^{-1}(0) \cap X_m)$ Komponenten $\{\beta_1^i, \beta_3^i, \beta_5^i, \dots, \beta_{2s-1}^i\}$ und in $(\phi_{-d}^{-1}(0) \cap X_m)$ Komponenten $\{\beta_2^i, \beta_4^i, \dots, \beta_{2s}^i\}$ mit $\beta_j^i \cong [0, 1]$ und

$$\beta_{2j-1}^i \text{ verbindet } \alpha_{2j-1}^i \text{ mit } \alpha_{2j}^i, \quad j = 1, \dots, s$$

$$\beta_{2j}^i \text{ verbindet } \alpha_{2j}^i \text{ mit } \alpha_{2j+1}^i, \quad j = 1, \dots, s$$

$$(\text{mit } \alpha_{2s+1}^i = \alpha_1^i)$$

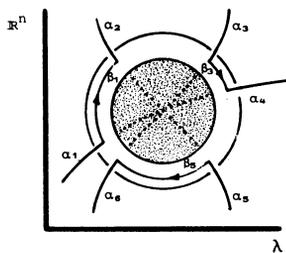


Bild 24a ((3.4), $g \equiv d$)

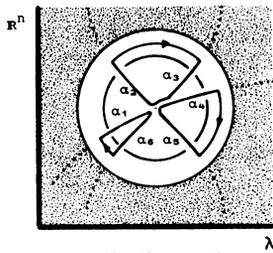


Bild 25a ((3.5), $g \equiv d$)

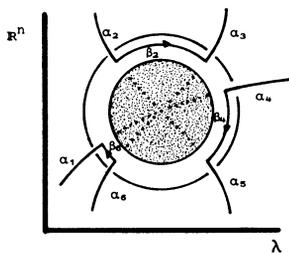


Bild 24b ((3.4), $g \equiv -d$)

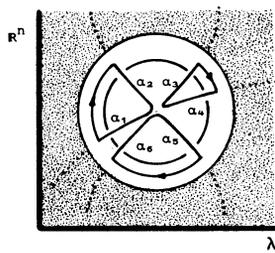


Bild 25b ((3.5), $g \equiv -d$)

Zusätzlich gilt:

$$\left(\bigcup_{j=1}^s \beta_{2j-1}^i \cup \bigcup_{j=1}^s \beta_{2j}^i \right) \cong S^1.$$

Verschiedene Wahlen von d vermitteln i. A. verschiedene Zerlegungen von $B \setminus \{p\}$. In Bild 24 + 25 ist die Auflösung des Baumes aus Bild 23 mit 6 Zweigen in eine m - d -Zyklus dargestellt. Jede der beiden Perturbationen (3.4) und (3.5) hat besondere Vorzüge. Z. B. hat (3.5) die Eigenschaft, daß $\phi_d^{-1}(0)$ kompakt ist und im regulären Fall aus endlich vielen S^1 besteht. Für PL-Methoden kann man auf die Wahl einer expliziten Fortsetzung $\phi_d : X_m \rightarrow \mathbb{R}^n$ verzichten. Eine numerische Realisierung von $(\phi_d)_T$ erhält man nämlich, indem man B_T und B_R so wählt, daß alle Eckpunkte $T^0 \cap X_m$ bereits in $X_a \cup X_i$ liegen. Dann ist die PL-Approximation zu ϕ_d bereits durch $X_a \cup X_i$ definiert, und man kann auf eine Wahl von ν verzichten. Dagegen scheint (3.4) besondere Vorteile für C^∞ -Methoden zu bieten (Prädiktor-Korrektor-Methoden, vgl. [18, 27, 28]). Solche Methoden haben in der Regel prinzipielle Schwierigkeiten in der Nähe von (x^*, λ^*) ($\frac{\partial h}{\partial x}(x^*, \lambda^*)$ ist singulär).

Die Perturbation (3.4) bietet hier eine einfache Möglichkeit, die Singularität wegzuheben und läßt sich leicht implementieren. Daß $\phi_d^{-1}(0)$ in X_m tatsächlich aus glatten 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten besteht, ist intuitiv klar und läßt sich mit dem Satz von Brown-Sard leicht für eine offene und dichte Teilmenge von d 's beweisen (vorausgesetzt $\phi_d \in C^\infty$). Prinzipiell kann man aber für g jede Abbildung heranziehen, die es gestattet, ϕ_g^{-1} in X_m zu kontrollieren. Von besonderem Reiz ist die Idee, vermöge ϕ das vorgelegte Problem $h(x, \lambda) = 0$ mit „Modellbifurkationen“ zu verheften, die durch $g(x, \lambda) = 0$ gegeben werden. Hierbei ist die Philosophie, daß die klassifizierte Bifurkation $g^{-1}(0)$ dann in $h^{-1}(0)$ hineinpaßt, wenn $h^{-1}(0)$ in

(x^*, λ^*) den getesteten Bifurkationstyp hat (vgl. Bilder 26 + 27). Um den Nutzen der letztgenannten Idee zu testen, wird man die Ergebnisse der Klassifikation von Bifurkationen voll einbeziehen müssen [30]. Für die numerische Untersuchung komplexer Verzweigungsformen beim Studium periodischer Lösungen von Funktional-differentialgleichungen wurde diese Idee mit Erfolg benutzt (vgl. [35, 62]).

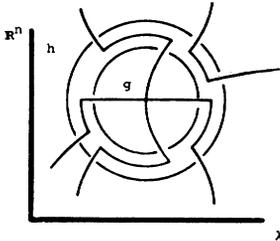


Bild 26 (g paßt nicht)

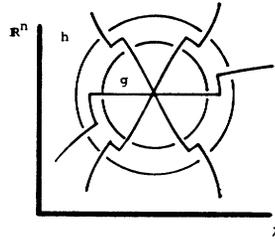


Bild 27 (g paßt)

(3.8) Unbeschränkte Perturbationen bei Multiplizität

In diesem Abschnitt wollen wir einen Zusammenhang zu konkreten Problemen bei Differentialgleichungen herstellen und insbesondere ein Argument für (3.7) in einem speziellen Fall geben. Eine allgemeine Diskussion unbeschränkter Perturbationen findet man in [35, 46, 47, 50]. Hier wollen wir eine typische Methode zunächst abstrakt und dann in einigen ausgewählten Beispielen diskutieren.

Sei wieder $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine numerische Approximation eines vorgelegten nichtlinearen Eigenwertproblems.

(3.9) **Die Halbraum-Perturbation** *Wir wählen ein festes Intervall $[a, b]$ und setzen*

$$X_l := \mathbb{R}^n \times (-\infty, a]$$

$$X_m := \mathbb{R}^n \times [a, b]$$

$$X_r := \mathbb{R}^n \times [b, \infty).$$

Sei $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine fest gewählte Abbildung.

Man definiert

$$(3.10) \quad \phi(x, \lambda) = \begin{cases} h(x, \lambda), & \text{für } \lambda \leq a \\ \frac{\lambda - b}{a - b} h(x, a) + \frac{a - \lambda}{a - b} g(x, b), & \text{für } \lambda \in [a, b] \\ g(x, \lambda), & \text{für } \lambda \geq b \end{cases}$$

Die Perturbation ϕ besteht also aus der Homotopie von h nach g über $[a, b]$. Den möglichen Wahlen von g ist das Ziel gemeinsam, Kontinua $C \subset \phi^{-1}(0)$ so zu erzeugen, daß (vgl. Bild 28)

$$(3.11) \quad C_m := C \cap X_m \cong [0, 1] \quad \text{und} \quad \partial C_m \subset \mathbb{R}^n \times \{a\}$$

Für den theoretischen Nachweis der Existenz eines C_m vom Typ (3.11) versucht man in der Regel zu zeigen, daß $\phi^{-1}(0)$ über $[a, b]$ 'a priori Schranken' besitzt

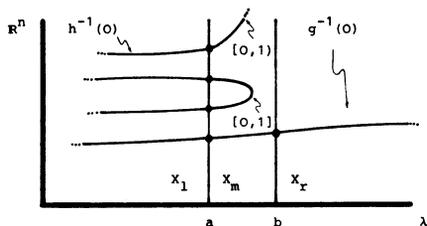


Bild 28

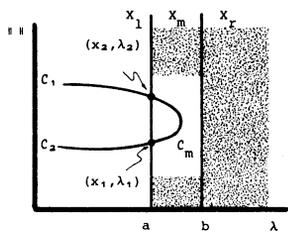


Bild 29a

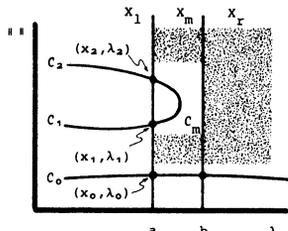


Bild 29b

(vgl. Bild 29), um dann abstrakte Kontinuitätsmethoden (vgl. Bild 1 + 3) anzuwenden. Konkrete Wahlen von g variieren zwischen der nützlichen Standardwahl

$$(3.12) \quad d\text{-Homotopie } g(x, \lambda) \equiv d, \quad d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

und Abbildungen g , die man dann vorzieht, wenn man bereits einige Einsicht in die Mechanismen von $h^{-1}(0)$ gewonnen hat und etwa ausgesuchte Kontinua in $h^{-1}(0)$ verbinden will (Selektionsproblem, Vermeidung von Artefakten, vgl. (3.36)). Hierzu diskutieren wir zunächst noch zwei einführende abstrakte Beispiele, die wir an den Bildern 29a + 29b kurz beschreiben wollen.

In beiden Fällen ist das Ziel, C_1 mit C_2 zu verbinden. Ist nun $\deg(h_a, B_\epsilon(x_1), 0) \neq 0$ und existieren ‚a priori Schranken‘ für $\phi^{-1}(0)$, wie in den punktierten Gebieten angedeutet, so zeigt man leicht (vgl. (1.4) und (2.18)) die Existenz eines Kontinuums C_m mit der gewünschten Eigenschaft. In Bild 29a kann man hoffen, globale ‚a priori Schranken‘ mit $g \equiv d$ zu finden. In der Situation von Bild 29b erscheint die Wahl $g \equiv d$ zunächst ungeeignet, da damit $\phi^{-1}(0)$ über $[a, b]$ eine unbeschränkte Komponente hätte. Die d -Homotopie hat sich tatsächlich in der Praxis als sehr nützlich erwiesen. Sie führte auch dann oft zum Erfolg, wenn über $[a, b]$ keine ‚a priori Schranken‘ existieren. Wir wollen nun an einigen konkreten Beispielen, die bisher nicht mit der d -Homotopie in Zusammenhang gebracht wurden, zeigen, daß die d -Homotopie tatsächlich eine sehr natürliche Perturbation darstellt. Der vermeintliche Nachteil der Nichtexistenz von ‚a priori Schranken‘ wird sich dabei gerade als der Schlüssel zum Verständnis erweisen. Zunächst schreiben wir (3.10) geringfügig um ($g \equiv d$):

$$(3.13) \quad \begin{cases} \phi(x, \lambda) = h(x, a) + \frac{a - \lambda}{\lambda - b} d, & \lambda \in [a, b) \\ \iff \\ \phi(x, \mu) = h(x, a) + \mu d, & \mu \in [0, \infty) \end{cases}$$

Wir werden sogleich feststellen, daß (3.13) mit numerischen Approximationen

von gewissen elliptischen Randwertproblemen identifiziert werden kann. In unserer Darstellung beschränken wir uns auf den einfachsten Fall. Verallgemeinerungen auf abstrakte elliptische Probleme sind in [51, 52] diskutiert. Wir wählen eine stetige Abbildung $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mit

$$(3.14) \quad f(s) = m_\infty s + \psi_\infty(s), \quad \text{wo } \psi_\infty(s)/s \rightarrow 0 \text{ mit } |s| \rightarrow \infty \text{ und } m_\infty > 0$$

(asymptotisch linear)

und betrachten die folgenden 2-Parameter Probleme:

$$(3.15) \quad \begin{cases} u_{tt}(t) + \lambda f(u(t)) = \mu g(t) & \left(u_{tt} = \frac{d^2}{dt^2} u \right) \\ u(0) = u(\pi) = 0, & \lambda, \mu \in \mathbf{R} \end{cases}$$

(forciertes elliptisches Randwertproblem)

$$(3.16) \quad \begin{cases} u_{tt}(t) + \lambda f(u(t)) = 0 \\ u(0) = \mu = u(\pi), & \lambda, \mu \in \mathbf{R} \end{cases}$$

(elliptisches Randwertproblem mit nichttrivialen Randwerten)

Mit (3.15) und (3.16) assoziieren wir die folgenden linearen Probleme:

$$(3.17) \quad \begin{cases} v_{tt} + \lambda v = 0 \\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$(3.18) \quad \begin{cases} v_{tt} + \lambda_* v = g, & \lambda_* = \lambda m_\infty \\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$(3.19) \quad \begin{cases} v_{tt} + \lambda_* v = 0, & \lambda_* = \lambda m_\infty \\ v(0) = 1 = v(\pi) \end{cases}$$

Die Probleme (3.15) und (3.16) sind äquivalent zu den Operatorgleichungen in $C[0, \pi]$:

$$(3.20) \quad u - \lambda LF(u) + \mu Lg = 0,$$

$$(3.21) \quad u - \lambda LF(u) + \mu 1 = 0, \quad 1 \hat{=} u(t) \equiv 1,$$

mit dem Greenschen Operator $L: C[0, \pi] \rightarrow C[0, \pi]$

$$Lu(t) = \int_0^\pi k(s, t)u(s)ds$$

und dem Nemitskii-Operator

$$F(u)(t) = f(u(t)).$$

In (3.20) bzw. (3.21) sieht man deutlich die Beziehung zu (3.13), der d-Homotopie. Dabei entspricht μ d einer Diskretisierung von μLg bzw. $\mu 1$.

Die (einfachen) Eigenwerte von (3.17) bezeichnen wir mit $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots, \alpha_n = n^2$. Wir sammeln für die weitere Diskussion einige Tatsachen und Resultate aus [52]:

(3.22) *Problem (3.18) besitzt für jedes $\lambda_* \neq \alpha_i$ genau eine Lösung v_∞^i , die sich durch Eigenschaften von g charakterisieren läßt. Es gilt $\deg(v_\infty^i) = (-1)^i$, falls $\lambda_* \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$.*

(3.23) *Problem (3.19) besitzt für jedes $\lambda_* \neq \alpha_i$ genau eine Lösung v_∞^i , die durch Nodaleigenschaften charakterisiert ist, die von $\lambda_* \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$ abhängen (vgl. Bild 31). Es gilt $\deg(v_\infty^i) = (-1)^i$, falls $\lambda_* \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$.*

Problem (3.15) (bzw. (3.16)) ist äquivalent zu Problem (3.24) (bzw. 3.25):

$$(3.24) \begin{cases} v_{tt} + \frac{\lambda}{\mu} f(\mu \cdot v) = g, & v = \frac{u}{\mu} \\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases} \quad (3.25) \begin{cases} v_{tt} + \frac{\lambda}{\mu} f(\mu \cdot v) = 0, & v = \frac{u}{\mu} \\ v(0) = 1 = v(\pi) \end{cases}$$

Man zeigt, daß (3.24) (bzw. (3.25)) für $|\mu| \gg 1$ eine „kleine Störung“ von (3.18) (bzw. (3.19)) ist. Aus der Stetigkeit des Leray-Schauder-Grades folgt dann aus $\deg(v_\infty^i) = \pm 1$ die Lösbarkeit von (3.24) (bzw. (3.25)) für $|\mu| \gg 1$. Tatsächlich kann man mit dem Satz über implizite Funktionen einsehen, daß für $|\mu| \gg 1$ (3.24) (bzw. (3.25)) und damit (3.15) (bzw. (3.16)) eindeutig lösbar sind. Diese Lösungen mögen u_μ^∞ heißen. Es gilt:

$$(3.26) \quad u_\mu^\infty(i) \sim v_\infty^i, \quad |\mu| \gg 1$$

Natürlich hängen die Lösungen u_μ^∞ und v_∞ von λ_* ab. Der Index i soll kennzeichnen, daß $\lambda_* \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$.

Definiert man

$$H(u, \lambda, \mu) := u - \lambda LF(u) + \mu z, \quad z \in C[0, \pi]$$

so erhält man ein 2-Parameterproblem, welches in [51] für den allgemeinen elliptischen Fall und spezielle Nichtlinearitäten diskutiert wird. Wir stellen hier nur ein Teilergebnis aus [52] vor, welches im Hinblick auf die Diskussion über die d -Homotopie besonders interessant ist. Dabei beschränken wir uns auf den Fall $z = 1$ und spezifizieren f wie in Bild 30.

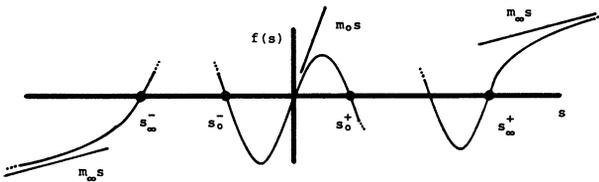


Bild 30

Die Nichtlinearität f erfülle (3.14) und

$$(3.27) \begin{cases} f(s) = m_0 s + \psi_0(s), & \text{wo } \psi_0(s)/s \rightarrow 0 \text{ mit } |s| \rightarrow 0, m_0 > 0 \\ 0 > s_\infty^- := \inf \{s : f(s) = 0\} > -\infty \\ 0 < s_\infty^+ := \sup \{s : f(s) = 0\} < +\infty \\ 0 > s_0^- := \sup \{s < 0 : f(s) = 0\} \\ 0 < s_0^+ := \inf \{s > 0 : f(s) = 0\} \end{cases}$$

Die Eigenlösungen von (3.17) sind durch Nodaleigenschaften gekennzeichnet. Ist κ_i eine Eigenfunktion zum Eigenwert $\alpha_i = i^2$, so gilt:

$$\begin{cases} \kappa_i(0) = \kappa_i(\pi) = 0 \\ \kappa_i \text{ hat } (i-1) \text{ einfache Nullstellen in } (0, \pi) \end{cases}$$

Mit κ_i ist natürlich auch $-\kappa_i$ Eigenfunktion. Die i -te Eigenfunktion κ_i , für die $\kappa_i(t) > 0$ für $t \in (0, \epsilon)$ ist, bezeichnen wir mit ${}^+\kappa_i$ und entsprechend ${}^-\kappa_i := -{}^+\kappa_i$. Ist (u, λ) eine Lösung von (3.16) für $\mu = 0$, so sagen wir u ist vom Typ ${}^\pm\kappa_i$, wenn u die gleichen Nodal- und Vorzeicheneigenschaften hat wie ${}^\pm\kappa_i$. Wir schreiben dann ${}^\pm u_i$, um den Typ zu kennzeichnen. Wir interessieren uns nun besonders für Lösungen von (3.16) mit ∞ -Norm größer als $s_\infty := \min\{|s_\infty^-|, s_\infty^+\}$ und kleiner als $s_0 := \max\{|s_0^-|, s_0^+\}$. Ist u eine Lösung von Typ ${}^\pm\kappa_i$ und $\|u\|_\infty > s_\infty$, so wollen wir stets schreiben

$$u = {}^\pm W_i.$$

Ist u eine Lösung vom Typ ${}^\pm\kappa_i$ und $\|u\| < s_0$, so wollen wir stets schreiben

$$u = {}^\pm w_i.$$

In den Bildern, die das folgende Theorem veranschaulichen und illustrieren, kürzen wir wie folgt ab:

$${}^+w_i = i^0 \quad -w_i = -i^0 \quad {}^+W_i = i^\infty \quad -W_i = -i^\infty$$

Man zeigt (siehe [52]), daß $\deg({}^\pm w_i) = (-1)^{i+1}$ und $\deg({}^\pm W_i) = (-1)^i$ für alle $i \in \mathbf{N}^1$.

(3.28) **Theorem** *Es erfülle f (3.14) und (3.27) mit $m_0 = m_\infty > 0$. Dann gibt es zu jedem $i \in \mathbf{N}$ und jedem $\lambda > 0$ mit $\lambda m_\infty \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$ Lösungen*

$${}^\pm w_1, \dots, {}^\pm w_i \quad \text{und} \quad {}^\pm W_1, \dots, {}^\pm W_i$$

für $\mu = 0$ und ein Kontinuum

$$C_\lambda^i \subset C[0, \pi] \times \mathbf{R}$$

von Lösungen (u, μ) des Problems (3.16) (λ fest) mit

$$C_\lambda^i \cap C[0, \pi] \times \{\mu\} = \{u_\mu^\infty(i), 0\}$$

für $|\mu| \gg 1$, welches die Lösungen w und W verbindet:

$$C_\lambda^i \cap C[0, \pi] \times \{0\} \supset \{({}^\pm w_j, 0), ({}^\pm W_j, 0) : j = 1, \dots, i\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Insbesondere gilt:

(1) *Das 1-Parameter Problem*

$$(3.29) \quad \begin{cases} u_{tt} + \lambda f(u) = 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

¹) \deg bezeichnet den Leray-Schauder-Grad der isolierten Lösung ${}^\pm w_i$ (bzw. ${}^\pm W_i$) von (3.21) bei festem λ und μ .

hat Verzweigung von ∞ in $\lambda_i^\infty := \alpha_i/m_\infty$ und hat Verzweigung von 0 in $\lambda_i^0 := \alpha_i/m_0$. Die entsprechenden Zweige enthalten für $\lambda m_\infty \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$ die Lösungen ${}^\pm W_i$ bzw. ${}^\pm w_i$.

(2) Für alle $i \in \mathbf{N}$ enthält C_λ^1 zusammenhängende kompakte Teilmengen $P_\pm \subset C[0, \pi] \times \mathbf{R}$ von Lösungen (u, μ) des Problems (3.16) (λ fest), welche

$$({}^+W_1, 0) \text{ mit } ({}^+w_1, 0) \quad (P_+) \quad \text{und} \quad (-W_1, 0) \text{ mit } (-w_1, 0) \quad (P_-)$$

verbinden (vgl. Bilder 32, 33 + 34).

(3) Ist $\lambda m_\infty \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$ und $i \geq 2$

so enthält C_λ^1 zusammenhängende kompakte Teilmengen $A_j^\infty, A_j^0 \subset C[0, \pi] \times \mathbf{R}$, $j \in \{1, 2, \dots, [i/2]\}$, von Lösungen (u, μ) des Problems (3.16) (λ fest) mit

$$A_j^\infty, A_j^0 \cong S^1$$

$$A_j^\infty \cap C[0, \pi] \times \{0\} \supset \{({}^+W_{2j}, 0), (-W_{2j}, 0)\}$$

$$A_j^0 \cap C[0, \pi] \times \{0\} \supset \{({}^+w_{2j}, 0), (-w_{2j}, 0)\} \quad (\text{vgl. Bilder 33 + 34}).$$

(4) Für alle $i \in \mathbf{N}$ enthält C_λ^1 zusammenhängende kompakte Teilmengen $O_\pm^i \subset C[0, \pi] \times \mathbf{R}$ von Lösungen (u, μ) des Problems (3.16) (λ fest), welche

$$(0, 0) \text{ mit } ({}^+w_1, 0) \quad (O_+^i) \quad \text{und} \quad (0, 0) \text{ mit } (-w_1, 0) \quad (O_-^i) \text{ verbinden.}$$

(5) Für alle $i \geq 2$ und $j \in \{1, 2, \dots, [i/2]\}$ enthalten die A_j^∞ bzw. A_j^0 sekundäre Verzweigungspunkte (vgl. Bilder 33 + 34) $({}^\pm p_j, {}^\pm \mu_j^\infty)$ bzw. $({}^\pm p_j, {}^\pm \mu_j^0)$, die in Bild 37 charakterisiert sind. ($[r]$ = größte natürliche Zahl, welche kleiner oder gleich $r \in \mathbf{R}$ ist)

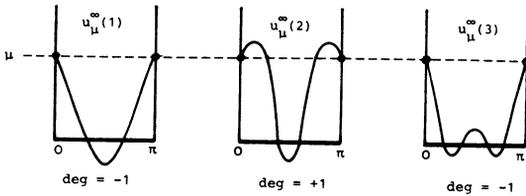


Bild 31

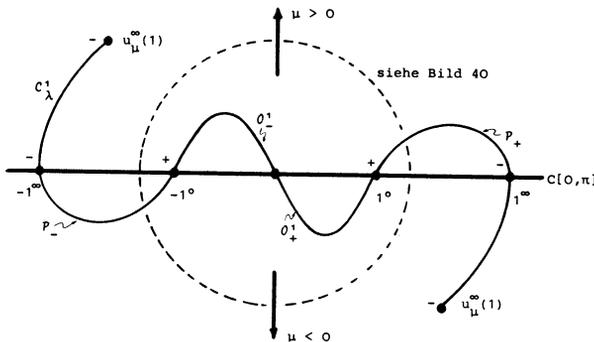


Bild 32 (C_λ^1 für $\lambda m_\infty \in (\alpha_1, \alpha_2)$)

In G_0 bzw. G_∞ ist die „ μ -Dynamik“ durch die linearen Probleme (3.17) bzw. (3.19) gekennzeichnet. Identifiziert man für $|\mu| > 1$ die Lösungen $u_\mu^\infty(i)$ und $u_{-\mu}^\infty(i)$, so ist die „ μ -Dynamik“ in G_{s_0} isomorph zu der „ μ -Dynamik“ in G_{s_∞} . Bei dieser Isomorphie ist der Punkt $(u_\mu^\infty(i), \mu) \sim (u_{-\mu}^\infty(i), -\mu)$ auf $(0, 0)$ abzubilden. Die „innere Welt“ G_{s_0} ist mit der „äußeren Welt“ G_{s_∞} stets durch die P_\pm in G_t ($t = \text{transition}$) verbunden.

(2) Ist $m_0 \neq m_\infty$, so etablieren sich abhängig von $\lambda m_0 \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$ und $\lambda m_\infty \in (\alpha_j, \alpha_{j+1})$ in G_{s_0} bzw. G_{s_∞} voneinander unabhängige „ μ -Dynamiken“, die wieder über P_\pm in G_t verbunden sind.

(3) Im Allgemeinen (abhängig von gewissen Flächenbedingungen an den Graphen von f) kann es noch weitere Lösungen des Problems (3.16) für $\mu = 0$ mit Normen zwischen s_∞ und s_0 geben (vgl. [50, 52]). In diesem Fall kann man zeigen, daß die Lösungen von P_+ bzw. P_- aufgenommen werden, d. h. C_λ^1 enthält wieder alle Lösungen des Problems (3.16) für $\mu = 0$.

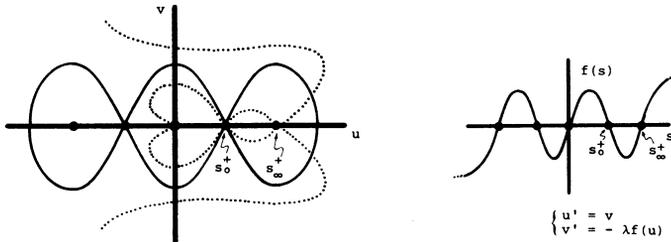


Bild 35 ($P_\pm, 0_\pm^1$ im Phasenportrait, $\lambda m_0 > \alpha_1, \lambda m_\infty > \alpha_1$)

(4) Die Existenz der Kontinua P_\pm kann man für die gewöhnliche Differentialgleichung (3.16) und eine spezielle Nichtlinearität f in dem Phasenportrait der Gleichung ablesen (vgl. Bild 35). Dort haben die punktierten Linien die folgende Bedeutung: Ist (u_0, v_0) ein Punkt auf einer dieser Linien, so erreicht die Trajektorie $(u(t), v(t))$ mit diesen Anfangsbedingungen nach der Zeit $\pi/2$ die u -Achse. Tatsächlich sind diese $\pi/2$ -Zeit-Linien der Schlüssel zum Verständnis der P_\pm und O_\pm^1 . Aus Bild 35 ergibt sich unmittelbar Bild 32 und $u_\mu^\infty(1)$ für $\mu < 0$. Im allgemeinen elliptischen Fall folgt die Existenz von P_\pm aus einem topologischen Kontinuitätsargument.

(5) Die Existenz der A_j^∞, A_j^0 ist bisher nur für (3.16) gesichert. Sie folgt hier durch eine einfache Zeitverschiebung an einer festen Trajektorie im Phasenraum: Dazu sei etwa ${}^+W_2$ gegeben. Durch fortgesetzte Spiegelung erhält man eine periodische Lösung $\omega(t)$ mit Periode $T = \pi$:

$$\omega(t) = {}^+W_2(\bar{t}) \quad \text{mit } t \equiv \bar{t} \pmod{\pi}.$$

Nun sei $0 \leq \mu \leq \max |{}^+W_2(t)|$ gegeben. Es bezeichne

$$t_\mu^1 := \inf \{t > 0 : \omega(t) = \mu\},$$

$$t_\mu^2 := \sup \{t < \pi : \omega(t) = \mu\},$$

wo $0 < r < \pi$ und ${}^+W_2(r) = 0$. Dann gilt: $\omega(t_\mu^1) = \omega(t_\mu^1 + \pi) = \omega(t_\mu^2) = \omega(t_\mu^2 + \pi) = \mu$.
Damit vermitteln

$$\begin{aligned} u_\mu^1(t) &= \omega(t_\mu^1 + t) \\ u_\mu^2(t) &= \omega(t_\mu^2 + t) \end{aligned} \quad \text{für } 0 \leq t \leq \pi$$

Lösungen auf A_1^∞ (vgl. Bild 36). Entsprechend argumentiert man für $\mu \leq 0$. Offensichtlich ist $u_\mu^1 = u_\mu^2$ für $\mu = \max |{}^+W_2(t)|$ (vgl. (6)).

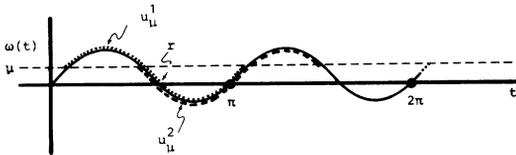


Bild 36 (Konstruktion von A_1^∞)

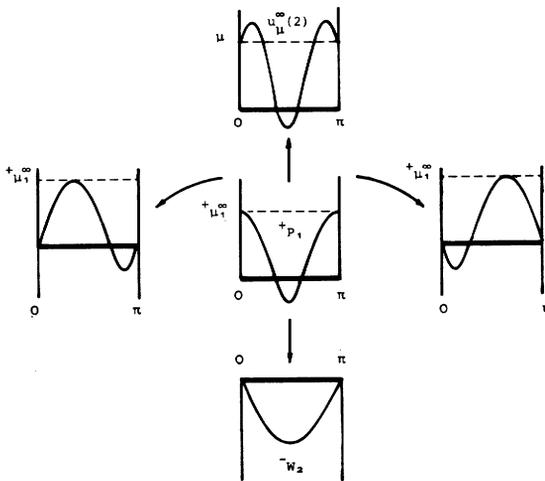


Bild 37 (Detail von Bild 33: sekundäre Verzweigung auf A_1^∞)

(6) Offensichtlich vermittelt die elementare Konstruktion in (5) einen kritischen Punkt $({}^+P_1, {}^+\mu_1^\infty)$ für

$${}^+\mu_1^\infty = \max |{}^+W_2(t)|,$$

wobei ${}^+P_1$ wie in Bild 37 gegeben ist. Dieser Punkt ist der in (3.28) (5) beschriebene sekundäre Verzweigungspunkt auf A_1^∞ (vgl. Bild 37).

(7) Die Existenz von sekundären Verzweigungen auf den A_j^∞ bzw. A_j^0 liegt in einer Symmetrie begründet, die man als die Spiegelsymmetrie des Phasenportraits von

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = -\lambda f(u) \end{cases}$$

bzgl. der u -Achse erkennt. Die Existenz der periodischen Lösung $\omega(t)$ in (5) wird

gerade durch diese Symmetrie vermittelt. Bricht man diese Symmetrie etwa durch einen Term ϵu_t in

$$\begin{cases} u_{tt} + \epsilon u_t + \lambda f(u) = 0 \\ u(0) = \mu = u(\pi), \end{cases}$$

so darf man erwarten, daß die sekundären Verzweigungspunkte auf A_j^∞ bzw. A_j^0 „entfaltet“ werden. Studien hierzu findet man in [52].

Bei geeigneter numerischer Approximation (etwa durch finite Differenzen) von (3.16), gegeben durch

$$(3.31) \quad h(x, \lambda) + \mu d = 0, \quad d \in \mathbb{R}_+^n,$$

vererben sich die strukturellen Eigenschaften von (3.16), und man kann ein (3.28) entsprechendes Resultat formulieren. Bezeichnen $x_\mu^\infty(i)$ Approximierende der Lösungen $u_\mu^\infty(i)$, so gibt es insbesondere also wieder ein Kontinuum C_λ^1 von Lösungen für (3.31) (λ fest) mit den Eigenschaften von (3.28). Betrachten wir jetzt den Fall $i = 1$, so können wir folgern, daß C_λ^1 für $\mu \rightarrow 0$ ($\mu > 0$) eine Approximation von ${}^+W_1$ und für $\mu \rightarrow 0$ ($\mu < 0$) eine Approximation von ${}^-W_1$ erreicht (vgl. Bild 38).

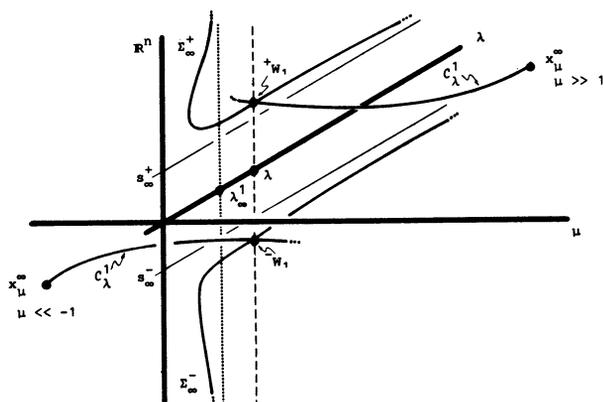


Bild 38 (Σ_∞^\pm = Kontinuum positiver (negativer) Lösungen von (3.16) ($\mu = 0$))

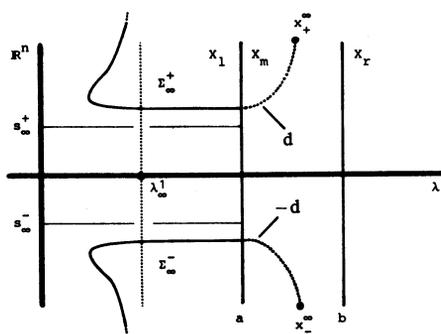


Bild 39 (d-Homotopie für Approximation von (3.39))

Faßt man (3.31) als d -Homotopie über dem Intervall $[a, b]$ gemäß (3.13) auf, so geht Bild 38 in Bild 39 über. Die abstrakte Bedeutung von Beispiel (3.16) liegt darin, daß man erkennt, wie das Problem (3.21) für $|\mu| \rightarrow \infty$ Anlaß zu einer Linearisierung

$$v - \lambda m_\infty L v = 1$$

gibt, von der aus man das Verzweigungsverhalten (von ∞) von Problem (3.29) theoretisch und numerisch verstehen kann.

Insbesondere sieht man:

(3.32) **Bemerkung** Sei (3.31) eine numerische Approximation von (3.16). Diese entspricht einer d -Homotopie einer entsprechenden numerischen Approximation von (3.29).

(1) Die Diskussion der Bilder 38 + 39 zeigt, wie und warum beim Übergang von d zu $-d$ das Arrangement von $\phi_d^{-1}(0) \cap X_m$ bzw. $\phi_{-d}^{-1}(0) \cap X_m$ „umklappt“ (vgl. (3.7)).

(2) Die d -Homotopie (3.13) hat über $[a, b]$ unbeschränkte Kontinua.

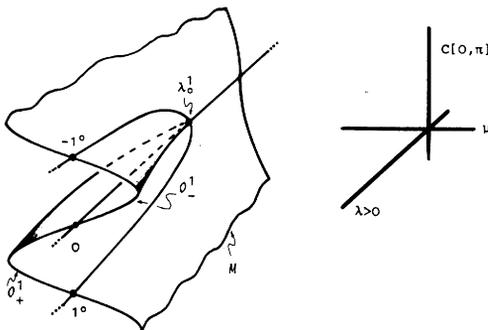


Bild 40 (Problem (3.16) als Entfaltung der λ -Verzweigung in λ_0^1)

Obwohl also ‚a priori Schranken‘ für (3.13) über $[a, b]$ nicht existieren, ist die d -Homotopie in diesem Beispiel von großem Nutzen. Im Hinblick auf Verzweigung von 0 kann man Bild 32 z. B. so interpretieren, daß das 2-Parameter Problem (3.16) in einer Umgebung von $\lambda_0^1 = \alpha_1/m_0$ durch eine „Falte“ M („cusp catastrophe“) gegeben ist, die in Bild 8 beschrieben wird (vgl. Bild 40). Bisher haben wir über f nur die Voraussetzungen (3.14) und (3.27) gemacht. Zum genaueren Verständnis der Verzweigungen von 0 und ∞ sowie ihrer möglichen Entfaltungen in dem (λ, μ) -Problem (3.16) sind weitere Kenntnisse über ψ_0 und ψ_∞ mit

$$f(s) = m_0 s + \psi_0(s), \quad \text{bzw.} \quad f(s) = m_\infty s + \psi_\infty(s)$$

erforderlich. Die in Bild 40 dargestellte superkritische „pitchfork“ Verzweigung für $\lambda = \lambda_0^1$ und ihre Entfaltung durch die „cusp catastrophe“ erhält man beispielsweise, wenn etwa $\psi_0(s) = -s^3$ in einer Umgebung von 0. Für eine detaillierte Diskussion der Verzweigung von 0 und ∞ , insbesondere der Fälle

superkritische Verzweigung (z. B. $\psi_0(s) = -s^3$)

subkritische Verzweigung (z. B. $\psi_0(s) = s^3$)

transkritische Verzweigung (z. B. $\psi_0(s) = \pm s^2$)

verweisen wir auf [52].

Schneidet man M für $\mu^+ > 0$ ($\mu^+ \sim 0$) bzw. $\mu^- < 0$ ($\mu^- \sim 0$), so erhält man die Bilder 41 + 42.

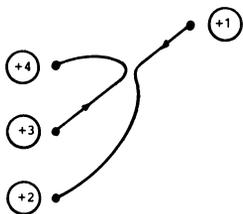


Bild 41 (M_{μ^+})

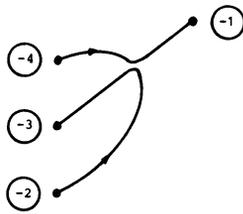


Bild 42 (M_{μ^-})

Damit ist an dem Beispiel erklärt, wie die numerische Approximation $h(x, \lambda) + \mu d = 0$ beim Wechsel von d zu $-d$ die Zweige im Sinne von (3.7) „umklappt“. Wie in (3.7) kann man also einen d -Zyklus konstruieren und nachweisen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \textcircled{-1} & \equiv & \textcircled{+1} & \xrightarrow{M_{\mu^+}} & \textcircled{+2} & \equiv & \textcircled{-2} \\
 & & \uparrow M_{\mu^-} & & \downarrow M_{\mu^-} & & \\
 \textcircled{-4} & \equiv & \textcircled{+4} & \xleftarrow{M_{\mu^+}} & \textcircled{+3} & \equiv & \textcircled{-3}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 + \triangleq +d \\
 - \triangleq -d
 \end{array}$$

(3.33)

Für die oben diskutierten elliptischen Probleme erhalten wir also Resultate, die voll mit den in den Bildern 21 + 22 diskutierten Zielen übereinstimmen. Allerdings sind die „eingehängten“ Lösungsflächen (Bilder 32, 33, 34 + 40) von sehr komplexer Struktur.

(3.34) Eine spezielle globale Perturbation

In diesem Abschnitt wollen wir eine an das Problem

$$(3.29) \quad \begin{cases} u_{tt} + \lambda f(u) = 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0, f \text{ erfülle (3.14) und (3.27),} \end{cases}$$

speziell angepasste Perturbation erläutern. Sie ist entworfen für das Studium positiver Lösungen von (3.29) (vgl. [47, 48, 49, 50]). Wieder diskutieren wir mit (3.29) den einfachsten Fall und verweisen für den allgemeinen elliptischen Fall auf [49, 50]. Ziel ist es

- die Existenz positiver Lösungen von (3.29) zu untersuchen,
- Methoden bereitzustellen, die positiven Lösungen numerisch zugänglich zu machen,

– Selektionsprozeduren zu entwerfen, die die hier (vgl. IV) existierenden numerischen Artefakte automatisch vermeiden.

Aus darstellerischen Gründen werden wir die Perturbation (vgl. Bilder 21 + 22) mit einem reellen Parameter beschreiben

$$\lambda f(s) \xrightarrow{\text{Perturbation}} g(\lambda, s)$$

Da wir nur an positiven Lösungen ($u(t) \geq 0$) interessiert sind, dürfen wir $f(s)$ für $s \leq 0$ frei wählen. Wir wählen

$$f(s) \geq \alpha s \quad \text{für } s \leq 0 \text{ mit } \alpha < 0.$$

Weiter habe f endlich viele einfache, positive Nullstellen, deren kleinste wir mit s_0 und deren größte wir mit s_∞ bezeichnen. Wir setzen noch

$$\begin{cases} \lambda_\infty := \alpha_1/m_\infty, & m_\infty > 0 & (\alpha_1 \text{ Haupteigenwert von (3.17)}) \\ \lambda_0 := \alpha_1/m_0, & m_0 > 0 \end{cases}$$

und wählen Konstanten $\lambda_i, i = 1, \dots, 4$ mit

$$\max \{ \lambda_0, \lambda_\infty \} < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 \quad \text{und} \quad \alpha_1/\beta < \lambda_4$$

(β wird weiter unten festgelegt)

Die Perturbation $g(\lambda, s)$ von $\lambda f(s)$ wird definiert:

$$g(\lambda, s) = \begin{cases} \lambda f(s), & 0 \leq \lambda \leq \lambda_1 \\ \frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1 f(s) + \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2 f_1(s), & \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 \\ \lambda f_1(s), & \lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_3 \\ \frac{\lambda - \lambda_4}{\lambda_3 - \lambda_4} \lambda_3 f_1(s) + \frac{\lambda_3 - \lambda}{\lambda_3 - \lambda_4} \lambda_4 f_2(s), & \lambda_3 \leq \lambda \leq \lambda_4 \\ \lambda f_2(s), & \lambda_4 \leq \lambda. \end{cases}$$

g ist also die Deformation (2 aufeinanderfolgende Halbraumperturbationen vgl. (3.9))

$$\lambda f \xrightarrow{\text{Perturbation}} \lambda f_1 \xrightarrow{\text{Perturbation}} \lambda f_2,$$

wo f_1 und f_2 definiert sind durch:

$$f_1(s) \begin{cases} = f(s), & s \leq s_0 \text{ und } s \geq s_\infty \\ < 0, & s_0 < s < s_\infty \end{cases}$$

$$f_2(s) \begin{cases} = f(s), & s \leq \delta \text{ und } s \geq \Delta \\ \geq \beta s, & s \geq 0 \end{cases}$$

mit $\delta \ll 1, \Delta \gg 1$ und einem geeigneten $\beta > 0$. Bei dieser Wahl von g gilt:

$$g(\lambda, s) = \lambda m_0 s + \gamma_0(s)$$

$$g(\lambda, s) = \lambda m_\infty s + \gamma_\infty(s)$$

mit $\gamma_0(s)/s \rightarrow 0$ (bzw. $\gamma_\infty(s)/s \rightarrow 0$) für $s \rightarrow 0_+$ (bzw. $s \rightarrow +\infty$) auf beschränkten λ -Intervallen. Für das perturbierte Problem

$$(3.35) \quad \begin{cases} u_{tt} + g(\lambda, u) = 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

gelten die folgenden Lemmata:

(3.36) **Lemma** (vgl. [49, 50]). (1) Sei (u, λ) eine Lösung von (3.35). Dann ist $u(t) > 0$ auf $(0, \pi)$, falls $u \neq 0$.

(2) Sei (u, λ) eine Lösung von (3.35) mit $\lambda \geq \lambda_4$. Dann ist $u \equiv 0$.

(3) Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall mit $\lambda_0 \notin \Lambda$. Dann gibt es ein $r > 0$, so daß für jede Lösung (u, λ) von (3.35) mit $\lambda \in \Lambda$ gilt

$$\|u\|_\infty \geq r.$$

(4) Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall mit $\lambda_\infty \notin \Lambda$. Dann gibt es ein $R > 0$, so daß für jede Lösung (u, λ) von (3.35) mit $\lambda \in \Lambda$ gilt

$$\|u\|_\infty \leq R.$$

(5) Ist $s > 0$ so gewählt, daß $g(\lambda, s) < 0$, so gibt es keine Lösung (u, λ) von (3.35) mit $\|u\|_\infty = s$.

(6) Für alle $\lambda \neq \lambda_0$ ist der Leray-Schauder-Grad der trivialen Lösung $u_0 \equiv 0$ definiert und es gilt

$$\text{deg}(u_0) = \begin{cases} 1, & \text{für } \lambda < \lambda_0 \\ 0, & \text{für } \lambda > \lambda_0. \end{cases}$$

(Beweisidee siehe (3.38))

(7) Es gibt ein Kontinuum $\Sigma \subset C[0, \pi] \times \mathbb{R}_+$ von positiven Lösungen, welches in (u_0, λ_0) von 0 verzweigt und in $C[0, \pi] \times \mathbb{R}_+$ unbeschränkt ist.

(Folgerung aus (1)–(6) und dem globalen Verzweigungsprinzip von Rabinowitz [58], vgl. (1.8))

Die Summe dieser Resultate ist in Bild 43 illustriert. Aus den speziellen ‚a priori Schranken‘ (2)–(5) und (7) folgt unmittelbar, daß das Problem (3.29) eine Verzweigung von ∞ in λ_∞ hat. Aus [17] folgt zusätzlich

(8) In einer Umgebung von $(0, \lambda_0)$ bzw. (∞, λ_∞) sind die Lösungen von (3.35) durch eine glatte Kurve gegeben.

Läßt man nun noch $\lambda_1 \rightarrow +\infty$ streben, so erhält man

(3.37) **Theorem** Es gibt unbeschränkte Kontinua Σ_0 und Σ_∞ von positiven Lösungen für (3.29) mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Σ_0 verzweigt von 0 in λ_0 und $(u, \lambda) \in \Sigma_0$ impliziert $\|u\|_\infty < s_0$

(2) Σ_∞ verzweigt von ∞ in λ_∞ und $(u, \lambda) \in \Sigma_\infty$ impliziert $\|u\|_\infty > s_\infty$

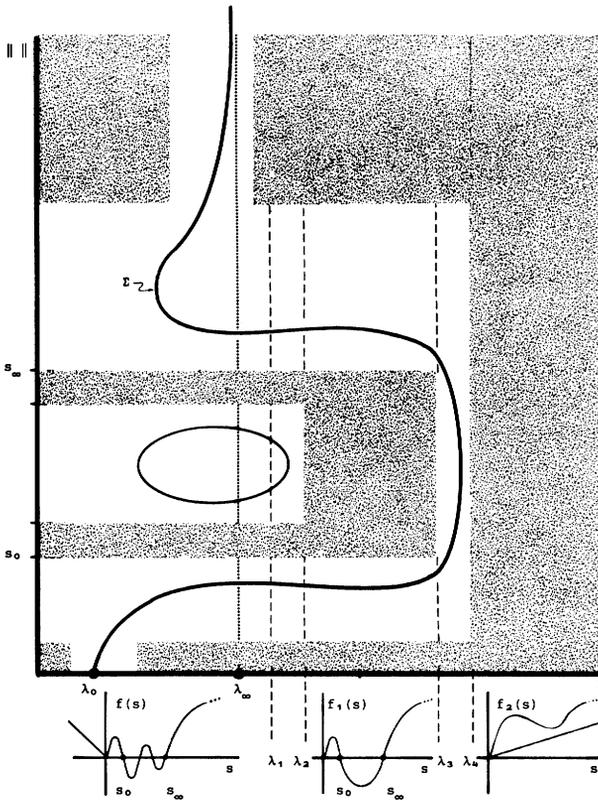


Bild 43 (Globale Perturbation (3.35))

(3) Bezeichnet $\Pi : C[0, \pi] \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ die Projektion auf die zweite Komponente, so gilt

$$\Pi(\Sigma_0) \supset (\lambda_0, \infty), \quad \Pi(\Sigma_\infty) \supset (\lambda_\infty, \infty).$$

(3.37) wurde zuerst von A. Ambrosetti und P. Hess 1980 bewiesen und benutzt wesentlich die Linearisierbarkeit von f in ∞ . Der hier gewählte Zugang läßt sich demgegenüber leicht auf die Situation

$$m_\infty^1 s + \psi_\infty^1(s) \leq f(s) \leq m_\infty^2 s + \psi_\infty^2(s)$$

$$m_0^1 s + \psi_0^1(s) \leq f(s) \leq m_0^2 s + \psi_0^2(s)$$

mit $\psi_0^i(s)/s \rightarrow 0$ für $s \rightarrow 0_+$ und $\psi_\infty^i(s)/s \rightarrow 0$ für $s \rightarrow +\infty$ übertragen.

Diskretisiert man (3.35) etwa mit einer finiten Differenzenapproximation, so erhält man das System von n Gleichungen ($n =$ Anzahl der Gitterpunkte in $(0, \pi)$)

$$\phi(x, \lambda) = Ax - h^2 G(x, \lambda)$$

mit $h =$ Maschenweite des Diskretisierungsgitters und

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \bigcirc \\ -1 & & \vdots \\ \bigcirc & & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad G(x, \lambda) = \begin{bmatrix} g(x_1, \lambda) \\ \vdots \\ g(x_n, \lambda) \end{bmatrix}$$

Man zeigt (vgl. [47, 50]), daß für $\phi(x, \lambda) = 0$ ein (3.36) entsprechendes Lemma und damit ein (3.37) entsprechendes Theorem gilt. Zusammen mit den Ergebnissen aus II ist damit sichergestellt, daß die PL-Mannigfaltigkeiten in

$$\phi_T^{-1}(\bar{\epsilon})$$

einen numerischen Zugang zu Σ_∞ von $u_0 \equiv 0$ über Σ_0 liefern (man kontinuieriere eine Approximation von Σ (vgl. Bild 43)). Es gilt nämlich

$$\phi_T^{-1}(\bar{\epsilon}) \cap ((\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)) \times \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}_+ \cup \bigcup_{i=1}^k S^1, \quad k \geq 0$$

Die \mathbb{R}_+ -Komponente approximiert Σ und verzweigt von ∞ in $\lambda \sim \lambda_\infty$. (Man schneidet $B_\delta(0)$ aus, um nur noch Approximationen nichttrivialer Lösungen diskutieren zu müssen).

In IV werden wir sehen, daß $\phi^{-1}(0)$ allerdings noch zahlreiche numerische Artefakte enthalten kann. Die \mathbb{R}_+ -Komponente besteht aber in einer Umgebung von $(0, \lambda_0)$ bzw. (∞, λ_∞) aus Approximationen der Differentialgleichung (3.29) und damit vermittelt die numerische Berechnung von Σ über die \mathbb{R}_+ -Komponente von $\phi_T^{-1}(\bar{\epsilon})$ eine „sichere“ Selektionsprozedur.

Die spezielle Perturbation $g(\lambda, s)$ war dazu entworfen worden, positive Lösungen des speziellen Problems (3.29) (theoretisch und numerisch) zu vermitteln. In vielen Fällen ist die Diskussion positiver Lösungen (siehe H. A m a n n [9] und M. A. K r a s n o s e l' s k i i [41]) durch Verwendung abstrakter Fixpunktprinzipien in Kegeln erleichtert.

(3.38) Perturbationen kegelinvarianter Operatoren

Wir stellen exemplarisch zwei wichtige klassische Prinzipien vor [9, 41].

(3.39) Theorem Sei P ein Kegel (P abgeschlossen und konvex, $p \in P$ impliziert $\mathbb{R}_+ p \subset P$, $P \cap (-P) = \{0\}$) in einem Banachraum und $T : P \rightarrow P$ ein stetiger, auf beschränkten Mengen kompakter Operator und $0 = T(0)$ sei in P ein isolierter Fixpunkt. T habe Frechét-Ableitungen bzgl. P in 0 ($T'_+(0)$) und ∞ ($T'_+(\infty)$) und 1 sei kein Eigenwert von $T'_+(0)$ und $T'_+(\infty)$ zu einem Eigenvektor in P .

(1) E x p a n s i o n $T'_+(0)$ habe keinen Eigenwert größer als 1 bzgl. P und $T'_+(\infty)$ besitze einen Eigenwert $\lambda_\infty > 1$ bzgl. P .

(2) K o m p r e s s i o n $T'_+(0)$ besitze einen Eigenwert $\lambda_0 > 1$ bzgl. P und $T'_+(\infty)$ habe keinen Eigenwert größer als 1 bzgl. P .

In beiden Fällen gibt es ein $u_* \in P \setminus \{0\}$ mit

$$T(u_*) = u_*.$$

Die Aufgabenstellung bestehe nun darin, u_* numerisch approximativ zu berechnen. Wir werden sehen, daß T in beiden Fällen zu einer Perturbation

$$S : P \times \mathbf{R}_+ \rightarrow P$$

Anlaß gibt, so daß

$$(\text{Id} - S)^{-1}(0)$$

ein Kontinuum C enthält, welches $u_0 \equiv 0$ mit einem $u_* \neq 0$ verbindet. Sinngemäß gilt der gleiche Sachverhalt, wenn man T so numerisch approximiert, daß die Approximation die Voraussetzungen von (3.39) erfüllt. Zur Definition von S reproduzieren wir den inzwischen klassischen Beweis für (3.39):

L bezeichne entweder $T'_+(0)$ oder $T'_+(\infty)$

$\bar{\lambda}$ bezeichne entweder λ_0 oder λ_∞

\bar{u} bezeichne einen zu $\bar{\lambda}$ gehörigen Eigenvektor aus P .

Man zeigt:

(a) Falls L keinen Eigenwert größer als 1 bzgl. P hat, so gibt es ein $R > 0$ ($R \ll 1$ für $L = T'_+(0)$ und $R \gg 1$ für $L = T'_+(\infty)$), so daß

$$\Phi(\lambda, u) := \lambda Lu + (1 - \lambda)Tu$$

keine Fixpunkte auf $P \cap \partial B_R(0)$ hat. Bezeichnet ind den Fixpunktindex in P , so gilt als Folge der Homotopieinvarianz

$$\text{ind}(T, B_R(0) \cap P) = \text{ind}(L, B_R(0) \cap P)$$

und $\text{ind}(L, B_R(0) \cap P) = \text{ind}(0, B_R(0) \cap P)$, $0 = \text{Nullabb.}$,

da $\lambda Lu \neq u$ für alle $u \neq 0$ und $\lambda \in [0, 1]$. Damit gilt im Fall (a)

$$\text{ind}(T, B_R(0) \cap P) = +1.$$

(b) L habe einen Eigenwert $\bar{\lambda} > 1$ bzgl. $\bar{u} \in P$. Dann gibt es ein $r > 0$ ($r \ll 1$ für $L = T'_+(0)$ und $r \gg 1$ für $T'_+(\infty)$), so daß

$$\Phi(\lambda, u) = \lambda[Lu + \beta\bar{u}] + (1 - \lambda)Tu$$

keine Fixpunkte auf $P \cap \partial B_r(0)$ besitzt, sofern $\beta > 0$ genügend klein. Damit gilt:

$$\text{ind}(T, B_r(0) \cap P) = \text{ind}(L + \beta\bar{u}, B_r(0) \cap P).$$

Nun zeigt man: $Lu + \beta\bar{u} \neq u$ für alle $u \in P$. Damit gilt dann

$$\text{ind}(T, B_r(0) \cap P) = 0.$$

Angenommen, es gibt $u \in P \setminus \{0\}$ mit

$$Lu + \beta\bar{u} = u.$$

Dann wählt man $\tau_0 \geq 0$ mit $u \geq \tau_0\bar{u} \iff u - \tau_0\bar{u} \in P$ und $u - \tau\bar{u} \notin P \iff u \not\geq \tau\bar{u}$ für alle $\tau > \tau_0$. Damit würde folgen

$$u = Lu + \beta\bar{u} \geq \tau_0 L\bar{u} + \beta\bar{u} = (\tau_0\bar{\lambda} + \beta)\bar{u}$$

mit $\bar{\lambda} > 1$, im Widerspruch zur Wahl von τ_0 .

Zusammenfassend gilt also:

Expansion: $0 < R < r < \infty$

$$\left. \begin{aligned} \text{ind}(T, B_R(0) \cap P) &= +1 \\ \text{ind}(T, B_r(0) \cap P) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ind}(T, B_r(0) \setminus \overline{B_R(0)} \cap P) = -1.$$

Kompression: $0 < r < R < \infty$

$$\left. \begin{aligned} \text{ind}(T, B_r(0) \cap P) &= 0 \\ \text{ind}(T, B_R(0) \cap P) &= +1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ind}(T, B_R(0) \setminus \overline{B_r(0)} \cap P) = +1.$$

In beiden Fällen gibt es also einen Fixpunkt in

$$B_r(0) \setminus B_R(0) \cap P \quad \text{bzw.} \quad B_R(0) \setminus B_r(0) \cap P.$$

Nun definieren wir die folgenden Perturbationen

(3.40) Expansion: $S(u, \lambda) := (1 - \lambda)Tu + \lambda[T'_+(\infty)u + \beta\bar{u}]$

(3.41) Kompression: $S(u, \lambda) := (1 - \lambda)Tu + \lambda T'_+(\infty)u.$

Es gilt:

(3.42) Lemma (1) *Im Falle (3.40) gibt es ein Kontinuum C in $(\text{Id} - S)^{-1}(0) \subset P \times \mathbb{R}_+$, welches*

$$(0, 0) \text{ mit } (u_*, 0)$$

verbindet (vgl. Bild 44).

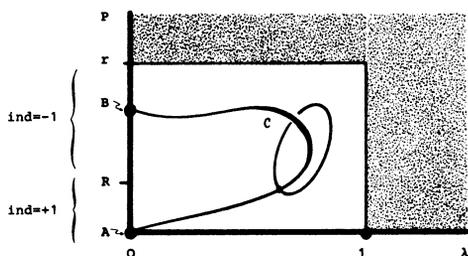


Bild 44 (Perturbation für Expansion (3.40))

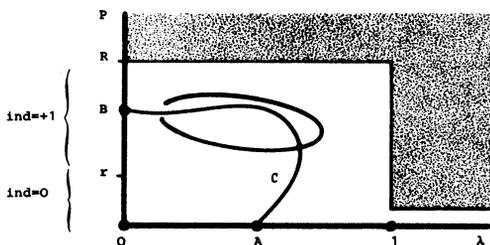


Bild 45 (Perturbation für Kompression (3.41))

(2) Im Falle (3.41) gibt es ein Kontinuum C in $(\text{Id} - S)^{-1}(0) \subset P \times \mathbf{R}_+$, welches

$$\{0\} \times \mathbf{R}_+ \text{ mit } (u_*, 0)$$

verbindet (vgl. Bild 45).

Wir geben eine Beweisidee.

Fall (3.40): Das Problem $S(u, \lambda) = u$ hat ‚a priori Schranken‘ und es ist $S(u, 1) \neq u$ für alle $u \in P$, falls $\beta > 0$ nur genügend klein gewählt wird. Sei nun

$$K = (\text{Id} - S)^{-1}(0) \cap (B_r(0) \cap P) \times [0, 1].$$

Dann ist K kompakt. Sei

$$B = K \cap ((B_r(0) \setminus B_R(0)) \cap P) \times \{0\} \neq \emptyset$$

und $A = (0, 0)$.

Die Annahme, es gibt kein Kontinuum von A nach B , führt man mit (1.3) und der verallgemeinerten Homotopieinvarianz des Fixpunktindex zu einem Widerspruch (vgl. Bild 2, Bild 3 und (2.18)).

Fall (3.41): Der Unterschied zum vorher diskutierten Fall besteht darin, daß man hat

$$S(0, \lambda) = 0 \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbf{R}_+.$$

Man kann aber analog zu (3.40) schließen, wenn man B wie oben und

$$A = \{0\} \times [0, 1]$$

setzt. In diesem Falle gibt es in $(\text{Id} - S)^{-1}(0)$ ein Kontinuum, welches von $\{0\} \times [0, 1]$ verzweigt, da $\text{ind}(T, 0) = 0$ und $\text{ind}(T'_+(\infty), 0) = +1$.

Prinzipien, wie (3.39) spielen für das Studium der Existenz positiver Lösungen elliptischer Randwertaufgaben eine große Rolle (vgl. [9,41]):

$$(3.43) \quad \begin{cases} Lu + \lambda f(u) = 0 & \text{in } \Omega \subset \mathbf{R}^N \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Dabei ist $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ stetig. Diskretisiert man (3.43) etwa mit einem finiten Differenzenverfahren, so erhält man als numerische Approximation

$$Ax - \lambda h^2 F(x) = 0$$

mit $h =$ Maschenweite der Diskretisierung, $A \in GL(\mathbf{R}^n)$ und $F(x) = (f(x_1), \dots, f(x_n))^T$. Es gilt dann

$$A^{-1}(\mathbf{R}_+^n) \subset \mathbf{R}_+^n$$

und mit $f(s) = m_0 s + \psi_0(s)$ und $f(s) = m_\infty s + \psi_\infty(s)$

$$(\psi_0(s)/s) \rightarrow 0 \quad \text{für } s \rightarrow 0_+, \quad \psi_\infty(s)/s \rightarrow 0 \quad \text{für } s \rightarrow +\infty$$

hat man für das Fixpunktproblem

$$x = h^2 \lambda A^{-1} F(x)$$

die Linearisierungen $h^2 \lambda_{m_0} A^{-1}$ bei 0 und $h^2 \lambda_{m_\infty} A^{-1}$ bei ∞ . Damit kann man die oben beschriebenen Perturbationen realisieren (unter geeigneten Voraussetzungen an die Eigenwerte).

(3.44) d-Homotopie und Verzweigung von ∞

Abschließend wollen wir noch kurz skizzieren, wie die der d-Homotopie (3.13) zugrunde liegende Idee einen einfachen Zugang zu Verzweigung von ∞ bei abstrakten Operatorproblemen gibt. Es sei das Problem

$$(3.45) \quad u - \lambda G(u) = 0, \quad u \in E = \text{Banachraum},$$

vorgelegt, und G erfülle die folgenden Voraussetzungen

- G sei kompakt auf beschränkten Mengen von E
- G sei asymptotisch linear, d. h. es gibt eine lineare Abbildung $L : E \rightarrow E$ mit

$$\frac{\|G(u) - Lu\|}{\|u\|} \rightarrow 0 \quad \text{mit } \|u\| \rightarrow \infty$$

Dann kann man schreiben

$$G(u) = Lu + \Phi(u)$$

mit $\Phi(u)/\|u\| \rightarrow 0$ für $\|u\| \rightarrow \infty$.

– λ_∞ sei ein charakteristischer Wert ungerader Multiplizität von L (L ist ein kompakter Operator).

Unter diesen Voraussetzungen hat das Problem $u - \lambda G(u) = 0$ Verzweigung von ∞ in λ_∞ . Der klassische Beweis von P. R a b i n o w i t z [60] verläuft so, daß man die Transformation

$$v := u/\|u\|^2 \quad (\text{„Inversion am Einheitskreis“})$$

studiert. Stattdessen wählen wir ein $w \in E \setminus \{0\}$ und betrachten das perturbierte Problem

$$(3.46) \quad u - \lambda G(u) + \mu w = 0 \iff v - \frac{\lambda G(\mu v)}{\mu} + w = 0, \quad v = u/\mu$$

Aus den Voraussetzungen folgt, daß für $|\mu| \gg 1$ (3.46) als kleine Störung des linearen Problems

$$(3.47) \quad v - \lambda Lv + w = 0$$

aufgefaßt werden kann, und daß (3.46) ‚a priori Schranken‘ für λ fest (aber kein charakteristischer Wert von L) auf beschränkten μ -Intervallen besitzt.

Damit gilt für alle $R \gg 1$:

$$\begin{aligned} & \deg(\text{id} - (\lambda_\infty \pm \epsilon)G + \mu w, B_R(0), 0) \\ &= \deg(\text{id} - (\lambda_\infty \pm \epsilon)L + \mu w, B_R(0), 0) \\ &= \deg(\text{id} - (\lambda_\infty \pm \epsilon)L, B_R(0), 0). \end{aligned}$$

Da λ_∞ von ungerader Multiplizität ist, folgt wie üblich

$$\deg(\text{id} - (\lambda_\infty - \epsilon)L, B_R(0), 0) + \deg(\text{id} - (\lambda_\infty + \epsilon)L, B_R(0), 0) = 0,$$

und dies impliziert Verzweigung von ∞ für (3.45) über dem Intervall $(\lambda_\infty - \epsilon, \lambda_\infty + \epsilon)$.

IV Perturbationen in Gegenwart von numerischen Artefakten

Seit einigen Jahren beginnt man zu verstehen, daß die numerische Analyse *nichtlinearer* Differentialgleichungen neben den wichtigen klassischen Problemen der

- Effizienz von Algorithmen und der
- Konvergenz von Approximationsschemata

mit einem zunächst merkwürdigen und gerade für die Praxis bedeutenden fundamentalen Problem konfrontiert ist. Es ist dies die Herausforderung, numerische Artefakte zu verstehen und zu vermeiden (vgl. [3, 12, 13, 20, 24, 35, 45, 47, 50, 68, 69]). Erste Ansätze machen deutlich, daß zum Verständnis dieser Phänomene der Methodenrahmen der klassischen Numerik mindestens um Hilfsmittel aus der Globalen Analysis, Nichtlinearen Funktionalanalysis und Topologie erweitert werden muß. Um das klassische Problem der Konvergenz von Approximationsschemata etwas von den hier gemeinten Approximationsproblemen abgrenzen zu können, sollen zunächst zwei Beispiele vorgestellt werden, die bisher nicht in diesem Zusammenhang beachtet wurden.

(4.1) **Beispiel (Die Pohozaev-Gleichung).** Wir betrachten das nichtlineare Randwertproblem

$$(4.2) \quad \begin{cases} \Delta u + u|u|^{k-1} = 0 & \text{in } B \subset \mathbf{R}^N, \Delta = \text{Laplace-Operator} \\ u = 0 & \text{auf } \partial B \end{cases}$$

(B = offene Kugel vom Radius $R > 0$).

Im Jahre 1965 machte S. I. P o h o z a e v [54] die äußerst merkwürdige und interessante Entdeckung, daß (4.2) k e i n e Lösungen für

$$k \geq \frac{N+2}{N-2} \quad (N \geq 3)$$

besitzt, hingegen für $k < \frac{N+2}{N-2}$ ($N \geq 3$) bzw. alle $k \in \mathbf{N}$ ($N \leq 2$) stets unendlich viele Lösungen zuläßt, die man für

$$(4.2)_\lambda \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda u|u|^{k-1} = 0 & \text{in } B \\ u = 0 & \text{auf } \partial B \end{cases}$$

wie in Bild 46 schematisch darstellen kann.

Insbesondere besitzt das Problem (4.2) k e i n e ‚a priori Schranken‘ ($N \in \mathbf{N}$). Diskretisiert man $(4.2)_\lambda$ etwa mit einem finiten Differenzenansatz (auf einem äquidistanten Gitter), so erhält man das System:

$$(4.3) \left\{ \begin{array}{l} Ax - \lambda h^2 F(x) = 0, \quad \lambda h^2 = \mu \\ \frac{1}{h^2} Ax \text{ entspricht der Diskretisierung von } \Delta u \text{ zusammen mit } u = 0 \text{ auf } \partial B. \\ x = (x_1, \dots, x_n) \text{ Diskretisierung von } u \text{ in einem Gitter der Maschenweite } h \\ n = \text{Anzahl der Gitterpunkte in } B; F(x) = ((x_1)^k, \dots, (x_n)^k)^T, (x_i)^k = k\text{-te Potenz von } x_i. \end{array} \right.$$

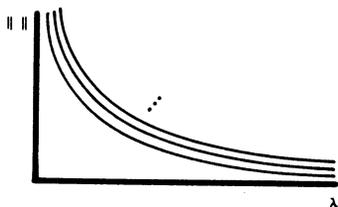


Bild 46 (Lösungen von (4.2)_λ)

Man zeigt leicht, daß für alle $\mu > 0$ (4.3) (im Gegensatz zu (4.2)) ‚a priori Schranken‘ besitzt (vgl. [47]) und kann deshalb z. B. für $k \equiv 0 \pmod{2}$ entlang der Perturbation

$$(4.4) \quad \phi(x, \mu) = \begin{cases} Ax - \mu F(x), & 0 \leq \mu \leq a \\ \frac{\mu - b}{a - b} (Ax - aF(x)) - \frac{a - \mu}{a - b} x, & a \leq \mu \leq b \\ -x, & b \leq \mu \end{cases}$$

($0 < a < b < \infty$) (vgl. [47]) die Existenz von Lösungen für (4.3) nachweisen. (Man zeigt globale Verzweigung in $\phi^{-1}(0)$ von $\{0\} \times [a, b]$ und argumentiert ähnlich, wie in (3.41), Bild 45). Ist nun $\{(x^i, \mu^i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Lösungen mit $\|x^i\|_\infty \rightarrow \infty$, so folgt $\mu^i \rightarrow 0$, denn

$$\begin{aligned} Ax^i &= \mu^i F(x^i) \\ \Leftrightarrow A \frac{x^i}{\|x^i\|_\infty} &= \mu^i \frac{F(x^i)}{\|x^i\|_\infty} \end{aligned}$$

Da die linke Seite beschränkt bleibt, muß auch die rechte Seite beschränkt bleiben. Da

$$\frac{F(x^i)}{\|x^i\|_\infty} \rightarrow \infty$$

folgt $\mu^i \rightarrow 0$. (Mit einem verwandten Schluß gewinnt man natürlich ‚a priori Schranken‘.) Ähnlich beweist man: Ist $\{(x^i, \mu^i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Lösungen mit $\mu^i \rightarrow \infty$, so gilt $\|x^i\| \rightarrow 0$. Zusammenfassend bedeutet dies, daß

für alle $k \in \mathbb{N}$, alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$

die Diskretisierung (4.3) Lösungen besitzt, die schematisch durch Bild 46 wiedergegeben werden. Ist aber z. B. $N = 3$ und $k \geq 5$, so hat (4.2)_λ keine Lösungen, also sind alle Lösungen von (4.4) in diesem Fall numerische Artefakte. Ist

$N = 1, 2$, so hat $(4.2)_\lambda$ für alle $k \in \mathbf{N}$ unendlich viele Lösungen. Das Lösungsverhalten von (4.2) hängt im Gegensatz zu (4.3) also stark von der Raumdimension N ab. Deshalb muß jeder Versuch, etwa Lösungen von (4.2) für $N = 3$ durch numerische Experimente anhand von Ersatzproblemen, gegeben durch $N = 1, 2$ (ohne Kenntnis der Analysis), zu studieren, völlig irreführen.

(4.5) **Beispiel** (Die Gel'fand-Gleichung). Wir betrachten das nichtlineare Randwertproblem

$$(4.6) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda \exp(u) = 0 & \text{in } B \subset \mathbf{R}^N \\ u = 0 & \text{auf } \partial B \end{cases}$$

(B = offene Kugel vom Radius 1).

Zunächst schließt man mit einem Maximumprinzip, daß alle Lösungen von (4.6) positiv in B sein müssen. Für $N = 1, 2$ ist seit langem bekannt, daß (4.6) ein Kontinuum positiver Lösungen besitzt, welches schematisch in Bild 47 wiedergegeben ist.

Im Jahre 1979 zeigten B. G i d a s, W.-M. N i und L. N i r e n b e r g [29] das lange vermutete Resultat, daß alle Lösungen von

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{in } B \subset \mathbf{R}^N \\ u = 0 & \text{auf } \partial B \end{cases}$$

radial symmetrisch sind, falls $f \in C^1$. Führt man nun Polarkoordinaten ein, so reduziert sich Problem (4.6) (u radial symmetrisch) auf

$$(4.7) \quad \begin{cases} u_{rr} + \frac{N-1}{r} u_r + \lambda \exp(u) = 0 \\ u_r(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

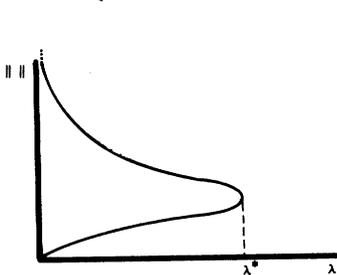


Bild 47 (Lösungen von (4.6) für $N = 1, 2$)

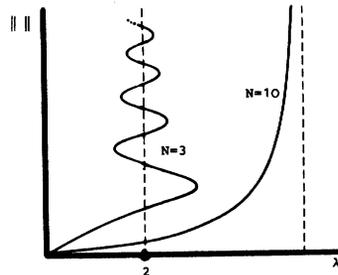


Bild 48 (Lösungen von (4.6) für $N = 3$ und $N = 10$)

Dieses Problem hatten zunächst I. M. G e l' f a n d [25] für $N = 1, 2, 3$ im Jahre 1959 und später D. D. J o s e p h und T. S. L u n d g r e n [34] im Jahre 1973 für alle $N \in \mathbf{N}$ gelöst und gefunden, daß das Lösungsverhalten von (4.6) wieder in entscheidender Weise von N abhängt. Bild 48 gibt exemplarisch die Situation für $N = 3$ und $N = 10$ wieder.

Diskretisiert man (4.6) für $N \in \mathbf{N}$ (beliebig) etwa wieder mit einem finiten Differenzenansatz, so erhält man das System

$$(4.8) \quad \begin{cases} Ax - \mu F(x) = 0 \\ \mu = \lambda h^2, \quad h = \text{Maschenweite} \\ F(x) = (\exp(x_1), \dots, \exp(x_n))^T \end{cases}$$

Offenbar besitzt (4.8) (im Gegensatz zu (4.6) für $N \geq 3$) für alle $\mu > 0$ „a priori Schranken“: Gäbe es nämlich eine Folge $\{(x^i, \mu^i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\mu^i \rightarrow \mu_* > 0$ und $\|x^i\|_\infty \rightarrow \infty$, so erhält man sofort aus

$$A \frac{x^i}{\|x^i\|} = \mu^i \frac{F(x^i)}{\|x^i\|}$$

einen Widerspruch, da die linke Seite beschränkt, aber die rechte Seite unbeschränkt wäre. Ähnlich wie für (4.3) zeigt man schließlich, daß die Lösungen von (4.8) für $\lambda \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ schematisch durch Bild 47 gegeben sind, also für $N \geq 3$ zu numerischen Artefakten Anlaß geben. Z. B. für $N = 3$ ist deshalb ein Effekt zu erwarten, wie ihn Bild 49 zeigt.

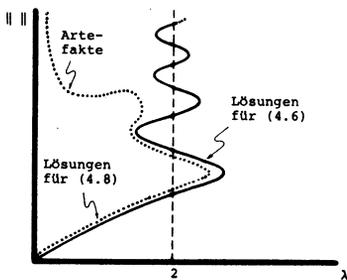


Bild 49
(Lösungen für (4.6) und (4.8), $N = 3$)

Zusammenfassend stellen wir fest, daß das Problem (4.6) ebenfalls im Hinblick auf das globale Verhalten seiner Lösungen von N (der Raumdimension) in kritischer Weise abhängt, und daß dieses kritische Verhalten sich nicht bzw. nur ungenügend auf numerische Approximationen von (4.6) vererbt. Da die kritische Grenze gerade beim Übergang von $N = 2$ zu $N = 3$ eintritt, bedeutet dies, daß man durch das numerische Studium der Probleme für $N = 1, 2$ keinerlei Rückschlüsse auf das Problem mit $N = 3$ ziehen darf. Das Studium von niederdimensionalen Ersatzproblemen ist aber eine beliebte und manchmal unausweichliche numerische Praxis. Abgesehen von dieser innermathematischen Bedeutung sei erwähnt, daß die Gel'fand-Gleichung eine grundlegende Bedeutung z. B.

- in Modellen der Plasmaphysik (vgl. [31]) und
- in Modellen für die schnelle Verbrennung von Gasen in geschlossenen Behältern (vgl. [25])

gerade für $N = 3$ hat. Damit wird deutlich, daß Konsequenzen für die Praxis aus numerischen Studien nichtlinearer Probleme ohne Kenntnis der Analysis prinzipiell fragwürdig erscheinen müssen.

In der Theorie partieller Differentialgleichungen sind die Phänomene bei der Pohozaev-Gleichung und Gel'fand-Gleichung als immanente funktional-analytische Schwierigkeiten verstanden worden. Durch das Resultat von

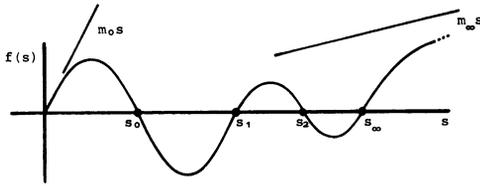


Bild 50

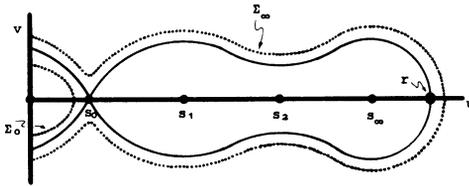


Bild 51 (Phasenportrait für (4.12) mit f aus Bild 50)

Bild 51 gibt das Phasenportrait zu f aus Bild 50. Dabei entsprechen den punktierten Trajektorien je eine Lösung auf Σ_0 bzw. Σ_∞ .

Aus dem Phasenportrait gewinnen wir die folgende für die Diskussion der Artefakte wichtige Information:

(4.13) **Lemma** (1) Für jede positive Lösung u von (4.10) gilt

$$u(t) = u(\pi - t), \quad 0 \leq t \leq \pi/2 \text{ (Symmetrie)}$$

(2) Für alle $(u, \lambda) \in \Sigma_0$ (vgl. (3.37)) gilt $\|u\|_\infty < s_0$ und für alle $(u, \lambda) \in \Sigma_\infty$ gilt $\|u\|_\infty \geq r > s_\infty$. Dabei ist r durch die Gleichung

$$\int_{s_0}^r f(s) ds = 0, \quad r > s_\infty$$

unabhängig von λ bestimmt.

(3) Die Voraussetzung $\int_{s_0}^{s_2} f(s) ds < 0$ impliziert, daß (4.10) keine positive Lösung u mit $s_0 \leq \|u\|_\infty \leq r$ besitzt.

Für die praktische Numerik bedeutet (4.13) (1), daß man alternativ zu (4.11) eine Diskretisierung von

$$(4.14) \quad \begin{cases} u_{tt} + \lambda f(u) = 0 \\ u(0) = u_t(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

untersuchen wird, die etwa durch

$$(4.15) \left\{ \begin{array}{l} A_2 x - \mu F(x) = 0 \\ \text{mit} \\ A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \circ \\ -1 & & \\ \circ & & -2 & 2 \end{bmatrix} \\ t_i = i \cdot h, i = 0, \dots, n+1, h = \pi/2, x_i = u(t_i), \\ i = 1, \dots, n, u_i(\pi/2) \sim (x_{n-1} - x_{n+1})/h \end{array} \right.$$

gegeben wird. Damit haben wir die Probleme

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1(x, \lambda) := A_1 x - \mu F(x) = 0 \\ \eta_2(x, \lambda) := A_2 x - \mu F(x) = 0 \\ x \in \mathbf{R}^n, \quad \lambda \in \mathbf{R}_+ \end{array} \right.$$

Neben der Alternative η_1 oder η_2 haben wir formal auch noch die Wahl

$$n \equiv 0 \pmod{2}, \quad n \equiv 1 \pmod{2}.$$

Wir werden sehen, daß j e d e der möglichen Wahlen zu verschiedenen globalen, numerischen Resultaten einer Approximation der positiven Lösungen von (4.10) führt. Die „ λ -Dynamik“ ändert sich in Abhängigkeit von η_1, η_2 und $n \in \mathbf{N}$. Um die entsprechenden Resultate mit den Lösungen für (4.10) vergleichen zu können, stellen wir ein Verzweigungsbild für Σ_0 und Σ_∞ für (4.10) voran (vgl. Bild 52).

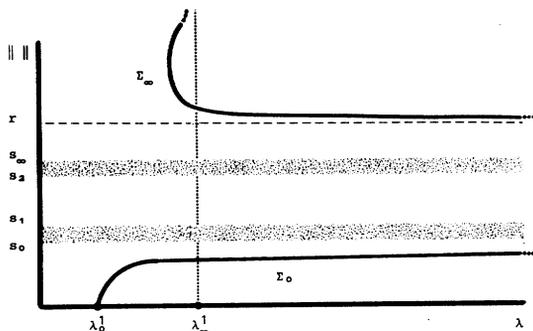


Bild 52 (Verzweigungsbild für (4.10) mit f aus Bild 50)

Insbesondere ist also Σ_∞ nach unten durch r von Null weg beschränkt. Tatsächlich kann man mit elementaren Methoden unter Verwendung des Phasenportraits (Bild 51) zeigen, daß Σ_0 und Σ_∞ durch stetige Kurven gegeben sind. In Bild 53 stellen wir Kontinua von Lösungen für $\eta_1(x, \lambda) = 0$ und $n \equiv 0 \pmod{2}$ dar. Wir unterscheiden

so kann man die Symmetrie (4.13) (1) numerisch durch $Jx = x$ charakterisieren und überprüfen.

Die Artefakte vom Typ II sind symmetrisch in diesem Sinne. Die Artefakte vom Typ I sind für η_1 zum Teil symmetrisch, zum Teil gilt $Jx \neq x$. Wählt man η_2 , so existieren die Artefakte vom Typ I und II in gleicher Weise. Artefakte vom Typ III existieren nur für η_1 .

– Artefakte vom Typ III bestehen aus positiven numerischen Lösungen (x, μ) mit $Jx \neq x$ (nicht symmetrisch). Sie formieren sich auf Kontinua, die sekundär von Σ^n in der Nachbarschaft von μ_* verzweigen. Anzahl und Typ der Sekundärverzweigung hängt von

- (i) Anzahl der Nullstellen von f und
- (ii) von $n \equiv 0 \pmod{2}$ oder $n \equiv 1 \pmod{2}$

ab.

– Ist k_0 die Anzahl der positiven Nullstellen von f , so haben $\eta_1(x, \mu) = 0$ und $\eta_2(x, \mu) = 0$ für $\mu \geq 1$ k_0^n verschiedene positive Lösungen. Ist (x, μ) eine dieser Lösungen, so gilt

$$\|x\|_\infty \sim s_i \text{ mit } f(s_i) = 0.$$

– Die Artefakte existieren für alle $n \in \mathbf{N}$ ($h \rightarrow 0$), treten mit wachsendem n jedoch erst für wachsende μ auf.

Zur Vermeidung der Artefakte besprechen wir abschließend die Perturbation

$$\phi(x, \lambda) = A_2 x - h^2 G(x, \lambda),$$

wobei $G(x, \lambda) = (g(x_1, \lambda), \dots, g(x_n, \lambda))^T$ und g die spezielle globale Perturbation von f im Sinne von (3.34) ist. Durch die Wahl von A_2 (Symmetrie) statt A_1 sind die Artefakte vom Typ III natürlich ausgeblendet. In voller Analogie zu (3.36) zeigt man die Existenz eines Kontinuums Σ^n , welches von 0 bei $(0, \mu_0^1)$ und von ∞ bei (∞, μ_∞^1) verzweigt und dort jeweils lokal eindeutig ist, also dort Lösungen der

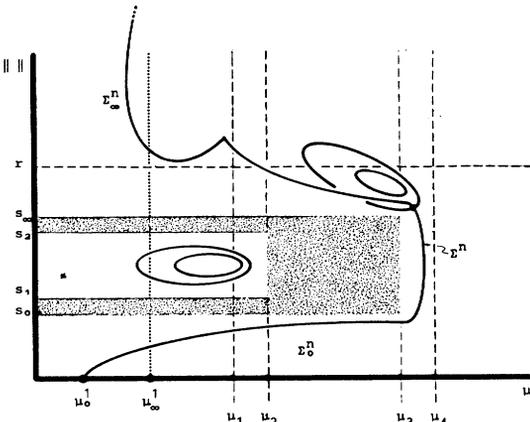


Bild 54 (Lösungsmenge der Perturbation $\varphi^{-1}(0)$)

Differentialgleichung approximiert. Allerdings können infolge der Perturbation nun Artefakte vom Typ I (über (μ_3, μ_4)) von Σ^n sekundär verzweigen. Ist $\bar{\epsilon} \in \mathbb{R}^n$ ein regulärer Wert für ϕ (PL oder C^∞), so kann man zeigen, daß weg von $\{0\} \times \mathbb{R}_+$ die numerische Lösungsmenge $\phi^{-1}(\bar{\epsilon})$ aus

einer unbeschränkten 1-dim. Mannigfaltigkeit Σ_ϵ^n

sowie endlich vielen Mannigfaltigkeiten vom Typ S^1

besteht. Verwendet man also einen Kontinuitätsalgorithmus (etwa den in II. besprochen) zur Berechnung von Σ_ϵ^n , so gelangt man von den trivialen Lösungen $(0, \mu)$ über Lösungen (x, μ) , die Σ_0^n approximieren, schließlich notwendig zu Lösungen (x, μ) , die Σ_∞^n approximieren. Dabei sind Algorithmen, die auf II. aufbauen, deshalb von Interesse, da sie nicht die Wahl eines regulären $\bar{\epsilon}$ voraussetzen. Insgesamt gibt also ϕ Anlaß zu einer Selektionsprozedur, die die Artefakte (versammelt auf den S^1 -Komponenten) ausblendet.

Neben diesem Zugang, der wesentlich globale Information verwertet und natürlich im Hinblick auf numerische Effizienz noch recht fragwürdig erscheinen muß, sind natürlich in dem speziellen Fall der *gewöhnlichen Differentialgleichung* (4.10) auch Ansätze denkbar, die sich die Möglichkeiten einer adaptiven Schrittweitensteuerung nutzbar machen, vgl. [19]. Der Perturbationsansatz ist allerdings ohne Einschränkung für numerische Approximationen partieller Differentialgleichungen gültig.

Numerische Artefakte, die mit den hier diskutierten verwandt sind, wurden auch bei anderen Problemen, etwa beim Studium periodischer Lösungen von Differentialgleichungen mit Zeitverzögerung gefunden (vgl. [45]).

References

- [1] Alexander, J. C.: The topological theory of an embedding method, Continuation Methods. H. Wacker (ed.). New York: Acad. Press 1978
- [2] Alexander, J. C.: A primer on connectivity. University of Maryland TR 80-54a, 1980
- [3] Allgower, E. L.: On a discretization of $y'' + \lambda y^k = 0$. Proc. Conf. Roy. Irish Acad., J. J. H. Miller (ed.), New York: Academic Press 1975, 1-15
- [4] Allgower, E. L.: A survey of homotopy methods for smooth mappings. In: [6], 1-29
- [5] Allgower, E. L.; Georg, K.: Simplicial and continuation methods for approximating fixed points and solutions to systems of equations. SIAM Review 22 (1980) 28-85
- [6] Allgower, E. L.; Glashoff, K.; Peitgen, H. O. (eds.): Numerical Solution of Nonlinear Equations. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1981. = Lecture Notes in Mathematics 878
- [7] Alligood, K.: Homological indices and homotopy continuation, Ph. D. Thesis. Univ. of Maryland, 1979
- [8] Amann, H.: Lectures on some fixed point theorems, Monografias de Matemática. IMPA Rio de Janeiro 1974
- [9] Amann, H.: Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces. SIAM Review 18 (1976) 620-709
- [10] Amann, H.; Weiss, S.: On the uniqueness of the topological degree. Math. Z. 130 (1973) 39-54
- [11] Beyn, W.-J.: Lösungswege nichtlinearer Randwertaufgaben und ihre Approximation mit dem Differenzenverfahren. Univ. Konstanz, 1981

- [12] Beyn, W.-J.; Lorenz, J.: Spurious solutions for discrete superlinear boundary value problems, prepr. 1981
- [13] Bohl, E.: On the bifurcation diagram of discrete analogues for ordinary bifurcation problems. *Math. Meth. Appl. in the Sci.* **1** (1979) 566–571
- [14] Bröcker, T., Jänich, K.: Einführung in die Differentialtopologie. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1973
- [15] Brouwer, L. E. J.: Beweis der Invarianz der Dimensionszahl. *Math. Ann.* **70** (1911) 161–165
- [16] Brouwer, L. E. J.: Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* **71** (1912) 97–115
- [17] Crandall, M. G.; Rabinowitz, P. H.: Bifurcation from simple eigenvalues. *J. Functional Anal.* **8** (1971) 321–340
- [18] Deuffhard, P.: A modified continuation method for the numerical solution of nonlinear two-point boundary value problems by shooting techniques. *Numer. Math.* **26** (1976) 327–343
- [19] Deuffhard, P.: A step size control for continuation methods and its special application to multiple shooting techniques. *Numer. Math.* **33** (1979) 115–146
- [20] Doedel, E. J.; Beyn, W.-J.: Stability and multiplicity of solutions to discretizations of nonlinear ordinary differential equations. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.* **2** (1981) 107
- [21] Eaves, B. C.: A short course in solving equations with PL homotopies. *SIAM-AMS Proc.* **9** (1976) 73–143
- [22] Eaves, B. C.; Scarf, H.: The solution of systems of piecewise linear equations. *Math. Operations Res.* **1** (1976) 1–27
- [23] Eisenack, G., Fenske, C.: Fixpunkttheorie. Mannheim – Wien – Zürich: Bibliographisches Institut 1978
- [24] Gaines, R.: Difference equations associated with boundary value problems for second order nonlinear ordinary differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.* **11** (1974) 411–434
- [25] Gel'fand, I. M.: Some problems in the theory of quasilinear equations. *Uspehi Mat. Nauk* **14** (1959); *Amer. Math. Soc. Transl.* **29** (1963) 295–381
- [26] Georg, K.: A numerically stable update for simplicial algorithms. In: [6], 117–127
- [27] Georg, K.: Numerical integration of the Daidenko equation. In: [6], 128–161
- [28] Georg, K.: On tracing an implicitly defined curve by quasi-Newton steps and calculating bifurcations by local perturbations. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.* **2** (1981) 35
- [29] Gidas, B.; Ni, W. M.; Nirenberg, L.: Symmetry and related properties via the maximum principle. *Commun. Math. Phys.* **68** (1979) 209–243
- [30] Golubitsky, M.; Schaeffer, D.: A theory for imperfect bifurcation via singularity theory. *Commun. Pure Appl. Math.* **32** (1979) 21–98
- [31] Hagenow, K. U.; Lackner, K.: On the numerical solution of MHD equilibrium with axisymmetry. *Proc. Third International Symposium on Toroidal Plasma Confinement*, Garching 1973
- [32] Hirsch, M. W.: A proof of the nonretractability of a cell onto its boundary. *Proc. Amer. Math. Soc.* **14** (1963), 364–365
- [33] Hopf, H.: Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. *Math. Ann.* **104** (1931) 637–667
- [34] Joseph, D. D.; Lundgren, T. S.: Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **49** (1973) 241–269
- [35] Jürgens, H.; Peitgen, H. O.; Saupe, D.: Topological perturbations in the numerical study of nonlinear eigenvalue and bifurcation problems, *Proc. Symp. Analysis and Computation of Fixed Points*, S. M. Robinson (ed.). New York: Academic Press 1980, 139–181
- [36] Kearfott, R. B.: A derivative-free arc continuation method and a bifurcation technique. In: [6], 182–198
- [37] Keller, H. B.: Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems, *Applications of Bifurcation Theory*, P. H. Rabinowitz (ed.). New York: Academic Press 1977, 359–384
- [38] Keller, H. B.: Global homotopies and Newton methods, *Recent Advances in Numerical Analysis*, C. de Boor and G. H. Golub (eds.). New York: Academic Press 1978, 73–94

- [39] Keller, H. B.: Constructive methods for bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1979. = Lecture Notes in Mathematics 704, 241–251
- [40] Kellogg, R. B.; Li, T. Y.; Yorke, J.: A constructive proof of the Brouwer fixed point theorem and computational results. *SIAM J. Numer. Anal.* **4** (1976) 473–483
- [41] Krasnosel'skii, M. A.: Positive solutions of Operator Equations. Groningen: P. Noordhoff 1964
- [42] Kuratowski, K.: Topologie II. Warsaw 1950
- [43] Leray, J.; Schauder, J.: Topologie et equations fonctionelles. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **51** (1934) 45–78
- [44] Milnor, J. W.: Topology from the Differentiable Viewpoint. Charlottesville, VA: Univ. Press of Virginia 1969
- [45] Nussbaum, R. D.; Peitgen, H. O.: Special and spurious periodic solutions for $\dot{u}(t) = \lambda f(u(t-1))$, (eingereicht)
- [46] Peitgen, H. O.; Prüfer, M.: The Leray-Schauder continuation Method is a constructive element in the numerical study of nonlinear eigenvalue and bifurcation problems. *Proc. Conf. Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1980.* = Lecture Notes in Mathematics 730, 326–409
- [47] Peitgen, H. O.; Saupe, D.; Schmitt, K.: Nonlinear elliptic boundary value problems versus their finite difference approximations: numerically irrelevant solutions. *J. reine angew. Math.* **322** (1981) 74–117
- [48] Peitgen, H. O.; Schmitt, K.: Perturbations topologiques globales des problèmes non linéaires aux valeurs propres. *C. R. Acad. Sc. Paris* **291** (1980) 271–274
- [49] Peitgen, H. O.; Schmitt, K.: Global topological perturbations of nonlinear elliptic eigenvalue problems, (eingereicht)
- [50] Peitgen, H. O.; Schmitt, K.: Positive and spurious solutions of nonlinear eigenvalue problems, In: [6], 275–324
- [51] Peitgen, H. O.; Schmitt, K.: Global analysis of two parameter elliptic eigenvalue problems
- [52] Peitgen, H. O.; Schmitt, K.: Unfoldings and secondary bifurcations for two point boundary value problems
- [53] Peitgen, H. O.; Siegbert, H. W.: An $\bar{\epsilon}$ -perturbation of Brouwer's definition of degree, *Proc. Conf. Théorie des Points Fixes, E. Fadell and G. Fournier (eds.)*. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1981. = Lecture Notes in Mathematics 886, 331–366
- [54] Pohozaev, S. I.: Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. *Soviet Math. Dokl.* **6** (1965) 1408–1411
- [55] Pontryagin, L. S.: Smooth manifolds and their applications in homotopy theory. *AMS Transl., Ser. 2, II*, 1959, 1–114
- [56] Prüfer, M.: Simpliciale Topologie und globale Verzweigung, *Diss. Univ. Bonn* 1978
- [57] Prüfer, M.: Calculating global bifurcation, *Continuation Methods*, H. Wacker (ed.). New York: Academic Press 1978, 187–214
- [58] Rabinowitz, P. H.: Some global results for nonlinear eigenvalue problems. *J. Funct. Anal.* **7** (1971) 487–513
- [59] Rabinowitz, P. H.: Some aspects of nonlinear eigenvalue problems. *Rocky Mountain J. Math.* **3** (1973), 162–202
- [60] Rabinowitz, P. H.: On bifurcation from infinity. *J. Differential Equations*, **14** (1973) 462–475
- [61] Saupe, D.: On accelerating PL continuation algorithms by predictor corrector methods. *Math. Programming* **23** (1982) 87–110
- [62] Saupe, D.: Beschleunigte PL Kontinuitätsmethoden und periodische Lösungen von parametrisierten Differentialgleichungen mit Zeitverzögerung. *Diss. Univ. Bremen* 1981
- [63] Scarf, H.: The approximation of fixed points of a continuous mapping. *SIAM J. Appl. Math.*, **15** (1967) 1328–1343
- [64] Schwetlick, H.: Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen. München – Wien: R. Oldenbourg 1979
- [65] Seydel, R.: Numerical computation of branch points in ordinary differential equations. *Numer. Math.* **32** (1979) 51–68
- [66] Siegbert, H. W.: Some historical remarks concerning degree theory. *Amer. Math. Month.* **88** (1981) 125–139

- [67] S p e r n e r , E.: Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. Abh. a. d. Math. Sem. d. Univ. Hamburg 6 (1928) 265–272
- [68] S p r e u e r , H.; A d a m s , E.: Pathologische Beispiele von Differenzenverfahren bei nichtlinearen gewöhnlichen Randwertaufgaben. ZAMM 57 (1977) T304–T305
- [69] S t e p h e n s , A. B.; S h u b i n , G. R.: Multiple solutions and bifurcation of finite difference approximations to some steady state problems of fluid dynamics. Prepr. 1981
- [70] T o d d , M. J.: The Computation of Fixed Points and Applications. Heidelberg – New York: Springer 1976. = Springer Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 124
- [71] T o d d , M. J.: Numerical stability and sparsity in piecewise-linear algorithms, Proc. Conf. Analysis and Computation of Fixed Points, S. M. Robinson (ed.). New York: Academic Press 1980, 1–24
- [72] W a c k e r , H.: A summary of the developments on imbedding methods, Continuation Methods. New York: Academic Press 1978, 1–36
- [73] W e b e r , H.: On the numerical approximation of secondary bifurcation problems. In: [6], 407–425
- [74] W h y b u r n , G. T.: Topological Analysis, Princeton Math. Series. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press 1958

Prof. Dr. H.-O. Peitgen
Universität Bremen
Fachbereich Mathematik
Postfach 330 440
2800 Bremen 33

(Eingegangen: 31. 10. 1981)

Buchbesprechungen

Serre, J.-P., *Trees*, Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1980, IX, 142 pp, cloth, DM 48,-

Das Buch ist eine Übersetzung aus dem Französischen, es erschien im Original 1977 als *Astérisque* no. 46 unter dem Titel „Arbres, Amalgames, SL_2 “, und vieles davon ist schon in einem vervielfältigten Manuskript aus dem Jahre 1969 enthalten, das H. Bass nach einer Vorlesung von Serre schrieb und ergänzte. Der französische Titel gibt den Inhalt genauer wieder: das Buch besteht aus zwei etwa gleich langen Kapiteln mit den Überschriften „Trees and Amalgams“ bzw. „ SL_2 “.

Es beginnt mit einer allgemeinen Definition von „Amalgam“ und für den Fall einer Einbettung einer Gruppe in eine Familie von Gruppen werden Normalformensätze (nach v. d. Waerden) bewiesen. § 2 bringt Grundlagen über Graphen, insbesondere Bäume. Danach (§§ 3 und 4) werden inversionsfreie Operationen von Gruppen auf Graphen betrachtet und die beiden „Grundphänomene“ bewiesen:

- 1) Eine Gruppe ist genau dann frei, wenn sie auf einem Baum frei operiert (als Korollar bekommt man den Satz von Schreier: Jede Untergruppe einer freien Gruppe ist frei).
- 2) Eine Gruppe ist genau dann amalgamiertes Produkt $G_1 *_A G_2$, wenn sie auf einem Baum operiert und eine Strecke (Kante mit zwei Ecken) als Fundamentalbereich besitzt. Die Gruppen G_i und A sind dabei die Stabilisatoren der Ecken bzw. der Kante.

Nun (§ 5) kann der allgemeine Fall einer (inversionsfreien) Operation einer Gruppe auf einem Baum untersucht werden (der von Bass stammt): Man kann die Gruppe als sog. „Fundamentalgruppe eines Graphen von Gruppen“ darstellen, d. h. man kann sie aus Stabilisatoren durch Amalgamationen und HNN-Erweiterungen rekonstruieren. § 6 behandelt schließlich Fixpunkteigenschaften von solchen Operationen und liefert Aussagen, wann eine Gruppe nicht Amalgam sein kann.

Die klassischen Beweise der Anwendungen dieser Theorie, z. B. der Untergruppensätze von Schreier und Kurosch, bestehen aus oft langwierigen und nicht sehr übersichtlichen Umformungsprozessen, welche „gute“ Vertretersysteme benutzen. Der enorme Vorteil der Bass-Serre-Theorie besteht darin, daß sie solche Sätze und ihre Beweise graphisch unmittelbar einsichtig macht.

Es gibt inzwischen andere Darstellungen dieser Theorie, die sofort zu Graphen von Gruppen kommen und auch kompliziertere Anwendungen behandeln, wie etwa das Buch von W. Dicks „Trees and Projective Modules“ (Lect. Notes in Math. 790, Springer Verlag 1980), das etwa Dunwoodys „accessibility“ und „Gruppen von kohomologischer Dimension eins“ beschreibt oder der Artikel von G. P. Scott und C. T. C. Wall „Topological Methods in Group Theory“ (LMS Lect. Notes 36, Cambridge Univ. Press 1979). Der letztere stellt enge Beziehungen zu Berechnungen von Fundamentalgruppen von CW-Komplexen her und bietet dem geübten Topologen daher Vorteile. Mit erscheint aber der Zugang von Serre, der zunächst die typischen Fälle herausstellt, noch immer am einfachsten und besten.

In Serres Buch bleiben konkrete Anwendungen stets im Blickfeld, meist handelt es sich um die Gruppe SL_2 . Im ersten Kapitel taucht sie in Beispielen auf, so wird etwa die Isomorphie $SL_2(\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) *_{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ durch Operation auf einem Baum bewiesen, der Retrakt der oberen Halbebene ist – auch eine Fragestellung, die inzwischen wesentlich verallgemeinert wurde.

Im zweiten Kapitel wird dann SL_2 zum Mittelpunkt. Zuerst wird in § 1 über einem lokalen Körper ein Baum konstruiert, dessen Ecken hier als Äquivalenzklassen von Gittern defi-

nirt werden. Dieser Baum ist das einfachste Beispiel eines sog. Bruhat-Tits-Gebäudes. Die Theorie aus dem 1. Kapitel liefert eine Reihe interessanter Anwendungen, so den Satz von Ihara, daß eine torsionsfreie Untergruppe von $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ frei ist (dieser Satz war der Ausgangspunkt des Buchs), einen durchsichtigen Beweis des Satzes von Nagao, daß $SL_2(k[t])$ nicht endlich erzeugbar ist, ferner explizite Präsentationen von Gruppen wie $SL_2(\mathbb{Z}[1/p])$, p prim. Schließlich wird der Zusammenhang zu Tits-Systemen hergestellt, was Darstellungen solcher Gruppen als amalgamiertes Produkt (verallgemeinerter Art!) ihrer parabolischen Untergruppen liefert.

Man sollte betonen, daß man – von einigen Bemerkungen abgesehen – bis hierher mit erstaunlich wenig Vorkenntnissen aus Algebra auskommt. Erst im letzten Paragraphen braucht man noch Techniken wie Vektorbündel über projektiven Kurven und Homologietheorie. Er behandelt arithmetische Untergruppen von SL_2 und GL_2 über Funktionenkörpern in einer Variablen und bestimmt ihre Fundamentalbereiche bzgl. des oben genannten Baums. Damit läßt sich z. B. das Nagao-Beispiel auf allgemeinere Ringe ausdehnen.

Bei einem Autor wie Serre ist es fast überflüssig zu sagen, daß das Buch ebenso durch Eleganz wie Präzision besticht; darüberhinaus bringt es eine Fülle von Bezügen zu anderen Themen, vor allem durch die Bemerkungen und die vielen Aufgaben, die meist nicht leicht zu lösen sind, aber echte Ergänzungen bringen. Das Beste scheint mir aber zu sein, daß in diesem Buch eine Reihe neuer und interessanter Ideen in ihrer einfachsten Form, aber doch mit ihrem wesentlichen Gehalt zu finden sind.

Frankfurt

H. Behr

Goodearl, K. R., Von Neumann Regular Rings (Monographs and Studies in Mathematics Series No. 4), London – San Francisco – Melbourne: Pitman 1979, 368 pp, cased, £ 22.50

Das vorliegende Buch schließt eine wesentliche Lücke in der Lehrbuchliteratur. Das in diesem Buch dargestellte Material über reguläre Ringe hatte bisher keine lehrbuchmäßige Darstellung gefunden und war auf zahlreiche wissenschaftliche Publikationen über einen Zeitraum von ca. 40 Jahren aufgesplittert.

Im Hinblick auf diese Situation ist dem Verfasser eine erstaunlich geschlossene, umfassende und didaktisch ausgezeichnete Darstellung gelungen. Das Buch liest sich nicht nur mühelos, sondern ist auch außerordentlich anregend. Auch ein Leser, der nicht speziell an regulären Ringen interessiert ist, erhält durch die Querverbindungen zu anderen grundlegenden Begriffen der Ring- und Modultheorie neue Gesichtspunkte und Informationen. Der Überblick wird dem Leser dadurch erleichtert, daß jedem Kapitel einleitende Worte vorangestellt und historische Bemerkungen angefügt sind. Zahlreiche Beispiele tragen zum Verständnis der Begriffe bei. So ist das Buch besonders auch für Studenten geeignet; in dieser Hinsicht wären allerdings ergänzende Übungsaufgaben von Nutzen.

Da das Buch mit ca. 370 Seiten bereits recht umfangreich ist, jedoch nicht alle Ergebnisse über reguläre Ringe dargestellt werden konnten, mußte der Verfasser eine Auswahl treffen. Wie er schreibt, hat er sich im wesentlichen auf die rein ringtheoretischen Resultate beschränkt und die Teile der Theorie weggelassen, bei denen tiefergehende Hilfsmittel aus der Verbandstheorie, der Theorie der Kategorien, der Garbentheorie und der Funktionalanalysis benutzt werden müssen. Gewisse Hilfsmittel über kompakte, konvexe Mengen sind (mit Beweisen) in einem Anhang angefügt. Der Zusammenhang der regulären Ringe mit der Funktionalanalysis, der Geometrie und mit den modularen Verbänden wird in der Einleitung (ohne Beweise) dargestellt.

Die einundzwanzig Kapitel des Buches können nach Angabe des Verfassers folgendermaßen zu vier Teilen zusammengefaßt werden.

1. Teil: (Kap. 1 und 2): Grundtatsachen, insbesondere über Idempotente und projektive Moduln.

2. Teil: (Kap. 3–14): Darstellung der folgenden Typen von regulären Ringen: „Abelian regular“ (alle Idempotente sind zentral), „unit-regular“ (zu $x \in R$ gibt es Einheit $u \in R$ mit $xux = x$), „directly finite“ (aus $xy = 1$ folgt $yx = 1$), „all primitive factors are artinian“, „bounded index of nilpotence“, „comparability axiom“ (zu $x, y \in R$ gibt es Monomorphismus $xR \rightarrow xR$ oder Monomorphismus $yR \rightarrow xR$), „self-injective“, „continuous and \aleph_0 -continuous“.

3. Teil: (Kap. 15–18): Grothendieck-Gruppen für reguläre Ringe und Pseudo-Rang-Funktionen.

4. Teil: (Kap. 19–21): Komplettierung im Bezug auf eine Pseudo-Rang-Funktion.

Das Buch schließt mit einer Liste von 57 offenen Problemen und einem Schriftenverzeichnis mit 270 Nummern.

Leider ist dem Verfasser die Begeisterung für sein Buch beim Index (verständlicherweise) ausgegangen; dieser ist mehr als dürftig und sollte bei einer Neuauflage ergänzt werden.

Leider wird das an sich schöne Schriftbild des Buches durch fette, schwarze Quadrate, die wie Kleckse wirken, beeinträchtigt. Man muß doch nicht gleich „mit der Faust aufs Auge schlagen“, um dem Leser zu signalisieren, daß ein Beweis zu Ende ist. Ein weniger auffälliges, aber schöneres Zeichen tut's auch.

Wie schon anfangs zum Ausdruck gebracht, halte ich dies Buch für eine hervorragende Leistung und bin überzeugt, daß es als Standardwerk zu betrachten ist, das jeder Fachmann zur Hand haben muß. Es kann aber auch als ein interessanter und konkreter Zugang zur Theorie der Ringe und Moduln allgemein für Studenten dienen.

München

F. Kasch

Davenport, J. H., On the Integration of Algebraic Functions (Lect. Notes in Comp. Sci. 102), Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1981, 194 S., DM 21,50

In jeder Calculus-Vorlesung wird klar, daß die Integration elementarer Funktionen weit- aus weniger ein Kalkül ist als die Differentiation; sobald man den Bereich der rationalen Funktionen und einiger sorgfältig ausgewählter Klassen algebraischer und transzendenter Funktionen verläßt, kann man in der Regel damit rechnen, durch Integration eine neuartige Funktion zu erhalten, die sich aus den bekannten Funktionen nicht durch algebraische Operationen und Schachtelung gewinnen läßt. Den ersten mathematischen Nachweis dieser „Erfahrungstatsache“ führt Liouville 1833, eine neuere Darstellung findet man in dem 1948 erschienenen Büchlein von J. F. Ritt: „Integration in Finite Terms“. Doch kommt es immer wieder vor, daß Integrale elementar darstellbar sind. Für rein transzendente Integranden lassen sich diese Ausnahmefälle durch ein Verfahren von Risch behandeln, das schon mehrfach implementiert wurde. Für algebraische Integranden (d. h. abelsche Integrale) beschreibt das vorliegende Heft ein programmiertes Entscheidungsverfahren darüber, ob ein abelsches Integral „elementar“ ist oder nicht und integriert es im positiven Falle.

Solange der Integrand auf einer Riemannschen Fläche vom Geschlecht 0 lebt, also durch Substitution in eine rationale Funktion verwandelt werden kann, ist das Integral stets elementar darstellbar – fast der ganze explizite Integralkalkül lebt von dieser einen Tatsache. Den ersten interessanten Fall bilden die auf einem Torus lebenden elliptischen Integrale, die in normalisierter Form die Gestalt $\int R(x, \sqrt{f(x)}) dx$ haben mit einem doppelwurzelfreien Polynom $f(x)$ dritten oder vierten Grades, wobei R eine rationale Funktion bedeutet. In seinem Cambridge Tract über Integration berichtet Hardy 1916, daß keine Methode bekannt sei, um (wahre) elliptische Inte-

grale von (elementar darstellbaren) pseudo-elliptischen Integralen zu unterscheiden, und die Integration im letzten Fall durchzuführen; er fährt fort: „there is reason to suppose that no such method can be given“. Tatsächlich ist aber eine solche Methode, wie Risch 1970 bemerkte, im Satz von Liouville verborgen, wonach ein pseudo-elliptisches Integral (wie im rationalen Fall) bei Integration die Gestalt $\phi_0 + \sum_{i=1}^n c_i \log \phi_i$ enthält mit elliptischen Funktionen ϕ_i und (rational unabhängigen) Konstanten c_i . Der logarithmische Teil wird hierbei ganz von den Residuen des Integranden Rdx bestimmt, die Zahl n z. B. ist der Rang des von den Residuen aufgespannten Moduls; hat man für diesen eine Basis c_i gewählt, so sind auch Pole und Nullstellen der Funktionen ϕ_i wohlbestimmt bis auf einen festen Faktor der Vielfachheit, d. h. ϕ_i sind bis auf konstanten Faktoren und Potenzbildung bestimmt. Damit zerfällt das Entscheidungsproblem in zwei Teile: 1. Prüfe, ob die Residuen von Rdx durch logarithmische Terme beseitigt werden können, 2. prüfe, ob ein elliptisches Integral zweiter Gattung (d. h. residuenfrei) elementar, d. h. eine elliptische Funktion ist. Diese Analyse gilt ebenso für abelsche Integrale höheren Geschlechtes.

Die Umsetzung dieser Analyse in ein automatisches Entscheidungs- und Integrationsverfahren erfordert nun eine Vielzahl von Algorithmen, von denen einige wenige hier genannt seien. Der erste wichtige Algorithmus COATES bestimmt Funktionen mit vorgegebenen Pol- und Nullstellen auf einer Riemannschen Fläche F , genauer eine Basis der Räume $L(D)$ im Satz von Riemann-Roch. Er wurde 1970 von Coates angegeben, findet sich im Prinzip aber schon in dem Buch von Hensel-Landsberg aus dem Jahre 1901, das die Theorie der algebraischen Funktionen von Dedekind-Weber algorithmischer machte (vgl. auch W. Scharlau: Richard Dedekind 1831/1981, Vieweg, S. 131). Mit COATES läßt sich das Geschlecht einer Kurve F bestimmen, ebenso eine Basis der ganzen Differentiale, und der 2. Teil des Entscheidungsproblems lösen. Zur Lösung des 1. Teils hat man die Residuen des Integranden und eine Basis des von ihnen aufgespannten Moduls zu finden. Daraus ergeben sich dann Divisoren D_i , die geeignet vervielfacht die Divisoren der Funktionen ϕ_i werden sollen. Der 1. Teil des Entscheidungsproblems läuft schließlich darauf hinaus, festzustellen, ob die D_i Torsionspunkte auf der Jacobischen Mannigfaltigkeit zu F sind oder nicht. Die Schwierigkeit hierbei ist, daß über die Ordnung der Torsion a priori nichts gesagt werden kann.

Eine ganze Anzahl von Algorithmen wird zur Lösung dieses Torsionsproblems angeboten. Enthält der Integrand transzendente Parameter, so liefern die aus den Picard-Fuchschen Differentialgleichungen für die Perioden abgeleiteten Gauß-Manin-Operatoren wertvolle Hilfe zur Erkennung von Torsionspunkten. Gute Reduktion auf Mannigfaltigkeiten über endlichen Körpern liefert erste Abschätzungen der Torsionsordnung. Bei elliptischen Integralen hat man schnellere Methoden: Ist alles über \mathbf{Q} definiert, wird die Torsion nach Mazur durch 12 beschränkt, i. ü. hat man Algorithmen von Nagell-Lutz u. a. zur Bestimmung von Torsion.

Implementiert ist das beschriebene Verfahren bisher nur für elliptische Integrale und für den Fall, daß sich auftretende Konstanten mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen. Die ausführlich beschriebenen Beispiele (eines deckt einen Fehler in einer Integraltafel auf) zeigen manche praktische Unzulänglichkeit des Verfahrens auf, wichtige theoretische Hilfsmittel (etwa das Néron-Modell bei schlechter Reduktion) werden gar nicht benutzt. Auch in die reichhaltige Dokumentation der theoretischen Grundlagen haben sich mehrere Unklarheiten bzw. Fehler eingeschlichen, besonders trifft das für die Beschreibung der von Čebyšev gefundenen Zusammenhänge zwischen pseudo-elliptischen Integralen und Kettenbruchentwicklungen auf S. 72 zu. Dennoch ist dieses sehr informative Heft eine eindrucksvolle Demonstration der Fortschritte, die das symbolische Rechnen auf Computern in den letzten Jahren gemacht hat; beeindruckend ist die Fülle an theoretischer Mathematik, die zur Durchführung gebraucht wird; die vorhandenen Unzulänglichkeiten sind auch eine Herausforderung an die Theorie.

Massey, W. S., **Singular Homology Theory** (Graduate Texts in Mathematics, vol. 70), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1980, XII + 265, cloth, DM 49,50

Das Buch erklärt die singuläre Homologie und Kohomologie mit beliebigen Koeffizienten, die Künnethformel, Poincaré-Dualität und den Satz von de Rham. Die Darstellung ist trockener und weniger anschaulich als in dem schönen Buch „Algebraic Topology: An Introduction“ des Verfassers, und es wird oft auf konkurrierende Lehrbücher verwiesen, so z. B. für den Beweis der algebraischen Künnethformel, die elementare Topologie der Zellenkomplexe oder die Konstruktion der Čech-Alexander-Spanier Kohomologie. Der Zugang zu andern Schriften wird jedoch unter anderem dadurch erschwert, daß der Vf. die Konstruktion der singulären Homologie auf singuläre Würfel statt Simplices gründet. Der Vorteil ist, daß man so das Homotopieaxiom noch etwas einfacher als ohnehin einsieht, die Nachteile aber werden schon in diesem Buche in der Folge deutlich: Der Beweis des Ausschneidungssatzes braucht 5 Seiten und ist kaum durchschaubar, und für den Satz von Eilenberg-Zilber werden dann – ohne Vorübung – doch azyklische Modelle gebraucht. Er erstreckt sich über 12 Seiten und endet wie viele Argumente in dem Buch mit dem Satz: „The reader should have no trouble by now proving Lemma 5.5 for himself, hence we will not go through the details.“ Zum Vergleich: In dem Buch von Dold ist der Beweis des Homotopieaxioms ebenso lang und dabei ebenso ausführlich wie hier, er setzt aber die (überaus einfache und anschauliche) Kegelkonstruktion (1 Seite) voraus, und ist abstrakter und weniger direkt an die Geometrie gebunden. Dafür aber vermittelt er schon eine grundsätzliche Einsicht, die sich darin auszahlt, daß der Beweis des Ausschneidungssatzes im Wesentlichen schon mitgeliefert ist; und der vollständige Beweis des Satzes von Eilenberg-Zilber braucht bei Dold 15 Zeilen. Der Haupteinwand aber scheint mir, daß die simpliziale Kategorie (im Gegensatz zur gewürfelten) von grundsätzlicher Bedeutung für viele Gebiete der Mathematik ist: Die Realisierung einer Kategorie ist ein simplizialer Komplex, und das enthält die Barkonstruktion, den Nerven einer Überdeckung in der Konstruktion der Čech-Kohomologie und viele andere Konstruktionen, die den Zusammenhang zwischen Topologie und Algebra hergestellt haben. Jeder würfelbare Raum ist offenbar kanonisch triangulierbar – aber andersherum? Die alte Übung der Geodäten zeigt, daß das Zerlegen in Simplices eben doch etwas sehr Natürliches ist. Eine Rechtfertigung für die Einführung singulärer Würfel gab es einmal für die Konstruktion der Serre-Spektralfolge, jedoch hat hier eine geschickte Bemerkung von Dress längst Abhilfe geschaffen (Zur Spectralsequenz von Faserungen, *Inventiones math.* 3, 172–178 (1967)). Doch auch der reine Topologe wird sich mit der Darstellung des Buches nicht befreunden können. Der axiomatische Standpunkt, in dem bewundernswerten Buch von Eilenberg und Steenrod einst für die Zukunft entwickelt, hat sich inzwischen als so grundlegend wichtig erwiesen, daß man die Algebraische Topologie überhaupt als die Theorie der allgemeinen Kohomologietheorien ansehen kann. In diesem Buch findet man auf diese Entwicklung keinen Hinweis. Das ist umso bedauerlicher, als es gerade an einer Einführung in die allgemeine Kohomologietheorie fehlt, die auch für Nichttopologen verständlich, insbesondere also kurz ist und sich nicht in technischen Problemen der stabilen Homotopietheorie verliert. Dagegen ist sonst für viele Bedürfnisse auf diesem Gebiet durch vorzügliche Bücher gesorgt: Es gibt die elementare geometrisch motivierte Einführung von Wallace: *Algebraic Topology*, Pergamon Press 1961, die schönen *Lectures on Algebraic Topology* von Greenberg (Benjamin 1967), die gerade dem Nichttopologen das Wichtigste sehr schnell mitteilen. Die geschicktesten Beweise und die vollständigste Darstellung der singulären (Ko-)Homologietheorie, insbesondere Schnitttheorie, Dualitätstheorie und Fixpunkttheorie (was in dem vorliegenden Buch nicht vorkommt) findet man in dem Buch von Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer 1972, und das Buch von Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill 1966, ist eine vorzügliche Quelle für die Kohomologietheorie von Čech-Alexander-Spanier und erklärt auch die Zusammenhänge mit der Homotopietheorie. Diese Bücher sind natürlich „zu lang“, aber ein direkter Konkurrent des vorliegenden Buches ist das von Vick: *Homology Theory*, Academic Press 1973. Es ist kürzer, enthält mehr und auch mehr Motivation, geometrische Deutung, mehr erhellende Verweise auf an-

dere Gebiete, ist lebendig und anregend geschrieben, und ohnehin wird in dem vorliegenden Buch von Massey gelegentlich für Beweise auf dieses und die anderen zitierten Bücher verwiesen.

Regensburg

Th. Bröcker

Colton, D. L., *Analytic Theory of Partial Differential Equations* (Monographs and Studies in Mathematics, vol. 8), London – San Francisco – Melbourne: Pitman Publ. Ltd. 1980, 240 pp, caseed, £ 24.00

Dieses Buch über meist funktionentheoretische Aspekte partieller Differentialgleichungen erinnert in Thematik und Intention an das schöne Buch von Garabedian (*Partial Differential Equations*, John Wiley 1964). Bei näherem Studium bemerkt man aber, wie stark sich auch dieser Teil der partiellen Differentialgleichungen im letzten Jahrzehnt entwickelt hat. Der Autor hat an dieser Entwicklung selbst starken Anteil, und so wundert es nicht, daß der Leser immer wieder fast mühelos von klassischen Fragen zu neuen Ergebnissen geführt wird. Zum Inhalt:

1. *Maximum-Prinzipien*. Auf die Darstellung der klassischen Hopfschen Lemmata für elliptische Gleichungen zweiter Ordnung in zwei unabhängigen folgen parabolische Gleichungen und die Sätze von Phragmen-Lindelöf nach Protter und Weinberger; abgeschlossen wird das Kapitel durch Abschätzungen von Payne und Stakgold für die erste Eigenlösung des Laplace-Dirichlet-Problems mit einer Anwendung aus der Reaktortechnik.

2. *Ganze Lösungen elliptischer Gleichungen*. Hier werden zunächst Harnacksche Ungleichung und Liouvillescher Satz nach Protter und Weinberger für eine Gleichung zweiter Ordnung im \mathbb{R}^2 dargestellt. Sodann wird die Wellenausbreitung in inhomogenen kugelsymmetrischen Medien des \mathbb{R}^3 behandelt. Hier kombiniert der Autor Separation der Veränderlichen mit geeigneten Bergmanschen Integraltransformationen und leitet so Reihendarstellungen der Wellen her. Der letzte Teil ist eine Zusammenfassung neuerer Arbeiten des Autors und bereitet die später behandelten inversen Streuprobleme vor.

3. *Analytische Lösungen partieller Differentialgleichungen*. Dies Kapitel beginnt mit dem Satz von Cauchy-Kowalewski und seinem Beweis für das hyperbolische Cauchy-Problem im \mathbb{R}^2 mit Hilfe der zum Charakteristiken-Verfahren gehörenden Volterraschen Integralgleichung. Sodann wird der entsprechende Zugang für elliptische Cauchy-Probleme im Komplexen skizziert. Anschließend werden analytische Fortsetzbarkeit und der Approximations-Satz von Runge sowie Analytizität der Lösungen nach Garabedian und H. Lewy behandelt. Zum Abschluß wird nach Garabedian und Grushin eine Differentialgleichung ohne Lösung diskutiert.

4. *Analytische Fortsetzung*. Zunächst wird H. Lewys Methode zum Beweis des verallgemeinerten Spiegelungsprinzips und der Bergman-Vekuasche Fortsetzungssatz dargestellt, der im wesentlichen besagt, daß jede C^2 -Lösung einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung im \mathbb{R}^2 mit analytischen Koeffizienten analytisch ist und analytisch fortgesetzt werden kann. Dann wird das Spiegelungsprinzip für parabolische Gleichungen im \mathbb{R}^2 mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens im Komplexen untersucht. Es folgen R. Gilberts Enveloppenmethode und die Fortpflanzung von Singularitäten. Schließlich wird die Wärmeleitungsgleichung im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 behandelt und die Methode der analytischen Fortsetzung zur Lösung des inversen Stefan-Problems benutzt. Letzteres ist wieder neueren Arbeiten des Autors entnommen.

5. *Runges Approximationssatz*. Nach Vekua wird zunächst für eine elliptische Gleichung zweiter Ordnung im \mathbb{R}^2 mit analytischen Koeffizienten ein Integraloperator konstruiert, der holomorphe Funktionen in Lösungen der Differentialgleichung abbildet. Mit seiner Hilfe wird eine vollständige Lösungsfamilie angegeben. Dann wird die Bergmansche Kernfunktion eingeführt. Für parabolische Gleichungen im \mathbb{R}^2 und die Wärmeleitungsgleichung im \mathbb{R}^n wird die Approximierbarkeit der Lösungen mit verallgemeinerten bzw. den Wärmepolyomen selbst gezeigt. Schließ-

lich wird die Lösung äußerer Randwertaufgaben der Helmholtz-Gleichung im \mathbb{R}^3 mittels sphärischer Wellenfunktionen approximiert.

6. *Pseudoanalytische Funktionen.* Dies ist eine recht kurze Einführung in die Bers-Vekua-Theorie der verallgemeinerten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Ähnlichkeitsprinzip, Liouville-Satz und Maximum-Prinzip werden mit den klassischen Methoden behandelt. Sodann folgen Vekua-Bergman-Operator, H. Lewys Spiegelungsprinzip und einige entsprechende Verallgemeinerungen nach Chung Ling Yu.

7. *Die rückwärtige Wärmeleitungsgleichung.* Bekanntlich ist das Cauchy-Problem der Wärmeleitungsgleichung für die Vergangenheit inkorrekt gestellt und wurde deshalb für lange Zeit als nicht sinnvoll angesehen. Erst in neuerer Zeit hat man sich inkorrekt gestellten Problemen durch viele Impulse aus den Anwendungen wieder stärker zugewandt. Hier werden zwei verschiedene Regularisierungsmethoden behandelt. Motiviert durch die Methode der logarithmischen Konvexität, behandelt der Autor zuerst Tychonoffs Regularisierung und formuliert das zugehörige Optimierungsproblem. Dann werden auf Lattes und Lions zurückgehende Regularisierungen mit Hilfe von Differentialgleichungen höherer Ordnung eingeführt und Methoden von Friedman, von Gajewski, Zacharias und Showalter und schließlich von Colton und Ewing behandelt. Letztere führen auf eine pseudoparabolische Gleichung dritter Ordnung, die wieder mit analytischen Methoden gelöst wird, die in den letzten Jahren vom Autor, R. Gilbert, u. a. entwickelt wurden.

8. *Inverse Streuprobleme.* Hier werden i. w. zwei Probleme der inversen Streuthorie für kleine Frequenzen behandelt, nämlich für dreidimensionale Wellenausbreitung in inhomogenen kugelsymmetrischen Medien die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit bzw. Dichte und für zweidimensionale Probleme in homogenen Medien die Bestimmung des Streukörpers aus dem Fernfeld der gestreuten ebenen Welle. Dazu wird zunächst das Fernfeld nach C. Müller charakterisiert und dann das Problem zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit mit Hilfe der Born-Approximation auf ein Momentenproblem zurückgeführt. Zur Behandlung der zweidimensionalen inversen Probleme wird zunächst eine kurze Einführung in die klassischen C. Neumannschen Randintegralgleichungen der Potentialtheorie gegeben und der Satz von Plemelj (Theorem 8.14) bewiesen. Hier hätte ich gerne einige Referenzen auf die klassischen Originalarbeiten gesehen. Dann wird die Integralgleichungsmethode für die Helmholtz-Gleichung mit der Riemannschen Abbildungsfunktion des Außengebietes des Streuquerschnitts verknüpft und sowohl für das äußere Neumann-Problem als auch für das äußere Dirichlet-Problem jeweils ein rekursives Verfahren zur Berechnung der Laurent-Koeffizienten der Abbildungsfunktion aus den Fourierkoeffizienten des Fernfeldes hergeleitet. Dies sind neue Ergebnisse, die der Autor erst kürzlich mit Kleinman und Kress erzielt hat.

Das Buch ist sorgfältig geschrieben. Öfter werden Zwischenrechnungen dem Leser überlassen, dies wird aber immer aus dem Text deutlich klar. Jedem Kapitel schließen sich Übungsaufgaben an. Diese sind von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad; einige konnte ich schnell und ohne Hilfsmittel lösen, für einige benötigte ich z. B. Bücher über spezielle Funktionen.

Literaturhinweise und Index sind sorgfältig ausgewählt und i. a. hinreichend ausführlich.

Dies ist ein durchaus eigenwilliges Buch und wegen seiner vielen Bezüge zu konkreten Anwendungen sowie der vielen neuen Ergebnisse in einer zusammenfassenden Darstellung anregend und interessant. Ein Student im zweiten Studienabschnitt kann dieses Buch gut verstehen, aber auch Spezialisten bietet es viele Neuigkeiten. Als Vorlesungstext dürfte es ebenfalls gut geeignet sein. Die Ausstattung und der Druck sind schön. Ich bin sicher, daß dieses Buch viele Freunde finden wird.

Rolewicz, S., Funktionalanalysis und Steuerungstheorie (Hochschultext), Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1977, 10 Abb., xi + 442 S., DM 39,60

Die Steuerungstheorie physikalischer Prozesse, die durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden, hat eine Reihe von allgemeinen Aspekten, die sich mit Mitteln der Funktionalanalysis einheitlich darstellen lassen. So führt zum Beispiel die Frage nach der Ansteuerbarkeit vorgegebener physikalischer Endzustände aus ebenfalls vorgegebenen Anfangszuständen heraus auf die Untersuchung der Lösbarkeit linearer Operatorgleichungen.

Für einen Fachmann der Funktionalanalysis wie den Autor dieses Buches ist es daher reizvoll, den funktionalanalytischen Hintergrund für eine lineare Steuerungstheorie systematisch zu entwickeln und anzuwenden. Der Entwicklung dieses Hintergrundes sind die ersten vier Kapitel dieses Buches gewidmet, in denen mit großer Ausführlichkeit und unter Verwendung zahlreicher Beispiele aus den Anwendungen die Grundlagen der Funktionalanalysis dargestellt werden, die für die Steuerungstheorie bedeutsam sind. Hier hätten vielleicht zugunsten einer stärkeren Betonung der Anwendungen auf die Steuerungstheorie die Kapitel III und IV genügt, in denen die relevanten Ergebnisse aus der Theorie der linearen Operatoren in Banachräumen und die schwache Topologie behandelt werden.

In Kapitel V wird dann eine allgemeine Theorie der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit bei linearen Systemen entworfen, in die auch Optimalitätsaspekte eingehen, wie z. B. Steuerbarkeit in minimaler Zeit oder mit minimalem Aufwand. Im Zentrum der Untersuchungen steht hier ein sog. abstraktes Pontrjaginsches Maximum-Prinzip für optimale Steuerungen (vgl. Korollar V.2.7), das aber in der angegebenen Form in Spezialfällen nicht unmittelbar in die bekannte Form des Pontrjaginschen Maximum-Prinzips übergeht. Eine solche Form läßt sich aber unter den angegebenen allgemeinen Bedingungen herleiten und würde dann auch eine Beweislücke schließen, die bei der Anwendung auf endlich-dimensionale Probleme in Kapitel VI auftritt (hier ist nämlich nicht evident, wie sich die Aussage (3.11) aus (3.2) und (3.4) ergibt). Das genannte abstrakte Pontrjaginsche Maximum-Prinzip ist in einem gewissen Sinne ein Beweis für die Stärke der funktionalanalytischen Betrachtungsweise, weil es gestattet, die Reichweite seiner Gültigkeit genau abzustecken (vgl. hierzu Satz V.2.8). Interessant ist in Kapitel V auch die Rückführung zeitminimaler auf Norm-minimale Probleme. Hier muß allerdings bemerkt werden, daß die folgende Tatsache nicht genügend herausgearbeitet wird, nämlich, daß unter gewissen Voraussetzungen jede zeitminimale Steuerung auch Norm-minimal ist und damit einem Maximum-Prinzip genügt. Dieses gibt Anlaß zu einer zweiten Lücke, die beim Beweis von Satz VI.3.1' auftritt.

Das Kapitel VII ist der Anwendung auf Systeme mit verteilten Parametern gewidmet, d. h. auf physikalische Prozesse, die durch lineare partielle Differentialgleichungen beschrieben werden. Repräsentativ werden hauptsächlich eindimensionale Wärmeleitungsprobleme behandelt. Hier wird der Darstellung der Fourierschen Lösungsmethode ein breiter Raum gewidmet, so daß die Anwendung der Funktionalanalysis auf die eigentliche Steuerungstheorie recht kurz ausfällt, obwohl eigentlich erst hier die Funktionalanalysis zum Tragen kommen sollte. Für den Kenner der Steuerungstheorie bei Prozessen mit partiellen Differentialgleichungen ist aber an dieser Stelle auch bekannt, daß die wirklich tiefliegenden Ergebnisse, wie z. B. das Bang-Bang-Prinzip für zeitoptimale Steuerungen bei eindimensionalen Wärmeleitungsprozessen, nicht allein mit Funktionalanalysis gewonnen werden können, sondern sehr detaillierte Resultate der klassischen Analysis erfordern.

Trotzdem stellt das vorliegende Buch einen sehr nützlichen Beitrag zur Anwendbarkeit der Funktionalanalysis auf die Steuerungstheorie dar.

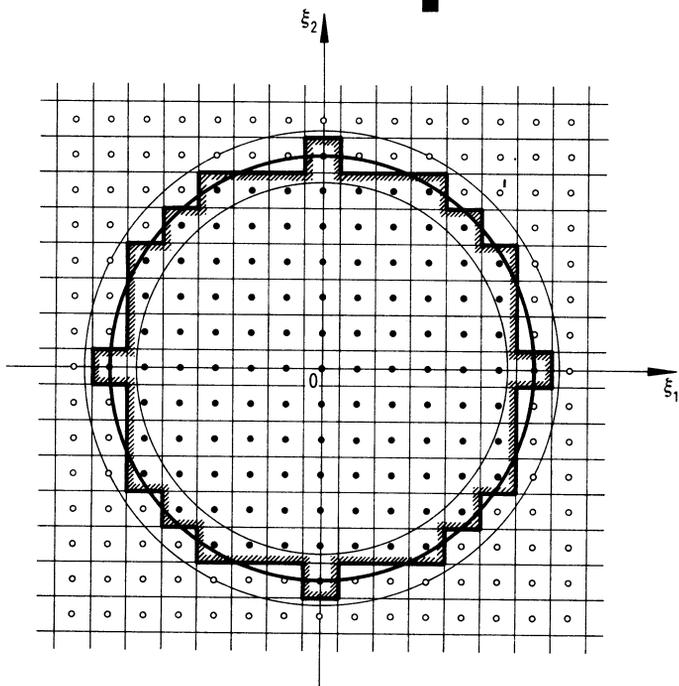
Neu

LMW/MA 73:
Mathematische Reihe
Band 73

François Fricker
Justus-Liebig-Universität, Giessen

Einführung in die Gitterpunktlehre

1982. 232 Seiten. Gebunden
sFr. 86.-/DM 94.-
ISBN 3-7643-1236-X



Mit diesem Buch erscheint erstmals eine systematische Einführung in die Gitterpunktlehre. Dabei werden sowohl klassische als auch neueste Resultate berücksichtigt. Besonderer Wert wird auf ein tieferes Verständnis der teilweise sehr scharfsinnigen Beweise gelegt. Ausführliche Anmerkungen sowie eine umfangreiche Bibliographie ermöglichen es dem fortgeschrittenen Leser, noch tiefer in die Materie einzudringen. Die Lektüre ist aber auch Studenten zu empfehlen, da die benötigten Hilfsmittel in einem Anhang besprochen werden.

Bitte bestellen Sie
bei Ihrem Buchhändler
oder beim Birkhäuser Verlag,
P.O. Box 34,
CH-4010 Basel/Schweiz
oder bei Birkhäuser Boston Inc.,
380 Green Street,
Cambridge, MA 02139/USA

Birkhäuser
Verlag
Basel · Boston · Stuttgart

Neu

Differentialgleichungen

Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen

Von Prof. Dr. phil. Dr. h. c. mult. Lothar Collatz, Universität Hamburg

6., überarbeitete und erweiterte Auflage. 1981. 287 Seiten, 173 Bilder, 75 Aufgaben mit Lösungen, zahlreiche Beispiele. 13,7×20,5 cm. ISBN 3-519-22033-4. Kart. DM 29,80. (Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Bd. 1 – Teubner Studienbücher)

Auch in der 6. Auflage der weitverbreiteten „Differentialgleichungen“ wurde der bewährte anwendungsbetonte und praxisorientierte Aufbau beibehalten. Hauptziel der Darstellung ist es nach wie vor, Abstraktion und Konkretisierung miteinander zu verbinden sowie die anschauliche Seite, d. h. Deutungen aus dem Gebiet der Mechanik und Beziehungen zu den Nachbarwissenschaften, zu betonen. Neben gewöhnlichen Differentialgleichungen und Systemen wurden in der Neuauflage insbesondere die Abschnitte über partielle Differentialgleichungen erweitert. Besonders wurde auch auf Fragestellungen eingegangen, die in neuerer Zeit für die Anwendungen wichtig geworden sind, wie Monotoniesätze, freie Randwertaufgaben und numerische Methoden.

Aus dem Inhalt: Geschlossen integrierbare Typen / Existenz- und Eindeigkeitssätze / Singuläre Linienelemente / Fundamentalsysteme / Periodische Koeffizienten / Rand- und Eigenwertaufgaben / Greensche Funktion / Kugel- und Zylinderfunktionen / Variationsrechnung / Elliptische, parabolische und hyperbolische Gleichungen / Randmaximumsatz und Monotonie / Inkorrekt gestellte Aufgaben / Freie Randwertaufgaben / Ritzsches Verfahren / Finite Elemente

Numerische Methoden der Approximation und semi-infiniten Optimierung

Von Prof. Dr. Rainer Hettich, Universität Trier, und
Dr. rer. nat. Peter Zencke, Universität Trier

1982. 232 Seiten, 51 Bilder, zahlreiche Beispiele. 13,7×20,5 cm. ISBN 3-519-02063-7. Kart. DM 24,80 (Teubner Studienbücher)

In diesem Buch werden Optimierungsprobleme betrachtet, wie sie im Zusammenhang mit verschiedenen Typen von Approximationsaufgaben auftreten. Charakteristisch ist dabei, daß die Zahl der Nebenbedingungen nicht mehr endlich ist (semi-infinite Probleme). Hauptziel ist es, den Leser mit den derzeit verfügbaren Methoden zur numerischen Behandlung linearer und nichtlinearer Probleme dieser Art vertaut zu machen. Eine kritische, durch numerische Beispiele aus verschiedenen Anwendungsbereichen ergänzte Darstellung soll helfen, die dem jeweiligen Problem angepaßte Methode auszuwählen. Um das Buch auch Anwendern zugänglich zu machen, wurde die Theorie möglichst elementar gehalten, so daß etwa Kenntnisse der Ingenieurmathematik für das Verständnis ausreichen.

Aus dem Inhalt: Anwendungsbereiche der semi-infiniten Optimierung / Approximation und Optimierung / Optimalitätskriterien erster und zweiter Ordnung, Dualität / Anwendung auf die Chebyshev-Approximation / Simplex-Verfahren, Diskretisierung, Gitterverfeinerung, Austauschverfahren, Remesverfahren / Superlinear konvergente Verfahren, Newton-Verfahren / Linearisierungsmethode, Abstiegsverfahren / Multivariate rationale Approximation, Exponentialapproximation, Parameteridentifizierung, Randwertprobleme



B. G. Teubner Stuttgart

Neu

Prinzipien der Stochastik

Von Prof. Dr. rer. nat. Hermann Dinges, Universität Frankfurt,
und Prof. Dr. rer. nat. Hermann Rost, Universität Heidelberg

1982. 294 Seiten mit 34 Bildern, 98 Aufgaben und zahlreichen Beispielen. 13,7×20,5 cm.
(Teubner Studienbücher) ISBN 3-519-02062-9. Kart. DM 34,—

Das Ziel des Buches ist es, aufbauend auf elementaren kombinatorischen Ansätzen in den verschiedensten Zusammenhängen, ein erstes Verständnis für Stochastik zu vermitteln. Von Anfang an werden dabei in die Darlegung der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie statistische Fragestellungen mit einbezogen. Das Hauptgewicht liegt auf der Entwicklung, Diskussion und Interpretation der stochastischen Begriffsbildungen (oft mit Hilfe historischer Exkurse), weniger auf einem deduktiv-axiomatischen System von Definitionen und Sätzen. Maßtheorie im benötigten Umfang wird im Text selbst bereitgestellt; es wird auf elementarem Niveau gezeigt, wie sie in stochastische Denkweisen eingeht – auch im Hinblick auf eine Fortsetzung des Studiums an Hand technisch anspruchsvoller Texte.

Aus dem Inhalt: Laplace-Mechanismen / Stichproben mit und ohne Zurücklegen / Normalapproximation der Binomialverteilung / Konfidenzintervalle für den Parameter einer Binomialverteilung / Chiquadratstest / Simulation / Zufällige Wege durch einen Graphen / Wahrscheinlichkeitsräume und ihre Interpretation / Entropie / Codierung / Meßbare Räume und Abbildungen / Entscheidungstheorie / Integrationstheorie / Bedingte Wahrscheinlichkeiten / Likelihoodfunktionen / Satz von Bayes

Statistische Qualitätskontrolle

Eine Einführung

Von Prof. Dr. rer. nat. Werner Uhlmann, Universität Würzburg

2., überarbeitete und erweiterte Auflage. 1982. 292 Seiten, 35 Bilder, 10 Tabellen, 93 Aufgaben. 13,7×20,5 cm. ISBN 3-519-12306-1. Kart. DM 38,—

(Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Bd. 7 – Teubner Studienbücher)

In der vorliegenden Neuauflage der „Statistischen Qualitätskontrolle“ wurden neuere Ergebnisse berücksichtigt und erhebliche Ergänzungen vorgenommen. In den ersten beiden Abschnitten werden alle erforderlichen Begriffe und Lehrsätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik so breit dargestellt, daß die Lektüre ohne Rückgriff auf andere Lehrbücher möglich ist. Im Hauptteil werden dann die grundlegenden Ideen und Konzepte der statistischen Kontrollverfahren vorgestellt, ihre Konsequenzen und Eigenschaften untersucht, und es wird dargelegt, wie man bei einmal gewähltem Konzept das statistische Verfahren für eine gegebene Anwendungssituation konkret festlegt. Die wesentlichen Erweiterungen sind den für die Anwendungen so wichtigen die Kosten erfassenden Verfahren gewidmet, für die sich bei der Eingangs- und Endkontrolle die Kennzeichnung „kostenoptimal“ eingebürgert hat. Für die laufende Kontrolle eines Produktionsprozesses ergibt sich durch solche Verfahren die Möglichkeit, auch die Kontrollabstände sachgerecht festzulegen.

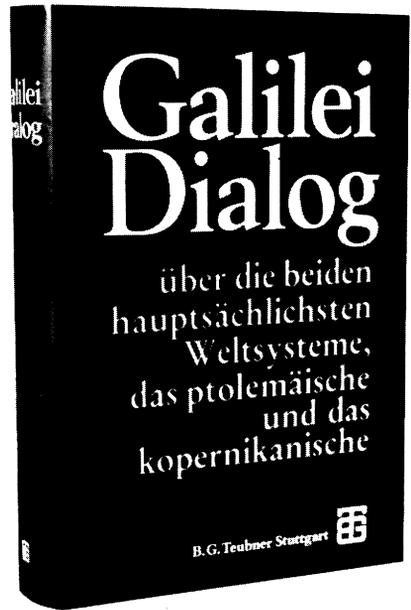
Aus dem Inhalt: Wahrscheinlichkeitstheoretische und statistische Grundlagen / Statistische Qualitätskontrolle: Eingangs- und Endkontrolle, laufende Kontrolle einer Produktion / Stichprobenpläne für ein qualitatives Merkmal: Einfache Stichprobenpläne, kostenoptimale Prüfpläne, zweifache Stichprobenpläne, sequentieller Test, Erfassung der Kosten / Stichprobenpläne für ein quantitatives Merkmal: Normalverteilung, Abweichung von der Normalverteilungs-Annahme, kostenoptimale Prüfpläne / Kontrollkarten: Kontrollkarten für normalverteilte Grundgesamtheiten, verteilungsfreie Verfahren, Kontrollkarten für qualitative Merkmale, Kosten und Kontrollabstand, kostenoptimale Prüfpläne / Kontinuierliche Stichprobenpläne: Kontinuierlicher Stichprobenplan von Dodge, Erfassung der Kosten, kontinuierlicher Stichprobenplan von Wald und Wolfowitz



B. G. Teubner Stuttgart

Neuausgabe eines Werkes
von welthistorischer Bedeutung

Galileo Galilei Dialog



über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme,
das ptolemäische und das kopernikanische

Aus dem Italienischen übersetzt und erläutert von Emil Strauss

Mit einem Beitrag von Albert Einstein und einem Vorwort sowie weiteren Erläuterungen von Stillman Drake

Nach einer Ausgabe von 1891 herausgegeben von Roman Sexl und Karl von Meyenn
1982. 748 Seiten. 14,8 × 22 cm. ISBN 3-519-02415-2. Geb. DM 85,—

Nur wenige Bücher der letzten Jahrhunderte haben soviel Aufsehen erregt und sind so bahnbrechend für den wissenschaftlichen Fortschritt geworden wie Galileis „Dialog“. Dieses Hauptwerk des genialen Mathematikers und Naturforschers ist nicht nur wissenschaftliche Streitschrift von welthistorischem Rang, sondern zugleich philosophisches Lehrbuch und literarisches Kunstwerk — eine der ganz seltenen Schöpfungen eines universalen Geistes.

Genau 350 Jahre nach dem Erscheinen der Erstausgabe und neun Jahrzehnte seit der Herausgabe der ersten und einzigen Übersetzung ins Deutsche (die lange Zeit vergriffen war), erscheint als Gedenkausgabe der vorliegende, um wesentliche Beiträge erweiterte Nachdruck der 1891 bei B. G. Teubner herausgegebenen Übersetzung von Emil Strauss.

Zusätzlich aufgenommen wurde ein Aufsatz von Albert Einstein zur Bedeutung und Persönlichkeit Galileis sowie ein für die Neuausgabe geschriebenes Vorwort von Stillman Drake, einem der kompetentesten lebenden Galilei-Forscher. Drake macht den Leser mit dem modernen Stand der Forschung vertraut und ergänzt, wo erforderlich, die Anmerkungen von Emil Strauss.

Die Bibliographie wurde neu verfaßt, insbesondere wurden zahlreiche neue Untersuchungen aufgenommen, die sich mit dem wissenschaftlichen Vermächtnis Galileis auseinandersetzen. Hinweise auf den inneren Zusammenhang der einzelnen Teile dieser Neuausgabe sowie einen kurzen Einblick in die Entwicklungen, die durch den „Dialog“ ausgelöst wurden, enthält ein Nachwort der Herausgeber, welches den schönen und bedeutsamen Band abschließt.



B. G. Teubner Stuttgart