88. Band Heft 4
ausgegeben am 22. 10. 1986

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1986

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 88/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 94,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 89 01-0
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

88. Band

B. G. Teubner Stuttgart 1986

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, Schwetzingen

Inhalt

1. Abteilung

2. Abteilung

Buchbesprechungen

3. Abteilung

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 88, Heft 4

1. Abteilung

2. Abteilung

3. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

D. Braess, R. Schaback: Helmut Werner

P. L. Butzer, W. Splettstößer, R. L. Stens: The Sampling Theorem and Linear Prediction in Signal Analysis

W. Dickmeis, R. J. Nessel, E. van Wickeren: Quantitative Extensions of the Uniform Boundedness Principle

M. Eiermann, R. S. Varga, W. Niethammer: Iterationsverfahren für nichtsymmetrische Gleichungssysteme und Approximationsmethoden im Komplexen

F. W. Gehring: Uniform Domains and the Ubiquitous Quadidisk

W. K. Hayman: Schlichte Funktionen nach de Branges

R. Heath-Brown: Differences between Consecutive Primes

M. Kneser: Max Deuring 9. 12. 1907–20. 12. 1984

H. Triebel: Einige neuere Entwicklungen in der Theorie der Funktionenräume

E. Zehnder: Periodische Lösungen von Hamiltonschen Systemen

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1 1/2, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1 1/2, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 88 (1986) 159–189

Zum 100. Geburtstag von Hermann Weyl*)

C. Müller, Aachen

I Der Lebensweg

Vor 100 Jahren, am 8. 11. 1985, wurde Hermann Weyl in Elmshorn, Schleswig Holstein, geboren. Nach seinem plötzlichen Tod am 8. 12. 1955 hinterließ er ein ein einmaliges Lebenswerk, an dem er bis zu seinem letzten Tag gearbeitet hat. Zu allen Fragen, die in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts das Bild der Mathematik prägten, hat er wesentliche Beiträge geleistet. Weyls Schriftenverzeichnis mit vielen Büchern und etwa 200 Zeitschriftenartikeln liefert ein faszinierendes Bild der mathematischen Ideen der ersten Jahrhunderthälfte mit ihren engen Beziehungen zur Physik und zur Erkenntnistheorie der Naturwissenschaften.

Von allen Mathematikern unseres Jahrhunderts unterscheidet sich Hermann Weyl eindeutig dadurch, daß er auch von Physikern und Philosophen als einer der ihren angesehen wird. Nur Henri Poincaré hat vergleichsweise anregend gewirkt, und es ist vielleicht kein Zufall, daß H. Weyl als junger Dozent 1912 einen begeisterten Nachruf auf ihn schrieb, der auch sehr viel über den Menschen und Mathematiker Hermann Weyl offenbart.

Hermann Weyl war während seines ganzen Lebens eine romantische Natur norddeutscher Prägung mit großen literarischen und künstlerischen Interessen und Fähigkeiten. Die klare, prägnante und stark suggestive Schreibweise Hilberts hat er nicht übernommen. Er war sich bewußt, daß er damit einen Nachteil in Kauf nahm, denn er schreibt später einmal, daß die unnachahmliche Schreibweise Hilberts viel zu dessen großem Erfolg beigetragen hat. Ehemalige Hörer Hilberts haben auch stets die große Wirkung des Lehrers Hilbert gerühmt. Demgegenüber ist vielfach geäußert worden, daß die Ausdrucksweise Hermann Weyls den Zugang zu seinen Gedanken eher erschwere.

Neben der Physik hat die Philosophie, namentlich die Erkenntnistheorie, eine große Rolle in Weyls Denken gespielt. Zum Verständnis dieser Komponente seines Werkes muß man sich daran erinnern, daß die „Grundlagenkrise" zu Anfang unseres Jahrhunderts ein beherrschendes Thema mathematischer Diskussionen war und kreative junge Mathematiker wie Hermann Weyl darauf bedacht waren, nur solche Arbeiten zu schreiben, die auch einer kritischen Überprüfung in dieser Hinsicht standhielten. Diese „Grundlagenwolke", die über allen neuen Entdeckungen schwebte, wurde von einem stürmisch arbeitenden Analytiker wie Weyl es zu Be-

*) Vortrag im Mathematischen Kolloquium der RWTH Aachen am 8. 12. 1985

ginn seiner Karriere war, natürlich als starke Behinderung empfunden. Die Impulse zur Beschäftigung mit Physik und Philosophie gehen eindeutig auf die Zeit als Student und Privatdozent in Göttingen zurück.

Es ist ein glücklicher Umstand, daß Hermann Weyl in seinen letzten Lebensjahren in vielen Vorträgen und Veröffentlichungen zu seinen Ideen, Hoffnungen und Enttäuschungen Stellung genommen hat, so daß eine Würdigung des eigenen Werkes vorliegt. Die Alterswürdigung des eigenen Werkes ist nicht automatisch gleich der Würdigung durch die Nachwelt zu setzen, aber für die Ideengeschichte ist ein so kompetenter Rückblick natürlich von unschätzbarem Wert.

Im Jahre 1956 erschien eine von seinen Freunden und Kollegen in Princeton und Zürich herausgegebene Auswahl seiner Arbeiten unter dem Titel Selecta. Hermann Weyl hat an deren Zusammenstellung noch persönlich Anteil genommen, und es ist interessant, daß in dieser Sammlung Arbeiten nicht enthalten sind, die zu zwei später verliehenen Nobelpreisen für Physik in sehr enger Beziehung stehen.

Ich werde mich in meinem Rückblick auf Erinnerungen an Begegnungen und Korrespondenzen aus den Jahren 1950–1955 stützen, als Hermann Weyl noch einmal auf Probleme der mathematischen Physik und der Philosophie der Naturwissenschaften zurückkam, die ihn in seiner Jugend interessiert hatten, und er mit der Vorbereitung der Selecta beschäftigt war. Ich hoffe, dabei auch einige Aspekte dieses großartigen Lebenswerkes klären zu können, die heutigen Lesern seiner Arbeiten fremd erscheinen könnten.

Sein 1905 begonnenes Studium wurde durch die Vorlesungen und Seminare von Klein, Hilbert und Minkowski bestimmt. Trotz der großen Bewunderung für seine mathematischen Lehrer folgte er nicht der Philosophie Hilberts zur Bewältigung der Grundlagenkrise der Mathematik, sondern entwickelte starke Sympathien für den Intuitionismus Brouwers und die Phänomenologie des Philosophen Husserl. Nach seiner Promotion (1908) bei Hilbert und anschließenden Habilitation (1910) mit einer Arbeit über die Begründung der Spektraltheorie singulärer Differentialoperatoren blieb H. Weyl bis 1913 als Dozent in Göttingen.

In den Jahren bis zum Beginn des ersten Weltkrieges erlebte das Mathematische Seminar in Göttingen die glänzendste Phase seiner Geschichte. Es war Hilbert gelungen, mit seiner Theorie der Integralgleichungen sehr viele Probleme der mathematischen Physik des 19. Jahrhunderts zu lösen, und es fand seit 1905 ein gemeinsames Seminar von Minkowski und Hilbert statt, in dem die Synthese zwischen den Begriffsbildungen der Geometrie Kleins (Erlanger Programm) und der speziellen Relativitätstheorie Einsteins gefunden wurde.

Die Berufung Weyls an die ETH Zürich brachte für ihn keinen Bruch der mathematischen Entwicklung, sondern eher eine Phase höchster Kreativität in einem Rahmen, der beste Voraussetzungen für naturwissenschaftliche Arbeiten bot. Erst 1929 wurden H. Weyl und seine Frau Hella, geb. Joseph, vor sehr schwierige Entscheidungen gestellt.

In Göttingen wurde David Hilbert emeritiert und H. Weyl erhielt den Ruf als Nachfolger. In Princeton war auf Anregung von A. Flexner das Institute for Advanced Study gegründet worden. Albert Einstein hatte schon eine Professur dort angenommen, und H. Weyl erhielt ebenfalls ein Angebot. In Zürich bemühten sich die Kollegen sehr, ihn zum Verbleib zu veranlassen.

Nach langem Zögern entschloß sich Weyl zur Annahme des Göttinger Rufes und schickte eine Absage nach Princeton. Er begann 1930 seine Lehrtätigkeit in Göttingen und hielt eine für ihn und seine Zeit sehr aufschlußreiche Rede vor den Studenten. Schon bald wurde klar, daß die Entscheidung falsch war, und dies nicht nur, weil seine Frau von den späteren „Nürnberger Gesetzen" betroffen war. Das Institute for Advanced Study erneuerte sein Angebot, Hermann Weyl beriet sich im Sommer 1933 mit seinen Freunden in Zürich, telegrafierte von dort seine Demission nach Berlin und reiste im Herbst mit seiner Familie nach Princeton. Die kurze Spanne als Nachfolger von Hilbert in Göttingen besitzt sehr interessante Aspekte, da in wissenschaftlicher Hinsicht eine Art Zwischenbilanz erstellt wurde. Im Alter von fast 50 Jahren begann Hermann Weyl in Princeton dann eine neue Sicht seines mathematischen Werkes, das er selbst schon als im Wesentlichen abgeschlossen angesehen hatte.

Nach 1933 war das wissenschaftliche Leben in Deutschland stark behindert und hatte viel von seiner Weltgeltung eingebüßt. Das Institute in Princeton füllte in gewisser Hinsicht für die internationale Mathematik die Lücke, die durch die Ereignisse von 1933 in Deutschland und namentlich in Göttingen entstanden war. Es muß in Princeton eine wissenschaftliche Atmosphäre geherrscht haben, die der Göttinger Situation im ersten Jahrzehnt des Jahrhunderts sehr ähnelte. Hermann Weyl hat in diesem Kreis intensiv mitgearbeitet und sich nicht auf väterliche Ermunterungen beschränkt. Von den 19 Veröffentlichungen, die in der schon erwähnten Zusammenfassung „Selecta" enthalten sind, stammt knapp die Hälfte aus der Zeit nach 1935.

Beim Lesen der in Princeton entstandenen Bücher hat man den Eindruck, daß Hermann Weyl seine Bewunderung für die großen Leistungen der europäischen Mathematik nach Amerika übertragen wollte, um auf seine Weise dazu beizutragen, daß in den dunklen Jahren das andere Deutschland nicht in Vergessenheit geriet. Neben rein mathematischen Büchern erschienen auch immer wieder Veröffentlichungen zu den Grundproblemen mathematischen Denkens, die auch heute noch nichts von ihrer Aktualität verloren haben.

Nach der Emeritierung 1951 in Princeton wurden die letzten Jahre sowohl in Zürich als auch in Princeton verlebt. In wissenschaftlicher Hinsicht wurden die Kontakte zu alten Freunden wieder aufgenommen und deutsche Neuauflagen der erfolgreichsten Bücher bearbeitet. Den Abschluß dieser wichtigen Arbeit hat er nicht mehr erlebt*).

II Mathematik und Physik

Der Versuch, ein so eminentes Werk wie es von Hermann Weyl hinterlassen wurde, in einem Überblick zu beschreiben, mag zunächst vermessen erscheinen. Bei genauer Lektüre der wichtigsten Arbeiten aus allen von Weyl behandelten Gebieten entdeckt man jedoch ein Charakteristikum dieses Werkes, das mit dem Ad-

*) Die Biographien von Constance Reid über D. Hilbert und R. Courant enthalten viele authentische Einzelheiten zum Lebensweg von Hermann Weyl, die hier nicht erwähnt werden.

jektiv universell nicht voll beschrieben wird und eine zusammenfassende Sicht geradezu erforderlich macht.

In der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts war die Fraktionierung der Wissenschaften noch nicht so weit fortgeschritten, wie das heute der Fall ist. Es war damals durchaus möglich, und Hermann Weyl hat es oft bewiesen, die Grenzen der Teilgebiete Analysis, Geometrie und Algebra zu überschreiten, und man konnte sogar in Nachbargebieten wie Physik und Philosophie an der laufenden Entwicklung mitarbeiten.

Unter Ergebnissen mathematischer Forschung finden Entdeckungen von unerwarteten Zusammenhängen sicher die höchste Bewertung. Beweise lange offener Vermutungen stellen meist eine größere Sensation dar. Es ist aber nicht selten, daß das allgemeine Interesse an der Vermutung mit deren Beweis verschwindet, wenn die Beweismethode keine neuen Aspekte eröffnet. Hermann Weyl hat sich bei einer Entdeckung nie mit dem Beweis allein begnügt, sondern immer nach Gesichtspunkten gesucht, die den gefundenen Zusammenhang vereinfachen und vertiefen. Wahrscheinlich ist hier der Grund zu finden, der seinen Werken auch heute noch einen großen Leserkreis erhält. Im Gegensatz zu seinem Lehrer und späteren Freund David Hilbert hat Hermann Weyl keine zeitlich klar abgegrenzten Schaffensperioden. Viele Themen und Methoden lassen sich durch das ganze Leben verfolgen. Er hat es selbst auch so gesehen und später einige seiner „Leitmotive“ rückblickend dargestellt.

Als seine wichtigste Entdeckung hat er den Zusammenhang zwischen den Spektralsätzen der Theorie der Integralgleichungen und der Darstellungstheorie der kontinuierlichen Gruppen bezeichnet. Die meisten Mathematiker werden diese Bewertung teilen, obwohl ihnen andere Arbeiten wie die Beiträge zur Theorie der Gleichverteilung oder wie die über Riemann hinausgehende Infinitesimalgeometrie schöner und geistreicher erscheinen. Das Glück des Mathematikers, der unvermutete Zusammenhänge von großer Tragweite zwischen bislang getrennt erscheinenden Strukturen entdeckt, hat Hermann Weyl bei seinen Arbeiten zur Gruppentheorie erlebt.

Ich möchte in meiner Schilderung des Lebenswerkes vier Themen herausgreifen, die die Breite der wissenschaftlichen Interessen und Wirkungen besonders verdeutlichen. Dies hat leider zur Folge, daß viele Arbeiten nicht erfaßt werden können. Zum Bild des Mathematikers Weyl gehört beispielsweise auch, daß er die Implikationen mathematischer Modellvorstellungen für die technischen Anwendungen immer gesehen hat und wichtige Beiträge zur Theorie der Radiowellen und zur Grenzschichttheorie der Aerodynamik von ihm stammen. Diese Arbeiten werden hier nicht referiert, auch kommen Veröffentlichungen nicht vor, in denen Arbeiten von Kollegen kommentiert, korrigiert oder vereinfacht werden.

Die von K. Chandrasekharan 1968 herausgegebenen Gesammelten Abhandlungen enthalten (außer den Büchern) alle von Weyl veröffentlichten Arbeiten in einer sehr sorgfältigen Edition. Der dort enthaltene Nachruf von A. Weil und C. Chevalley aus dem Jahre 1957 betont die Leistungen Weyls für die Algebra. Die Tendenzen Hermann Weyls zu übergreifender, die Grenzen der Disziplinen überspringender Wissenschaftlichkeit möchte ich an folgenden Themen demonstrieren:

Spektrum und Entwicklung
Zahl und Kontinuum
Fortsetzung und Zusammenhang
Symmetrien und Gruppen

1 Spektrum und Entwicklung

Aus Anlaß einer Vorlesung zum Gedächtnis an J. Gibbs hat Hermann Weyl selbst festgestellt, daß sich die mathematische Struktur der durch die Stichworte Eigenfunktionen, Eigenwerte und Entwicklungssätze gekennzeichneten Gesetzmäßigkeiten durch sein ganzes Lebenswerk hindurchzieht.

Die großartige Entdeckung von Fourier über die Entwickelbarkeit periodischer Funktionen hat sich bekanntlich nur langsam den wichtigen Platz in der Hierarchie mathematischer Gesetzmäßigkeiten erobern können, der ihr gebührt. Zu Beginn unseres Jahrhunderts hatte sich die Überzeugung gebildet, daß die Theorie der Fourier-Reihen und ihre Erweiterung zur Theorie der Fourier-Integrale nicht auf diese Fälle beschränkt bleiben muß, sondern beide Ergebnisse weitreichende Verallgemeinerungen zulassen, die zu einem vertieften Verständnis der Zusammenhänge führen. Zunächst war in der Theorie der linearen Differentialgleichungen vom Sturm-Liouville-Typ der Eindruck entstanden, daß die Entwicklungssätze mit dem oszillierenden Verhalten der Lösungen dieser Gleichungen zusammenhängen. Die Benutzung von Kleins Oszillationstheorem in älteren Darstellungen verdeutlicht diese Meinung.

Ein neues Verständnis dieser Strukturen hatte David Hilbert in der Theorie der symmetrischen Integralgleichungen gefunden, die schnell und übersichtlich die Existenz- und Entwicklungssätze der regulären Sturm-Liouville-Probleme erbrachte. Rückblickend muß man feststellen, daß dies die wohl folgenreichste Entdeckung der reinen Mathematik in diesem Jahrhundert war. Man denke nur an die Begriffe selbstadjungiert, hermitesch, Spektrum, die wichtige Teile der Analysis in die Nachbarschaft der Linearen Algebra bringen. Hermann Weyl hatte gerade sein Studium begonnen, als diese Ergebnisse und ihre noch vorhandenen Einschränkungen bekannt wurden.

Seine Dissertation „Singuläre Integralgleichungen" befaßt sich daher auch mit einem Thema dieses Problemkreises. Nach dem Vorbild von Hilbert und Hellinger wird hier für das unendliche Intervall $(0, \infty)$ eine Theorie der Integralgleichungen mit „beschränktem Kern" entwickelt. Die Begriffe Punktspektrum und Streckenspektrum werden eingeführt und an Beispielen erläutert, die auch heute noch interessant sind. Man hat aber den Eindruck, daß der Vorgang der Approximation im unendlichen Intervall noch zu allgemein angesetzt war und durch Spezialisierung ergänzt werden mußte. Wählt man als approximierende Kerne die Greenschen Funktionen des Sturm-Liouville-Operators, so kommt man zu der berühmten Habilitationsschrift „Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen". Hier wird der Übergang zu den selbstadjungierten Differentialoperatoren vollzogen. Die Begriffe Grenzkreisfall und Grenzpunktfall erscheinen erstmalig. Da Hermann Weyl selbst eine Zusammenfassung seiner Ergebnisse vorgetragen hat, möchte ich mich hier mit einem Hinweis auf diesen lesenswerten Vortrag aus dem Jahre 1950 begnügen und später noch einmal auf dieses Thema zurückkommen.

Im Vergleich zu den Originalarbeiten fällt auf, daß (1950) der Hinweis auf das Fouriersche Integraltheorem, der in den ersten Arbeiten oft wiederkehrt, jetzt ganz fehlt. Der lange, und oft beschwerliche Weg von den Fourierschen Entdekkungen zur modernen Frequenzanalyse und Frequenzsynthese war 1950 schon vergessen. In den gesammelten Abhandlungen legen aber mehrere Arbeiten Zeugnis ab von den subtilen Untersuchungen der Konvergenzprobleme in diesem Problemkreis (Das Gibbsche Phänomen).

Noch in seiner Göttinger Zeit wird H. Weyl mit einem mathematischen Problem bekannt, das von einer physikalischen Beobachtung ausgeht. Bei seinem Vortrag vor der Göttinger Mathematischen Gesellschaft hatte der große holländische Physiker H. A. Lorentz auf die Tatsache aufmerksam gemacht, daß bei der Ableitung des Strahlungsgesetzes von Jeans – dem klassischen Ausläufer der Planckschen Strahlungsformel in heutiger Ausdrucksweise – Eigenschaften der elektromagnetischen Eigenschwingungen eines Quaders mit vollkommen reflektierenden Wänden an entscheidender Stelle benutzt werden. Die exakte Lösung des Problems elektromagnetischer Eigenschwingungen war aber nur für den Fall eines Quaders explizit bekannt. Die im Rahmen der damals gerade entstehenden Quantenstatistik durchgeführten Versuche mit „Schwarzen Körpern" hatten die Plancksche Formel und damit auch das Ergebnis von Jeans mit großer Genauigkeit bestätigt. Dies galt für „Körper" vielfältiger Gestalt und nicht nur für Quader. Lorentz forderte 1910 die Mathematiker auf, dieses von der Gestalt des Hohlraumes unabhängige Verhalten der elektromagnetischen Eigenschwingungen als allgemein-gültiges Gesetz zu beweisen. Hermann Weyl spricht vom Lorentz-Postulat der Quantenstatistik.

Die von Lorentz aufgestellte Vermutung betraf das asymptotische Verhalten der Anzahl der Eigenfrequenzen unter einer Grenze T. Ist V das Volumen des betrachteten Körpers und $N_e(T)$ die Anzahl der elektromagnetischen Eigenfrequenzen ω_κ mit $0 < \omega_\kappa \leqslant T$

$$(1) \qquad N_e(T) := \sum_{0 < \omega_\kappa \leqslant T} 1$$

so gilt für einen Quader

$$(2) \qquad \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T^3} N_e(T) = \frac{1}{3\pi^2} V$$

wie man aus der expliziten Kenntnis der Eigenschwingungen schnell schließen kann. Aus den genannten experimentellen Erfahrungen schloß Lorentz, daß diese Grenzrelation für alle Gestalten von Hohlräumen gelten muß.

Kurz darauf trug P. Debye vor dem gleichen Kreis in Göttingen seine auf Überlegungen der Quantenstatistik beruhende Theorie der spezifischen Wärme vor, wo er in ähnlicher Weise die elastischen Eigenschwingungen eines Körpers benötigte. Der übliche Ansatz der Trennung der Veränderlichen führt in diesem Falle für die räumliche Abhängigkeit $v_\kappa(x)$ des Verschiebungsvektors einer Schwingung der Frequenz ω_κ zu der Gleichung

(3) $\quad a \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}_\kappa - b \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}_\kappa = -\omega_\kappa^2 \mathbf{v}_\kappa$

wobei a und b positive Konstanten sind, die die materiellen Eigenschaften des elastischen Kontinuums beschreiben. Ist N(a, b; T) die Anzahl der Eigenfrequenzen ω_κ mit $0 < \omega_\kappa \leqslant T$, so vermutete Debye aus gleichen Gründen wie Lorentz

(4) $$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T^3} N(a, b; T) = \frac{V}{6\pi^2} [a^{-3/2} + b^{-3/2}]$$

Auch dieses experimentell bestätigte Ergebnis schien den Mathematikern damals völlig unangreifbar.

Hermann Weyl hat in einer romantisch geschilderten Nacht gesehen, wie Probleme dieser Art in Angriff genommen werden können, und mehrere Arbeiten zu diesem Gegenstand geschrieben. Als wichtigste erschien ihm die Arbeit über die asymptotische Verteilung der Eigenschwingungen eines elastischen Körpers in der (4) bewiesen wird. Der hohe technische Aufwand dieser Darstellung läßt sich in diesem Überblick nicht wiedergeben. Ich möchte daher auf die schöne, auf eine Anregung von A. Sommerfeld aus dem gleichen Zeitraum zurückgehende Arbeit über die Eigenwerte einer schwingenden Membran verweisen, in der die Weylschen Ansätze einfacher zu erkennen sind (Man beachte $\lambda_\kappa = \omega_\kappa^2$). Es werden die Eigenwerte λ_κ der zweidimensionalen Helmholtzschen Schwingungsgleichung für ein endliches Gebiet J der Fläche $\|J\|$ mit glatter Berandung untersucht. Die Eigenfunktion $\varphi_\kappa(x)$, $x \in \mathbf{R}^2$ erfüllt dabei in J

(5) $\quad \Delta\varphi_\kappa + \lambda_\kappa \varphi_\kappa = 0$

$\varphi_\kappa = 0$ auf dem Rande, und

(6) $$\iint_J \varphi_\kappa^2 dx = 1$$

Werden diese Eigenwerte so geordnet, daß $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ gilt, so folgt für die Anzahl N(T) bei $T \to \infty$*)

(7) $$N(T) = \sum_{0 < \lambda_\kappa \leqslant T} 1 \sim \frac{\|J\|}{4\pi^2} T$$

Dieses Ergebnis wird mit Hilfe eines Satzes bewiesen, der von Weyl folgendermaßen formuliert wird:

> *„Ist J ein beliebiges, im Euklidischen gelegenes Gebiet und sind $J_1, J_2, J_3 \ldots$ endlich oder unendlich viele in J gelegene Gebiete, von denen je zwei keinen (inneren) Punkt gemeinsam haben, so liegen unterhalb einer beliebigen Grenze mindestens ebensoviele Eigenwerte von J als von $J_1, J_2, J_3 \ldots$ zusammengenommen."*

---

*) Das Zeichen $\sim$ wird in folgendem Sinn gebraucht: Es gilt $f(x) \sim y(x)$ falls $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{y(x)} = 1$ ist.

Der Beweis beruht auf einem Satz aus der Theorie der regulären, symmetrischen Integralgleichungen. Es seien K, K^*, und K' symmetrische Integralkerne mit $K^* = K + K'$, für die die Fredholm-Hilbertsche Theorie gilt, wobei K, K' positiv definit ist. Sind dann λ_κ^* die der Größe nach geordneten Eigenwerte von K^* und bezeichnen wir die Eigenwerte von K entsprechend mit λ_κ, so gilt für alle κ

$$(8) \qquad \lambda_\kappa \leqslant \lambda_\kappa^*$$

Dieser Satz läßt sich mit Hilfe der ebenen klassischen Potentialtheorie unter Benutzung der Greenschen Funktionen des Δ-Operators zur ersten Randbedingung auf die Gebiete J, J^*, J^{**} mit $J^* \subset J \subset J^{**}$ übertragen. Da die Eigenwerte des Differentialgleichungsproblems die Eigenwerte der Integralkerne sind, folgt dann für die J, J^* und J^{**} entsprechenden Eigenwerte λ_κ, λ_κ^*, λ_κ^{**} die Relation

$$(9) \qquad \lambda_\kappa^{**} \leqslant \lambda_\kappa \leqslant \lambda_\kappa^*$$

Wird das Gebiet nun von außen und von innen durch Gebiete approximiert, die sich aus Rechtecken zusammensetzen, so läßt sich das Ergebnis (7) beweisen, da die Eigenwerte für Rechtecke explizit bekannt sind. Diese Arbeit enthält die Grundgedanken, die dann in insgesamt 5 Arbeiten auf die verschiedenen physikalischen Situationen angewandt werden, wobei immer die mit Hilfe der Greenschen Tensoren definierten Integraloperatoren als positiv definit nachgewiesen werden, was in der Beweistechnik für die Grundgleichungen der Elastitzitätstheorie sehr aufwendig ist.

Im Jahre 1920 hat R. Courant bekanntlich einen Zugang zu diesen Problemen über die direkten Methoden der Variationsrechnung gefunden, der unter der Bezeichnung Minimum-Maximum-Verfahren bekannt geworden ist.

Courant untersucht für im Gebiet J stetige, stückweise stetig-differenzierbare Funktionen φ, die in der Nähe des Randes von J verschwinden,

$$(10) \qquad \inf \iint_J (\nabla\varphi)^2 dx \quad \text{unter der Bedingung} \quad \iint_J \varphi^2 dx = 1$$

Er zeigt analog zu den Hilbertschen Methoden bei der Lösung des Dirichlet-Problems, daß es zum Infimum λ_1 eine Funktion φ_1 gibt, die dann zweimal stetig differenzierbar ist, und der Differentialgleichung

$$(11) \qquad \Delta\varphi_1 + \lambda_1\varphi_1 = 0$$

genügt. Der n-te Eigenwert kann dann auf folgende Weise definiert werden:

Man zeigt zunächst, daß es zu fest gewählten Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ ein Infimum $\Lambda(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ so gibt, daß

$$(12) \qquad \Lambda(f_1, f_2, \ldots, f_n) \leqslant \iint_J (\nabla\varphi)^2 dx$$

für alle φ gilt, die

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\iint \varphi^2 dx = 1 \\ &\iint_J \varphi f_1 dx = \iint_J \varphi f_2 dx = \ldots = \iint_J \varphi f_n dx = 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Das Maximum dieses Minimums wird angenommen, wenn $(f_1, \dots f_n)$ mit den n ersten Eigenfunktionen übereinstimmen. Sind die n ersten Eigenwerte bekannt, so gewinnt man daher den nächsten Eigenwert durch Beachtung der Eigenschaft

$$(14) \qquad \lambda_{n+1} = \Lambda(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \geqslant \Lambda(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

Die Monotonie-Eigenschaft (9) folgt dann einfach aus der Tatsache, daß die zur Bildung der Extremwerte zugelassenen Funktionenräume ineinander enthalten sind.

Es wird die Greensche Funktion und die Theorie der symmetrischen Integralgleichungen vermieden. Die Weylschen Ergebnisse für den Fall der Membran werden voll reproduziert, und es wird sogar eine Fehlerabschätzung gewonnen, die bis vor kurzem nicht verbessert werden konnte. R. Courant hat den Weylschen Zugang als einen Umweg bezeichnet. Hermann Weyl hat das so nicht gesehen, denn die Monotonie-Eigenschaft der Eigenwerte beruht in beiden Fällen auf dem gleichen Grund und wird nach den gleichen geometrischen Gedanken ausgenutzt. Liegt die Hauptschwierigkeit bei Weyl in dem Nachweis der Existenz der Greenschen Funktionen mit den angegebenen Eigenschaften, so ist bei Courant die Annahme des Infimums durch eine zweimal-stetig differenzierbare Funktion nicht einfach zu erhalten. Später haben sich beide darauf geeinigt, die entstandene Situation als ein wichtiges Beispiel zum Satz von der Invarianz der Totalschwierigkeit anzusehen.

Im Jahre 1926 entdeckte T. Carlemann einen Zusammenhang zwischen dem asymptotischen Verhalten der Greenschen Funktionen bzw. Tensoren für große imaginäre Parameter und dem asymptotischen Verhalten der Eigenfunktionen. Er konnte für den Fall der Membran

$$(15) \qquad \sum_{0 < \lambda_\kappa \leqslant T} \varphi_\kappa^2(x) \sim \frac{T}{4\pi^2}$$

zeigen, woraus durch Integration

$$(16) \qquad \sum_{0 < \lambda_\kappa \leqslant T} 1 \sim \frac{T}{4\pi^2} \, \|J\|$$

folgt, und (7) auf anderem Wege reproduziert wird. Die Methode von Carlemann ließ sich auf räumliche Probleme übertragen und zeigte, daß das Verhalten der Eigenfunktionen asymptotisch nicht von der Gestalt des schwingenden Körpers und auch nicht vom Ort in diesem Körper abhängt.

Das asymptotische Verhalten der Eigenfrequenzen und der Eigenschwingungen der elektromagnetischen Hohlraumschwingungen, das am Anfang dieser vielfältigen Entwicklungen stand, konnte weder nach der Methode von Weyl noch nach der Methode von Courant behandelt werden und wurde erst 1961 von H. Niemeyer und mir gelöst. Der Operator rot rot **v** kann nämlich nicht als streng elliptisches System aufgefaßt werden, da er nur semidefinit ist.

Alle unter dem Stichwort Eigenwerte angeschnittenen Probleme stehen in engem Zusammenhang zur Quantentheorie, die in ihrer Entwicklungsphase

Hilbert, Weyl und Courant als ihr mathematisches Gewissen angesehen hat. Aber auch in rein mathematischer Hinsicht hatten diese Fragestellungen eine große Bedeutung. Man denke nur an die Entwicklung der Funktionalanalysis mit ihren vielfältigen Begriffsbildungen und Verzweigungen. Hermann Weyl hat sich an der Entwicklung der Funktionalanalysis nicht beteiligt. Dies hat Gründe, die eng mit seiner Auffassung der Grundlagen der Mathematik zusammenhängen.

2 Zahl und Kontinuum

Im 19. Jahrhundert war bekanntlich die alte in der griechischen Mathematik schon aufgetretene Kluft zwischen Zahl und Kontinuum wieder aufgebrochen. Die Benutzung der Zahlen zur Behandlung geometrischer Fragen nach der kartesischen Methode der Koordinaten war seit dem 17. Jahrhundert so erfolgreich gewesen, daß man die begrifflichen Schwierigkeiten, die in Euklids Elementen klar erkennbar sind, beiseite schob. Zwar spricht man im 18. Jahrhundert wiederholt von der „unbegreiflichen Mathematik" und meint das nicht nur in dem sehr vordergründigen, aber weit verbreiteten Sinn, aber eine ernsthafte Auseinandersetzung mit der Problematik hat erst im 19. Jahrhundert begonnen. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts haben die Versuche zur Überbrückung der begrifflichen Schwierigkeiten eine Intensität erreicht, von der man sich heute kaum noch eine Vorstellung macht. Die Befürchtung, daß die von der Mathematik erwartete Sicherheit der Erkenntnis erschüttert war, bewirkte natürlich mit den gleichzeitig erforderlichen Umformulierungen der physikalischen Grundvorstellungen eine geistige Unruhe, die sich auch im Werk Hermann Weyls widerspiegelt.

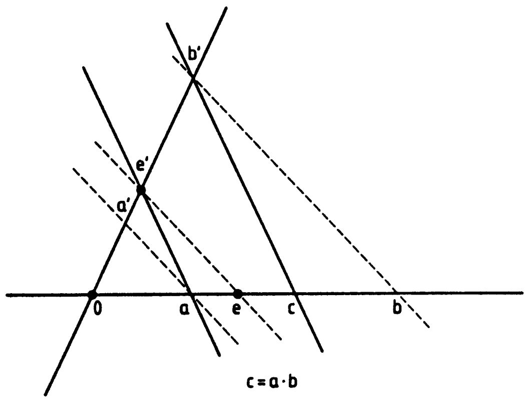
Für das Verständnis der Auswahl der Methoden in Weyls analytischen Arbeiten ist es wichtig, seine Kritik am üblichen Aufbau der Analysis zu kennen. Er hat den Folgenbegriff in der Fassung, daß jeder natürlichen Zahl eindeutig ein „Element" a_n zugeordnet ist, als unzureichend für die Schlußweisen der Analysis angesehen. So hat er mit Brouwer darauf hingewiesen, daß mit dieser Definition der Beweis des Häufungsstellensatzes für Punktfolgen nicht als gültig angesehen werden kann, da Folgen denkbar sind, für die die erforderlichen Entscheidungen, in welcher der beiden Hälften des geteilten Intervalles unendlich viele Punkte liegen, nach endlich vielen Schritten nicht gefällt werden können. Dieser Beweisgedanke ist in seiner Ausdrucksweise zu sehr dem Idealismus verhaftet und setzt voraus, daß eine Aussage „an sich" oder „vor Gott" gemacht werden kann. Die Bezeichnung „transzendent" wird in diesem Zusammenhang gebraucht.

Diese Kritik überträgt er auch auf die reellen Zahlen, die seiner Ansicht nach nicht existent sind, sondern konstruiert werden müssen, etwa über die Fundamentalfolgen. Weyl hat seine Auffassungen im Laufe seines Lebens entsprechend neuen Ergebnissen in der Überprüfung der Hilbertschen Hypothesen auch geändert. Von der Begeisterung des jungen Dozenten für die Mengenlehre ist im Alter nicht viel geblieben.

Die Grundlagendiskussion hat die ersten Jahrzehnte unseres Jahrhunderts stark geprägt, und es ist die Auffassung Weyls in Beziehung zu seinen Vorgängern, insbesondere zu Hilbert, zu sehen. In den „Grundlagen der Geometrie" hatte Hilbert auf Desargues und Pascal zurückgehend die „Streckenrechnung" des

5. Buches von Euklid zunächst in eine moderne algebraische Form gebracht, und die Polarität zwischen Zahl und Kontinuum oder besser zwischen Arithmetik und Geometrie unbeachtet gelassen, da die gegenseitige Abhängigkeit verschiedener Axiomensysteme im Vordergrund seines Interesses stand. Die Beziehungen der Axiomatik zum Zahlbegriff treten erst später auf.

Als Beispiel der Hilbertschen Grundgedanken sei eine der Konstruktionen angegeben, die aus der Geraden auf geometrischem Wege einen algebraischen Körper machen.



c = a · b

Wir wollen in der Menge der Punkte der (unteren) Geraden Verknüpfungen + und · so einführen, daß die Menge als Körper aufgefaßt werden kann, und alle Axiome des Körperbegriffes erfüllt sind. Dazu definieren wir zunächst Null und Eins durch Wahl zweier Punkte o und e, und beginnen dann mit den Verknüpfungen. Die Addition ist sehr einfach durch Parallelverschiebung entsprechender Strecken definiert, die Multiplikation ist interessanter.

Die Verbindungsgeraden aa', ee', bb' seien parallel. Die Verbindungen ae' und cb' seien ebenfalls parallel. Dann entspricht dem Punkt c das „Produkt" a · b.

Der bekannteste Beweis folgt aus dem Strahlensatz, wenn wir mit | | die Streckenlängen im üblichen Sinn bezeichnen. Dann folgt nämlich nach Konstruktion aus dem Strahlensatz

(1) $\quad |c| : |a| = |b'| : |e'| \quad$ und $\quad |b'| : |e'| = |b| : |e|$

Wir sind gewohnt, diese Streckenverhältnisse wie Zahlenquotienten zu behandeln und finden dann

(2) $\quad \dfrac{|c|}{|a|} = \dfrac{|b|}{|e|} \quad$ oder $\quad |c| \cdot |e| = |a| \cdot |b|$

Wird $|e|$ der Zahlenwert 1 zugeordnet, können wir diese „Verknüpfung von a und b" als Multiplikation der Elemente a und b deuten.

Man muß dabei beachten, daß hier wie selbstverständlich mit den Koordinaten der Zahlengeraden operiert wird. Dieses Hilfsmittel erleichtert die Betrachtungen außerordentlich, wie man sich leicht vorstellen kann, wenn man prüft, wie die Eigenschaften Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation sowie das Distributivgesetz rein geometrisch zu beweisen wären. Eine weitere geometrische Variante tritt noch dadurch hinzu, daß die „algebraischen Operationen" auf der einen Geraden nicht von der Richtung und dem Längenmaß (Wahl von e') der anderen Geraden abhängen dürfen. Bedenkt man noch, daß die entstandenen Figuren einer projektiven Abbildung unterworfen werden können, ohne daß sich an den Inzidenz-Aussagen etwas ändert, so wird klar, daß eine Fülle von geometrischen Aussagen über Geraden und ihre Schnittpunkte entsteht, deren rein geometrische Beweise an Hand von Zeichnungen mühsam sind, deren Herleitung mit Hilfe der Koordinatenrechnungen aber einfach ist.

Die heute mit den Namen Desargues, Descartes und Pascal gekennzeichnete Neubelebung der Geometrie im 17. Jahrhundert durch die analytische Koordinatenmethode von Descartes führte sehr schnell zu unerwarteten Erfolgen wie den Sätzen von Desargues und Pappus-Pascal und dem großen Gebiet der projektiven Geometrie, das heute leider fast vergessen ist. Die grundlegenden Bedenken der antiken Mathematiker gegen die Vermischung von Geometrie und Arithmetik wurden immer wieder zurückgestellt. Dies war umso leichter zu rechtfertigen, da erst diese neuen Methoden den Aufbau der neuzeitlichen Physik ermöglichten.

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts setzte dann eine Selbstkritik der Mathematik ein, die sich auf den Begriff der reellen Zahl konzentrierte. Die gelegentliche Schärfe der Polemik, von der auch Hilbert nicht verschont wurde, läßt erkennen, daß hier ein neuralgischer Punkt getroffen wurde.

H. Weyl und Brouwer waren die namhaftesten Mathematiker des 20. Jahrhunderts, die darauf aufmerksam machten, daß Arithmetik und Geometrie trotz ihrer starken durch die Algebra ausgedrückten Kopplung nicht als im Grunde gleich angesehen werden können, wie es Hilbert zunächst vermutet hatte und später zu beweisen versuchte.

Hermann Weyl knüpft hier mit seiner Kritik an und stellt fest, daß das Kontinuum nicht mit der weitverbreiteten Vorstellung „die Gerade ist die Menge ihrer Punkte" sachgerecht erfaßt wird, da ein Kontinuum immer weiter teilbar sein muß und kleinste, sozusagen letzte Teile nicht mit der Kontinuumsvorstellung vereinbar sind. Er bewundert die antike Formulierung der Gleichheit von Streckenverhältnissen, die sehr modern wirkt und den Dedekindschen Schnitt bereits vorwegnimmt.

Sind nämlich (a, b) und (a', b') zwei Streckenpaare, so sollen diese „verhältnisgleich" heißen, wenn folgendes gilt: Sind N und M natürliche Zahlen, so impliziert die obere Relation zwischen a und b jeweils die entsprechende Beziehung der unteren Zeile zwischen a' und b'

$$\begin{array}{llll} (3) & Na - Mb > 0; & Na - Mb = 0; & Na - Mb < 0 \\ & Na' - Mb' > 0; & Na' - Mb' = 0; & Na' - Mb' < 0. \end{array}$$

In der Antike wird bekanntlich darauf verzichtet, an dieser Stelle einen neuen Zahlbegriff einzuführen. Dies mag zum Teil daran gelegen haben, daß die Entdeckung der Zahlwörter und Zahlzeichen noch als eine der großen Leistungen des menschlichen Geistes gesehen wurde, die man nicht in der „Soße des Kontinuums" verlieren wollte, wie Hermann Weyl sich später einmal ausdrückte. Diese semantische Seite des Zahlbegriffes, die es erlaubt, jedes Element einer abzählbaren Menge zu individualisieren, indem ihm ein eigener Name oder ein eigenes Zeichen zugeteilt wird, schien ihm unverzichtbarer Teil des Mengenbegriffes zu sein, der seiner Meinung nach viel zu weit gefaßt wurde. In einem seiner letzten Vorträge spricht er von der Erbsünde der Mengenlehre in der Analysis, da sie die Möglichkeit der semantischen Individualisierung der Elemente nicht grundsätzlich gefordert hat.

Neben dieser philosophischen Seite der Grundlagenkrise hat er aber auch die Praxis der Mathematik gesehen, wenn er betont, daß viele auch konstruktiv gegebene Lösungsverfahren nicht verwertbar sind, wenn die verlangten Daten oder Konstruktionen nicht in finiter Form darstellbar sind. Diese Problematik ist in der heutigen numerischen Mathematik von neuer Aktualität. Es ist aber wenig bekannt, daß er in einem Vortrag über die Grundlagenkrise der Mathematik einen Beweisvorschlag für den Fundamentalsatz der Algebra gegeben hat, der vom Standpunkt des Numerikers ausgeht. In der modernen numerischen Mathematik findet der Standpunkt des „Konstruktivisten“ Weyl eine späte Rechtfertigung.

Er war mit Brouwer der Ansicht, daß man nur mit solchen Daten arbeiten sollte, die auch mit beliebig guter Annäherung bekannt sind, und er vermeidet tunlichst „A-priori-Existenzen“, die nicht über ein Konstruktionsverfahren als Grenzwert berechenbar sind. Die Hilbertsche Theorie der Integralgleichungen und namentlich auch der Beweis von E. Schmidt über die Existenz von Eigenwerten und Eigenfunktionen erfüllen diese Voraussetzungen und werden von ihm immer wieder herangezogen. Die abstrakteren Wege zur Funktionalanalysis wie die von F. Riesz begonnenen und dann in der modernen Funktionalanalysis vielfach weiterentwickelten Begriffe und Beweismethoden, haben ihn nicht sehr interessiert, da sie seiner Ansicht nach zu häufig die Methode des indirekten Beweises und das Auswahlaxiom benutzten. Später hat er diese strikte Haltung aufgegeben und auch von dem Vorteil der geistigen Ökonomie dieser Methoden Gebrauch gemacht wie in der 1940 erschienenen Arbeit über die Methoden der orthogonalen Projektion, die das berühmte Weylsche Lemma enthält, das aber wohl auf Hilbert zurückgeht und auch von anderen Autoren unabhängig gefunden wurde.

Die „Kluft“ zwischen Zahlen und Kontinuum war 1884 von Kronecker durch seine berühmten Sätze über die Approximation der Irrationalzahlen in interessanter Weise „gefüllt“ worden. Will man eine Irrationalzahl ξ durch rationale Zahlen annähern, so ist es natürlich, die ganzzahligen Vielfachen $n\xi$, $n \in \mathbf{N}$ zu betrachten und zu untersuchen, ob sich die nichtganzen Reste

(4) $\quad (n\xi) = n\xi - [n\xi]$

irgendwo häufen. Hier liegt eine Zahlenfolge vor, deren Werte in $(0, 1)$ liegen. Kronecker konnte zeigen, daß diese Folge im Intervall $(0, 1)$ überall dicht liegt, und es war eine große Sensation als 1908 gezeigt werden konnte, daß diese Punktfolge gleichverteilt ist. H. Weyl hat dies nicht als erster entdeckt, aber seine Arbeit „Über die Gleichverteilung der Zahlen mod. 1“ gilt heute als eine der Glanzleistungen der analytischen Zahlentheorie.

Gleichverteilt heißt eine Punktfolge bekanntlich, wenn sich asymptotisch die Anzahlen der Punkte einer Folge in zwei getrennten Intervallen wie deren

Längen verhalten. Es ist interessant, wie sich Hermann Weyl 1916 seiner Vertrautheit mit Fourier-Entwicklungen bedient, um ein derartiges Ergebnis zu beweisen. Er geht davon aus, daß jede stetige Funktion f der Periode 1 durch trigonometrische Polynome beliebig genau approximiert werden kann und bemerkt dann, daß für eine gleichverteilte Zahlenfolge $\alpha_\kappa \in (0, 1)$

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\kappa=1}^{n} f(\alpha_\kappa) = \int_0^1 f(x)dx$$

gilt. Es ist nun für $\alpha_\kappa = (\kappa\xi)$ wegen $[\kappa\xi] \in \mathbf{N}$

$$(6) \qquad e^{2\pi i(\kappa\xi)} = e^{2\pi i\kappa\xi}$$

Mit einer irrationalen Zahl ξ ist dann für festes $h \in \mathbf{Z}$

$$(7) \qquad \left| \sum_{\kappa=1}^{n} e^{2\pi i(\kappa\xi)\cdot h} \right| = \left| \sum_{\kappa=1}^{n} e^{2\pi i\kappa h\xi} \right| \leqslant \frac{1}{|\sin \pi h\xi|} < \infty$$

Damit wird dann für jedes $h \neq 0; h \in \mathbf{Z}$

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\kappa=1}^{n} e^{2\pi i(\kappa\xi)\cdot h} = 0 = \int_0^1 e^{2\pi ihx}dx$$

Ist nun

$$(9) \qquad T(x) := \sum_{h=-M}^{M} a_h e^{2\pi ihx}$$

ein approximierendes trigonometrisches Polynom, so wird

$$(10) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\kappa=1}^{n} T(\kappa\xi) = a_0 = \int_0^1 T(x)dx$$

da die Beiträge der Summanden mit $h \neq 0$ der Summe (9) verschwinden. Für jede stetige Funktion f der Periode 1 und jedes irrationale ξ gilt daher

$$(11) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\kappa=1}^{\infty} f(\kappa\xi) = \int_0^1 f(x)dx$$

In der genannten Arbeit wurden noch weitere Folgen von arithmetischem Interesse auf Gleichverteilung untersucht.

Gleichverteilte Folgen spielen heute bei Anwendungen eine interessante Rolle. Man spricht dann gelegentlich auch von „Zufallszahlen". Dieser Ausdrucksweise hätte Hermann Weyl bestimmt widersprochen, denn mit Zufall hat dieses Phänomen sicher nichts zu tun, und es war wohl auch kein Zufall, daß diese schönen Ergebnisse zu einer Zeit entdeckt wurden, als man Beispiele von Folgen suchte, die etwas Licht in die heftig diskutierte Kluft zwischen Kontinuum und Zahl brachten. Es scheint heute, daß das Kontinuum auch nach diesen Ergebnissen seine Geheimnisse noch etwas für sich behalten möchte. Man könnte allenfalls schon sagen, daß „die Reste des Irrationalen im Transzendenten gleichmäßig verteilt sind“.

Zur Zahlentheorie ist Hermann Weyl in Princeton noch mehrmals zurückgekehrt und zwar mit großen Arbeiten zur Geometrie der Zahlen, in denen das Problem der Reduktion der quadratischen Formen durch Einführung des Eichvolumens von Minkowski in einem allgemeineren Rahmen dargestellt wird. Die Vorlesung „Algebraic Theory of Numbers“, die 1940 erstmalig erschien, war als Einführung in die Zahlentheorie der deutschen Schule gedacht und schlägt die Brücke von den Teilbarkeitstheorien des 19. Jahrhunderts (Kronecker, Dedekind) zu den geometrischen Begriffsbildungen Minkowskis.

3 Fortsetzung und Zusammenhang

In seiner ersten Vorlesung im Wintersemester 1911/12 hatte sich H. Weyl die Aufgabe gestellt, die Grundideen der Riemannschen Theorie der algebraischen Funktionen in einer Form zu entwickeln, die den Hilbertschen Anforderungen an begriffliche und methodische Strenge gerecht wurde. Die wenig später unter dem Titel „Die Idee der Riemannschen Fläche“ erschienene Ausarbeitung erwies sich als großer Wurf, der die modernen Theorien der Topologie und algebraischen Geometrie entscheidend geprägt hat. H. Weyl selbst hat Toplogie oder algebraische Geometrie nicht als wesentliche Teile seines Lebenswerkes angesehen. Die Wirkung, die sein erstes Buch bis weit in unser Jahrhundert aktuell bleiben ließ, hat er 1954 selbst in der Adresse zur Verleihung der Fields-Medaille an Kodaira schildern können.

„Analytische Fortsetzung“ und „Flächenelement“ werden 1912 in einen Rahmen topologischer Begriffsbildungen gestellt, der sie als natürliche Erweiterungen der Riemannschen Grundgedanken zur Geometrie erscheinen läßt.

Die Weylsche Darstellung zerfällt in zwei Teile, von denen der erste, in dem der Begriff der Mannigfaltigkeit präzisiert wird, eine breitere Verallgemeinerung zuläßt und auch erfahren hat, während der zweite als Theorie spezieller analytischer Strukturen gesehen werden kann.

Die im ersten, geometrisch-topologischen Teil formulierten Grundbegriffe hat H. Weyl dann 1918 aufgegriffen und zur Grundlage seiner vielen Beiträge zur Relativitätstheorie gemacht.

Als wesentliches Element dieser Gedankengebäude muß man die Auffassung sehen, daß zu jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit eine Umgebung gehört, die parametrisierbar ist. Die relevanten Aussagen müssen so ausgedrückt werden, daß zwei Forderungen erfüllt sind:

1. Die Gesetzmäßigkeit muß so formuliert sein, daß sie in allen Parameterdarstellungen einer Umgebung zu gleichen Aussagen führt.
2. Es muß ein Prozeß der Fortsetzung definiert sein, der festlegt, wie Aussagen in punktfremden Umgebungen einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit verglichen werden können.

Für meromorphe Funktionen ist der Prozeß der Fortsetzung nach dem bekannten Verfahren der lokalen Potenzreihenentwicklungen unlösbar mit der definierenden Eigenschaft dieser Funktionen verbunden.

Hermann Weyl hat wohl als erster gesehen, daß den Riemannschen Hypothesen zur Geometrie, die sich aus den Theorien von Gauß zur Vermessung von Flächen ergeben hatten, ein Element fehlt, das den vollen Einbau physikalischer Theorien ermöglicht. Er hat die Triumphe der Göttinger Mathematiker vor dem ersten Weltkrieg aus nächster Nähe miterlebt. Eine ganz besondere Wirkung müssen die Arbeiten Minkowskis zur Speziellen Relativitätstheorie und einheitlichen Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen gehabt haben.

Die experimentell am besten bestätigte physikalische Theorie, die Maxwellsche Theorie der Elektrodynamik, die „théorie par excellence", konnte damals als Beispiel zum Erlanger Programm der Geometrien dargestellt werden. Sogar die Lorentz-Transformation war in ihrer algebraischen Gestalt von F. Klein schon als definierende Transformationsgruppe einer nichteuklidischen Geometrie verwandt worden. Nur die Lichtgeschwindigkeit kam noch nicht vor. Das aber war für Mathematiker nicht verwunderlich, denn „die Physik steht ja immer in den Konstanten, alles andere ist Mathematik".

So einfach hat Hermann Weyl das Verhältnis der beiden Disziplinen nicht gesehen, aber eine begriffliche Trennung von Geometrie und Physik schien ihm doch wichtig, gerade weil er die physikalischen Erscheinungen mit den metrischen Eigenschaften der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit identifizieren wollte. Die hier einsetzenden spekulativen Theorien gehören zum Geistreichsten, was dieses Jahrhundert an der Grenze von Mathematik und Physik hervorgebracht hat. Der durchschlagende Erfolg einer (von der Natur bestätigten) einheitlichen Feldtheorie blieb versagt, aber die Wirkungen dieser Ideen waren sehr groß und haben der Physik der zweiten Hälfte unseres Jahrhunderts entscheidende Impulse erteilt. Die erste Arbeit dieses Fragenkreises, der ihn bis zu seinem Lebensende immer wieder beschäftigt hat, erscheint 1918 unter dem Titel „Reine Infinitesimalgeometrie" und steht in engem Zusammenhang zu der berühmten und oft zitierten Arbeit „Gravitation und Elektrizität", die Einstein 1918 der Preußischen Akademie vorlegte.

Von Gauß war bekanntlich die Theorie der Flächen ausgehend von den theoretischen und praktischen Bedürfnissen der Geodäsie entwickelt worden. Aus der Projektion der Fläche auf die Tangentialebene entsteht der Begriff der Karte, die als ebenes Bild eines Ausschnittes der Fläche angesehen wird.

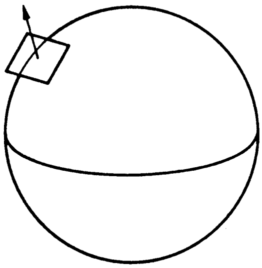
Zwischen den Koordinaten in der Ebene und den Maßverhältnissen auf der Fläche wird eine Beziehung hergestellt, die wir heute bekanntlich in der Form (Summationskonvention!)

(1) $$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

zur Berechnung von Längen und Winkeln auf der Fläche benutzen. Die Vorstellung der Projektion auf eine Tangentialebene mit kartesischen Koordinaten ist nicht unbedingt erforderlich, da andere Parameterdarstellungen ebenfalls benutzt werden können. Die übliche Definition der Längen und Flächen in der Riemannschen Geometrie ist eng mit dieser Vorgeschichte verbunden.

Will man nun auf dieser Fläche eine „zweidimensionale Physik" treiben, so muß zu jedem Punkt noch ein zweidimensionaler Vektorraum definiert sein, den man sich meist als den Raum der Tangentialvektoren vorstellt.

In der Riemannschen Theorie muß der Tangentialraum zu einem Punkt wegen der nicht postulierten Einbettung durch einen jedem Punkt zugeordneten Vektorraum ersetzt werden. In dieser Theorie wird nun aber nicht gesagt, wie diese Vektorräume zu verschiedenen Punkten zueinander in Beziehung stehen sollen. Der Pendelversuch von Foucault hat hier den Anstoß zu einer Neuentwicklung gegeben.



Dreht sich die Erdkugel, so können die Beobachter des Pendels dies auch als eine Bewegung ihrer Tangentialebene auf einem Breitenkreis einer als fest gedachten Kugel gleicher Abmessungen auffassen. Das Koordinatenkreuz einer Ausgangslage, bei der eine Achse nach Norden weist, wird auf diese Weise in alle Punkte des Breitenkreises fortgesetzt, wobei immer eine Achse zum Nordpol zeigt. Ist das Parallelverschiebung?

Das Foucault-Pendel macht diese Bewegung nicht mit und wir können beobachten, wie sich der Vektor der Schwingungsebene des Pendels gegenüber dem Koordinatenkreuz des Bodens dreht.

In der Dynamik abgeschlossener Systeme ist die Erhaltung des Drehimpulses bei Abwesenheit äußerer Kräfte gleichbedeutend damit, daß der Drehimpulsvektor parallel verschoben wird, wenn sich das System insgesamt bewegt.

Man kann analog die Bewegung der Pendelebene als Parallelverschiebung auf der Kugel deuten.

Ist $x(u^1, u^2)$ eine Parameterdarstellung der Fläche und sind die Tangentialvektoren

$$x_{|i} = \partial_i x \tag{2}$$

die Basisvektoren des Vektorraumes, so läßt sich ein Vektor dort in der Form

$$v = v^i x_{|i} \tag{4}$$

mit den Komponenten v^i darstellen.

Es sei s der Parameter der Bogenlänge der Kurve, die zwei Punkte verbindet. Die Veränderung des Vektors v bei der Verschiebung entlang der Kurve soll nun so erfolgen, daß keine Änderung in Tangentialrichtung auftritt. Nach den bekannten Ableitungsgleichungen der Flächentheorie erhalten wir für die Ableitung des Vektors v(s) mit der Abkürzung $\partial_r \partial_k x = x_{|r|k}$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \dot{v}^i x_{|i} + v^r x_{|r|k} \dot{u}^k \\ &= (\dot{v}^i + \Gamma^i_{rk} \dot{u}^k v^r) x_{|i} + L_{rk} v^r \dot{u}^k n \end{aligned} \tag{5}$$

mit den Christoffel-Symbolen Γ^i_{rk} und den Koeffizienten L_{ik} der zweiten Fundamentalform. Soll die Ableitung keine Komponenten in Tangentialrichtung haben, folgt für $v^i(s)$ das System der Differentialgleichungen

$$(6) \qquad 0 = \dot{v}^i + \Gamma^i_{rk} v^r \dot{u}^k$$

mit dem der Prozeß der Verschiebung beschrieben wird.

Nach diesem Gesetz dreht sich der Vektor bei „Parallelverschiebung", wenn für die Koeffizienten Γ^i_{rk} die aus der Differentialgeometrie bekannten Ausdrücke gewählt werden. In dieser Form wurde die Parallelverschiebung 1915 von Levi-Cività erstmals formuliert.

H. Weyl hat 1918 erkannt, daß der so definierte Prozeß auch als Prozeß der Parallelverschiebung in Riemannschen Räumen beliebiger Dimension aufgefaßt werden kann. Dazu ist allerdings erforderlich, die Begründung zu ändern. Er folgert aus der Forderung, daß die Vektorräume zu verschiedenen Punkten affin aufeinander bezogen werden können und der lokal euklidische Charakter der Parallelverschiebung bei dem ganzen Prozeß auch in allen Zwischenphasen erhalten bleiben muß, daß dieser Prozeß von der Form (5) sein muß, wobei die Koeffizienten Γ^i_{rk} aber eine eigene Bedeutung unabhängig von dem Maßtensor bekommen. Er nennt sie die Komponenten des affinen Zusammenhangs. Verlangt man in einem metrischen Raum zusätzlich, daß der Prozeß kongruente Abbildungen liefert, so wird eine Theorie gewonnen, die man als Riemannsche Geometrie mit Parallelverschiebung auffassen kann.

Der Vorteil dieses Aufbaus für die Riemannsche Geometrie besteht dann darin, daß ein klarer Zusammenhang zwischen Parallelverschiebung und Krümmung überzeugend hergestellt werden kann.

Die Weylsche Kritik an der überkommenen Vorstellung bezieht sich darauf, daß nach den bekannten Vorschriften aus den Koordinaten Zahlwerte berechnet werden, die dann zu geometrischen Größen wie Längen und Flächeninhalten umgedeutet werden. Dies setzt nämlich voraus, daß ein Maßstab für Längen und Flächen durch Angabe von Einheitsstrecken und Einheitsflächen vorhanden ist. In physikalischer Sprechweise sind die Koordinaten und die mit ihrer Hilfe gebildeten Größen „dimensionslose" Zahlen, die zum Vergleich mit der Wirklichkeit mit Hilfe von Maßstäben in konkrete Aussagen über Längen und Flächen umformuliert werden müssen.

In der Flächentheorie von Gauß ist dieser Punkt nicht interessant, da die globalen Maßstäbe des umgebenden dreidimensionalen euklidischen Raumes für jeden Punkt der Fläche zur Verfügung stehen. Riemann hat in seiner Fortführung der Gaußschen Gedanken die Existenz globaler Maßstäbe vorausgesetzt.

Zu der Zeit, als Hermann Weyl seine Infinitesimalgeometrie schrieb, waren Einsteins Arbeiten zur Allgemeinen Relativitätstheorie gerade erschienen, und es stand die Übertragung der Riemannschen Gedanken auf das 3 + 1-dimensionale Raum-Zeit-Kontinuum zur Diskussion. Einstein hatte die Existenz globaler Maßstäbe vorausgesetzt und war darin Riemann gefolgt. Er hatte zusätzlich eine vom Euklidischen abweichende Raumstruktur mit der Gravitation identifiziert und erste überraschende Erfolge dadurch erzielt, daß er bislang nicht erklärbare Erscheinungen, wie die Perihelabweichung der Bahn des Merkur zwanglos deuten konnte.

Die Grundgleichungen der Elektrodynamik waren durch H. Minkowskis Herleitung in enge Beziehung zu linearen Strukturen der „Lorentz-Geometrie" gerückt worden. Als nun A. Einstein die Gravitation mit nicht ebenen Geometrien identifizierte, lag es nahe, auch eine Synthese von Gravitation und Elektrodynamik mit Hilfe geometrischer Begriffsbildungen zu versuchen. In Hermann Weyls Werk treten daher die Untersuchungen zur Gravitation und Elektrodynamik meist in Verbindung mit geometrischen Fragen auf.

Bekanntlich wird der Elektromagnetismus im Vakuum durch den schiefsymmetrischen Tensor

$$(7) \qquad F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}$$

mit Hilfe des Viererpotentials $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ beschrieben. Diese Potentiale sind nur bis auf einen Gradienten eindeutig bestimmt. Ersetzen wir nämlich φ_k durch $\varphi_k + \frac{\partial \lambda}{\partial x^k}$, so ändert sich F_{ik} nicht. Im Jahre 1918 hoffte H. Weyl, diese Invarianz zu einer geometrischen Deutung des Elektromagnetismus benutzen zu können. Es war ihm aufgefallen, daß zur Übertragung von in Koordinatenform gegebenen Aussagen des Raum-Zeit-Kontinuums in die physikalische Erfahrung stets ein Maßstab benötigt wird. Besonders klar wird diese Notwendigkeit bei der Frage von Zeitvergleichen, wenn keine „Weltuhr" mehr vorhanden ist. Ein solcher „Maßstab" kann mathematisch durch einen positiven, stetig differenzierbaren Faktor gegeben sein, der örtlich veränderlich ist.

Verfolgt man beispielsweise das Skalarprodukt zweier Vektoren entlang eines Weges, so ist der klassische Ausdruck $g_{ik} v^i \omega^k$ durch $e^{\lambda} g_{ik} v^i \omega^k$ zu ersetzen. Der einfachste Ansatz für die Fortsetzung dieses „Maßes" entlang einer Kurve ist eine Differentialform

$$\varphi_k dx^k$$

mit vier „Potentialen". Identifiziert man diese Potentiale mit den elektromagnetischen Potentialen, so kann man leicht schließen, daß Änderungen der von Einstein vorgeschlagenen Theorie der Gravitation nur auftreten, wenn $F_{ik} \neq 0$ ist. Bei Abwesenheit von Elektromagnetismus ($F_{ik} = 0$) ist die Differentialform nämlich zumindest lokal als vollständiges Differential darstellbar, was gleichbedeutend mit globalem Maßstab ist.

Da diese Theorie immer wieder neu diskutiert wurde, seien die Grundforderungen der sogenannten „Eichinvarianz", wie Hermann Weyl sich später ausdrückte, noch einmal formuliert:

In alle Größen oder Beziehungen müssen die Funktionen g_{ik}, φ_k in solcher Weise eingehen, daß Invarianz stattfindet

1. gegenüber einer beliebigen Koordinatentransformation
2. gegenüber der Ersetzung von g_{ik} durch $e^{\lambda} g_{ik}$ und von φ_k durch $\varphi_k + \frac{\partial \lambda}{\partial x^k}$ mit einer beliebigen zweimal stetig differenzierbaren Funktion λ.

Der Begriff der Eichinvarianz tritt in unerwarteter Form etwa ein Jahrzehnt später wieder auf. Zunächst muß aber über die Reaktion von Einstein in der Sitzung der Preußischen Akademie berichtet werden.

Die Differentialform der Maßstabsänderung muß nicht exakt sein. Die Werte des Eichmaßes e^{λ} in zwei verschiedenen Punkten des Raum-Zeit-Kontinuums hängen daher vom Weg ab, der die beiden Weltpunkte verbindet. Damit müssen die Maßstäbe bei physikalischer Deutung der Rechnungen auch von der Vorgeschichte abhängen.

Einstein stellt in seiner Bemerkung fest, daß es keinen Hinweis der Erfahrung in dieser Richtung gibt. Die Physik postuliert die Existenz universeller Meßmöglichkeiten etwa in der Art, daß elementare Schwingungsvorgänge gegeben sind, die es ermöglichen, Meßwerte über große räumliche und zeitliche Distanzen zu vergleichen. Es ist sehr wahrscheinlich, daß eine so klare Formulierung der Grundannahmen der Physik ohne die Weylsche Kritik nicht so schnell erfolgt wäre. Albert Einstein schließt seine Bemerkung dann auch mit den Worten:

> *„Bei Annahme der Weylschen Hypothesen ... müßte die relative Frequenz zweier benachbarter Atome der gleichen Art (wegen verschiedener Vorgeschichte) im allgemeinen verschieden sein. Da dies nicht der Fall ist, scheint mir die Grundhypothese der Theorie leider nicht annehmbar, deren Tiefe und Kühnheit aber jeden Leser mit Bewunderung erfüllen muß.“*

Hermann Weyl hat für sich dieses Einsteinsche Argument nicht gelten lassen, sich gegen Ende seines Lebens aber der Auffassung der Physiker angeschlossen, die eine praktische Hypothese gelten lassen, solange die Erfahrung ihr nicht widerspricht.

Das Raumproblem, das sich mit den geometrisch-topologischen Hypothesen des Raum-Zeit-Kontinuums der Allgemeinen Relativitätstheorie befaßt und auch unabhängig von der in diesem Kontinuum vorhandenen Physik gesehen werden kann, hat schon früh eine Rolle in Weyls Denken gespielt. Durch die enge Verbindung der geometrischen Probleme mit den im lebhaften Fluß befindlichen Neuerungen der Physik, die Hermann Weyl selbst schon durch den Titel seines Buches „Raum, Zeit, Materie“ herausgestellt hat, wurde übersehen, daß die geometrisch-topologische Seite seiner Ideen unabhängig von der Physik ein höchst interessantes Gebiet darstellt. So ist es wohl auch zu erklären, daß eine Veröffentlichung von Vorlesungen, die er 1922 gehalten hat, erst 1963 eine Neuauflage erlebte. Sie läßt erkennen, daß diese mathematischen Theorien nichts von ihrer Kraft verloren haben. Ansätze für die späteren Arbeiten zur Darstellung der Lie-Gruppen sind 1922 bereits vorhanden.

Ich möchte die Arbeiten zum Thema Fortsetzung und Zusammenhang aber nicht verlassen ohne auf einen Zusammenhang hinzuweisen, der in Weyls Geometrie eine große Rolle spielt. Nehmen wir die Hypothesen der Riemannschen Geometrie einschließlich des globalen Maßstabes als gegeben an, so bleibt noch der Zusammenhang zwischen Parallelverschiebung und Krümmung zu erwähnen.

Eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Metrik liegt dann und nur dann vor, wenn die Parallelverschiebung vom Wege unabhängig ist, und wir von einem globalen Parallelismus sprechen können. Es liegt nun nahe zu prüfen, ob es eine Möglichkeit gibt, die Nicht-Integrabilität der Parallelverschiebung experimentell zu beweisen. Dies würde einen direkten und klaren Beweis für die Krümmung des Raum-Zeit-Kontinuums liefern.

Der holländische Astronom de Sitter bemerkte etwa um die Zeit, als Hermann Weyl seine Ideen entwickelte, daß der Parallelverschiebung im euklidischen Raum auf physikalischer Seite die Erhaltung des Drehimpulses eines kräftefrei rotierenden Kreisels entspricht. Hat dieser Kreisel volle sphärische Symmetrie, so üben Gradientenkräfte kein Drehmoment aus. Daraus folgt in der Newtonschen Theorie, daß ein solcher Kreisel unter dem Einfluß eines Gravitationsfeldes natürlich insgesamt eine Bewegung ausüben wird, die Drehachse aber ihre Richtung nicht ändert.

Unter der Annahme, daß die Metrik des Raumes durch Materie verändert wird, und der Raum seine euklidischen Eigenschaften verliert, müßte eine Änderung der Richtung der Drehachse eintreten. Diese Möglichkeit hat Hermann Weyl zum Schluß seiner letzten Fassung von „Raum, Zeit, Materie" aufgegriffen und den Effekt für die Bewegung der Erde um die Sonne im Rahmen der Einsteinschen Theorie abgeschätzt. Der Effekt der „Geodätischen Präzession" war zu klein, um empirisch gemessen werden zu können.

Seit etwa 20 Jahren wird nun an einem Kreiselexperiment in Satelliten gearbeitet, um die „Geodätische Präzession" im System Erde-Satellit zu messen. Sollte das Experiment die Krümmung bestätigen, wäre das ein Ergebnis von säkularer Bedeutung. Aber selbst, wenn mit Sicherheit gemessen würde, daß der Raum euklidisch ist, was nicht mehr viele Physiker erwarten, hätten die Diskussionen über die Struktur von Raum und Zeit in unserem Jahrhundert durchaus ihren Sinn gehabt.

4 Symmetrien und Gruppen

Der Begriff Symmetrie im heutigen Sinne ist relativ spät in die mathematische Fachsprache gekommen. Anscheinend war Legendre der erste, der schon ohne den Gruppenbegriff von Symmetrie sprach. Der Gruppenbegriff, als die wohl erfolgreichste Begriffsbildung des 19. Jahrhunderts hat auch in Hermann Weyls Lebenswerk einen festen Platz. Seine Beiträge zu diesem Fragenkreis hat er einmal als seine besten Leistungen bezeichnet. Da er in seinen beiden Büchern „Gruppentheorie und Quantenmechanik" sowie „Classical Groups" seine Beiträge und Auffassungen selbst dargestellt hat, ist es nicht sinnvoll, die Schilderung seiner Theorie zu wiederholen.

Die Würdigung, die C. Chevalley und A. Weil im Jahre 1968 geschrieben haben, kann sich auf langjährige kollegiale Gespräche stützen und enthält eine eingehende Schilderung der Entwicklung der Weylschen Ideen zur Gruppentheorie, die die algebraischen Gesichtspunkte betont, wie es H. Weyl selbst auch in dem Buch über die klassischen Gruppen getan hat. Ich möchte hier mehr die Anregungen physikalischer Herkunft, die Benutzung analytischer Hilfsmittel und die Ausstrahlungen seiner Ideen in die Physik der Elementarteilchen schildern. H. Weyls erste Untersuchungen zur Theorie der Gruppen finden sich in seinen spanischen Vorlesungen aus dem Jahre 1922, die unter dem Titel „Mathematische Analyse des Raumproblems" auch in Buchform erschienen.

Ausgangspunkt war die nach Riemanns Thesen zwangsläufig auftretende Frage nach der mathematischen Struktur des Raumes, in dem sich das physikalische Geschehen abspielt. Schon Helmholtz hatte sich diese Frage gestellt und gefordert, daß der „mathematische" Raum homogen sein müsse. Als homogen wird dabei ein Raum bezeichnet, der die Eigenschaft besitzt, daß ein starrer Körper in ihm diejenige freie Beweglichkeit besitzt, welche ihm im Euklidischen Raum zukommt. Hermann Weyl stützt sich auf die präzisere Fassung dieser Forderung wie sie von S. Lie im Rahmen seiner Theorie der Transformationsgruppen gegeben wurde.

Es stellt sich heraus, daß die λ-Kugeln, deren Metrik durch

$$(1) \qquad ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + \frac{\lambda(x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3)^2}{1 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$$

für die Parameter mit $1 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) > 0$ gegeben wird, die einzigen 3-dimensionalen homogenen Räume sind. Für $\lambda = 1$ ist dies die Metrik der Einheitskugel im vierdimensionalen euklidischen Raum. Es sind aber auch negative λ-Werte zulässig. Es ist auch ohne Gruppentheorie zu sehen, daß die obigen Riemannschen Räume die Homogenitätsforderungen erfüllen. Die Schwierigkeit liegt beim Nachweis, daß dies die einzigen Formen sind.

Für spekulative Naturbeschreibungen bleibt das Argument größtmöglicher Einfachheit stets unbefriedigend, und H. Weyls philosophische Neigungen haben immer nach Prinzipien gesucht, die das Einfache dann auch zwingend erscheinen lassen.

Das Jahrzehnt nach dem ersten Weltkrieg zählt sicher zu den interessantesten Perioden der Geschichte der exakten Naturwissenschaften. Auch das wissenschaftliche Werk von Hermann Weyl ist nur verständlich, wenn man sich die Entdeckungen ins Gedächtnis ruft, die damals gemacht wurden. Der Strom der mathematischen Ideen, der sich auf dem europäischen Kontinent entfaltete, ist schon mehrfach angesprochen worden. Man kann wohl sagen, daß zu Anfang unseres Jahrhunderts die theoretischen Untersuchungen zur Physik besonders reich an herausfordernden und neuartigen Thesen waren, die als fast unmittelbare Folge neuer mathematischer Konzeptionen in Erscheinung treten.

Die Physik lebt als Wissenschaft von der Spannung zwischen Theorie und Wirklichkeit oder, stark verkürzt, vom Dialog zwischen Mathematik und Experiment. Da die Quantentheorie noch nicht entwickelt war, lagen genügend Experimente vor, die noch nicht erklärt werden konnten. Nach den unbestreitbaren Erfolgen der Relativitätstheorie ist verständlich, daß Einstein, Hilbert, Weyl und viele andere der Meinung waren, die Physik ließe sich von der Mathematik voraussagen. Sie haben dabei übersehen, daß gleichzeitig in der Experimentalphysik neue Erkenntnisse gefunden wurden, die mit den bisherigen Methoden der Kontinuumsmathematik nicht zu beschreiben waren.

Die Beiträge von Hermann Weyl haben als Kern den Versuch zur Synthese von Gravitation und Elektromagnetismus, die bis heute nicht gefunden ist und vielleicht auch nicht zu finden ist. Das Elektron hat eine positive Masse und eine negative Ladung. Als Rutherford 1920 aus dem Wasserstoff-Atom ein Elektron „entfernte" und das Proton mit großer positiver Masse und positiver Ladung entdeckte, war noch kein Grund gegeben, daran zu zweifeln, daß eine Beziehung zwischen Gravitation, Materie und Elektrodynamik besteht. Erst als Chadwick das Neutron entdeckte, das nur eine positive Masse, aber keine Ladung hat, verstärkte sich der Eindruck, daß eine einheitliche Feldtheorie, die Gravitation und Elektromagnetismus verbindet, nicht zu erhalten ist.

In einer berühmten Arbeit hatte Hermann Weyl schon 1929 für sich die Konsequenzen gezogen. Albert Einstein hat bekanntlich bis in seine letzten Jahre den Traum von der „formula magica" nicht aufgegeben.

Die Weylsche Arbeit hat den Titel „Elektron und Gravitation" und setzt sich mit der Pauli-Diracschen Theorie des Elektrons mit Spin auseinander. Durch die Bemühung, die Lorentzinvarianz der Dirac-Theorie mit der allgemeinen Relativitätstheorie in Einklang zu bringen, und die Auseinandersetzung mit Einsteins Versuch zum gleichen Zweck, verliert die Arbeit viel an Durchsichtigkeit. Sie wurde wohl aus diesem Grund nicht in die Selecta aufgenommen. Andererseits enthält die Arbeit mehrere Elemente, die für die Physik der Elementarteilchen von großer Bedeutung waren.

Dieser Teil der Arbeit bezieht sich auf die Tatsache, daß die Diracschen Feldgleichungen zusammen mit den Maxwellschen Gleichungen eine Invarianzeigenschaft besitzen, die große formale Ähnlichkeit mit der ein Jahrzehnt früher entwickelten Eichinvarianz haben. Sind f_k; $k = 1, 2, 3, 4$ die elektromagnetischen Potentiale und ist ψ eine Lösung der Feldgleichungen, so bleibt das System ungeändert, wenn mit einer beliebigen zweimal stetig differenzierbaren Funktion λ

$$(2) \qquad \psi \text{ durch } e^{i\lambda}\psi \quad \text{und} \quad f_k \text{ durch } f_k - \frac{\partial\lambda}{\partial x^k}$$

ersetzt wird. Diese „Eichinvarianz" ist inhaltlich etwas völlig anderes als die frühere Eichinvarianz, und es wäre richtiger, von „Phaseninvarianz" zu sprechen. Die Differentialform $f_k dx^k$ für die Phasenänderung braucht auch in diesem Fall nicht exakt zu sein, so daß der Phasenfaktor vom Wege abhängig sein kann. Dann muß es aber auch möglich sein, Phasenunterschiede durch Interferenz von Elektronen nachzuweisen, was sehr viel später auch geschehen ist.

Die Dirac-Gleichungen sind bekanntlich ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, das mit den Maxwellschen Gleichungen gemein hat, daß es bei eigentlichen Lorentztransformationen invariant bleibt. Unter einer eigentlichen Lorentztransformation wird dabei eine lineare Transformation des Raum-Zeit-Kontinuums verstanden, die

$$(3) \qquad c^2t^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

nicht ändert und deren Determinante + 1 ist. Dies bedeutet aber, daß eine Spiegelung*) bei fester Zeitkoordinate und eine Zeitumkehr bei festen Raumkoordinaten in der Menge der Lösungen im allgemeinen nicht zulässig ist.

Die Grundgleichungen der Gravitation lassen demgegenüber auch Spiegelungen und Zeitumkehrungen zu.

*) In diesem Zusammenhang wird unter Spiegelung der Übergang $x^i \to -x^i$ für die Raumkoordinaten verstanden.

H. Weyl regt in dieser Arbeit an, durch Überprüfung der Symmetrie zu entscheiden, ob die Teilchen der Quantentheorie auf Grund ihrer Symmetrien der Gravitation (bei voller Lorentzinvarianz) oder dem Elektromagnetismus (bei eingeschränkter Lorentzinvarianz) zuzuordnen sind. Er vermutet, daß die Elementarteilchen dem Elektromagnetismus zuzuordnen sind und das Geheimnis der Gravitation noch offen bleibt.

Durch Experimente konnte Jahrzehnte später gezeigt werden, daß nur die eingeschränkte Lorentzgruppe im Bereich der Elementarteilchen gilt, da beim β-Zerfall von ^{60}Co die durch Spiegelung entstehende Parallelität von Kernspin und Impuls nicht beobachtet wird.

Die nach diesem sensationellen Befund von Lee und Yang seit 1957 einsetzende theoretische und experimentelle Entwicklung der Hochenergiephysik ist durch das Suchen nach Symmetrien beherrscht. Es ist in vorliegendem Zusammenhang besonders bemerkenswert, daß sich diese Forschungsrichtungen auch heute noch auf Anregungen und Ergebnisse von H. Weyl beziehen.

Die Darstellungen der Symmetriegruppen spielen dabei eine beherrschende Rolle, und Hermann Weyl hat es als glücklich empfunden, daß seine zwischen 1925 und 1927 entwickelte Theorie der Darstellungen halb-einfacher Gruppen hier nützlich sein konnte. Den Grundgedanken seiner Theorie, die im konkreten Fall nicht leicht zugänglich ist, hat er am einfachen Beispiel der Theorie der Fourier-Reihen erläutert. Im Anschluß an einen Vortrag von H. Bohr über fastperiodische Funktionen äußerte er die Vermutung, daß der Vollständigkeitssatz der Theorie der Fourier-Reihen auch algebraisch aus den Eigenschaften der ebenen Drehgruppe folgen muß. Einen derartigen Beweis hat er kurz darauf veröffentlicht.

Der Beweis sei kurz vorgetragen, da er die Grundelemente der späteren ausführlichen Theorie erkennen läßt und nicht durch technische Schwierigkeiten der expliziten Durchführung belastet ist.

Es sei f eine stetige und periodische Funktion der Periode 2π. Dann ist

$$(4) \qquad K(s,t) := \int_0^{2\pi} f(u-t)\overline{f(u-s)}\,du$$

stetig in s und t und kann als positiv definiter Kern im Sinne der Theorie der Integralgleichungen aufgefaßt werden.

Es sei nun λ_1 der kleinste Eigenwert und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ ein System zugehöriger orthonormierter Eigenfunktionen.

$$(5) \qquad \int_0^{2\pi} \varphi_i(u)\overline{\varphi_k(u)}\,du = \delta_{ik}$$

Eine feste gewählte Drehung führt $\varphi_k(s)$ in $\varphi_k(s+t)$ über. Da $\varphi_k(s+t)$ wieder Eigenfunktion ist, gilt mit Koeffizienten C_{kj}

$$(6) \qquad \varphi_k(s+t) = \sum_{j=1}^{n} C_{kj}(t)\varphi_j(s)$$

Da auch das System $\varphi_k(s+t)$ für jedes t ein orthonormiertes System ist, muß die

Matrix

(7) $C(t) := (c_{kj}(t))$

unitär sein. Aus

(8) $\varphi_k(s + (t_1 + t_2)) = \varphi_k((s + t_1) + t_2) = \varphi_k((s + t_2) + t_1)$

ergibt sich

(9) $C(t_1 + t_2) = C(t_1)C(t_2) = C(t_2)C(t_1)$

für beliebige Parameter t_1 und t_2. Aus dieser Eigenschaft folgt nun für unitäre Matrizen

(10) $C(t) = A^{-1}D(t)A$

mit einer festen, nicht ausgearteten Matrix A und einer Diagonalmatrix D(t), deren Elemente vom absoluten Betrag 1 sind. Die Periodizität

(11) $C(t + 2\pi) = C(t)$

liefert nun, daß die Diagonalelemente von der Form e^{int} mit $n \in \mathbf{Z}$ sind. Führt man dieses Ergebnis auf die Eigenfunktionen zurück, so zeigt sich, daß wir durch geeignete Linearkombinationen der φ_k ein neues System

(12) $\varphi_k^*(s) = e^{in_k s}$

mit $n_k \in \mathbf{Z}$ erhalten können, das mit φ_k^* auch $\overline{\varphi_k^*}$ enthält.

Der Spektralsatz (Bilinearentwicklung) für K(s, t) liefert dann die Parsevalsche Identität der Theorie der Fourier-Reihen für $s = t = 0$, da f beliebig wählbar ist.

Mit seiner kurzen Note wollte Hermann Weyl zeigen, daß man eine Theorie vollständiger Funktionensysteme mit Hilfe der Begriffsbildungen der Gruppentheorie erhalten kann ohne Differentiationsprozesse zu verwenden. Diese Note, auf die dann noch mehrfach verwiesen wird, ist aber wohl auch geschrieben worden, um Grundgedanken seiner anderen Arbeiten zur Darstellung kontinuierlicher Gruppen leichter zugänglich zu machen. In einem Übersichtsvortrag vor dem Internationalen Mathematiker-Kongreß 1929 in Bologna hat er seine Theorie selbst dargestellt, und ich möchte nur einige Gesichtspunkte zur Einordnung dieser Arbeiten hinzufügen.

In vielen Arbeiten des 19. Jahrhunderts zur Geometrie, die den Gruppenbegriff verwenden, ist die Transformationsgruppe explizit gegeben, und es interessiert die Aufstellung von Invarianten gegenüber diesen Transformationen, nicht aber die Gruppe selbst. Beim Erlanger Programm ist dies besonders deutlich. In einem ganz anderen Sinne wird der Gruppenbegriff in der Galois-Theorie und der Theorie der Kristallstrukturen benutzt. In beiden Fällen ist die Untersuchung und Klassifikation der Gruppen selbst erstes Anliegen. Im Unterschied zu den Transformationsgruppen der Geometrien sind hier die Gruppen aber endlich.

Frobenius hatte für endliche Gruppen die Darstellungstheorie entwickelt, die auf dem Gedanken basiert, jedem Element der Gruppe eine Matrix so zuzuordnen, daß dem „Produkt" zweier Gruppenelemente das Produkt der Matrizen entspricht, und man von einer Abbildung der Gruppe auf eine Menge von Matrizen gleicher Ordnung unter Erhaltung der Gruppenrelationen sprechen kann. Auf diese Weise gelingt es, verschiedene Gruppen so zu „verwirklichen", daß sie in einem gemeinsamen Symbol-System miteinander vergleichbar werden.

Es liegt auf der Hand, daß in diesem Zusammenhang viele spezielle Ergebnisse der Matrix-Algebra entwickelt wurden, die zur Verfügung standen, als Hermann Weyl sein Programm zur Untersuchung der klassischen (kontinuierlichen) Gruppen in Angriff nahm. Noch wichtiger aber ist die Tatsache, daß die Begriffsbildungen schon vorlagen, die die vielen in der Sprache der Matrizen auftretenden Möglichkeiten zur Darstellung einer Gruppe durch Begriffsbildungen der Reduktion und der Äquivalenz auf wesentliche Bestandteile zurückführten. Wichtigstes Ergebnis dieser Theorie waren die Vollständigkeits- und Orthogonalitätssätze, die durch Mittelbildungen über die ganze Gruppe erhalten wurden. Als Beispiel seien der Satz über die Charaktere erwähnt. Unter dem Charakter eines Gruppenelementes s vermöge einer Darstellung versteht man die Spur der Matrix C(s), die s zugeordnet ist.

Mit Hilfe dieser Zahlen läßt sich nach Frobenius eine Darstellung eindeutig charakterisieren. Die Frobenius-Theorie arbeitet mit Mittelwertbildungen, die durch Summation über die endlich vielen Gruppenelemente entstehen.

Hermann Weyl hat gesehen, daß sich diese Summenbildungen auf unendliche Gruppen unter geeigneten Voraussetzungen übertragen lassen müssen.

Dies kann in 3 Schritten geschehen:

1. Die Summation der Mittelbildung muß durch eine Integration über eine geschlossene Mannigfaltigkeit ersetzt werden.
2. Es müssen endlich dimensionale Darstellungen gefunden werden.
3. Es muß gezeigt werden, daß das gewonnene System der Darstellungen „vollständig" ist.

Es ist faszinierend zu sehen, wie Hermann Weyls Vorarbeiten zur Theorie der Mannigfaltigkeiten und zur Theorie der Integralgleichungen hier zu einer großen Theorie zusammengeführt werden. Besonders interessant ist dabei die Rolle seiner Theorie der fast-periodischen Funktionen, von der nicht klar ist, ob sie die Anregung zur Verwendung der Mittelbildung geliefert hat oder Konsequenz der gruppentheoretischen Konstruktionen war.

Waren in der Physik die gruppentheoretischen Methoden zunächst Konsequenz der Invarianz der Grundgleichungen gegenüber bestimmten Koordinatentransformationen, so trat mit Dirac eine Wende in entgegengesetzter Richtung ein.

Aus der Forderung der Invarianz gegenüber Lorentz-Transformationen hatte H. Minkowski durch mathematische Deduktionen die Gleichungen abgeleitet, die die elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Medien beschreiben.

Die von Schrödinger aufgestellten Gleichungen der Atomtheorie sind nicht „Lorentz-invariant". Die Gleichungen von Dirac wurden entwickelt, um eine Theorie herzuleiten, die Atomtheorie und Elektrodynamik als Teile der Speziellen Relativitätstheorie enthält. Hier waren die Invarianzforderungen primär und die Differentialgleichungen sekundär.

Der große Erfolg dieser Idee hat dann dazu geführt, daß der Begriff der Invarianz unter der Bezeichnung Symmetrie zum beherrschenden Gedanken der Quantentheorien und der Theorie der Elementarteilchen wurde.

Wegen der Einzelheiten, die in der Physik zunächst zur CTP-Invarianz der Theorie der schwachen Wechselwirkungen führte, sei beispielsweise auf die Übersichten des Physikers Yang aus dem Jahre 1980 verwiesen*). Bei der Suche nach der mathematischen Formulierung physikalischer Gesetze spielt der 1912 von Emmy Noether im Umkreis der Hilbert-Schule entdeckte Zusammenhang der Erhaltungssätze mit Invarianz- oder Symmetrie-Eigenschaften der physikalischen Welt in der neueren Entwicklung der Theoretischen Physik eine so große Rolle, daß man befürchten darf, es könnten sich die Enttäuschungen von Einstein und Weyl wiederholen.

Das Thema Symmetrie tritt zum Abschluß des wissenschaftlichen Werkes noch einmal in einer Verbindung auf, die die Brücke zu mathematischen Kunstformen durch die Menschheitsgeschichte baut. Dieses, aus Vorlesungen in Princeton auf Anregung seines dortigen Kollegen Panofski entstandene Buch hat auch mehrere Übersetzungen erlebt und steht am Anfang einer Diskussion zwischen Kunst und Mathematik, die in den letzten Jahren sehr lebhaft geworden ist.

III Philosophie

Zu den schon erwähnten Problemen der Begründung der Analysis traten zu Anfang des Jahrhunderts noch die besonderen Probleme der Erkenntnistheorie, die sich aus der Neuformulierung der Physik zunächst in der speziellen und dann in der allgemeinen Relativitätstheorie ergaben.

Zu Anfang seiner wissenschaftlichen Tätigkeit finden wir im Schriftenverzeichnis philosophische Fragen fast ausschließlich im Zusammenhang mit den Grundlagenproblemen der Mathematik. Dies mag damit zusammenhängen, daß die entsprechenden Veröffentlichungen Ausarbeitungen von Vorträgen vor Mathematikern sind.

Als Beispiel seien die Vorträge in Zürich aus dem Jahre 1921 genannt, die in den Selecta mit Anmerkungen und Korrekturen vom Juni 1955 versehen sind. Hermann Weyl hat sich 1955 nur noch mit Zögern zu dem stellenweise recht bombastischen Stil dieser Vorträge bekannt, sie aber als Ausdruck der aufgeregten Zeit nach dem ersten Weltkrieg gelten lassen. Diese Vorträge beginnen:

> *Die Antinomien der Mengenlehre werden gewöhnlich als Grenzstreitigkeiten betrachtet, die nur die entlegensten Provinzen des mathematischen Reichs angehen und in keiner Weise die innere Solidität und Sicherheit des Reiches selber, seiner eigentlichen Kerngebiete gefährden können. Die Erklärungen, welche von berufener Seite über diese Ruhestörungen abgegeben wurden (in der Absicht, sie zu dementieren oder zu schlichten), tragen aber fast alle nicht den Charakter einer aus völlig durchleuchteter Evidenz geborenen, klar auf sich selbst ruhenden Überzeugung, sondern gehören zu jener Art von halb bis dreiviertel ehrlichen Selbsttäuschungsversuchen, denen man im politischen*

*) C. N. Yang, Selected Papers, 1980.

oder philosophischen Denken so oft begegnet. In der Tat: jede ernste und ehrliche Besinnung muß zu der Einsicht führen, daß jene Unzuträglichkeiten in den Grenzbezirken der Mathematik als Symptome gewertet werden müssen; in ihnen kommt an den Tag, was der äußerlich glänzende und reibungslose Betrieb im Zentrum verbirgt: die innere Haltlosigkeit der Grundlagen, auf denen der Aufbau des Reiches ruht. ....

Diese Beurteilung der Gesamtlage der Mathematik wird heute sicher nicht mehr geteilt, und ich bin auch nicht sicher, ob in allen Bereichen der Mathematik damals eine so aufgeregte Unsicherheit bestand. In der Schule von Emmy Noether beispielsweise herrschte sicher eine optimistische Grundstimmung.

Die Weylsche Philosophie zur Grundlegung der Mathematik konzentriert sich auf die Begriffe Zahl und Kontinuum. Neben der Kritik am üblichen Aufbau, die schon behandelt wurde, wird aber auch ein Versuch vorgeschlagen, wie das bestehende Gebäude gesichert werden kann. In dem Bestreben, die Ergebnisse der klassischen Analysis voll zu erhalten, ist er mit Hilbert völlig einig. Die Wege zur Erreichung dieses Zieles sind nur sehr verschieden.

Hilbert versuchte durch ein System von Axiomen und eine Formalisierung der logischen Schlußweisen eine möglichst klare Trennung zwischen Erkenntnistheorie und Mathematik zu erreichen. Weyl strebte die entgegengesetzte Position an, indem er bei jedem Argument nachprüfte, ob es auch numerisch-konstruktiv durchführbar war. So entstand die Kontroverse zwischen Axiomatikern um Hilbert und Konstruktivisten um Weyl. Hermann Weyl hat diesen Streit lebhaft miterlebt wie seine vielen Veröffentlichungen zeigen, die zu jeder neuen Variante dieser Auseinandersetzung Stellung nehmen.

Die vielleicht interessantesten dieser Beiträge sind spät veröffentlicht worden und konnten nicht mehr in die Neuausgaben seiner „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften“ eingearbeitet werden, so daß hier keine vollständige Wiedergabe seiner Ansichten vorliegt.

Im Gegensatz zu Hilbert, der bereit war, seine Bemühungen auf die zentralen Bereiche der Mathematik zu beschränken, hat Hermann Weyl sich stets bemüht, die „Wahrheit“ der Aussagen der exakten Naturwissenschaften, speziell der Physik, philosophisch zu überprüfen.

Zu Anfang des Jahrhunderts war bekanntlich festzustellen, daß sich die Philosophie aus vielen traditionell außerordentlich wichtigen Gebieten wie Ethik, Erkenntnistheorie oder auch Moral- und Rechtslehre mehr und mehr zurückgezogen hatte auf die Existenzphilosophie des Individuums. Dies wurde schon damals seitens der Naturwissenschaften bedauert, da diese immer mehr in Bereichen Stellung beziehen mußten, in denen sie sich nicht sicher fühlten. In Göttingen wurde 1921 beispielsweise der Plan erwogen, die durch die Berufung des Philosophen Husserl nach Freiburg vakante Professur mit einem Mathematiker zu besetzen. Dies war nicht unrealistisch, da Mathematik und Naturwissenschaften noch mit den Geisteswissenschaften in einer Fakultät vereinigt waren. Man dachte natürlich an Hermann Weyl.

Der Plan hat sich zerschlagen. Es ist aber wohl doch wichtig zu sehen, daß der Wunsch zu einer engeren Zusammenarbeit zwischen Naturwissenschaften und Philosophie schon damals bei den Naturwissenschaften vorhanden war und nicht erst durch die Entdeckungen der letzten Jahre und ihre Gefahren entstanden ist.

Die vielen Neuauflagen seiner Veröffentlichungen deuten darauf hin, daß die Weylschen Bemühungen zum Brückenschlag zur Philosophie beginnen Wirkungen zu zeigen.

Die Intensität, mit der hervorragende Mathematiker wie Hilbert, Weyl und viele andere die „Grundlagenkrise“ zu beheben versuchten, wird verständlich, wenn man sich klarmacht, daß durch diese „selbstgefertigte“ Krise die herausgehobene Position der Mathematik im Spiel der Wissenschaften in Zweifel gezogen wurde. Rückblickend war es keine Krise der Mathematik, sondern ein ganz normaler Prozeß für ein Teilgebiet einer wissenschaftlichen Disziplin – die Mengenlehre innerhalb der Mathematik – deren Leistungsfähigkeit zu hoch veranschlagt wurde.

Noch bevor Kurt Gödel 1931 schwerwiegende Mängel an Hilberts Versuch entdeckte, nicht die Wahrheit, sondern nur die formale Konsistenz des Spiels der mathematischen Symbole zu beweisen, hatte Hermann Weyl Bedenken gegen diese Art der Begründung geistiger Sicherheiten angemeldet. Er schreibt sogar, daß diese Art die Existenz von „Elementen“ eines Systems aus der Widerspruchsfreiheit ihrer formalen Relationen zu schließen viel mit den „Existenzbeweisen“ der mittelalterlichen Kirchenväter gemeinsam hat. Er läßt als Beweise der Existenz nur Konstruktionen zu, die in heutiger Sprechweise auch „programmierbar“ sind.

In Hilberts Versuch zur „Begründung der Mathematik“ genügt es, die Widerspruchsfreiheit des „Spiels“ in formaler Hinsicht zu beweisen. Diese Widerspruchsfreiheit kann durch eine Formel ausgedrückt werden. Gödel bewies nun: Falls das Spiel der Mathematik widerspruchsfrei ist, kann die Formel der Widerspruchsfreiheit nicht innerhalb des Spiels bewiesen werden. Hermann Weyl bemerkt 1950: *Wie können wir dann hoffen, sie jemals zu beweisen?*

Damit ist der Begriff der Widerspruchsfreiheit oder Konsistenz wie Weyl sich ausdrückt, aber keineswegs ad absurdum geführt. Er ist vielmehr in der Beurteilung der Aussagen über die physikalische Welt immer noch das Credo der exakten Naturwissenschaften, die ihre Aussagen so lange als gültig ansehen als sie sich nicht theoretisch oder durch experimentelle Nachweise zum Widerspruch führen lassen. Hier liegt allerdings ein anderer Wissenschaftsbegriff vor als der, den Hilbert für die Mathematik zu retten versuchte.

Die Beziehungen zwischen den Grundlagen der Mathematik und der Philosophie hat Hermann Weyl schon 1928 in einer Form beschrieben, die nicht nur seine Grundeinstellung klärt, sondern auch seine großen sprachlichen Fähigkeiten beweist:

> *„Die Stufen, welche die Grundlagenforschung in der Mathematik während der letzten Zeit durchlaufen hat, entsprechen den drei fundamentalen erkenntnistheoretischen Einstellungsmöglichkeiten. Die mengentheoretische Begründung ist die Stufe des naiven Realismus, der sich des Überganges vom Gegebenen zum Transzendenten nicht bewußt wird. Brouwer vertritt den Idealismus, indem er Zurückführung aller Wahrheit auf das anschaulich Gegebene fordert. Im axiomatischen Formalismus endlich unternimmt das Bewußtsein den Versuch, „über den eigenen Schatten zu springen“, den Stoff des Gegebenen hinter sich zu lassen, das Transzendente darzustellen; aber, wie sich von selbst versteht, nur im Symbol. Den idealistischen Standpunkt in der Erkenntnistheorie hat die abendländische Philosophie von Descartes ab grundsätzlich festgehalten; dennoch*

suchte sie immer wieder in der Metaphysik den Zugang zum Reich des Absoluten, und noch auf Kant, der ein für allemal den Riegel vorschieben wollte, folgten Fichte, Schelling, Hegel. Es ist nicht zu leugnen, daß in uns ein vom bloß phänomenalen Standpunkt schlechterdings unverständliches theoretisches Bedürfnis lebendig ist, das zur Totalität drängt. Gerade die Mathematik zeigt das mit besonderer Deutlichkeit. Aber aus ihr mögen wir auch lernen, daß jenem Bedürfnis Befriedigung werden kann nur unter einer Voraussetzung: wenn wir uns genügen lassen am Symbol und dem mystischen Irrtum entsagen, daß das Transzendente je in den Lichtkreis unserer schauenden Einsicht falle. Nur in der Mathematik und Physik hat bisher die theoretische Konstruktion solche Festigkeit gewonnen, daß sie zwingend ist für jeden, dessen Geist jenen Wissenschaften sich öffnet. Darauf beruht vorwiegend ihr philosophisches Interesse".

In einem sehr persönlich gehaltenen Bericht aus dem Jahre 1954 hat er unter dem Titel „Erkenntnis und Besinnung" eine Darstellung der Entwicklung seiner philosophischen Ideen gegeben.

Interessant ist dabei, daß der Philosoph der Mathematik seine geistige Verwandtschaft nicht in einer Richtung sucht, die für einen Mathematiker naheliegend erscheinen könnte, von Descartes zu Spinoza etwa, sondern daß die Richtung von den symbolischen Denkformen der Mathematik weg zu Fichte, Schelling und später vorübergehend sogar zu den Mystikern führte.

Aus Anlaß des 100. Geburtstages wurde aus dem Nachlaß ein Artikel veröffentlicht, der von ihm nicht mehr zum Druck gebracht wurde, aber aus seiner Sicht die Bilanz der Kontroverse zwischen axiomatischen und konstruktiven Aspekten der Mathematik zieht und einen zwischen beiden Auffassungen vermittelnden Standpunkt einnimmt*).

Rückblickend kann man sagen, und Hermann Weyl hat das in dem nicht mehr veröffentlichten Vortrag auch getan, daß weite Teile der Mathematik bei einer Mischung axiomatischer und konstruktiver Methoden am besten gedeihen. Der Wert der axiomatischen Methode zur Konzentration mathematischen Wissens ist außerordentlich groß, wie unbestreitbar ist.

In den drei Jahrzehnten, die seitdem vergangen sind, hat sich das Gesicht der Mathematik mehr verändert als in Jahrhunderten vorher, und viele Mathematiker werden heute die Ergebnisse der Forschung zur Begründung ihrer Wissenschaft in einem anderen Licht sehen als die Schöpfer der mathematischen Logik und des Konstruktivismus.

In diesem verwirrenden Spiel der mathematischen Ideen und Spekulationen hat Hermann Weyl eine zentrale Rolle gespielt, deren Auswirkungen noch heute zu spüren sind.

Eine ursprünglich von Hermann Weyl in englischer Sprache formulierte Beschreibung der Mathematik aus dem Jahre 1944, die B. Eckmann in seinem Beitrag zum 100. Geburtstag für die Zürcher Tagespresse übersetzte, scheint mir die Philosophie dieses großen Mathematikers treffend zusammenzufassen:

---

*) Axiomatic Versus Constructive Procedures in Mathematics, aus dem Nachlaß herausgegeben von T. Tonietti, Math. Intelligencer 7, 10, 85.

„Wir nehmen für die Mathematik nicht das Prärogativ einer Königin der Wissenschaften in Anspruch; andere Gebiete sind für Bildung und Forschung ebenso wichtig oder wichtiger. Aber die Mathematik setzt den Standard objektiver Wahrheit für jedes intellektuelle Unternehmen; Naturwissenschaft und Technik zeugen von der Macht ihrer Anwendung. Neben Sprache und Musik ist sie eine der wesentlichen Manifestationen der freien schöpferischen Kraft des menschlichen Geistes, und sie ist das universelle Organ für das Verständnis der Welt durch theoretische Konstruktion. Mathematik muß deshalb ein unerläßliches Element der Kenntnisse und Fähigkeiten sein, die wir die nächste Generation zu lehren, und ein wesentlicher Teil der Kultur, die wir weiterzugeben haben."

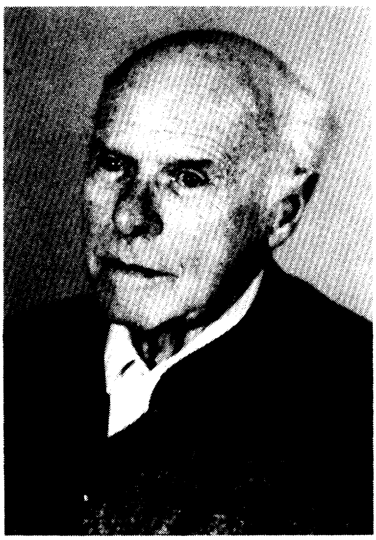
Prof. Dr. Claus Müller
Institut für Reine und
Angewandte Mathematik
der RWTH Aachen
Templergraben 55
5100 Aachen

(*Eingegangen 20. 3. 1986*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
88 (1986) 190–205

Ludwig Bieberbach zum Gedächtnis

H. Grunsky*), Würzburg



Am 1. September 1982 ist Ludwig Bieberbach in Oberaudorf (Oberbayern) verstorben. Er zählt zu den Persönlichkeiten, die das Bild der Mathematik in Deutschland durch viele Jahrzehnte unseres Jahrhunderts geprägt haben. Auch in der DMV spielte er in den Jahren 1920–1934 eine führende Rolle, als Schriftführer und als Herausgeber des Jahresberichts.

So ist es billig, daß seines Wirkens als Mathematiker im Jahresbericht gedacht werde. Daran kann auch die Trübung seines Persönlichkeitsbildes durch seine unglücklichen politischen Verirrungen in der Zeit des Nationalsozialismus nichts ändern. Es ist hier nicht der Ort, auf diese Vorgänge, die die Mathematik in Deutschland und viele einzelne deutsche Mathematiker empfindlich geschädigt, ihm selbst aber keinerlei persönlichen Vorteil gebracht haben, näher einzugehen. Nur soviel sei gesagt: Bieberbach hat, wie durch verbürgte Äußerungen belegt ist, diese Irrtümer später erkannt und tief bereut.

Ludwig Bieberbach wurde am 4. Dezember 1886 in Goddelau (Hessen) als Sohn des Arztes Erhard Bieberbach, des späteren Direktors eines psychiatrischen

*) Verstorben am 5. 6. 1986.

Krankenhauses in Heppenheim an der Bergstraße, geboren. Nach Privatunterricht trat er 1898 in das humanistische Gymnasium in Bensheim ein, das er 1905 mit dem Zeugnis der Hochschulreife verließ. 1905 bis 1906 leistete er Militärdienst in Heidelberg, wo er nebenbei schon bei Königsberger Vorlesungen über Funktionentheorie hörte. 1907 ging er nach Göttingen, dessen ungemein lebendige wissenschaftliche Atmosphäre ihn in vieler Hinsicht befruchtete. Zunächst wurde er vorwiegend von Felix Klein in einem Seminar über automorphe Funktionen angeregt, woraus dann seine Dissertation entstanden ist. Von erheblicher Bedeutung war für ihn auch der Kontakt mit dem nur wenige Jahre älteren Paul Koebe. Besonders hervorzuheben ist aber der Anstoß von Hilbert, das Problem Nr. 18 seines Pariser Vortrages aus dem Jahre 1900 aufzugreifen. Das ergab seine Habilitationsschrift, mit der er, zusammen mit Ernst Zermelo, 1910 nach Zürich ging. Aber schon zum Wintersemester 1910/1911 bekam er, wohl auf Anregung von Schönflies, der in Königsberg Ordinarius war, dort einen (sehr bescheiden honorierten) Lehrauftrag, den er bis zum Jahre 1913 wahrnahm, das ihn als Ordinarius nach Basel rief. 1914 schloß er die Ehe mit Johanna geb. Stoermer. Ihr sind vier Söhne entsprossen, deren jüngster im zweiten Weltkrieg gefallen ist.

1915 folgte er einem Ruf an die Universität Frankfurt a. M., wiederum an die Seite von Schönflies. 1921 ging er als Nachfolger von Carathéodory nach Berlin. Das Jahr 1924 brachte die Mitgliedschaft der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina und der Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin. 1945 wurde er amtsenthoben, 1952 pensioniert. Doch auch die Jahre danach waren noch immer eine Zeit fruchtbaren wissenschaftlichen Schaffens.

Bieberbach wirkte nach außen vielfach schroff und unnahbar. Aber das entsprach nicht seinem inneren Wesen, war vielleicht eher eine Tarnung eines empfindsamen Inneren. Er hat auch an den persönlichen Problemen seiner Schüler Anteil genommen und in schwierigen Lagen nach Möglichkeit geholfen.

Die Forschertätigkeit von Bieberbach hat nicht ein Werk aus einem Guß geschaffen wie etwa die von Paul Koebe, bei dem sie fast vollständig und in gewisser Weise erschöpfend einem großen Problemkreis gewidmet war, der Uniformisierung.

Dafür zeigt sie bei Bieberbach eine erstaunliche Vielseitigkeit. Sie umfaßt außer der Funktionentheorie, auf der der Schwerpunkt liegt, den Problemkreis der Raumgruppen, Probleme der algebraischen Geometrie, der Topologie, der Differentialgeometrie, der Elementargeometrie, der angewandten Mathematik. Einige seiner Vorträge [11, 47, 70, 80] und auch die Übersetzung [57] zeigen seine weitgespannten und tiefgehenden Interessen.

Auf [80], dessen Titel nicht genügend Aufschluß über den Inhalt gibt, sei hier kurz eingegangen. Die grundlegende Frage ist: gegeben ein Bereich B von Funktionen und eine Menge O von Operatoren, die sich auf die Elemente von B anwenden lassen. Was läßt sich über den entstehenden Bereich B(O) aussagen? Dieser Frage ordnen sich die Untersuchungen von Liouville und Ritt über elementare Funktionen, der Höldersche Satz über die Gammafunktion und Verwandtes unter. Aber auch Fragen der Uniformisierungstheorie, der Menger-Nöbelingsche Einbettungssatz, das 13. Hilbertsche Problem, zu dem Bieberbach selbst einen Beitrag geliefert hat [71, 72] und Fragen der Nomographie (mit der sich Bieberbach in mehreren Publikationen beschäftigt hat: [36, 41, 79]) lassen sich angliedern.

Es kann nicht die Aufgabe dieses Nachrufs sein, sämtliche Originalpublikationen von Bieberbach zu besprechen. Wir übergehen manche Arbeiten, deren Titel schon genügend Aufschluß gibt, und manche, die keine erkennbaren Nachwirkungen hatten.

Zu Beginn seiner Forschertätigkeit (wenn man von der Dissertation absieht) greift er eines der 23 Probleme auf, die Hilbert in seinem Pariser Vortrag von 1900 namhaft gemacht hatte, nämlich das Problem der Bewegungsgruppen mit endlichem Fundamentalbereich, bestehend aus fixpunktfreien Elementen, in einem euklidischen Raum beliebiger Dimension. Durch die Bemühungen von Schönflies und anderen war bekannt, daß es im Zwei- und Dreidimensionalen nur endlich viele solcher Gruppen, von Isomorphismen abgesehen, gibt. Hilbert hatte vermutet, daß das für eine beliebige Dimensionszahl gelte. Auf dieses Problem beziehen sich die Arbeiten [2] bis [5] und [7]. Es handelt sich keineswegs um eine einfache Übertragung des für $n = 3$ angewandten Vorgehens auf beliebiges n. Das Problem wird in breiter Front in Angriff genommen. [3] zieht auch Gruppen in Betracht, die keinen Fundamentalbereich besitzen, nämlich solche, die auch infinitesimale Operationen enthalten; dann auch solche mit unendlichem Fundamentalbereich. Der Endlichkeitsbeweis in [7] stützt sich auf die Jordan-Minkowskische Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen mit ganz-rationalen Koeffizienten, zu der [5] einen Beitrag gibt. Auf diese Gedankengänge kommt der Verf. zusammen mit I. Schur in [61] zurück.

Durch den Endlichkeitsbeweis war die Grundlage geschaffen für die (übrigens nicht nur rein theoretisches Interesse beanspruchende) Kristallographie in n Dimensionen für $n \geqslant 4$, ein Rahmen, der später von anderen mehr oder weniger weitgehend ausgefüllt wurde. Vgl. dazu: Schwarzenberger, R. L. E.: N-dimensional crystallography. London: Pitman, 1980, IV + 130 p.; ferner: Brown, H.; Bülow, R.; Neubüser, J.; Wondratschek, H.; Zassenhaus, H.: Crystallographic groups of four-dimensional space. New York: J. Wiley, 1978, XIII + 443 p.

Bieberbach kommt später nochmals auf diese Untersuchungen zurück. In [65] werden die topologischen Typen von euklidischen Raumformen untersucht. Eine n-dimensionale euklidische Raumform E_n ist ein im Kleinen metrisches Bild des $\mathbf{R}^n$, wobei die Abbildung in der Umgebung jedes Punktes des $\mathbf{R}^n$ umkehrbar eindeutig und entfernungtreu ist. Das Problem, alle E_n zu ermitteln, kommt darauf hinaus, alle Bewegungsgruppen im $\mathbf{R}^n$ mit Fundamentalbereich aufzustellen, die nur fixpunktfreie Elemente enthalten. Es ist leicht einzusehen, daß es unendlich viele metrische Typen von Raumformen E_n gibt. Die geschlossenen E_n entsprechen den Gruppen mit endlichem Fundamentalbereich. Das Hauptergebnis von [7] bedeutet, daß es nur endlich viele topologische Typen von geschlossenen E_n gibt. Für den Beweis, daß das auch für offene E_n gilt, kommen die allgemeineren Überlegungen von [3] zum Tragen, die sich mit Gruppen mit unendlichem Fundamentalbereich befassen. Einer weiteren, für den Beweis grundlegenden Feststellung dient [63], in der die Endlichkeit der Anzahl der reellen Züge eines algebraischen Gebildes behauptet wird. [98] ist eine Richtigstellung und Vereinfachung des Beweises dieser heute einfacher zu zeigenden Tatsache, die natürlich über den vorliegenden Zusammenhang hinaus von Interesse ist; doch der konstruktive Beweis von Bieberbach liefert auch grobe Abschätzungen für die in Frage stehende Zahl. Auf die viel behandelte Frage nach der genauen Anzahl der Zusammenhangskomponenten geht Bieberbach nicht ein.

Mit ähnlichen Fragen wie [2] und [7], wenn auch ohne Bezugnahme auf sie, beschäftigt sich [99], die ein physikalisch interessantes Problem behandelt.

Nach den bisher besprochenen Arbeiten wendet sich Bieberbach vorwiegend der Funktionentheorie zu. Ehe wir auf dieses Arbeitsgebiet eingehen sei noch eine kleine, mit ihm nur lose zusammenhängende Arbeit erwähnt, [12] ([14] enthält eine einfache funktionentheoretische Anwendung.) Sie gibt einem uralten, dem isoperimetrischen, Problem eine neue, elementarere Deutung, indem sie nach Bereichen fragt, die bei gegebenem Durchmesser (Bieberbach redet von „Breite") möglichst großen Flächeninhalt haben. Abgesehen von trivialen Ausnahmen ist die Lösung genau der Kreis. Der Beweis benutzt Steinersche Gedankengänge. Diese, später „isodiametrisch" genannte Fragestellung und die Lösung läßt sich, wie Verf. andeutet, leicht auf beliebige Dimensionen ausdehnen. Aber auch abgesehen davon hat die Arbeit der Konvexgeometrie mit ihren verallgemeinerten Begriffsbildungen (Eichfigur, Minkowskimetrik) weitreichende Anregungen gegeben; vgl. Barthel, W.: Comm. math. Helvetici 23 (1959) 241–257.

Von den funktionentheoretischen Arbeiten haben besonders nachhaltige Bedeutung die zur konformen Abbildung, insbesondere die über Extremal- und Koeffizientenprobleme erlangt. In [9] wird der Carathéodorysche Kernsatz für einfach zusammenhängende Gebiete auf beliebige Gebiete ausgedehnt; damit war ein beweistheoretisches Werkzeug von großer Tragweite geschaffen. – In [10] erscheint der 1. Bieberbachsche Flächensatz: ist $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ in $|z| < 1$ holomorph, so ist der innere Flächeninhalt des Bildes (gegebenenfalls gemessen auf einer Riemannschen Fläche) $\pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2$. Insbesondere ergibt sich bei der Normierung $|a_1| = 1$ eine Vergrößerung des Inhaltes gegenüber dem Urbild, es sei denn $f(z) = a_1 z$, $|a_1| = 1$. Eine wichtige Folgerung ist: wenn der Inhalt des Bildes hinreichend wenig von π abweicht, so weicht, bei $a_1 = 1$, $f(z)$ in jedem kompakten Teil des Einheitskreises beliebig wenig von der Identität ab. Das schließt nicht aus, daß in der Nähe des Randes große Abweichungen auftreten. In einer späteren Arbeit, [42], wird unter schärferen Voraussetzungen bezüglich der Abweichung des Bildes vom Urbild eine Aussage über die Geringfügigkeit der Differenz $f(z) - z$ im abgeschlossenen Einheitskreis gemacht. – Der Flächensatz bildet ferner, wie in [10] gezeigt wird, die Grundlage für die Herstellung (in Analogie zum Ritzschen Verfahren in der Physik) der Abbildung eines gegebenen beschränkten Gebietes B auf einen Kreis; genauer gesagt: für die Approximation der gesuchten Funktion $f(z)$ durch Polynome. Man wähle unter allen Polynomen n-ten Grades, die, wie die gesuchte Funktion $f(z)$ in einem inneren Punkte a durch $f(a) = 0$ und $f'(a) = 1$ normiert sind, dasjenige, $f_n(z)$, für das das Bild von B den kleinsten Flächeninhalt aufweist. Dann konvergiert die Folge $f_n(z)$ lokal gleichmäßig in B gegen $f(z)$.

Besonders weitgehende Bedeutung für den Kreis der Extremal-Probleme der konformen Abbildung hat die Arbeit [15] ([14] kann als ein durch sie im wesentlichen überholter Vorgänger gelten). Sie enthält den 2. Flächensatz, der sich auf schlichte Abbildungen $f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$ von $|z| > 1$ bezieht; die Schlichtheit impliziert $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leqslant 1$. Als wichtigste Folgerung ergibt sich für schlichte Abbildungen $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ von $|z| < 1$: $|a_2| \leqslant 2$, wobei das Gleichheitszeichen nur für die Koebefunktionen $f(z) = z(1 - \epsilon z)^{-2}$, $|\epsilon| = 1$ gilt. Schon Plemelj und Pick hatten den Zusammenhang der Verzerrungssätze (von der speziellen Funktion unabhängige Abschätzungen von $|f(z)|$ und $|f'(z)|$) mit der Abschätzung von $|a_2|$ erkannt und darauf entsprechende Abschätzungen gegründet, in die die Schranke von $|a_2|$ einging. Deren scharfe Abschätzung erlaubt nun auch die Angabe von scharfen Verzerrungsschranken, was indes in [15] nur angedeutet wird. Lediglich die scharfe Schranke 1/4 für den Koebeschen Bedeckungssatz wird erwähnt. – In Zusammenhang mit dem zweiten Flächensatz steht die Möglichkeit, den äußeren Bildradius des Außengebietes einer Jordankurve abzuschätzen, was z. B. für die Tragflügeltheorie eine gewisse Bedeutung hat. – In [66] und [95] wird im Anschluß an Montel ein Bedeckungssatz für meromorphe schlichte Funktionen in $|z| < 1$ bewiesen. In [24] und [29] ergibt sich der Drehungssatz aufgrund von $|a_2| < 2$, allerdings nicht mit scharfen Schranken für $\arg f'(z)$, die zusammen mit den Schrankenfunktionen erst 1936 durch Golusin und Basilewitsch gefunden wurden. – Für die übrigen Koeffizienten wird in [15] die Existenz einer Betragsschranke gezeigt und in diesem Zusammenhang erscheint die berühmte „Bieberbachsche Vermutung“: $|a_n| \leqslant n$ mit Gleichheitszeichen nur im Falle der Koebefunktionen. Diese Vermutung hat die funktionentheoretische Forschung beinahe 70 Jahre lang angespornt und zu vielen methodischen Ansätzen angeregt. Einer derselben, von Bieberbach schon in [25] skizziert, aber von ihm nie weitergeführt, knüpft direkt an seinen 2. Flächensatz an; s. Grunsky, H.: Math. Z. **45** (1939) 29–61. Der Beweis der Vermutung ist erst in neuester Zeit de Branges gelungen; s. LOMI, preprint E-5-84, Leningrad Dpt. Stekloff Math. Inst. USSR Acad. of Sci., Leningrad 1984; Acta math. **154** (1985) 137–152. Der Artikel [25] gibt eine noch immer lesenswerte Darstellung der Entwicklung und des damaligen Standes der Forschung auf diesem Gebiete.

Im Anschluß an [15] wird in [22] die Frage nach Winkelräumen $\vartheta_1 \leqslant \arg z \leqslant \vartheta_2$ aufgeworfen, die durch eine ganze Funktion schlicht abgebildet werden können. Ist ρ deren Ordnung, so kann das nur für $\vartheta_2 - \vartheta_1 \leqslant \frac{2\rho - 1}{\rho}$ bei $\rho > 1/2$, für $\rho \leqslant 1/2$ überhaupt nicht eintreten. In [23] schließt sich die Frage nach Winkelräumen an, die zwei Ausnahmewerte zulassen. In beiden Fällen werden die Schrankenfunktionen mittels der Mittag-Lefflerschen E_α-Funktionen dargestellt. Vgl. zu diesen Fragen auch den kurzen Bericht in [30]. – Eine weitere Arbeit zum Picardschen Ideenkreis ist [34], die den Schottkyschen Satz in der scharfen Landauschen Fassung verallgemeinert.

Von den Arbeiten zur Uniformisierungstheorie [1, 6, 13, 19] hat [19] für die Entwicklung der Theorie erhebliche Bedeutung erlangt. Ihr Ziel ist, die Theorie von nicht rein funktionentheoretischen Mitteln unabhängig zu machen, d. h. von potentialtheoretischen und insbesondere von topologischen Überlegungen. Erwähnt werden darf auch, daß die bei Koebe wesentliche Verwendung von Verzerrungssätzen vermieden wird, indem auf deren Wurzel, die Flächensätze, zurückgegriffen wird.

In [46] wird der von Riemann aufgestellte aber nicht allgemein bewiesene Satz, daß sich ein n-fach zusammenhängendes Gebiet ohne punktförmige Randkomponente stets umkehrbar eindeutig auf eine n-blätterige Kreisscheibe abbilden läßt, durch Heranziehung der Schottkyschen Verdoppelung und schweres Geschütz aus der Theorie der algebraischen Funktionen bewiesen. Die Note enthält außerdem viele instruktive Bemerkungen zu den Gedankengängen von Riemann, Schottky u. a., die mit dem Problem zusammenhängen. Sie hat zu elementaren Beweisen angeregt; s. Grunsky, H.: Sitz.-Ber. Preuß. Akad. d. Wiss, phys.-math. Kl. 1937, 40–46; Abhdlg. Preuß. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Kl. **1941**, Nr. 11, 8 S. Einen dem Bieberbachschen nahestehenden Beweis gab Wirtinger: Abhdlg. Preuß. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Kl. 1942, Nr. 4, 9 S. – Mit bedeutsamen Verallgemeinerungen ist dieser Fragenkreis später von vielen Mathematikern aufgegriffen worden, u. a. von Nehari, Ahlfors, M. Heins. – In [124] wird für zweifachen Zusammenhang eine wesentlich allgemeinere Bildkonfiguration behandelt.

Die differentialgeometrischen Arbeiten von Bieberbach haben ihren Ausgangspunkt in dem Hilbertschen Satz, der besagt, daß es im $\mathbf{R}^3$ keine Fläche konstanter negativer Krümmung gibt, die in endlicher, auf der Fläche gemessener Entfernung frei von Singularitäten ist, daß sich also die ebene hyperbolische Geometrie nicht als ganzes auf einer solchen Fläche verwirklichen läßt. Der Hilbertsche Beweis war verschiedentlich kritisiert worden. [49] ist eine „jeden Schritt genau auseinandersetzende Wiedergabe des Hilbertschen Beweises, den ich ... für völlig einwandfrei halte".

Der Beweis beruht wesentlich auf der Tchebychefschen Form des Linienelementes, und der Gedanke liegt nahe, ihn dadurch zu verallgemeinern, daß man das Linienelement einer beliebigen, im endlichen singularitätenfreien Fläche negativer Krümmung auf diese Form bringt. Dann würde der Beweis für beliebige solche Flächen gelten. Indes zeigt es sich, daß für die Möglichkeit, eine solche Fläche mit einem Tchebychef-Netz zu überdecken, einfacher Zusammenhang und eine curvatura integra mit Betrag $\leqslant 2\pi$ notwendig ist. In [51] wird die Frage aufgegriffen und im wesentlichen gezeigt, daß diese Bedingungen, mit geringfügiger Einschränkung, auch hinreichend sind.

In [76] wird bewiesen, daß die nach [49] im $\mathbf{R}^3$ unmögliche Realisierung der ebenen hyperbolischen Geometrie im Hilbertraum möglich ist. Offen bleibt die Frage, ob auch ein $\mathbf{R}^k$ mit hinreichend großem k ausreicht. Sie ist inzwischen, (1953), von Blanuša dahingehend beantwortet worden, daß $k = 6$ ausreicht; vgl. Giering, O.: Vorlesungen über höhere Geometrie. Braunschweig: Vieweg 1983, S. 310.

Der lokale Existenzsatz bezüglich Tchebychef-Netze aus [49] ist von R. Koch in einer Reihe von Arbeiten 1978–83 zur Untersuchung spezieller solcher Netze verwertet worden, um durch zusätzliche Eigenschaften zur lokalen Kennzeichnung geometrisch ausgezeichneter Klassen von zweidimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten zu gelangen.

In [126] werden Tchebychef-Netze im Großen auf konvexen Rotationsflächen untersucht. Jede ins Unendliche reichende solche Fläche läßt sich schlicht und lückenlos mit einem solchen Netz überdecken; bei Eiflächen ist eine solche Bedeckung erst möglich, wenn zwei kurze, zueinander senkrechte Meridianstücke beseitigt sind. In diesem Falle tritt die Existenz von Enveloppen der Netzlinien als neue Schwierigkeit auf.

Erwähnt seien endlich noch drei elementargeometrische Arbeiten, [121, 127, 133]. In [121] wird ein von einem Außenseiter, Stadtarchivar W. K. B. Holz i. J. 1944 angeschnittener Problemkreis aufgegriffen. Es werden Analoga zu den Kongruenzsätzen der euklidischen Geometrie und zum Pythagoras bewiesen für nullwinklige Kreisbogendreiecke, Dreikreise genannt. [127] und [133] enthalten entsprechende Ergebnisse (die ebenfalls schon von Holz ohne Beweise angegeben worden waren) für weitere Klassen von Kreisbogendreiecken.

Die stärkste Wirksamkeit, weit hinausgehend über die seiner Vorlesungstätigkeit, die keinen großen Anklang gefunden hat, hat Bieberbach als Buchautor ausgeübt. Wenige Mathematiker waren in dieser Hinsicht ähnlich fruchtbar. Die heutige Mathematikergeneration, die täglich mit neuen Angeboten von Lehrbüchern und Monographien überschüttet wird, kann sich schwer vorstellen, welche Bedeutung diese Tätigkeit in früheren Jahrzehnten, insbesondere in der Zeit nach dem ersten Weltkrieg, hatte. Sie umfaßt ebenso scheinbar anspruchslose Leitfäden für Studienanfänger wie Lehrbücher und Monographien von hohem wissenschaftlichem Rang. Viele seiner Werke sind Markierungspunkte der Entwicklung, sei es durch ihre didaktische Absicht, sei es durch ihren Inhalt. Die Darstellung zeugt fast immer von einem selbständigen Durcharbeiten des Beweisganges, der dabei durch eigene Ideen, sei es einfacher sei es durchsichtiger wird, Ideen, die manchmal eine eigene Publikation gerechtfertigt hätten. Einseitigkeiten im Methodischen, die gelegentlich nahegelegen hätte, werden mit Bedacht vermieden. Die Lebendigkeit der Darstellung läßt den Leser teilnehmen an der Entwicklung des Gedankenganges. Ein Beweis erscheint niemals nur als starres Gerippe, das jener selbst mit Fleisch und Blut ausfüllen müßte. Diese Eigenheit hat freilich auch ihre Gefahren. Nicht immer ist der sozusagen in statu nascendi dargebotene Gedankengang genügend ausgereift, die Darstellung genügend ausgefeilt, um Irrtümer und kaum zu überwindende Verständnisschwierigkeiten auszuschließen. – Viele seiner Bücher (so insbesondere [114], [120], sowie [116], [128]) setzen den Leser in Erstaunen durch die umfassende und tiefgründige Literaturkenntnis. – Die Wertschätzung der Bieberbachschen Bücher kommt in vielen Fällen zum Ausdruck in Neuauflagen sowie in Übersetzungen und Nachdrucken.

Bieberbachs Leitfäden zur Differential- und Integralrechnung [17, 18], ferner [33, 40, 58, 59, 107, 108], erschienen erstmals in einer Zeit, als es noch keineswegs selbstverständlich war, diese Gegenstände in aller Strenge und Exaktheit im Universitätsunterricht vorzutragen. Man darf wohl sagen, daß diese Bücher nicht unwesentlich dazu beigetragen haben, den Bestrebungen in dieser Richtung zum Durchbruch zu verhelfen. Sie zeigen andererseits, daß es möglich ist, die für den Anfänger wesentlichen Grundbegriffe und Ergebnisse in mäßigem Umfang, aber ohne Verzicht auf die für ihn oftmals so wichtige Breite der Darstellung zu entwickeln.

Als epochemachend darf wohl das Lehrbuch der Funktionentheorie gelten [28, 44, 55, 67, 68, 84, 109, 131]. Nachdem die Bemühungen um eine Überwindung des Gegensatzes der Weierstraßschen und der Riemannschen Schule, die der Verf. an die Spitze seines Werkes gestellt hat, sich vollständig durchgesetzt haben, fällt es dem heutigen Mathematiker schwer, die Bedeutung des Werkes in dieser Hinsicht richtig einzuschätzen. Der 2. Band hat viele bis dahin nur in der Originalliteratur, und dort vielfach in noch nicht abgerundeter Form zugängliche neue Ergebnisse auch für den Anfänger erreichbar gemacht und dadurch, zusammen mit dem Enzyklopädieartikel [26], wesentlich zur Belebung der Forschung beigetragen. Freilich fehlen auch nicht Abschnitte, für die die obigen kritischen Bemerkungen zutreffen, z. B. in der ersten Auflage die Betrachtungen über Ränderzuordnung bei der Fundamentalabbildung beliebiger Gebiete oder das Kapitel über Uniformisierungstheorie. Natürlich ist das Werk inzwischen längst „veraltet", aber trotzdem wurden beide Bände 1968 durch Nachdrucke in USA [109, 131] neu zugänglich gemacht. Damit wurden sie in die Reihe der klassischen Werke eingegliedert, die ihre Bedeutung weit über die Zeit ihrer Aktualität hinaus behalten.

Kurze Zeit nach dem ersten Band des großen Lehrbuchs ist ein Leitfaden der Funktionentheorie erschienen, [32], der etwa im Stile der Leitfäden zur Differential- und Integralrechnung, aber doch wohl für den Anfänger etwas zu knapp gehalten ist. Dem wurde in zwei Neuauflagen Rechnung getragen [113, 125], die zwar genau dieselbe Kapiteleinteilung, aber fast den doppelten Umfang aufweisen.

Zwei weitere wichtige Bücher zur Funktionentheorie sind zu erwähnen: zuerst das Bändchen über konforme Abbildung [16, 56, 93, 110, 115, 123, 130]. Die erste Auflage war Bieberbachs erste Buchveröffentlichung. Es hat insgesamt sechs Auflagen und eine Übersetzung ins Englische erlebt, und dabei, wie sein Gegenstand, viele Wandlungen erfahren. Der knappe Raum eines Göschenbändchens erlaubte weder eine bezüglich der Themen erschöpfende Darstellung noch die Durchführung aller Beweise. Aber methodisch und sachlich wird, insbesondere in den späteren Auflagen, erstaunlich viel geboten.

In dem Ergebnisbericht [120] wird ein Thema neu aufgegriffen, das der Verf. schon in seinem Enzyklopädieartikel [26] und in Band 2 seines Lehrbuches [55, 68] behandelt hatte. Die Probleme werden etwa in dem Umfang berücksichtigt wie in der letztgenannten Darstellung, während die Fortsetzung durch Summierungsmethoden, die in dem Enzyklopädieartikel im Vordergrund standen und zu denen wenig Neues zu sagen gewesen wäre, übergangen werden. Dagegen haben sich bei den im Lehrbuch behandelten Fragen: Lückensätze, Lage der Singularitäten auf dem Rande des Konvergenzkreises, nicht fortsetzbare Potenzreihen, inzwischen Möglichkeiten zur Systematisierung und zum Aufzeigen wesentlicher Zusammenhänge ergeben, die hier genutzt werden. Es liegt nun nicht etwa nur ein ausführlich kommentiertes Literaturverzeichnis im Stile eines Enzyklopädieartikels, sondern eine sehr lesbare Darstellung nach Art eines Lehrbuches für Fortgeschrittene vor. Dabei läßt der Verf. den Leser vielfach an der Entwicklung seiner eigenen Einsichten teilnehmen. Für eingehende Würdigung des Werkes sei auf die Besprechungen von R. Wilson in Math. Reviews **16** (1955), 913 und von R. C. Buck in Bull. Amer. Math. Soc. **62**, 181–183 hingewiesen.

Die Bändchen über analytische, projektive und höhere Geometrie [62, 75, 106, 111; 73, 78] bilden zusammen eine gewisse Einheit. [62] dürfte die erste moderne Darstellung der analytischen Geometrie sein, modern in dem Sinne, daß die methodischen Gesichtspunkte gegenüber den inhaltlichen (Trennung von $\mathbf{R}^2$ und $\mathbf{R}^3$) in den Vordergrund treten. Diese methodischen Gesichtspunkte bestehen in der Verwendung der Vektor- und Matrizenrechnung, in denen Verf. nicht nur geschickte Bezeichnungsweisen, sondern wesentliche Begriffe sieht. Hier bahnt sich die heute geläufige enge Verbindung der analytischen Geometrie mit der linearen Algebra an. Der methodische Gesichtspunkt kommt auch darin zur Geltung, daß Fragen, die erst projektiv ganz aufgeklärt werden können, auf den Band dieses Titels [73] verschoben werden. Hier geht der Verf. zunächst analytisch vor, indem er projektive Koordinaten einführt, doch werden aus diesen die Axiome der projektiven Geometrie entwickelt und damit der synthetischen Betrachtungsweise Tür und Tor geöffnet. Die Einleitung in die höhere Geometrie [78] gibt diesen beiden Leitfäden eine gewisse Abrundung. Im Vordergrund steht die Axiomatik der projektiven Geometrie und die Gesichtspunkte des Erlanger Programms. Die Übertragungsprinzipien (Hesse, Möbius, Laguerre u. a.) ermöglichen es, eine abstrakte Theorie durch inhaltlich verschiedene isomorphe Modelle zu deuten. Das Bändchen schließt mit der projektiven Maßbestimmung und einer kurzen Darstellung der nichteuklidischen Geometrie. Wiederum enthält es einige methodisch neuartige Gedankengänge.

Das Bändchen [77] über Differentialgeometrie fußt ebenfalls auf des Verf.s analytischer Geometrie, d. h. es benutzt konsequent die Vektorschreibweise; ein Schlußparagraph führt in die Tensorrechnung ein, wobei auch Parallelverschiebung und Riemannscher Raum kurz gestreift werden. Im übrigen handelt es sich um reelle Kurven im $\mathbf{R}^2$ und $\mathbf{R}^3$ und um solche Flächen im $\mathbf{R}^3$. Großen Wert legt Verf. darauf, unsaubere Schlüsse zu vermeiden, wie sie in der Differentialgeometrie lange Zeit üblich und damals noch nicht ganz ausgestorben waren.

Die Vorlesungen über Algebra [60, 83] sind aus dem erstmals 1903 erschienenen Werk dieses Titels von Gustav Bauer hervorgegangen. Dieser legte naturgemäß noch den inzwischen überholten Algebrabegriff zugrunde, wonach diese Disziplin die Aufgabe habe, die numerische Auflösung von algebraischen Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten zu ermöglichen. Daran hat sich auch in der 2. und 3. Auflage, herausgegeben von Karl Doehlmann, nichts geändert. Als Bieberbach 1928 nach dem Tode des vorigen Herausgebers, die Neubearbeitung übernahm, konnte er sich der Einsicht nicht verschließen, daß das von ihm geschätzte Werk einer gründlichen Modernisierung bedurfte. So ist ein weitgehend neues Buch entstanden, das zwar die Absichten des alten keineswegs einfach beiseite legte, aber in diesem Rahmen den Leser an die grundlegenden Begriffe der neueren Algebra heranführte und schließlich in einer Darstellung der (in der 2. und 3. Auflage ganz ausgeschlossenen) Galoischen Theorie mündete. Freilich gehörte die Zukunft schon damals den Büchern, die eine strukturtheoretisch abgegrenzte Algebra vermittelten; so hat das Werk nicht mehr die Bedeutung erlangt, die es wohl verdient hätte.

Mehrere Lehrbücher hat Bieberbach dem Gebiet der Differentialgleichungen gewidmet [39, 54, 69, 105, 136; 116, 128; 122, 137], [39], Vorlesungen über das Gesamtgebiet der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen, war zu seiner Zeit im deutschen Sprachgebiet fast konkurrenzlos, entsprach also einem wesentlichen Bedürfnis, was auch durch die Notwendigkeit einer 2. und 3. Auflage nach nur drei bzw. vier weiteren Jahren bestätigt wird. Schon die 2. Auflage ist in einigen Abschnitten neugestaltet, insbesondere aber ist die 3. nicht unwesentlich umgearbeitet und erweitert.

Diesem Werk recht nahe steht die Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen im reellen Gebiet [122, 137], weist aber, auch abgesehen von dem selbstverständlichen Fehlen der Kapitel über Differentialgleichungen im Komplexen, erhebliche Unterschiede auf. So geht es in den Fragen der Existenz und Einzigkeit der Lösungen viel tiefer, beschränkt dagegen die partiellen Differentialgleichungen auf solche 1. Ordnung. Eine eingehende vergleichende Besprechung der beiden Werke aus Anlaß ihres Nachdrucks i. J. 1979 [136, 137] aus der Feder von C. Coleman findet sich in Zentralblatt **444** (1981) 175–177. Auch hier gilt angesichts dieser späten Nachdrucke das über das große Lehrbuch der Funktionentheorie Gesagte.

Das Buch über gewöhnliche Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage [116, 128] hat bei seinem ersten Erscheinen ebenfalls eine Lücke im deutschen Sprachbereich ausgefüllt. Es kann kaum als reines Lehrbuch angesprochen werden, enthält es doch weit mehr, als einem Studenten, wenn er sich nicht gerade auf dieses Gebiet spezialisiert, zugemutet werden kann. Diesem Umstande trägt der Verf. Rechnung, indem er die Darstellung in den Teilen, durch die der Anfänger angesprochen werden soll, breiter gestaltet als in den Teilen, die für den Fortgeschrittenen gedacht sind. Für eine eingehende Würdigung dieses wichtigen Werkes sei auf die gründlichen Analysen von J. Radon in Monatshefte für Math. **58** (1952), 1. Heft, 67–69 und von Herm. Schmidt im Zentralblatt **53** (1956) 381–383 verwiesen. – Die zweite Auflage aus dem Jahre 1968, [128], ist wesentlich erweitert; indem sie viele neue Ergebnisse einbezieht, trägt sie dem über ein Lehrbuch hinausgehenden Charakter einer Monographie Rechnung; vgl. die Besprechung durch I. Barbălat in Revue Roumaine de Math. pures et appl. **13** (1968), Tom. 1, 135–136.

Das Buch [114] über geometrische Konstruktionen behandelt seinen Gegenstand, soweit die euklidische Ebene in Betracht kommt, in umfassender Weise. Die Vielseitigkeit der Beziehungen zu den verschiedensten Gebieten der Mathematik und ihrer Geschichte forderte gerade die weitgespannten und tiefgründigen Kenntnisse, die dem Verf. eigen. Ostrowski nennt das Buch in einem Geleitwort „Bieberbachs reifstes und zugleich jugendlichstes Werk“. Über den Inhalt im einzelnen unterrichtet das Referat von Gy.-Sz. Nagy im Zentralblatt **46** (1953) 378–379.

Für freundliche Mithilfe und Ratschläge bin ich den folgenden Herrn zu Dank verbunden: U. Bieberbach, Oberaudorf, W. Barthel, Würzburg, W.-D. Geyer, Erlangen, R. Koch, München, J. Neubüser, Aachen, R. Siegmund-Schultze, Berlin.

Verzeichnis der Veröffentlichungen von L. Bieberbach

[1] Zur Theorie der automorphen Funktionen. Dissertation. Göttingen 1910, 42 S.
[2] Über die Bewegungsgruppen des n-dimensionalen Euklidischen Raumes mit einem endlichen Fundamentalbereich. Gött. Nachr. **1910**, 75–84
[3] Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume I. Math. Ann. **70** (1911) 297–336
[4] Über einen Satz des Herrn C. Jordan in der Theorie der endlichen Gruppen linearer Substitutionen. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. d. Wiss. **1911**, 231–240
[5] Über die Minkowskische Reduktion der positiven quadratischen Formen und die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Transformationen. Gött. Nachr. **1912**, 207–216
[6] $\Delta u = e^u$ und die automorphen Funktionen. Gött. Nachr. **1912**, 599–602
[7] Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume II. Math. Ann. **72** (1912) 400–412
[8] Über den Jordanschen Kurvensatz, die Schönfliesschen Sätze von Erreichbarkeit und Unbewalltheit und den Satz von der Invarianz des ebenen Gebietes. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **22** (1913) 144–153
[9] Über einen Satz des Herrn Carathéodory. Gött. Nachr. **1913**, 552–560
[10] Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung. Rend. del Circolo mat. Palermo **38** (1914) 98–112
[11] Über die Grundlagen der modernen Mathematik. Die Geisteswiss. **1** (1914) 896–901
[12] Über eine Extremaleigenschaft des Kreises. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **24** (1915) 237–250
[13] $\Delta u = e^u$ und die automorphen Funktionen. Math. Ann. **77** (1916) 173–212
[14] Über einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildung. Math. Ann. **77** (1916) 153–172
[15] Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. d. Wiss. **1916**, 940–955
[16] Einführung in die konforme Abbildung. Slg. Göschen. Berlin 1915, 142 S.
[17] Differentialrechnung. Leipzig: Teubner 1917, VI + 130 S.
[18] Integralrechnung. Leipzig: Teubner 1918, VI + 142 S.
[19] Über die Einordnung des Hauptsatzes der Uniformisierung in die Weierstraßsche Funktionentheorie. Math. Ann. **78** (1918) 312–331
[20] Über einen Osgoodschen Satz in der Integralrechnung. Math. Z. **2** (1918) 155–157
[21] Zur Theorie der komplexen Zahlen. Math. Z. **2** (1918) 171–179
[22] Zwei Sätze über das Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung wesentlich singulärer Stellen. Math. Z. **2** (1918) 158–170
[23] Über eine Vertiefung des Picardschen Satzes bei ganzen Funktionen endlicher Ordnung. Math. Z. **3** (1918) 175–190
[24] Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichte konforme Abbildungen. Math. Z. **4** (1919) 295–305
[25] Neuere Forschungen im Gebiete der konformen Abbildung. Glasnik **33** (1921) 24 S.
[26] Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen. Encykl. d. math. Wiss. II C 4 (1921) 379–532
[27] Über neuere Lehrbücher der praktischen Analysis. Z. angew. Math. u. Mech. **1** (1921) 61–67
[28] Lehrbuch der Funktionentheorie I. Leipzig: Teubner 1921, VI + 314 S.
[29] Bemerkung zu meinem Beweis des Drehungssatzes für schlichte und konforme Abbildungen. Math. Z. **9** (1921) 161–162
[30] Auszug aus einem Brief des Herrn Bieberbach an den Herausgeber. Acta math. **42** (1920) 357–361
[31] David Hilbert zum 60. Geburtstag. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **31** (1922) 3–10

[32] Funktionentheorie. Teubners techn. Leitfäden 14. Leipzig: Teubner 1922, II + 118 S.
[33] Differentialrechnung. 2. Aufl. Leipzig: Teubner 1922, VI + 132 S.
[34] Über die Verteilung der Null- und Einsstellen analytischer Funktionen. Math. Ann. **85** (1922) 141–148
[35] Hermann Amandus Schwarz. Sitz.-Ber. Berliner Math. Ges. **21** (1922) 47–52
[36] Über Nomographie. Die Naturwiss. **10** (1922) 775–782
[37] Arthur Schönflies. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **32** (1923) 1–6
[38] Arthur Schönflies als Mathematiker. Die Naturwiss. **11** (1923) 282–284
[39] Theorie der Differentialgleichungen. Berlin: Springer 1923, VIII + 320 S.
[40] Integralrechnung. 2. Aufl. Leipzig: Teubner 1923, 151 S.
[41] Über die mathematischen Grundlagen der Nomographie. Z. VDI **68** (1924) 495–498
[42] Über die konforme Kreisabbildung nahezu kreisförmiger Bereiche. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. d. Wiss. **1924**, 181–188
[43] Antrittsrede des Herrn Bieberbach. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. d. Wiss. **1924**, XC–XCI
[44] Lehrbuch der Funktionentheorie I. 2. Aufl. Leipzig: Teubner 1924, VI + 314 S.
[45] Über die asymptotischen Werte der ganzen Funktionen endlicher Ordnung. Math. Z. **22** (1925) 34–40
[46] Über einen Riemannschen Satz aus der Lehre von der konformen Abbildung. Sitz.-Ber. Berliner Math. Ges. **24** (1925) 6–9
[47] Über die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie im neunzehnten Jahrhundert. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. d. Wiss. **1925**, 381–397
[48] Adresse an Herrn F. Schottky zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. d. Wiss. **1925**, 327–328
[49] Hilberts Satz über Flächen konstanter negativer Krümmung. Acta math. **48** (1926) 319–327
[50] Investigaciones sobre la representation conforme. Mon. mat. publ. por la Rev. mat. Hisp.-Am. Ser. II Num. 1 (1926)
[51] Über die Tchebychefschen Netze auf Flächen negativer Krümmung sowie auf einigen weiteren Flächenarten. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. d. Wiss. **1926**, 294–321
[52] Eine hinreichende Bedingung für schlichte Abbildungen des Einheitskreises. J. Reine u. Angew. Math. **157** (1927) 189–192
[53] Netto, E.: Determinanten. 2. Aufl. besorgt von L. Bieberbach. Leipzig: Teubner 1926, 122 S.
[54] Theorie der Differentialgleichungen. 2. Aufl. Berlin: Springer 1926, IX + 356 S.
[55] Lehrbuch der Funktionentheorie II. Leipzig: Teubner 1926, VII + 366 S.
[56] Einführung in die konforme Abbildung. 2. Aufl. Slg. Göschen, Berlin 1927, 131 S.
[57] Enriques, F.: Zur Geschichte der Logik. Grundlagen und Aufbau der Wissenschaft im Urteil der mathematischen Denker. Deutsche Ausgabe von L. Bieberbach. Leipzig: Teubner 1927, V + 240 S.
[58] Differentialrechnung. 3. Aufl. Leipzig: Teubner 1928, VI + 142 S.
[59] Integralrechnung. 3. Aufl. Leipzig: Teubner 1928, VI + 150 S.
[60] Vorlesungen über Algebra. Unter Benutzung der 3. Aufl. von G. Bauers gleichnamiger Vorlesung. Leipzig: Teubner 1928, X + 334 S.
[61] (Zusammen mit I. Schur) Über die Minkowskische Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. d. Wiss. **1928**, 510–535
[62] Analytische Geometrie. Leipzig: Teubner 1930, VI + 120 S.
[63] Über die reellen Züge der algebraischen Gebilde. Math. Z. **31** (1929) 161–175
[64] Zur Theorie der schlichten Abbildungen. Bull. Calcutta math. Soc. **20** (1929) 17–20
[65] Über die topologischen Typen der offenen Euklidischen Raumformen. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. d. Wiss. **1929**, 612–619

[66] Über schlichte Abbildungen des Einheitskreises durch meromorphe Funktionen. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. d. Wiss. **1929**, 620–623
[67] Lehrbuch der Funktionentheorie I. 3. Aufl. Leipzig: Teubner 1930, VI + 328 S.
[68] Lehrbuch der Funktionentheorie II. 2. Aufl. Leipzig: Teubner 1931, VI + 370 S.
[69] Theorie der Differentialgleichungen. 3. Aufl. Berlin: Springer 1930, XIII + 399 S.
[70] Über den Einfluß von Hilberts Pariser Vortrag über „mathematische Probleme" auf die Entwicklung der Mathematik in den letzten dreißig Jahren. Die Naturwiss. **18** (1930) 1101–1111
[71] Bemerkungen zum dreizehnten Hilbertschen Problem. J. Reine u. Angew. Math. **165** (1931) 89–92
[72] Zusatz zu meiner Arbeit „Bemerkungen zum dreizehnten Hilbertschen Problem". J. Reine u. Angew. Math. **170** (1934) 242
[73] Projektive Geometrie. Leipzig: Teubner 1931, VI + 190 S.
[74] Zur Lehre von den kubischen Konstruktionen. J. Reine u. Angew. Math. **167** (1931) 142–146
[75] Analytische Geometrie. 2. Aufl. Leipzig: Teubner 1932, V + 141 S.
[76] Eine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung im Hilbertschen Raum. Comm. math. Helvetici **4** (1932) 248–255
[77] Differentialgeometrie. Leipzig: Teubner 1932, VI + 140 S.
[78] Einleitung in die höhere Geometrie. Leipzig: Teubner 1933, VIII + 128 S.
[79] Nomographie und Hessesches Übertragungsprinzip. Z. angew. Math. u. Mech. **13** (1933) 66
[80] Operationsbereiche von Funktionen. Verh. d. internat. Math. Kongr. Zürich **1** (1932) 162–172
[81] (Mit H. Weyl, O. Blumenthal, H. Hasse) David Hilbert zum 70. Geburtstag. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **42** (1932) 67–68
[82] Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplexer Variabler, welche eine schlichte volumtreue Abbildung des R_4 auf einen Teil seiner selbst vermitteln. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. d. Wiss. **1933**, 476–479
[83] Vorlesungen über Algebra. (Unter Benutzung der 3. Aufl. von G. Bauers gleichnamiger Vorlesung.) 5. Aufl. Leipzig: Teubner 1933, X + 358 S.
[84] Lehrbuch der Funktionentheorie I. 4. Aufl. Leipzig: Teubner 1933, VI + 334 S.
[85] Persönlichkeitsstruktur und mathematisches Schaffen. Forsch. u. Fortschr. **1934**, 118–123
[86] Die Kunst des Zitierens. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **44** (1934) 1–3
[87] Ein zweites Analogon zur Biegungstheorie in der affinen Flächentheorie. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. d. Wiss. **1934**, 361–364
[88] Stilarten mathematischen Schaffens. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. d. Wiss. **1934**, 351–360
[89] Persönlichkeitsstruktur und mathematisches Schaffen. Unterrichtsblätter **40** (1934) 236–243
[90] Zweihundertfünfzig Jahre Differentialrechnung. Z. f. d. ges. Naturwiss. **1** (1935) 171–175
[91] Aufzählung der endlichen Drehungen des dreidimensionalen Euklidischen Raumes. Dt. Math. **1** (1936) 145–148
[92] Gedächtnisrede auf Herrn F. Schottky. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. d. Wiss. **1936**, CV–CVI
[93] Einführung in die konforme Abbildung. 3. Aufl. Slg. Göschen, Berlin 1937, 137 S.
[94] Fragen des mathematischen Universitätsunterrichts. Dt. Math. **2** (1937) 11–16
[95] Über schlichte Abbildungen des Einheitskreises durch meromorphe Funktionen. II. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. d. Wiss. **1937**, 359–365
[96] Carl Friedrich Gauß. Ein deutsches Gelehrtenleben. Berlin: Keil 1938, 179 S.

[97] Galilei und die Inquisition. Arbeitsgemeinsch. f. Zeitgeschichte. München 1938, 143 S.
[98] Über die reellen Züge der algebraischen Gebilde. Dt. Math. **4** (1939) 348–360
[99] Über die Inhaltsgleichheit der Brillouinschen Zonen. Mh. f. Math. u. Phys. **48** (1939) 509–515
[100] Schlitzabbildungen durch rationale Funktionen. Züricher Vjschr. **85**, Beibl. 32 (1940) 143–148
[101] Typen mathematischen Schaffens. Sitz.-Ber. Heidelberger Akad. d. Wiss. **5** (1940) 31 S.
[102] Schlitzabbildungen durch rationale Funktionen. Dt. Math. **5** (1941) 272–273
[103] David Hilbert. Europ. Wiss.-dienst **5** (1943) 4–5
[104] Galilei und die Inquisition. 2. durchgesehene Aufl. Arbeitsgemeinsch. f. Zeitgesch., München 1942
[105] Theorie der Differentialgleichungen. New York: Dover Publ 1944, XIII + 399 S.
[106] Analytische Geometrie. 3. Aufl. Leipzig: Teubner 1944, VI + 141 S.
[107] Integralrechnung. 4. Aufl. Leipzig: Teubner 1942, VI + 170 S.
[108] Differentialrechnung. 4. Aufl. Leipzig: Teubner 1942, VI + 142 S.
[109] Lehrbuch der Funktionentheorie I, II. New York: Chelsea Publ. Comp. 1945. I. Nach der 2. Aufl. VI + 322 S. II. Nach der 2. Aufl. VI + 370 S.
[110] Einführung in die konforme Abbildung. 4. Aufl. Slg. Göschen Berlin 1949, 147 S.
[111] Einführung in die analytische Geometrie. 4. Aufl. Bielefeld: Verlag f. Wiss. und Fachbuch 1950, 168 S.
[112] On the remainder in the Runge-Kutta-formula in the theory of ordinary differential equations. Z. f. Angew. Math. u. Phys. **2** (1951) 233–248
[113] Einführung in die Funktionentheorie. 2. Aufl. Bielefeld: Verlag f. Wiss. u. Fachbuch 1952, 220 S.
[114] Theorie der geometrischen Konstruktionen. Basel: Birkhäuser 1952, VIII + 162 S.
[115] Conformal mapping. New York: Chelsea Publ. Co. 1953, 234 S.
[116] Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer 1953, IX + 338 S.
[117] Über einen Satz Polyascher Art. Arch. Math. **4** (1953) 23–27
[118] Über Stifelsche magische Quadrate. I. Arch. Math. **5** (1954) 4–11
[119] Mathematische Fragen im Bereich der magischen Quadrate. Math.-Phys. Sem.-Ber. **4** (1954) 59–81
[120] Analytische Fortsetzung. Ergebn. d. Math. N. F., Heft 3. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer 1955, II + 168 S.
[121] Zur Euklidischen Geometrie der Kreisbogendreiecke. Math. Ann. **130** (1955) 46–86
[122] Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen im reellen Gebiet. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer 1956, VIII + 281 S.
[123] Einführung in die konforme Abbildung. 5. Aufl. Slg. Göschen Berlin 1956, 180 S.
[124] Eine Bemerkung zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete. Math. Z. **67** (1957) 99–102
[125] Einführung in die Funktionentheorie. 3. Aufl. Stuttgart: Teubner 1959, 220 S.
[126] Tchebychefnetze auf Rotationsflächen. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **55** (1961) 273–295
[127] Über die Euklidischen Invarianten der gleichwinkligen Kreisbogendreiecke mit Winkelsumme π. Calcutta math. Soc., Golden Jub. Comm. Vol. I (1963) 33–63
[128] Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage. 2. Aufl. Berlin – New York: Springer 1965, XI + 389 S.
[129] Das Werk Paul Koebes. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **70** (1967) 148–158
[130] Einführung in die konforme Abbildung. 6. Aufl. Slg. Göschen, Berlin 1967, 184 S.
[131] Lehrbuch der Funktionentheorie I, II. New York – London: Johnson Repr. Corp. 1968. I. nach der 1. Aufl. VI + 314 S. II. nach der 2. Aufl. VI + 370 S.

[132] Differentialgeometrie. New York – London: Johnson Reprint Corp. 1968, VI + 140 S.
[133] Zwei Kongruenzsätze für Kreisbogendreiecke in der Euklidischen Ebene. Math. Ann. **190** (1970) 97–118
[134] Gaußgerade, Hönigspunkt, Steinergerade, Kegelschnitte. Praxis Math. **17** (1975) 201–205
[135] Alexander Dinghas zum Gedächtnis. Anspr. u. Vorträge des Gedächtniskoll. für A. Dinghas. Math. Inst. d. Freien Univ. Berlin 1977, 40–44
[136] Theorie der Differentialgleichungen. 3. Aufl. Reprint. Berlin – New York: Springer 1979, XIII + 399 S.
[137] Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen im reellen Gebiet. Reprint. Berlin – New York: Springer 1979, VIII + 281 S.

Promovenden bei Bieberbach bis 1945 (Erstgutachten)

Abkürzungen für die Quellen, aus denen sich die Gutachter der jeweiligen Arbeit ermitteln ließen:

D	Doktorandenbuch der Philosophischen Fakultät (handschriftlich in AHUB, 1928–36)
Jb	Jahrbuch der Diss. der Phil. Fak. (1921–1926) gedruckt, Berlin
Jv	Jahresverzeichnis der deutschen Universitätsschriften (ab Jahrgang 38 (1922) werden die Gutachter nicht mehr angeg.)
S	Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für Angewandte Mathematik der Berliner Universität (1932–1941)
UBB	Universitätsbibliothek Berlin (Exemplare der Dissertationen)

1.	**Reinhardt**, Karl: Über die Zerlegung der Ebene in Polygone 16. 7. 1918	Jv
2.	**Frank**, Elisabeth Beiträge zur konformen Abbildung 19. 1. 1920	Jv
3.	**Süss**, Wilhelm Begründung der Inhaltslehre im Raum ohne Benutzung von Stetigkeits-axiomen Februar 1920	Math. Ann. 82
4.	**Ruckes**, Paula Über den Zusammenhang zwischen metrischer und projektiver Geometrie 28. 10. 1920	Jv
5.	**Friesecke**, Hans Vektorübertragung, Richtungsübertragung und Metrik in gegenseitigen Beziehungen 20. 12. 1923	Jb
6.	**Cremer**, Hubert Zum Zentrumproblem 29. 7. 1927	UBB
7.	**Fenchel**, Werner Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven 12. 10. 1928	D
8.	**Grunsky**, Helmut: Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche 26. 7. 1932	S

9. **Rengel**, Ewald
Über einige Schlitztheoreme der konformen Abbildung S
31.5.1933
10. **Scholz**, Edmund
Flächentheoretische Integralsätze S
12.7.1933
11. **Wernick**, Max
Über Minimalflächen im Großen S
9.5.1934
12. **Schröder**, Kurt
Einige Sätze aus der Theorie der kontinuierlichen Gruppen linearer Transformationen S
17.10.1934
13. **Hamdi-Alisbah**, Orhan
Das Koeffizientenproblem der analytischen Funktionen mit beschränkter Schwankung S
6.5.1936
14. **Herbst**, Franz
Über die Herleitung der Weingartenschen Fundamentalgleichungen aus den Codazzi-Meinardischen Gleichungen S
14.10.1936
15. **Melchior**, Eberhard
Untersuchungen über ein Problem aus der Theorie der Konfigurationen S
2.6.1937
16. **Pietsch**, Hans
Über Flächen, die ein Büschel geschlossener Geodätischer oder ein Paar konjugierter Gegenpunkte besitzen S
15.10.1938
17. **Hünke**, Anneliese
Über gewisse Flächen konstanter Krümmung in Räumen konstanter Krümmung S
8.1.1940

(*Eingegangen: 10. 10. 1985*)

Buchbesprechungen

Fulton, W., Intersection Theory (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge – Band 2), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer Verlag 1984, xi + 470 S., gbd., DM 128,–

Die Schnitttheorie, eine der wichtigsten Grundlagen der algebraischen Geometrie, wird in diesem Ergebnisbericht mit einem Minimum an Voraussetzungen aus der kommutativen Algebra und algebraischen Geometrie ausführlich und ab ovo entwickelt. Dies wird ermöglicht durch einen neuen Zugang zu dieser alten Theorie, den der Verfasser gemeinsam mit R. MacPherson in früheren Arbeiten gegeben hat und der wesentlich einfacher und allgemeiner zu besseren Ergebnissen führt. Der Satz von Riemann-Roch in der Grothendieckschen Verallgemeinerung konnte so von Baum-Fulton-MacPherson auf singuläre und zuletzt auch nichtquasiprojektive Varietäten erweitert werden. Dieser Fragenkreis wird in dem Ergebnisbericht in zwei Kapiteln abgehandelt. Eine Fülle von Anwendungen wird in den „Beispielen" vorgestellt. So gibt dieses Buch eine ausgezeichnete moderne und überaus inhaltsreiche Darstellung eines wichtigen Teils der algebraischen Geometrie. Eine 80seitige Einführung desselben Verfassers (W. Fulton, Introduction to Intersection Theory in Algebraic Geometry, CBMS Regional Conference N. 54, AMS 1983) kann als Leitfaden dienen. In dem Buch selbst gibt der Verf. am Anfang eines jeden Kapitels eine Inhaltsübersicht und an dessen Ende Literaturhinweise und historische Bemerkungen.

Der Fortschritt in Fultons Theorie besteht darin, daß von Anfang an mit Zykelklassen (modulo rationaler Äquivalenz) gearbeitet und die Schnitttheorie als Theorie von Operatoren, die Zykelklassen in Zykelklassen auf i. a. singulären Schemata abbilden, eingeführt wird. Insbesondere die Chern- und Segre-Klassen, wichtig auch für die Theorie von Riemann-Roch, sind dabei von fundamentaler Bedeutung. Daher wird bei diesem Aufbau die algebraische Multiplizitätstheorie der lokalen Algebra überflüssig, ebenso wie die Anwendung eines „moving lemma" in der bisherigen Theorie. Damit werden die bisher notwendigen Voraussetzungen der Quasiprojektivität sowie der Algebraizität über einem Grundkörper überflüssig.

Die *Grundkonstruktion* ist dabei die folgende: Sei $i : X \to Y$ eine reguläre Einbettung der Kodimension d, d. h. X wird in Y lokal durch eine reguläre Folge der Länge d beschrieben, und $f : V \to Y$ ein Morphismus einer k-dimensionalen Varietät V in Y (wichtigster Fall: f ebenfalls eine Einbettung), $W = f^{-1}(X)$ ($= X \cap V$, falls f Einbettung).

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & V \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Ein Schnittprodukt $X \cdot V$ wird jetzt definiert als eine Zyklenklasse $\in A_{k-d}(W)$ (= (k − d)-Zyklen auf W modulo rationaler Äquivalenz): $W = f^{-1}(X)$ ist als schematisches Urbild ein Unterschema von V, und man kann dessen „Normalenkegel" $C_W V$ betrachten, einen rein k-dimensionalen Unterkegel des auf W zurückgenommenen Normalen*bündels* $g^*N_X Y$ ($N_X Y = C_X Y$ ist ein d-dimensionales Vektorbündel über X, da $i : X \to Y$ reguläre Einbettung der Kodimension d ist). Dem Unterschema $C_W V \subset g^*N_X Y$ wird nun (via Längen der lokalen Ringe längs der Komponenten von $C_W V$) ein Zyklus $[C_W V] \in A_k(g^*N_X Y)$ zugeordnet, und dieser wird mit dem Nullschnitt $s : W \to g^*N_X Y$ des d-Bündels zum Schnitt gebracht: $X \cdot V = s^*[C_W V]$. Dabei wird benutzt, daß für ein d-Vektorbündel $p : E \to W$ die pull-back-Homomorphismen $p^* : A_k W \to A_{k+d} E$ Isomorphismen (mit s_E^* als inverser Abbildung) sind.

So erhält Verf., J.-L. Verdier folgend, Gysin-Homomorphismen $i^* : A_k Y \to A_{k-d} X$ (für reguläre Einbettungen $i : X \to Y$ der Kodimension d), Schnittprodukte $A_a X \times A_b X \to A_{a+b-n}(X)$ auf n-dimensionalen nichtsingulären Varietäten X (mit der altbekannten „Reduktion auf die Diagonale“ $X \xrightarrow{\Delta} X \times X$, eine reguläre Einbettung der Kodimension n) und für Morphismen $f : Y \to X$ nichtsingulärer Varietäten (mit dem Graph-Morphismus $\Gamma_f : Y \to X \times Y$, eine reguläre Einbettung) pullback-Homomorphismen $f^* : A^*(X) \to A^*(Y)$, wobei $A^p(X) = A_{n-p}(X)$, $n = \dim X$, definiert wird. Für eigentliche f hat man – ohne jede Voraussetzung über X und Y – „push-forward“-Homomorphismen $f_* : A_k(Y) \to A_k(X)$.

Im Falle eines „eigentlichen Schnittes“ $X \cap V = W$ in Y ist mit den obigen Bezeichnungen $A_{k-d}(W)$ frei mit der Basis $[Z_i]$, wobei Z_i die Komponenten von W bezeichnen, und man erhält die früher der Schnitttheorie zugrundegelegten Schnittmultiplizitäten $i(Z, X \cdot V; Y)$ jetzt umgekehrt als Koeffizienten von $[Z]$ in $X \cdot V \in A_{k-d}(W)$ und kann so rückwärts Eigenschaften der $i(Z, X \cdot V; Y)$ herleiten. So konnte z. B. jüngst P. Roberts die Serresche Vermutung über das Verschwinden der Schnittmultiplizität im (noch offenen) charakteristik-ungleichen Fall mit den in Kap. 18 und 20 dieses Buches entwickelten Hilfsmitteln beweisen.

In den ersten 6 Kapiteln des Buches werden sorgfältig diese allgemeinen Grundlagen der Schnitttheorie entwickelt incl. einer neuen Formel für den pull-back von Zyklen bei monoidalen Transformationen. Die restlichen 14 Kapitel enthalten weitgehend voneinander unabhängige Anwendungen der Theorie: In Kap. 7 und 8 werden die Spezialfälle eigentlicher Schnitte und von Schnitten auf nichtsingulären Varietäten dargestellt. Alle klassischen Ergebnisse über den Chow-Ring erhält Verf. so auf sehr elegante Weise, ohne Quasiprojektivität vorauszusetzen.

In Kap. 9 wird ein „Rest-Schnitt-Satz“ in allgemeinerer Form bewiesen:

Es wird mit den Bezeichnungen bei der Grundkonstruktion für ein abgeschlossenes Unterschema Z des Schnittschemas $W = X \cap V$ die Schnittklasse $X \cdot V$ als Summe einer Klasse auf Z und einer Klasse auf einer Restmenge R mit $Z \cup R = W$ geschrieben und damit eine allgemeine Doppelpunktformel hergeleitet. In Kap. 10 werden Schnittklassen in Familien und damit das „Stetigkeitsprinzip“ untersucht. Positivitätsfragen mit Anwendung auf den Satz von Bézout, Rationalitätsfragen und Formeln für „Entartungsörter“ und Grassmannbündel, mit denen der klassische Schubert-Kalkül entwickelt wird, sind weitere Kapitel gewidmet. Schließlich liefert die Geometrie der Deformation auf das Normalenbündel einen neuen kurzen begrifflichen Beweis des Grothendieckschen Satzes von Riemann-Roch.

Kap. 19 stellt die Verbindung zur Theorie komplex-projektiver Mannigfaltigkeiten her, und das letzte Kapitel gibt Ausblicke auf Verallgemeinerungen auf Schemata über Dedekindringen und anderen nichtalgebraischen Grundschemata.

In zwei Anhängen werden im Text benutzte Tatsachen der kommutativen Algebra und algebraischen Geometrie zusammengestellt und z. T. entwickelt.

Dieses Buch markiert einen Meilenstein in der Schnitttheorie der algebraischen Geometrie. Es enthält eine Fülle neuer Ergebnisse und Methoden und gibt für einige Formeln der klassischen „abzählenden Geometrie“ erstmals moderne oder strenge Beweise. Es ist sowohl für den Lernenden als auch für den Forscher als Quelle bestens geeignet. Das Thema ist, wie die neuere „Schnitt-Homologie“ von Goresky-MacPherson für singuläre Räume (auf die das Buch nicht eingehen konnte) zeigt, noch lange nicht abgeschlossen.

Münster H.-J. Nastold

Shiffman, B., Sommese, A. J., Vanishing Theorems on Complex Manifolds (Progress in Mathematics, Vol. 56), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser 1985, 184 pp., hardcover, DM 55,–

In der globalen komplexen Analysis und algebraischen Geometrie können viele Probleme auf das Verschwinden von Cohomologiegruppen mit Werten in holomorphen (algebraischen) Vektorbündeln oder kohärenten Garben zurückgeführt werden.

Ein Beispiel ist etwa die Frage nach der Existenz einer meromorphen Funktion auf einer kompakten Riemannschen Fläche mit vorgeschriebenem Polstellenverhalten.

Der bekannteste und wichtigste „Verschwindungssatz" stammt von Kodaira: Ist X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und L ein negatives Geradenbündel, so gilt

$$H^q(X, L) = 0 \quad \text{für} \quad q < \dim X.$$

Hier ist die Negativität von L differentialgeometrisch (via Krümmung) definiert.

In den beiden ersten Kapiteln werden die komplex-differentialgeometrischen Hilfsmittel bereitgestellt, um den Kodairaschen Verschwindungssatz und die Akizuki-Nakano Verallgemeinerung zu beweisen. Dieses Material findet sich in einigen Lehrbüchern (z. B. Wells, Griffiths-Harris) und ist dort für den „Anfänger" leichter und besser lesbar.

In Kapitel III werden diese Verschwindungssätze auf semi-negative Geradenbündel ausgedehnt. Außerdem wird der von Sommese eingeführte wichtige Begriff der „k-ampleness" diskutiert. Dies ist von der Anwendung her notwendig.

Anschließend werden nach der Methode von le Potier Verschwindungssätze für Vektorbündel höheren Ranges durch Zurückführen auf den Geradenbündelfall bewiesen.

Hier spielt die Positivität eines Vektorbündels eine Rolle. Verschiedene wichtige Positivitätsbegriffe (differentialgeometrisch, funktionentheoretisch und algebraisch-geometrisch) werden verglichen.

Im letzten Kapitel werden neuere Entwicklungen aufgezeigt. In der Klassifikationstheorie projektiver Mannigfaltigkeiten sind Verschwindungssätze die schwächer als der Kodairasche Satz sind von großer Bedeutung. Die Verschwindungssätze von Kawamata-Ramanujam-Viehweg und Grauert-Riemenschneider werden bewiesen und einige Anwendungen gegeben.

Ich habe es als Mangel empfunden, daß die stürmische und wichtige Entwicklung für nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten völlig ausgeklammert und nur durch Literaturzitate gewürdigt wurde.

Unglücklich ist aber vor allem der Zeitpunkt des Erscheinens für dieses Buch. Gerade in jüngster Zeit sind einerseits bedeutende Resultate erzielt worden (Sius-Lösung der Grauert-Riemenschneider Vermutung), andererseits ist das Verständnis der „optimalen" Verschwindungssätze noch im Fluß. Die jüngsten (noch nicht publizierten) Arbeiten von Kollár und Esnault-Viehweg schaffen hier vermutlich Klarheit.

Trotzdem handelt es sich um ein nützliches Buch, das ein zentrales und wichtiges Thema der Komplexen Analysis und Algebraischen Geometrie behandelt. Dem fortgeschrittenen Studenten wird so leicht Material zugänglich gemacht, das er (mit Ausnahme von Kapitel I & II) sonst mühsam aus vielen Originalarbeiten zusammensuchen muß.

Bayreuth M. Schneider

Pavel, N. H., Differential Equations, Flow Invariance and Applications (Research Notes in Mathematics, No. 113), Boston – London – Melbourne: Pitman Publishing Ltd. 1984, 246 pp., paperback, £ 13.95

Das zur Besprechung vorgelegte Buch von Nicolae H. Pavel ist eine erweiterte und ergänzte Niederschrift von Vorlesungen, die der Autor in den Jahren 1980–82 an der Universität Iasi gehalten hat. Erklärtes Ziel des Autors ist es, eine zusammenfassende Darstellung einiger neuerer Forschungsresultate über Differentialgleichungen auf abgeschlossenen Teilmengen zu bringen. Konkretes Objekt der Untersuchungen sind abstrakte Cauchy-Probleme vom Typ

$$\text{(ACP)} \quad u'(t) = F[t, u(t)], \qquad u(t_0) = x_0 \in D$$

für eine Funktion u, deren Werte u(t) in einer abgeschlossenen Teilmenge D eines Banachraumes X liegen.

Im Falle eines endlichdimensionalen Raumes X wird die Frage nach der Existenz von Lösungen bekanntlich durch das klassische Theorem von Peano beantwortet: Lokale Existenz ist bereits durch die Stetigkeit der Funktion $F : \mathbf{R} \times D \to X$ garantiert. Ist X jedoch unendlichdimensional, so verliert das Peano-Theorem im allgemeinen seine Gültigkeit. Diese weniger bekannte Tatsache, von J. Dieudonné im Jahre 1950 entdeckt, wurde erst in neuerer Zeit von A. Cellina (1972), A. N. Godunov (1975) und G. Pianigiani (1978) durch die folgende Aussage endgültig manifestiert: In jedem unendlichdimensionalen Banachraum X existieren stetige Funktionen F, für die das Cauchy-Problem ACP auf keinem der Intervalle um t_0 eine (starke) Lösung besitzt. In anderer Formulierung gewinnt man die bemerkenswerte Tatsache, daß das Peano-Theorem genau dann gilt, wenn X endlichdimensional ist. Dieses Resultat muß umso erstaunlicher wirken, wenn man sich vergegenwärtigt, daß die Existenzfrage für Lipschitzstetiges $F(t, \cdot)$ durch das Picard-Lindelöf-Theorem gelöst ist. An dieser Stelle setzen die Untersuchungen des Autors ein; zu bestimmen sind notwendige und hinreichende Bedingungen an F, unter denen das ACP wenigstens lokal lösbar ist.

Lösungen u(t) des Cauchy-Problems ACP werden üblicherweise als „Flüsse" bezeichnet. Diese Bezeichnungsweise wird verständlich im Hinblick auf die enge Kopplung zwischen Problemen aus der Dynamik technischer und physikalischer Systeme und dem ACP. Mit der im Buchtitel angesprochenen Fluß-Invarianz wird die Frage nach globaler Existenz von Lösungen gestellt: Unter welchen Bedingungen an F bleibt ein Fluß u(t), der zum Zeitpunkt t_0 in D startet, auch für zukünftige Zeiten $t > t_0$ in D? Die Bedeutung dieser Fragestellung in den technischen Anwendungen liegt auf der Hand. Physikalische Variable – zum Beispiel Konzentrationen chemischer Substanzen – haben in der Regel nichtnegative Belegwerte. Wird das ACP als System von Reaktions-Diffusionsgleichungen interpretiert, so sind ausschließlich diejenigen Lösungen von Interesse, die ihre Werte in dem positiven Kegel $D \subset X$ annehmen. Gefragt ist mit anderen Worten nach der Fluß-Invarianz der Teilmenge D unter dem ACP.

Beide Problemkreise, nämlich die Existenzfrage und die Frage nach Fluß-Invarianz, stehen in enger Verbindung zueinander. Ihre Behandlung erfolgt dementsprechend simultan, und sie konzentriert sich auf die wirksame Einbeziehung der sogenannten Tangentialbedingung, die als zentrales Kriterium zur Lösung der anstehenden Probleme herausgearbeitet wird. In der einfachsten Version fordert die Tangentialbedingung die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{h \to 0} h^{-1} d[x + hF(t, x); D] = 0, \qquad x \in D, \quad t \geqslant t_0.$$

Hier bezeichnet $d[x; D]$ den Abstand des Punktes x zur Teilmenge D. Ist D eine Untermannigfaltigkeit, so wird durch diese Bedingung zum Ausdruck gebracht, daß der Vektor F(t, x) die Teilmenge D im Punkte x tangiert.

Die vollständige und abschließende Behandlung der hier angesprochenen Hauptprobleme bleibt für allgemeine Vorgaben F nach wie vor offen. Der Autor zeigt jedoch beachtliche Fortschritte in dieser Richtung für spezieller strukturiertes F auf. Im Mittelpunkt stehen zwei Problemfälle, die als umfassend gelöst zu betrachten sind. Das sind erstens Cauchy-Probleme mit der speziellen Vorgabe $F(t, x) = A(t)x$, worin $A(t)$ ein nichtlinearer stetiger dissipativer Operator auf einem t-abhängigen Definitionsbereich $D \subset X$ ist (Kapitel 2). In Kapitel 5 werden dann zweitens Probleme von Typ $F(t, x) = Ax + G(t, x)$ behandelt – bei Vorgabe einer im allgemeinen mengenwertigen Abbildung G und eines abgeschlossenen Operators A, der eine stark stetige Halbgruppe kompakter Operatoren $S(t)$ $(t > 0)$ erzeugt. In beiden Fällen fließen neuere Resultate aus der Theorie nichtlinearer Evolutionsgleichungen und -inklusionen ein. Dementsprechend bedarf es einer Bereitstellung der relevanten Begriffe aus der nichtlinearen Funktionalanalysis, die in Kapitel 1 gegeben wird: Man findet sich mit einem knappen Abriß über Dualitätsabbildungen und über die Grundzüge der Theorie (maximal) dissipativer Operatoren konfrontiert. Der in dieser Disziplin ungeübte Leser sei für weitere Hintergrundinformationen zum Beispiel auf die Monographie von V. Barbu verwiesen (Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, Noordhoff 1976). In Kapitel 3 werden kurz einige Aspekte über abstrakte Differentialgleichungen zweiter Ordnung erörtert, während in Kapitel 4 gezeigt wird, daß eine adäquate Behandlung fluß-invarianter Probleme erst im Rahmen der Banach-Mannigfaltigkeiten ermöglicht wird.

Schließlich sollte noch eine besondere Stärke des Buches erwähnt werden: Die abstrakte Theorie findet ihren Niederschlag in zahlreichen Anwendungsbeispielen aus der Stabilitätstheorie, der Populationskinetik, der schon erwähnten chemischen Reaktions-Diffusions-Problematik, der Orbitaldynamik und der Wärmeleitung. Von einem Sachkenner geschrieben, bietet das Buch dem interessierten Leser nicht nur eine gute Übersicht über den derzeitigen Stand der Forschung auf diesem Gebiet, sondern auch zahlreiche Ansatzpunkte zu eigener wissenschaftlicher Arbeit.

Erlangen H. Grabmüller

Bohl, E., Finite Modelle gewöhnlicher Randwertaufgaben (Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Bd. 51 – Teubner Studienbücher), Stuttgart: Teubner 1981, 318 S., kart., DM 29,80

Das vorliegende Buch behandelt ein Thema, das in den meisten Lehrbüchern über Numerische Mathematik entweder zu kurz kommt oder überhaupt nicht behandelt wird, dem aber für die Anwendungen eine grundlegende Bedeutung zukommt: die numerische Lösung von Randwertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen. Genauer gesagt geht es in diesem Buch um die Theorie und praktische Realisierung von Differenzenverfahren zur numerischen Lösung einer nichtlinearen Randwertaufgabe (RWA) der Form

$$\text{(1)}\quad \begin{aligned} &(-p(t)x')' + \nu(k(t)x)' = f(t, x, \lambda) && a \leqslant t \leqslant b \\ &a_1x(a) - a_2x'(a) = b_1x(b) + b_2x'(b) = 0 && p(t) > 0 \quad \lambda, \nu \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Über die Funktion f und ihre Ableitungen werden von Fall zu Fall verschiedene Voraussetzungen getroffen, die neben einer Lipschitzbedingung meistens auf eine Monotonie- bzw. Konvexitätsforderung hinauslaufen. Eine geeignet gewählte „Linearisierung" L der RWA wird als *inversmonoton* vorausgesetzt, d. h. ist $r(t) \leqslant s(t)$ in $[a, b]$, dann soll $(L^{-1}r)(t) \leqslant (L^{-1}s)(t)$ in $[a, b]$ gelten. Damit ist die Klasse der RWAn zwar eingeschränkt, jedoch wird diese Klasse nun eingehend studiert, insbesondere die Phänomene der Verzweigung von Lösungen und der Grenzschichtbildung bei großen Werten der Parameter λ und ν. Folglich werden eine große Zahl wichtiger Anwendungsprobleme erfaßt, von denen die Reaktions-Diffusionsprobleme ausführlich behandelt werden. Der Autor ist zur Abfassung eines solchen Werkes in besonderer Weise prädestiniert, da man ihm und seinen Mitarbeitern, insbesondere W.-J. Beyn und J. Lorenz, eine große Anzahl wichtiger Beiträge zum Thema verdankt.

In den grundlegenden ersten zwei Kapiteln wird das klassische Differenzenverfahren diskutiert, und zwar in Kap. I für die lineare, in Kap. II für die nichtlineare RWA, zunächst für $\nu = 0$. Aus der mathematischen Theorie bekannte Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen werden angegeben, die im linearen Falle die Äquivalenz von Inversmonotonie und nichtnegativer Greenscher Funktion beinhalten. Im nichtlinearen Falle wird im wesentlichen $f \geqslant 0$ und Sublinearität von f bezüglich x gefordert, um die Existenz einer positiven Lösung sicherzustellen, während eine verallgemeinerte Lipschitzbedingung für f und Inversmonotonie von L die Eindeutigkeit der Lösung implizieren. Innerhalb des so abgesteckten Bereichs wird nun die Konstruktion finiter Modelle durchgeführt. Als diskretes Analogon zu L ergibt sich eine tridiagonale inversmonotone Matrix A^h. Im nichtlinearen Fall entsteht aus (1) ein Gleichungssystem

(2) $\quad A^h x = B^h(F^h x) + r^h \qquad h$ = Schrittweite des Gitters

wobei B^h eine Diagonalmatrix, F^h die auf das Gitter eingeschränkte Funktion f ist und r^h von den Randbedingungen herrührt. Alle numerischen Modelle in diesem Buch führen auf ein nichtlineares Gleichungssystem der Form (2). Um Aussagen über die Lösbarkeit von (2) zu machen, werden eine verallgemeinerte Lipschitzbedingung in bezug auf f und die Inversmonotonie der Matrix $A^h - B^h P^h$ gefordert, wenn P^h die der Lipschitzfunktion $\mu(t)$ entsprechende Diagonalmatrix ist. Die Theorie inversmonotoner Matrizen wird nun soweit entwickelt, wie sie für die Numerik benötigt wird. Der vom Autor eingeführte Begriff eines majorisierenden Elements liefert sofort das Kriterium: Ist $A(i, j) \leqslant 0$ für $i \neq j$, so ist die Matrix $A = (A(i, j))$ genau dann inversmonoton, wenn sie ein majorisierendes Element e besitzt (etwas unscharf, ein $e > 0$ mit $Ae \geqslant 0$). An Beispielen wird gezeigt, daß die Existenz eines solchen Elements häufig leicht festzustellen ist. Auch beweistechnisch erweist sich das majorisierende Element als außerordentlich wirksam. Zur Lösung von (2) werden die direkte Iteration, das Parallelenverfahren und das Newtonverfahren diskutiert. Bedingungen für lokale und globale Konvergenz der Verfahren werden formuliert und an numerisch durchgeführten Beispielen erläutert. Das Parallelenverfahren hat dabei den Vorzug, daß außer der Inversmonotonie von $A^h - B^h P^h$ keine zusätzlichen Einschränkungen erforderlich sind, sofern f durch eine geeignete Fortsetzung global definiert wird. Der Anwender ist damit (Kap. I u. II) in die Lage versetzt, nichtlineare RWAn (1) zu lösen, solange keine numerischen Probleme infolge Verzweigung und Mehrdeutigkeit der Lösung (Kap. VII) oder Grenzschichten (Kap. VIII) auftreten.

Die Konvergenzbeweise für die genannten iterativen Verfahren werden in Kap. III gebracht, und zwar für erheblich allgemeinere Systeme (2), um auch die finiten Modelle der folgenden Kapitel zu erfassen, immer unter der Voraussetzung der Inversmonotonie von A und der sich aus den jeweiligen Verfahren ergebenden Matrizen der Form A − BR. Eine allgemeine Konvergenztheorie folgt in Kap. IV, wo Bedingungen entwickelt werden, die die bekannte Implikation „Konsistenz + Stabilität ⇒ Konvergenz" garantieren. Die Darstellung ist außerordentlich durchsichtig und einfach, als Einführung in diese Problematik also bestens geeignet. Dies liegt an den Monotonieeigenschaften, welche die Systeme (2) aufgrund ihrer Herkunft als numerische Modelle von (1) besitzen. Die Lösungen sind hier nicht nur isoliert, sondern (wegen der Nichtnegativität der Greenschen Funktion) auch stabil, was die Beweisführung erheblich vereinfacht. Außerdem ist folgender Umstand für die Numerik bedeutsam. Die Konvergenzaussage für „hinreichend kleine" Schrittweiten h (große Gleichungssysteme) kann in Form von Ungleichungen konkretisiert werden, die keine unrealistisch kleinen Werte von h liefern müssen, wie an zahlreichen Beispielen gezeigt wird.

Eine Theorie der Differenzenverfahren höherer Ordnung, deren Anfänge auf L. Collatz zurückgehen (Mehrstellenverfahren), für Gleichungen $x'' + f(t, x) = 0$ findet sich in Kap. V.

Modelle der Konvergenzordnung 4 und 6, mit randnahen Formeln geringerer Konsistenzordnung, werden entwickelt mit der Eigenschaft, daß die Matrizen A^h wieder inversmonoton sind. Die Iterationsverfahren und die Konvergenztheorie der Kapitel III und IV sind anwendbar, sofern man eine zusätzliche Restriktion der Schrittweite fordert, die auch eine Stabilitätsungleichung impliziert, so daß man sich wieder im Bereich stabiler Lösungen befindet.

In Kap. VI setzt sich der Autor mit der schwierigeren Frage auseinander, finite Modelle für Gleichungen mit Konvektionsterm herzuleiten, d. h., Gleichungen der Form $-x'' + k(t)x' = f(t, x)$. Damit wird zur Problematik singulärer Störungsaufgaben übergeleitet, die Inversmonotonie fordert nun die stärkere Schrittweitenrestriktion $|hk(t)| \leqslant 2$. Dennoch gelingt die Herleitung von Verfahren höherer Konvergenzordnung im Rahmen der monotonen Theorie, basierend auf Arbeiten des Autors und seiner Schüler.

Das für die Anwendungen besonders wichtige, umfangreiche Kap. VII diskutiert den Fall, daß die RWA (1) mehrere Lösungen besitzt. Die Einschränkungen an $f(t, x, \lambda)$ sind hier den ausführlich dargestellten Beispielen aus der chemischen Reaktionskinetik angepaßt. Auch gewisse nichtmonotone Funktionen f bekommt der Autor in den Griff: durch eine multiplikative Zerlegung $f = f_1 f_2$ derart, daß f_1 monoton wachsend, f_2 monoton fallend für $x \geqslant 0$ ist. Das entsprechende finite Modell $Ay = BF_1(y)F_2(x)$ wird dann durch eine innere (y) und eine äußere (x) Iteration mit den Konvergenzsätzen von Kap. III gelöst. Ausgewählte Beispiele aus der Chemie werden mit den entwickelten Differenzenverfahren durchgerechnet, wobei Hysteresiseffekte und Umkehrpunkte auftreten können. Fortsetzungsverfahren zur Berechnung verschiedener Lösungszweige werden sorgfältig analysiert und numerisch realisiert. Ein Abschnitt über Eigenwertaufgaben liefert unter anderem eine einfache Methode zur numerischen Entscheidung über die Stabilität eines bestimmten Lösungszweiges.

Kapitel VIII ist dem in den letzten Jahren besonders aktuell gewordenen Thema der Numerik singulärer Störungen gewidmet. Nachdem auf die Problematik, daß die behandelten Verfahren für äquidistante Gitter bei großen Werten von ν (und λ) unangemessen kleine Werte von h liefern, bereits in Kap. VI hingewiesen wurde, werden nun irreguläre Gitter konstruiert, die dem Grenzschichtverhalten der Lösung möglichst gut angepaßt sind. Der Witz dabei ist, solche Formelsätze zu gewinnen, die sich auf Gleichungen der Form (2) reduzieren, so daß wieder die Inversmonotonie von A^h und weiterer Matrizen $A^h - B^h R^h$, die zur Anwendung der in Kap. III behandelten Lösungsverfahren benötigt werden, gesichert ist. Das geht natürlich nicht ohne gewisse Einschränkungen an die Schrittweiten h_i, insbesondere wenn man Stabilität und Konvergenz nach Kap. IV theoretisch absichern will. Der Autor beschreibt eine Gitterstrategie, mit der er zahlreiche Grenzschichtaufgaben erfolgreich numerisch lösen kann. Nach Ansicht des Referenten erfordert die Problematik dieses Kapitels, asymptotische Methoden zur Ergänzung der Numerik heranzuziehen, um etwa Aussagen über die Abhängigkeit der Grenzschichtdicke von ν zu machen. Es ist etwas überraschend, daß bisher wenig Kombination von numerischen und analytischen Verfahren bei singulären Störungsproblemen praktiziert worden ist.

In Kap. IX werden verschiedene Reaktionsmodelle beschrieben, die sich auf eine RWA der Form (1) reduzieren lassen. Das letzte Kapitel X bringt eine kurze Zusammenstellung der für die behandelten RWAn bekannten mathematischen Theorie, zum Teil ohne Beweise.

Eine vollständige Lektüre des vorliegenden Buches verlangt vom Leser zwar wenig Voraussetzungen, jedoch etwas Geduld beim Erfassen der zahlreichen Definitionen, Voraussetzungen und Resultate, deren Beziehungen untereinander, und deren Bedeutung für die numerische Anwendung. Das Besondere dieses Werkes ist das enge Zusammenspiel von theoretischen Existenz- und Konvergenzaussagen und praktisch-numerischer Lösung der diskreten Modelle, einschließlich berechenbarer Fehlerabschätzungen. Daher bleibt der Leser immer gut motiviert. Er findet in dem umfassenden Literaturverzeichnis sowie in den Hinweisen am Ende eines jeden Kapitels reichlich Anregungen zum Weiterstudium. Der Besitzer eines Heimcomputers dürfte sicherlich zu weiteren numerischen Experimenten angeregt werden. Es bleibe nicht unerwähnt, daß trotz der Beschränkung auf Inversmonotonie und spezielle Nichtlinearitäten von f zahlreiche Resultate, sowie die bei der Diskretisierung auftretenden Phänomene, auch für allgemeinere Probleme, einschließlich RWAn bei partiellen Differentialgleichungen, relevant sind. Das Buch ist sowohl als begleitender Text für eine Vorlesung über Numerik der Differentialgleichungen als auch für ein Selbststudium oder in Seminar über dieses Thema bestens geeignet.

Erlangen H. J. Weinitschke

Lorentz, G. G., Jetter, K., Riemenschneider, S. D., Birkhoff Interpolation (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 19), London – Amsterdam: Addison-Wesley 1983, xvii + 237 p., hardbound, $ 26.95

Bei der gewöhnlichen Hermite-Interpolation schreibt man an jedem Knoten den Wert der nullten und den Wert der ersten Ableitung vor. Eine geläufige Verallgemeinerung besteht darin, daß man alle Ableitungen der Stufen 0 bis r nimmt, wobei r auch von der Nummer des Knotens abhängen darf. In dem von uns betrachteten Standardfall verwendet man algebraische Polynome (des Höchstgrades n, wenn n + 1 Bedingungen zu befriedigen sind). Die geschilderten Interpolationsaufgaben sind dann regulär im folgenden Sinn: Bei jeder zulässigen Wahl der Knoten (hier: paarweise verschieden) ergibt sich eine nichtsinguläre Gleichungsmatrix.

Bei der Birkhoff-Interpolation verallgemeinert man noch weiter und wählt für jede Knotennummer bestimmte Ableitungsstufen (wobei Lücken auftreten dürfen). Die Auswahl beschreibt man meistens mit Hilfe einer Inzidenzmatrix (aus Nullen und Einsen): $e_{ik} = 1$ bedeutet, daß am i-ten Knoten die k-te Ableitung Berücksichtigung findet. Bei Höchstgrad n arbeitet man wieder mit insgesamt n + 1 Gleichungen. Dabei ergeben sich aber singuläre Fälle. Das liegt einerseits daran, daß das Gesamtsystem der Nullstellen eines Polynoms und seiner Ableitungen im allgemeinen groß ist; also gibt es bei entsprechender Wahl der Matrix E und der Knoten eine nichttriviale Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems. Andererseits dürfen sich nicht zu viele Gleichungen auf höhere Ableitungen beziehen; diese Einschränkung wird durch die Pólya-Bedingung ausgedrückt. Etwas schärfer ist die Birkhoff-Bedingung, die überdies eine Unzerlegbarkeit sichert.

Die Hauptfrage handelt nun von der Regularität eines Aufgabentyps: Wann ist eine Inzidenzmatrix E (die der Birkhoff-Bedingung genüge) so beschaffen, daß jede zulässige Knotenwahl eine nichtsinguläre Gleichungsmatrix liefert? Dabei lassen wir hier reelle Knoten mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ zu (wo m die Zahl der Zeilen in E ist). Eine erste zentrale Aussage (Atkinson-Sharma) lautet: E ist regulär, wenn jede gestützte Sequenz eine gerade Zahl von Elementen besitzt. – Eine Sequenz ist dabei ein maximales aus lauter Einsen bestehendes Zeilenstück (ohne Lücken); „gestützt" bedeutet, daß links oberhalb (im Nordwesten) des Anfangs der Sequenz mindestens eine Eins in E steht und daß Entsprechendes für den Südwesten gilt. Der Beweis beruht auf wiederholter Anwendung des Satzes von Rolle: Erfüllt ein Polynom das homogene Gleichungssystem, so hat jede Ableitung eine Nullstelle (also ist es das Nullpolynom). Die Geradheitsvoraussetzung sichert, daß keine Nullstelle verlorengeht (eine Rolle-Nullstelle im eigentlichen Sinn hat ungerade Ordnung).

Eine Zeitlang vermutete man, die Bedingung „wenn gestützt, so gerade" sei auch notwendig für Regularität. Dann wurde aber die Jagdmethode entwickelt: Man verschiebt Knoten oder Hilfsknoten, setzt dadurch die obenerwähnten Rolle-Nullstellen in Bewegung und versucht, ein geeignetes Zusammentreffen mit einem Knoten herbeizuführen (Jagdglück). In vielen Fällen erkennt oder erahnt man so die Antwort auf die Grundfrage. Einerseits erhielt man Gegenbeispiele zur vollen Vermutung: Regularität bei gewissen E, die eine Zeile mit zwei gestützten ungeraden Sequenzen besitzen. Andererseits verifizierte man die Vermutung partiell: Besitzt E eine Zeile, in der genau eine Sequenz zugleich gestützt und ungerade ist, so liegt Singularität vor (singuläre Gleichungsmatrix bei geeigneter Knotenwahl).

Selbstverständlich war es nun das Ziel der Theorie, die Lücke zwischen notwendigen und hinreichenden Regularitätsbedingungen soweit wie möglich zu schließen. Letztlich geht es dabei darum, die Nullstellen eines zugehörigen multivariaten Polynoms (das die relevanten Determinantenwerte liefert) in den Griff zu bekommen. Man erarbeitete verschiedene allgemeine Resultate über Regularität bzw. Singularität und konstruierte interessante Beispiele bzw. Klassen von Beispielen. Die erste Hälfte des Buches behandelt diesen Themenkreis mit seinen vielen Verzweigungen. Haupthilfsmittel sind die Koaleszenz (Verschmelzung) von Knoten sowie unabhängige Knotensysteme: Durch geeignete Staffelung einiger Knoten erreicht man Eigenschaften ähnlich wie bei Verschmelzung dieser Knoten. Natürlich spielen auch Determinanten eine Rolle; ferner werden Birkhoff-Kerne benützt.

Die zweite Hälfte des Buches behandelt Anwendungen (Approximation unter Zusatzbedingungen, Quadratur), spezielle Knotenlagen (Einheitswurzeln, Nullstellen von Orthogonalpolynomen), Splines (Interpolation, Dualitätsbetrachtungen).

Das Buch ist sehr reichhaltig: Rund 200 Resultate werden formuliert und rund 200 Arbeiten werden zitiert. Jeder Kenner des Gebietes wird das Erscheinen des Werkes begrüßen (auch wenn er vielleicht nicht mit allen Einzelheiten der Darstellung zufrieden ist). Sicher trägt das Buch dazu bei, daß die Theorie in nächster Zeit ausgebaut und vereinfacht wird.

Tübingen K. Zeller

Pinkus, A., n-Widths in Approximation Theory (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Vol. 7) Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1985, x + 290 p., hardcover, DM 118,–

The classical theorems of approximation deal with how well a function f can be approximated by algebraic or trigonometric polynomials. For example, in 1912 Bernstein showed that each continuously differentiable f can be approximated to an error $O(1/n)$ by the elements of Π_n, the space of algebraic polynomials of degree $< n$.

But what is so special about polynomials? Perhaps other n-dimensional spaces can approximate better than Π_n. Kolmogorov proposed that we look for the n-dimensional subspaces which best approximate a given set of functions K. To precisely formulate this question, he introduced the n-width of K in the normed space X:

$$d_n(K) := d_n(K, X) := \inf_{X_n} \sup_{f \in K} \operatorname{dist}(f, X_n)$$

with the infimum taken over all n dimensional subspaces X_n of X. The n-width is a measure of the size of the set K. For example, when K is compact, $d_n(K)$ converges to 0. How fast it tends to 0 gives some indication of the compactness of K.

A subspace X_n (generally not unique) which attains the above infimum is said to be optimal. It is possible to determine optimal subspaces and exactly calculate $d_n(K, X)$ only for special K and X. Nevertheless, these special cases are extremely important and are often intrinsically connected with other optimization problems. For example, widths are related onthe one hand to the geometry of Banach spaces and on the other to eigenvalue problems for self adjoint

One of the simplest and earliest examples where the n-width could be computed exactly is the unit ball U_2^m of the Sobolev space $W_2^m(\mathbf{T})$ on the unit circle $\mathbf{T}$. This is an ellipsoid in $L_2(\mathbf{T})$ and widths of ellipsoids in a Hilbert space are easily determined. In this way, one derives Kolmogorov's result that $d_{2n}(U) = d_{2n+1}(U) = n^{-m}$ and that trigonometric polynomials of degree n are an optimal subspace.

Another way of determining the width of U is to view this set as the image of the unit ball of L_2 under a linear map I (m-fold integration). The widths of such sets are determined by the eigenvalues of I^*I and the eigenfunctions determine the optimal subspaces. Such optimization problems can also be solved for nonperiodic functions but the matter is then much more substantial. The known optimal subspaces in this case are often a space of spline functions with judiciously chosen knots.

It is usually the case that widths can not be determined exactly. When this happens, one hopes instead to determine how d_n tends to zero asymptotically and to describe near optimal subspaces. Sometimes the results are surprising. For example, one of the central problems in the recent years has been to determine the widths of the unit ball B_p^m of the Sobolev space $W_p^m(T)$ as a subset of L_q. When $q = p$ this is rather simple; $d_n(U) \sim n^{-m}$ and trigonometric polynomials are optimal. When $q \neq p$, the situation can get pretty sticky. The main result is given by Kashin who showed that $d_n(B_2^m, L_\infty) \sim n^{-m}$. Polynomials of degree n or splines with n equally spaced knots will only give approximation order $O(n^{-m+1/2})$. The near optimal subspaces are only known in a probabilistic sense.

Pinkus' book is a long awaited accounting of the substantial subject of widths. It moves gracefully between the functional analytic aspects of the subject and the hard analysis needed for the asymptotics. It is carefully written with numerous examples to amplify the theory. In spite of its currentness, a few important results are missing, including the thorny Kashin theorem and Pinkus' own recent work which determines the exact widths of B_p^m in L_p for $1 < p < \infty$. Nevertheless, this is a very important exposition on a beautiful subject.

Columbia, South Carolina R. DeVore

Graham, C. C., McGehee, O. C., Essays in Commutative Harmonic Analysis (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 238), New York – Heidelberg – Berlin: Springer-Verlag 1979, xxi, 464 pp., hardbound, DM 88,–

Seit Baron Joseph Fourier 1812 die Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf der Kreislinie Π benutzte und die heute nach ihm benannten Reihen bildete, um die Wärmeleitungsgleichung zu lösen, wurde die harmonische (oder Fourier-) Analysis zu einem imposanten mathematischen Gebäude entwickelt. Heute versteht man darunter meist das Studium von Objekten wie Funktionen, Maßen, Pseudofunktionen und -maßen und allgemeinen Distributionen auf lokalkompakten Gruppen. Die Entwicklung eines großen Teils der klassischen Theorie auf dem Kreisring und der reellen Geraden bis Ende der fünfziger Jahre ist in A. Zygmunds Monographie (Trigonometric Series, second edition, Cambridge, Reprinted 1977) dargestellt. Die abstrakte Theorie auf allgemeinen kompakten und lokalkompakten abelschen Gruppen, wie sie Ende der sechziger Jahre stand, erfuhr eine zusammenfassende Behandlung in der vielzitierten Monographie von E. Hewitt und K. A. Ross (Abstract Harmonic Analysis I, II, Berlin – Heidelberg – New York, 1963 und 1970). Das vorliegende Buch setzt diesen zehnjährigen Rhythmus fort. Es ist heute nicht mehr möglich, auch nur einen großen Teil der zur harmonischen Analysis zählenden Theorien in einem Buch geschlossen darzustellen. Beispielsweise enthält dieses Buch nichts über die punktweise Konvergenz von Fourier-Reihen und nichts über die in den Anwendungen wie z. B. der Signalverarbeitung, Mustererkennung und Zeitreihenanalyse wichtige effiziente Berechnung der diskreten Fourier-Transformierten („schnelle Fourier-Transformierte"). So ist dieses Buch genau das, was der Titel besagt: Die Behandlung einiger, seinen Autoren besonders nahestehender Gegenstände aus der kommutativen harmonischen Analyse.

Zwei Themenkreise ziehen sich wie „rote Fäden" durch das Buch: Die Ausnahmemengen in Gruppen, die Struktur der Maßalgebra einer nichtdiskreten (kommutativen) Gruppe und anderer Algebren von Pseudomaßen und -funktionen. Das erste Kapitel ist überschrieben: Behavior of Transforms; es behandelt hauptsächlich die idempotenten Elemente einer Maßalgebra. Die Frage, ob eine vorgelegte Funktion eine Fourier-Transformierte ist, ist i. allg. schwer zu beantworten. Für Idempotente ist sie aber durch P. Cohens Idempotentensatz gelöst. Das Kapitel enthält einen relativ kurzen Beweis dieses Satzes, der auf einem Lemma von I. Amemia und I. Ito basiert. Das Kapitel enthält ferner, was bis zur Zeit der Veröffentlichung über die Littlewood-Vermutung zur L^1-Norm von idempotenten Polynomen bekannt war. Inzwischen ist die Vermutung bekanntlich unabhängig durch Konjagin und McGehee – Pigno – Smith bestätigt worden.

Die Kapitel 2, 3 und 4 behandeln Kronecker-, Helson-, Sidon-Mengen sowie Eindeutigkeits-, Multiplizitäts- und Synthesemengen, ihre Beziehungen untereinander und zu unabhängigen Mengen. Kapitel 2 enthält den Herzschen Beweis des Satzes von Drury – Varopoulos über die Vereinigung zweier Helson-Mengen. Kapitel 3 beschreibt u. a. die Herzschen Kriterien für Synthesemengen. Kapitel 4 beleuchtet Eindeutigkeits- und Multiplizitätsmengen vom Standpunkt der Pseudomaße und -funktionen und enthält Ergebnisse von Helson, Katznelson, Kaufmann, Körner, Pjazteki – Šapiro, Saeki, Varopoulos und Rudin.

Die Kapitel 5 bis 9 sind hauptsächlich dem Studium der Maßalgebra M(G) einer kommutativen Gruppe G gewidmet, die wegen ihrer Asymmetrie eine höchst komplizierte Struktur aufweist. Zentral sind die Kapitel 8 und 9. Kapitel 8 behandelt den Gelfand-Raum, den Šilov-Rand, den starken Rand, Punktableitungen und Gleason Parts von M(G). Eine Charakterisierung des Šilov-Randes mit Hilfe der von Šreider eingeführten verallgemeinerten Charaktere steht meines Wissens immer noch aus. Das Kapitel enthält die hauptsächlich von J. L. Taylor, G. Brown und W. Moran studierten Zusammenhänge zwischen dem starken Rand und den verallgemeinerten Charakteren vom idempotenten Betrag. Kapitel 5 führt in diesen Themenkreis ein. Die tiefen, mit kohomologischen Methoden bewiesenen Sätze von Taylor werden hier nur zitiert; der Leser wird bezüglich der Beweise auf seine Abhandlung: Measure Algebras (AMS, Regional Conference Series in Mathematics, Providence, R. I., 1970) verwiesen. Die Beweise in Kapitel 8 erfordern die Konstruktion von Maßen mit bemerkenswerten, nichttrivialen Eigenschaften. Dem Studium dieser Maße – Riesz-Produkte und unendliche Faltungsprodukte – sind die Kapitel 6 und 7 gewidmet. Hier findet man auch Ergebnisse von Hewitt – Kakutain, Brown – Moran, Saeki u. a. über Maße auf „dünnen" (etwa „algebraically scattered", unabhängigen, dissoziierten) Mengen. Kapitel 9 enthält die Ergebnisse von Helson, Kahane, Katznelson und Rudin über Umkehrungen des Satzes von Wiener – Lévy. Neben Ergebnissen über die Operation von Funktionen auf Fourier-Transformierten behandeln die Autoren auch Arbeiten von Varopoulos, Herz und Rider über Funktionen, die auf Fourier-Stieltjes-Transformierten und positiv-definiten Funktionen operieren.

Zur Klasse der Umkehrungen des Wiener-Levyschen Satzes gehört auch der Satz von M. Zafran über Funktionen, die auf Räumen von Multiplikatoren operieren. Eine ausführliche Darstellung dieses Satzes ist der Hauptinhalt von Kapitel 10. Kapitel 11 behandelt die Anwendung von Tensor-Produkten in der Fourier-Analysis: Die Varopoulossche Transfermethode, die über den berühmten Satz von L. Schwartz zu Malliavins Nichtsynthese-Satz führt; die Berechnung von Sidon-Konstanten; den „Kns-Satz" über die Struktur von Helsonschen Teilmengen von Π.

Kapitel 12 ist überschrieben: Tilde algebras. Es handelt sich dabei um Funktionenalgebren, die durch eine Frage von H. Helson entstanden sind. Ihre Beziehungen zur Algebra A der Funktionen mit absolut konvergenter Fourier-Reihe, zu den Sidon-Mengen und zur harmonischen Synthese sind vor allem von Katznelson, McGehee und Blei studiert worden und bilden den Inhalt dieses Kapitels.

Kapitel 13 besteht aus einer Liste mit offenen Fragen und enthält eine Liste von Listen mit offenen Fragen aus der kommutativen Fourier-Analysis. Es schließt sich ein Anhang über einige klassische Sätze und Begriffe an, der die Lektüre des Buches erleichtert, sowie 23 Seiten Literatur.

Das Buch enthält eine Fülle von Material; vieles darin erscheint zum ersten Mal in Buchform, einige Ergebnisse sind neu. Es enthält größtenteils vollständige Beweise, manche Sätze, wie z. B. Cohens Idempotentensatz, sind sogar mit verschiedenen Methoden bewiesen. Einige kleinere, gelegentlich auch störende Ungenauigkeiten habe ich gefunden. Nützlich sind die durch Definitionen und einige elementare Aussagen angereicherte Symbolliste zu Beginn und die zahlreichen Literaturhinweise innerhalb des Textes zur Entstehungsgeschichte der Sätze. Das Buch ist für Spezialisten geschrieben und für solche unentbehrlich; es ist an der Front der Forschung angesiedelt. Bevor man es liest, sollte man eine Einführung in die harmonische Analyse verarbeitet haben und einige Kenntnisse aus der Theorie der lokalkonvexen Räume und Banachalgebren mitbringen.

Passau G. Ritter

Heinig, G., Rost, K., Algebraic Methods for Toeplitz-like Matrices and Operators (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 13), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser 1984, 212 pp., hardcover, DM 64,–

In der vorliegenden Monographie werden in erster Linie algebraische Probleme von Toeplitz-Matrizen und Toeplitz-ähnlichen Matrizen behandelt. Nur am Rande werden Integraloperatoren betrachtet.

Das Hauptgewicht liegt naturgemäß auf der Diskussion von Toeplitz- und Hankelmatrizen (Teil 1). Hier sind, obwohl diese Matrizen schon früh studiert wurden (Frobenius), in jüngerer Zeit eine Fülle neuer Ergebnisse erzielt worden, die hier wohl erstmals in einer Monographie zusammenhängend dargestellt werden.

Die Hauptthemen sind schnelle Invertierungsalgorithmen mit $O(n^2)$ Operationen und $O(n)$ benötigten Speicherplätzen, Bezout-Matrizen und Resultanten, Eigenwertlokalisierungen, Struktur von Nullräumen, verallgemeinerte Inverse und kanonische Darstellungen.

Im zweiten Teil werden Toeplitz-ähnliche Operatoren behandelt. Hier steht der Begriff der UV-Reduktion (ursprünglich von Sahnovich benutzt) im Vordergrund. Auf Matrizen eingeschränkt, erlaubt er die Übertragung von Inversionsformeln auf weitere Klassen von Matrizen (Vandermondesche Matrizen, Matrizen der Form $(a_i - b_k)^{-1}$, Produktsummen von Toeplitz-Matrizen, Block-Toeplitz-Matrizen usw.). Auch Sätze über die Struktur der Nullräume und über partielle Indices lassen sich übertragen.

Das Buch ist sehr kompakt geschrieben. Dazu trägt eine durchgehend benutzte sehr verdichtete Notierung bei. Sie erschwert allerdings das Verstehen isolierter Kapitel. Andererseits hätte die Fülle des Stoffes sonst nicht auf 212 Seiten untergebracht werden können.

Von Spezialisten (zu denen ich mich nicht zähle) wird das Buch sehr gelobt und viel benutzt, weil es eine zusammenhängende Darstellung der Ergebnisse der letzten Jahre liefert und viele Resultate hier erstmals überhaupt oder in zugänglicher Form erscheinen. Der Nichtspezialist findet hier eine kompakte Einführung in ein interessantes Gebiet. Man hätte sich dafür allerdings etwas mehr Motivierung gewünscht, der Bezug zu den Anwendungen ist doch etwas zu kurz gekommen.

Insgesamt ist die vorliegende Monographie ein wichtiger Beitrag und wird jedem empfohlen, der sich über das überraschend interessante Gebiet der Toeplitz-Matrizen informieren will.

Allerdings erscheint der angegebene Preis für 212 vom Originalmanuskript reproduzierte Seiten sehr hoch.

Bielefeld L. Elsner

Rektorys, K., Variationsmethoden in Mathematik, Physik und Technik, München – Wien: Carl Hanser Verlag 1984, XIX, 594 S., gbd., DM 78,–

Das Anliegen des nun auch in deutscher Übersetzung als Studienausgabe vorliegenden Buches über Variationsmethoden wird am besten charakterisiert durch die Ausführungen des Autors in seinem Vorwort zur tschechischen Originalausgabe von 1974: Das Buch verdankt seine Entstehung einerseits langjähriger Lehrerfahrung mit Spezialvorlesungen über Variationsmethoden, die der Autor für Ingenieurstudenten an der Technischen Universität in Prag gehalten hat, und andererseits vielen Diskussionen mit Physikern und Technikern, die bei dem Autor Hilfestellung zur Überwindung mathematischer Schwierigkeiten bei der Lösung ihrer Probleme suchten. An diesen Leserkreis hat der Autor in erster Linie gedacht.

Von der tschechischen Originalausgabe liegt bereits eine Übersetzung ins Englische vor (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht – Boston, 1. Auflage 1977, zweite Auflage 1979).

Der Erfolg des Buches beruht wesentlich darauf, daß es einen großen Kreis von „Anwendern" aus Physik und Technik anspricht. Die Darstellung ist breit angelegt und beginnt auf einem Niveau, das der mathematischen Vorbildung eines Ingenieurstudenten entspricht. Dann aber wird mit großem didaktischen Geschick unter Heranziehung vieler einfacher Beispiele schrittweise zu den Hilfsmitteln hingeführt, die für das Verständnis der modernen Theorie von Randwertaufgaben bei linearen, partiellen elliptischen Differentialgleichungen und für die Theorie von Variationsmethoden in geeigneten Funktionenräumen (Hilberträumen) unerläßlich sind. So werden dem Leser unter anderem das Lebesguesche Integral, verallgemeinerte Ableitungen von Funktionen, verallgemeinerte Randwerte im Sinne von Spuren etc. nahegebracht, wobei natürlich längst nicht alles bewiesen werden kann. Aber die unbewiesen herangezogenen Tatsachen werden präzise zitiert, motiviert und an einfachen Beispielen erläutert. Als Quellen dienen dabei vor allem das Lehrbuch von L. Ljusternik und W. Sobolew, Elemente der Funktionalanalysis, sowie das Lehrbuch von J. Nečas, Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.

Einfachere Schlußweisen hingegen werden sorgfältig und bis ins Detail ausgeführt, so daß der Leser die eingeführten Begriffe einüben kann und die nur zitierten Sachverhalte anzuwenden lernt. Auf diese Weise wird eine sehr solide Basis gelegt für ein Verständnis der mathematischen Zusammenhänge.

Soweit die Theorie elliptischer Randwertaufgaben besprochen wird, orientiert sich die Darstellung vor allem an einigen Prototypen wie der Potentialgleichung, der Bipotentialgleichung sowie den Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie. Dabei werden verschiedenartige Randbedingungen diskutiert. Insbesondere wird im Hinblick auf die Variationsmethoden sehr ausführlich auf die Rolle der wesentlichen und der natürlichen Randbedingungen eingegangen. (Rektorys nennt sie die stabilen und die instabilen.)

Die eingehend dargestellten Variationsmethoden sind in erster Linie das Ritzsche Verfahren, das Galerkinsche Verfahren, die Fehlerquadratmethode sowie das Trefftzsche Verfahren, das auf dem Extremalprinzip der komplementären Energie beruht. Die Darstellung dieses Problemkreises einschließlich der Konvergenz- und Fehlerbetrachtungen orientiert sich stark an den vom Autor häufig zitierten Büchern von S. G. Michlin (Variationsmethoden der mathematischen Physik (1962), Numerische Realisierung von Variationsverfahren (1969), Das Minimumproblem für ein quadratisches Funktional (russische Auflage 1952)). Das Buch enthält aber auch eine Reihe eigenständiger Beiträge, darunter etwa das Kapitel über die Anwendung der Fehlerquadratmethode bezüglich der Randwerte bei einer Randwertaufgabe für die biharmonische Differentialgleichung.

Das Buch ist in sechs Teile gegliedert, wobei die Teile I bis III mehr im Hinblick auf „Anwender“ aus den Ingenieurwissenschaften konzipiert sind, während die Teile IV bis VI an den Leser deutlich höhere mathematische Anforderungen stellen. Teil I enthält eine Einführung in die Theorie von Hilberträumen und in einige Grundtatsachen über lineare Funktionale und Operatoren. In Teil II werden die Variationsmethoden von Ritz und von Galerkin vorgestellt, wobei insbesondere die Rolle des „energetischen“ Hilbertraumes H_A erläutert wird, der einem linearen, symmetrischen und positiv definiten Operator A zugeordnet wird. Teil III ist der Anwendung auf Randwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen gewidmet, insbesondere der Frage der Basiswahl. Teil IV gibt einen Abriß der Theorie von elliptischen Randwertaufgaben auf der Grundlage des Satzes von Lax und Milgram. In Teil V wird die Eigenwerttheorie von vollstetigen, symmetrischen, linearen Operatoren dargestellt mit Anwendung auf eine Klasse linearer Differentialoperatoren mit diskretem Spektrum. In Teil VI werden verschiedene Themen angesprochen. Insbesondere wird auch kurz erläutert, worin die Methode der finiten Elemente im Zusammenhang mit den Verfahren von Ritz und Galerkin besteht.

Abschließend sei noch hervorgehoben, daß der Autor für sein Lehrbuch „Variationsmethoden“ mit dem tschechischen Nationalpreis ausgezeichnet worden ist.

Würzburg W. Velte

Bunse, W., Bunse-Gerstner, A., Numerische lineare Algebra (Teubner Studienbücher), Stuttgart: Teubner 1985, 314 S., Kart., DM 34,–

Es ist das erklärte Anliegen dieses Buches, einen Teil der Lücken zu schließen, die sich zwischen den einführenden Lehrbüchern der Numerik und der umfassenden Behandlung in der Spezialliteratur aufgetan haben.

Diese Lücke ist in der Tat groß geworden aufgrund der rasanten Entwicklung, die das Gebiet der numerischen linearen Algebra in den letzten 20 Jahren genommen hat. Es gibt einige aktuelle Monographien, die in allen Einzelheiten kleinere Teilgebiete behandeln (ich erwähne die Bücher von Parlett, Hageman-Young, George-Liu, Lawson-Hanson) und auch ausführliche ältere Bücher (Wilkinson, Schwarz-Rutishauser-Stiefel, Varga, Householder).

So bestand sicher der Bedarf nach einem Buch, das einen aktuellen Überblick über dieses interessante Gebiet gibt. Wie das unten besprochene Buch von Golub-Van Loan zeigt, standen die Autoren mit ihrem Anliegen nicht allein.

Der Inhalt ist in vier Kapitel gegliedert. Das erste Kapitel enthält die Theorie der Lösung linearer Gleichungssysteme und führt anhand dieses Themas die benutzten mathematischen Begriffe ein. Singulärwertzerlegung und Pseudoinverse werden etwas auführlicher diskutiert. Das zweite Kapitel über direkte Verfahren für lineare Gleichungssysteme enthält neben den Standardverfahren und Fehlerbetrachtungen auch Verfahren für das lineare Ausgleichsproblem sowie einen Abschnitt über sparse Matrizen, in dem u. a. das Verfahren von Cuthill-McKee und das Minimum-degree-Verfahren behandelt werden.

Im dritten Abschnitt über iterative Verfahren wird neben den üblichen Verfahren auch das Verfahren der konjugierten Gradienten und die Vorkonditionierung mit unvollständiger Cholesky-Zerlegung behandelt. Das vierte und längste Kapitel behandelt das Eigenwertproblem. Hier finden sich auch erstmals in Buchform gewisse symmetrie-erhaltende Zerlegungsalgorithmen wie der HR- und SR-Algorithmus.

Am Ende der Abschnitte finden sich jeweils viele Bemerkungen und weiterführende Hinweise auf die Literatur.

Die Autoren geben keine Adressaten an, aber nach meiner eigenen Lehrerfahrung eignet sich das Buch als Grundlage einer Vorlesung „Numerische lineare Algebra" für Hörer ab etwa drittem Semester, aber auch als Einführung für Numeriker, Ingenieure und andere „Benutzer" linearer Algebra.

Es muß gesagt werden, daß das Schriftbild nicht sonderlich übersichtlich ist. Aber das muß man wohl bei dem einigermaßen zivilen Preis in Kauf nehmen.

Golub, G. H., Van Loan, C. F., Matrix Computations, Oxford: New Oxford Academic 1983, xvi + 470 p., hardcover (softcover), £40.00 (£22.50)

Etwas früher als das oben besprochene Buch erschien das Buch von G. Golub und C. Van Loan, zweier Autoren, die die Entwicklung des beschriebenen Themas maßgeblich beeinflußt haben.

In der Einleitung geben die Autoren als Ziel des Buches die Synthese des vorliegenden Materials und die Förderung der Einheit des Gesamtgebiets an. Ich glaube, daß sie dies erreicht haben und daß dieses Buch zumindest für die nähere Zukunft einen ähnlichen Einfluß wie in der Vergangenheit das Buch von Wilkinson ausüben wird.

Der Adressatenkreis ist derselbe wie oben. Wegen der Aufgaben und der sehr deutlichen Gliederung ist das Buch als Textbuch für eine Vorlesung sehr geeignet. Für Numeriker, Ingenieure und Informatiker gibt es sehr viel Material, Bemerkungen und Literaturhinweise. Wie überall in der neueren Literatur dieses Gebietes ist der Begriff des Algorithmus zentral, die meisten Verfahren werden in dieser Form behandelt und auf die Algorithmen der Softwarepakete EISPACK und LINPACK hingewiesen. Eine weitere Vereinheitlichung wird durch die Betonung der Operationen mit unitären Matrizen und durch die weitgehende Verwendung der Singulärwertzerlegung erzielt.

Der Inhalt soll durch die Kapitelüberschriften skizziert werden: 1. Background Matrix Algebra, 2. Measuring Vectors, Subspaces and Linear System Sensitivity, 3. Numerical Matrix Algebra, 4. Gaussian Elimination, 5. Special Linear Systems, 6. Orthogonalization and Least Squares Methods, 7. The Unsymmetric Eigenvalue Problem, 8. The Symmetric Eigenvalue Problem, 9. Lanczos Methods, 10. Iterative Methods for Linear Systems, 11. Functions of Matrices, 12. Special Topics.

Man sieht, daß der Durchschnitt mit obigem Buch ziemlich groß ist, jedoch werden insbesondere in § 5, 11 und 12 Themen behandelt, die oben nicht aufgenommen worden sind, wie Vandermonde- und Toeplitz-Systeme, die Berechnung der Exponentialfunktion einer Matrix und Aufdatierung der QR-Zerlegung.

Vermißt habe ich die Behandlung von Techniken für sparse Matrizen, aber auch ein so umfangreiches Buch mit entsprechendem Preis kann nicht alle interessanten Teilgebiete ansprechen.

Literatur

George, A.; Liu, J. W.: Computer solution of large sparse definite systems. Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1981

Hageman, L. A.; Young, D. M.: Applied iterative methods. Academic Press 1981

Householder, A. S.: The theory of matrices in numerical analysis. Blaisdell 1964

Lawson, C. L.; Hanson, R. J.: Solving least squares problems. Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1974

Parlett, B. N.: The symmetric eigenvalue problem, Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1980

Schwarz, H. R.; Rutishauser, H.; Stiefel, E.: Numerik symmetrischer Matrizen, 2. Aufl. Stuttgart: Teubner 1972

Varga, R. S.: Matrix iterative analysis, Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1962

Wilkinson, J. H.: The algebraic eigenvalue problem, Oxford: Clarendon Press 1965

Bielefeld L. Elsner

Peleg, B., Game Theoretic Analysis of Voting in Committees, Cambridge: Cambridge University Press 1984, 179 pp., £ 22.50

Die mathematische Theorie der Entscheidungen in Komitees beginnt mit Borda (1781) und Condorcet (1785), verzeichnet Beiträge von Dodgson (= Lewis Carroll) und kulminiert um 1950 mit Kenneth Arrows Satz von der Unmöglichkeit der Demokratie, auch Diktatortheorem genannt. Das bekannte Buch von Black (1958) stellt die Entwicklung vor Arrow geschlossen dar. Nach 1950 hat man sich intensiv um demokratische Alternativen zu Arrows bitterem Resultat bemüht. Die vorliegende schlanke Monographie, deren Autor 1978 ein entscheidender Durchbruch in dieser Richtung gelang, bringt viele der bisherigen Ergebnisse solcher Bemühungen in die Form einer systematischen Theorie. Ich halte die damit geleistete Arbeit für grundlegend und richtungsweisend. – Zeichnet man in einer Menge N von n Spielern ein System W von Teilmengen, die als gewinnende Koalitionen interpretiert werden, und stellt man an W einige naheliegende Forderungen, so wird (N, W) ein Komitee genannt (Beispiel: W = alle Koalitionen mit mehr als n/2 Mitgliedern). Ist A eine Menge von „Alternativen" und L die Menge aller Totalordnungen („Präferenzordnungen") auf A, so heißen die Elemente von L^N Präferenz-Profile. Abbildungen $F : L^N \to A$ heißen soziale Entscheidungsfunktionen (SEF), wenn sie einige naheliegende Forderungen erfüllen. Eine SEF F ergibt zusammen mit einem Präferenz-Profil ein nichtkooperatives n-Personenspiel. Ein Spieler k heißt Diktator für F, wenn F einfach die Präferenz von k reproduziert. F heißt manipulierbar, wenn es Spieler gibt, die sich in ihrer vorgegebenen Präferenzordnung verbessern können, indem sie vorgetäuschte Präferenzordnungen in F einspeisen. – Ausgangspunkt der Untersuchungen in diesem Buch ist das sog. Gibbard-Satterthwaite-Theorem (1973/75): nichtdiktatorische SEFen sind stets manipulierbar, wenn es um mehr als 2 Alternativen geht. (Wohlweislich arbeitet die übliche Demokratie möglichst immer nur mit 2 Alternativen).

Der Verfasser untersucht vor allem, wie man nicht-diktatorische und folglich manipulierbare SEFen möglichst genau an vorgegebene Machtverhältnisse in einem vorgegebenen Komitee G angleichen kann. Hierzu werden jeder SEF F drei Komitees zugeordnet. Stimmen diese drei Komitees untereinander und mit G überein, so heißt F eine straffe (tight) Darstellung von G. Ein Teil der vorgelegten Theorie beschäftigt sich mit der Existenz solcher und anderer Darstellungen.

Das Buch besteht aus einem äußerst knapp und formal geschriebenen systematischen Hauptteil, einer vorgeschalteten strengen Inhaltsschilderung und einer wiederum dieser vorausgehenden motivierenden Einleitung. Der Leser kann sich also aussuchen, wie weit er in die Details einsteigen will. Einige mögliche Anwendungen, vom unvermeidlichen Weltsicherheitsrat bis hin zur Bildung von Berufungskommissionen, setzen sparsame Realitäts-Lichter in die strenge Landschaft dieses Buchs. – Niemand, der sich mit Gremientheorie beschäftigt, kann an dieser Monographie vorbeigehen. Für den Spezialisten sind auch die Details Pflichtlektüre.

Erlangen K. Jacobs

Deutsche Mathematiker-Vereinigung e.V.

Jahreschronik der DMV für 1984

1 Ämter und Gremien

1.1 in der DMV

Vorsitzender		*A. Dold*
Schriftführer		*Walliser*
Schatzmeister		*Grotemeyer*
Geschäftsführender Herausgeber		*Jacobs*
Präsidium	*Bierstedt*	*Krengel*
	Dold	*Pareigis*
	Fischer	*Schwarz*
	Grotemeyer	*Wallisser*
	Hirzebruch	*Werner*
	Jacobs	
Gäste	*Barner* (MFO)	
	Habetha (Fachbereichskonferenz)	
	Christian (ÖMG)	

1.2 in den anderen Organisationen

Herr *Dold* vertritt die DMV im EMC (European Mathematical Council).

Herr *Habetha* wurde für die Wiederwahl in den FIZ-Benutzerrat vorgeschlagen.

Die Herren *Bulirsch, Grauert, Roquette* und *Krabs* wurden als neue Fachgutachter für die DFG gewählt.

Mitglieder des Deutschen Unterausschusses der IMUK: *Barner, Böddeker, Griesel, Grotemeyer, Kunle, Pickert, Schupp, Steiner, Vollrath.*

2 Jahrestagung und Mitgliederversammlung 1984

2.1 Die Jahrestagung fand vom 17.–21. September 1984 in Kaiserslautern statt. Es wurden folgende Übersichtsvorträge gehalten:

H. W. Lenstra, Jr., Amsterdam — Applied Number Theory

M. Schneider, Bayreuth	Vektorbündel und projektiv-algebraische Mannigfaltigkeiten
M. Kreck, Mainz	Exotische Strukturen auf 4-Mannigfaltigkeiten
H. Knörrer, Bonn	Integrable Hamiltonsche Systeme und Algebraische Geometrie
E. Zehnder, Bochum	Periodische Lösung Hamiltonscher Systeme
G. Mazzola, Dübendorf, CH	Musik und Mathematik
F.W. Gehring, Ann Arbor	The ubiquitous quasidisk
K. Steffens, Hannover	Faktoren der unendlichen Graphen
H.O. Peitgen, Bremen	Morphologie von Grenzen – Grenzen der Erkenntnis
W. Philipp, Urbana	Schwach abhängige Zufallsveränderliche und deren Rolle in der Zahlentheorie, Analysis und Statistik
F. Natterer, Münster	Numerik des Radonschen Problems

Es wurden im Kolloquium „Mathematiker an Schulen" zwei Vorträge zur wissenschaftlichen Allgemeinbildung gehalten von den Herren König (Saarbrücken) und Mainzer (Konstanz).

Weiterhin fand ein Kolloquium zum Thema „Mathematik und Industrie" statt, mit Vorträgen von Hirschel (München) und Tayler (Oxford).

Während der DMV-Tagung wurden im Rahmen einer Ausstellung Computer-Graphiken gezeigt.

2.2 Die Mitglieder-Versammlung fand am 20. 9. 1984 in Kaiserslautern statt. Für die Nachfolge von Herrn *Werner* wird Herr *Törnig* gewählt. Herr *Fischer* und Herr *Jacobs* werden auf ihren Plätzen wiedergewählt.

3 Aktivitäten der DMV

3.1 DMV-Seminare. Die DMV veranstaltete fünf DMV-Seminare, zwei davon in Schloß Thurnau bei Bayreith und drei in Schloß Mickeln in Düsseldorf.

10.–15. 6. „Geometric Measure Theory"
Leitung: R. Hardt (Minneapolis), L. Simon (Canberra), K. Steffen (Düsseldorf)

25.–30. 6. „Algebraische Kurven"
Leitung: W. Barth (Erlangen), J. Harris (Brown University)

23.–28. 7. „Biological Rhythms and Population Dynamics"
Leitung: F.C. Hoppenstaedt (Univ. of Utah), A.T. Winfree (Purdue Univ.)

9.–14. 9. „Die Berechnungskomplexität algebraischer und numerischer Probleme"
Leitung: J. von zur Gathen (Toronto), V. Straßen (Zürich)
23.–28. 9. „Arithmetic from a Geometric Point of View"
Leitung: G. Faltings (Wuppertal), L. Szpiro (Paris)

Die Teilnehmer konnten durch die Stiftung Volkswagenwerk finanzielle Unterstützung erhalten. Von der VW-Stiftung wurde für die Jahre 1985 und 1986 die Finanzierung von je 5 Seminaren zugesagt.

3.2 Die DMV hat mit der Canadian Mathematical Society ein Reziprozitätsabkommen geschlossen.

3.3 Es werden Überlegungen angestellt hinsichtlich einer Ausrichtung des ICM 1990 (21.–29. August) in München. Die Münchener Kollegen erklären ihre Bereitschaft, auf die Ausrichtung des ICM 1990 hinzuarbeiten. Herr *Dold* schreibt Briefe an die Herren *Moser* und *Lehto* (Präsident bzw. Generalsekretär der IMU), in welchen die Bewerbung der DMV für die Durchführung des ICM 1990 in Aussicht gestellt wird.

3.4 Herr *Fischer* vertritt die DMV bei der Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts am 16. 4. 1984 in Saarbrücken.
Herr *Dold* nahm am 28. 3. 1984 an einer Sitzung des International Council of Scientific Unions (ICSU) teil.
Herr *Bierstedt* hat in Hannover an einer Sitzung der Deutschen Aktion für Bildung, Erfindung und Information (DABEI) teilgenommen.

3.5 Für die Verleihung des Wolff-Preises sollen die Herren *Atiyah*, *Hirzebruch* und *Serre* erneut vorgeschlagen werden.

3.6 Herr *Fischer* berichtete auf der Mitglieder-Versammlung in Kaiserslautern über Reaktionen auf die DMV-Informatikdenkschrift und bittet die Mitglieder, sich für eine möglichst breite Berücksichtigung mathematischer Inhalte im Informatikunterricht ebenso zu engagieren wie für die Fortbildung bisheriger Fachlehrer zu Informatiklehrern. Aufgrund fehlender Planstellen muß der Informatikunterricht weitgehend fachfremd erteilt werden. Nach Meinung des Präsidiums sollten sich die Mathematischen Institute der auf den Informatikunterricht abzielenden Lehrerfortbildung annehmen. Es soll in den DMV-Mitteilungen kurz über das am Düsseldorfer Mathematischen Institut bereits bestehende Angebot der Informatikfortbildung berichtet werden.

3.7 Von der DMV wurde die Durchführung einer Erhebung über die Altersstruktur der Hochschulmathematiker angeregt.

3.8 Herr *Fischer* berichtet über „Studienzentren" der Studienstiftung auf der Mitgliederversammlung. Das Präsidium der DMV hat sich ausführlich mit der Problematik beschäftigt und der Studienstiftung gegenüber seine Bedenken geäußert:

– Die Befriedigung über neue Bestrebungen der Studienstiftung, auch sehr spezifische mathematische Begabungen stärker als bisher zu fördern

– die Problematik der Studienzentren

– die Panne beim improvisierten Verfahren und den Mangel an klaren Informationen der Dozenten. Das Präsidium wird diese Dinge mit Einverständnis der anwesenden Mitglieder erläutern und man hofft, daß auf diese Weise weitere Mißverständnisse vermieden werden können.

4 Organisation

4.1 Aus Kostengründen soll ein ausführliches Mitgliederverzeichnis der DMV erst wieder nach Umstellung der Geschäftsstelle auf EDV erscheinen. Als Zwischeninformation wird im Mai eine Adressenliste aller Mitglieder herausgegeben und zusammen mit den Mitteilungen der DMV versandt.

Deutsche Mathematiker-Vereinigung e.V.

Jahreschronik der DMV für 1985

1 Ämter und Gremien

1.1 in der DMV

Vorsitzender		*A. Dold*
Schriftführer		*Wallisser*
Schatzmeister		*Grotemeyer*
Geschäftsführender Herausgeber		*Jacobs*
Präsidium	*Bierstedt*	*Krengel*
	Dold	*Pareigis*
	Fischer	*Schwarz*
	Grotemeyer	*Törnig*
	Hirzebruch	*Wallisser*
	Jacobs	
Gäste	*Barner* (MFO)	
	Habetha (Fachbereichskonferenz)	
	Christian (ÖMG)	

1.2 in den anderen Organisationen

Herr *Dold* vertritt die DMV im EMC (European Mathematical Council).

Mitglieder des Deutschen Unterausschusses der IMUK: *Barner, Bergmann, Böddeker, Griesel, Grotemeyer, Kunle, Pickert, Schupp, Steiner, Vollrath.*

Fachgutachter im DFG-Senat: *H. Bauer.*

Herr *Törnig* und Herr *Oberschelp* nehmen an der MNU-Tagung, 11.–14. November 1985 in Bad Honnef, teil.

Kandidaten für die von der DMV zu besetzenden Plätze bei der General-Assembly der IMU 31. 7.–3. 8. 1986: *W. Schwarz, Hirzebruch, Barner, Fischer, Bierstedt, Grotemeyer.*

2 Jahrestagung und Mitgliederversammlung 1985

Wegen des Österreichischen Mathematischen Kongresses hat die DMV im Jahr 1985 keine eigene Jahrestagung abgehalten. Der Kongress der ÖMG fand vom 16.–21. 9. 1985 in Graz statt.

2.1 Die Mitglieder-Versammlung der DMV war im Rahmen des Kongresses in Graz am 19. 9. 1985.

Für die Nachfolge von Herrn *Dold* wird Herr *Kegel* ins Präsidium gewählt. Herr *Schwarz* wird wiedergewählt. Für die Nachfolge von Herrn *Wallisser* wird Herr *Flum* als Schriftführer gewählt.

Der Antrag auf Satzungs-Änderung der den Wahlmodus betreffenden Stellen der DMV-Satzung (§ 6) wird von der Mitglieder-Versammlung angenommen.

Herr *Schwarz* wird in einer Briefwahl vom Präsidium zum neuen Vorsitzenden der DMV für das Amtsjahr 1986 gewählt.

3 Aktivitäten der DMV

3.1 DMV-Seminare. Die DMV veranstaltete fünf DMV-Seminare, eines davon in Schloß Thurnau bei Bayreuth und vier in Schloß Mickeln in Düsseldorf-Himmelgeist. Die Teilnehmer konnten finanzielle Unterstützung durch die Stiftung Volkswagenwerk erhalten.

17.–22. 6. 1985 „The Topology and Geometry of 4-Manifolds"
Leitung: W. Singhof (Köln), R. Stern (Salt Lake City)

22.–26. 7. 1985 „Hyperbolic Systems of Conservation Laws"
Leitung: C. M. Dafermos (Providence), S. Osher (LA)

4.–9. 8. 1985 „Harmonische Analyse auf nilpotenten Lieschen Gruppen"
Leitung: R. Howe (Yale University), D. Poguntke (Bielefeld), E. Stein (Princeton)

8.–13. 9. 1985 „Empirical Processes"
Leitung: W. Stute (Giessen), P. Gaenssler (München)

22.–27. 9. 1985 „Darstellungen endlich-dimensionaler Algebren"
Leitung: P. Gabriel (Zürich), K. Bongartz (Wuppertal)

Die Finanzierung der DMV-Seminare durch die Stiftung Volkswagenwerk läuft Ende 1986 aus. Es wurde ein Antrag auf Gewährung permanenter finanzieller Trägerschaft beim Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft eingereicht.

Inzwischen sind im Birkhäuser-Verlag 6 Ausarbeitungen der DMV-Seminare erschienen, die von DMV-Mitgliedern zu einem Vorzugspreis bezogen werden können.

In Zusammenarbeit mit der DMV ist vom Vieweg-Verlag jetzt der erste Band der Reihe „Dokumente zur Geschichte der Mathematik" herausgebracht worden: Band 1, R. Dedekind: Vorlesung über Differential- und Integralrechnung 1861/62.

3.2 Herr *Schwarz* nimmt als Vertreter der DMV an der Feier zum 100jährigen Bestehen des Marburger Fachbereiches Mathematik am 25. 10. 1985 teil.

Herr *Dold* nimmt als Vertreter der DMV an der Sitzung des EMC im November teil.

Der European Mathematical Council arbeitet an einem Projekt einer Europäischen Mathematischen Datenbank.

Herr *Barner* hat an einer Gedenkfeier aus Anlaß des 100sten Geburtstages von W. Blaschke teilgenommen und ein Grußwort der DMV überbracht.

Herr *Fischer* hat an der Jahrestagung von DABEI (Deutsche Aktion für Bildung, Erfindung und Information) teilgenommen; man wird über die Aktivitäten von DABEI weiter auf dem laufenden bleiben.

Herr *W. Schwarz* nahm als DMV-Repräsentant an den Feierlichkeiten aus Anlaß des 50jährigen Bestehens der Chinesischen-Mathematischen-Gesellschaft in Shanghai teil.

3.3 Im Zusammenhang mit dem 100jährigen Jubiläum 1990 wurde vom Präsidium bislang die Beantragung einer Sonderbriefmarke bei der Deutschen Bundespost vorbereitet.

Der Antrag der DMV auf Ausrichtung des ICM 1990 mußte von der IMU gegenüber einer Bewerbung Japans zurückgestellt werden.

3.4 Auf der Mitglieder-Versammlung der DMV in Graz berichtet Herr *Schwarz* über seine Eindrücke von der Jahrestagung des „Deutschen Vereins zur Förderung des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts e. V. (MNU)" in Bad Honnef. Es seien Bestrebungen zu erkennen, die alles in allem auf eine Veränderung der Ziele des Mathematikunterrichts hinauslaufen. Er ruft die Mitglieder zu erhöhter Wachsamkeit in der Frage des Computereinsatzes in der Schule auf.

3.5 Die DMV hat beim Fachinformationszentrum Energie-Physik-Mathematik (FIZ) einen Antrag auf Aufnahme als Gesellschafter gestellt.

3.6 Für eine Erörterung einer Zusammenarbeit von DMV, GAMM und GI (Gesellschaft für Informatik) in bestimmten Fragen wird Herr *Törnig* eine Zusammenkunft vorbereiten. Vonseiten der DMV sollen der Vorsitzende und die Herren *Barner, Krengel* und *E. Schwarz* hinzugezogen werden.

Zwischen Vertretern der Mathematical Reviews und des Zentralblattes für Mathematik wird über eine enge Zusammenarbeit der beiden Referatenorgane verhandelt.

3.7 Für den Wolff-Preis werden die Herren *Hirzebruch, Atiyah,* und *Serre* vorgeschlagen.

Für den Balzan-Preis hat die DMV Herrn *Faltings* vorgeschlagen.

4 Organisation

In den Mitteilungen der DMV Heft 1/1985 wurde ein Bericht über den „Einsatz von Tischrechnern im Unterricht an Gymnasien" – Kurse zur Lehrerfortbildung an der Universität in Düsseldorf – beigelegt.

Die erste Ankündigung für den IMC 1986 wird mit den Mitteilungen verschickt.

Das Formular für den Beitritt zur DMV wird aktualisiert und ein Neudruck veranlaßt.

Für das World Directory of Mathematicians wird auf der Geschäftsstelle eine Anschriften-Liste von deutschen Mathematikern erarbeitet und eingereicht.