

89. Band Heft 2
ausgegeben am 4. 3. 1987)

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer



B. G. Teubner Stuttgart 1987

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ am Ende von Heft 88/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 98,- einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:

B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69

D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 89 01-0

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-8000 München 2, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 \$ 01.00 + .20.

© B. G. Teubner Stuttgart 1987 — Verlagsnummer 2902/2

Printed in Germany — ISSN 0012-0456

Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim

Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 89, Heft 2

1. Abteilung

M. Barner, F. Flohr: Otto Haupt zum 100. Geburtstag	61
W. K. Hayman: Schlichte Funktionen nach de Branges	81
F. W. Gehring: Uniform Domains and the Ubiquitous Quasidisk	88

2. Abteilung

Hsu, P.-L., Collected Papers (<i>H. Witting</i>)	5
Kiefer, J. C., Collected Papers (<i>F. Pukelsheim</i>)	6
Witting, H., Mathematische Statistik 1 (<i>P. Gaenssler, H. Pruscha</i>)	9
Strasser, H., Mathematical Theory of Statistics (<i>D. W. Müller</i>)	11
Denker, M., Asymptotic Distribution Theory in Nonparametric Statistics (<i>H. Strasser</i>) . .	12
Sachs, L., Applied Statistics (<i>K. Jacobs</i>)	12
Ellis, R. S., Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics (<i>Th. Eisele</i>)	12
Wagon, S., The Banach-Tarski Paradox (<i>J. Lembcke</i>)	14
Billingsley, P., Probability and Measure (<i>K. Jacobs</i>)	16
Berg, C., Christensen, J. P. R., Ressel, P., Harmonic Analysis on Semigroups: Theory of Positive Definite and Related Functions (<i>H. Heyer</i>)	17
Knobloch, H. W., Kwakernaak, H., Lineare Kontrolltheorie (<i>W. Krabs</i>)	18
Schilling, K., Simpliziale Algorithmen zur Berechnung von Fixpunkten mengenwertiger Operatoren (<i>J. Zowe</i>)	19
Jahn, J., Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Linear Spaces (<i>W. Vogel</i>)	19
Richenhagen, G., Carl Runge (1856–1927); Von der reinen Mathematik zur Numerik (<i>G. Merz</i>)	20
Schwarz, H.-R., Numerische Mathematik (<i>R. D. Grigorieff</i>)	22
Marchuk, G. I., Shaidurov, V. V., Difference Methods and Their Extrapolations (<i>R. Rannacher</i>)	22
Törnig, W., Gipser, M., Kaspar, B., Numerische Lösung von partiellen Differential- gleichungen der Technik (<i>R. Rannacher</i>)	24

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

E. Börger: D. Rödding: Ein Nachruf

D. Braess, R. Schaback: Helmut Werner

H. Bühlmann: Entwicklungstendenzen in der Risikotheorie

P. L. Butzer, W. Splettstößer, R. L. Stens: The Sampling Theorem and Linear Prediction
in Signal Analysis

W. Dickmeis, R. J. Nessel, E. van Wickeren: Quantitative Extensions of the Uniform
Boundedness Principle

R. Heath-Brown: Differences Between Consecutive Primes

J. Jost: Das Existenzproblem für Minimalflächen

M. Kneser: Max Deuring 9. 12. 1907 – 20. 12. 1984

R. Kühnau: Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve

W. Stute: Empirische Prozesse in der Datenanalyse

H. Triebel: Einige neuere Entwicklungen in der Theorie der Funktionenräume

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 11/2, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen

Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 11/2, 8520 Erlangen

Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Otto Haupt zum 100. Geburtstag

M. Barner und F. Flohr, Freiburg/Br.

Am 5. März 1987 vollendet Otto Haupt, emeritierter ordentlicher Professor der Universität Erlangen-Nürnberg, sein 100. Lebensjahr. Er kann auf ein reich erfülltes Leben zurückblicken, in dessen Mitte trotz vielseitiger anderer Interessen doch die mathematischen Wissenschaften stehen. Seit mehr als 75 Jahren ist Haupt mathematisch produktiv tätig. Ein außergewöhnlich umfangreiches und tiefgehendes Werk liegt uns vor. Alle seine Freunde und überhaupt alle, die persönlich oder durch seine Arbeiten mit ihm in Berührung gekommen sind, gratulieren ihm an diesem Tage herzlich.

Otto Haupt reagiert im Gespräch immer offen und aufgeschlossen. Er erzählt von dem, was ihn gerade beschäftigt und erwartet von seinem Gesprächspartner, daß er auf seine mathematischen Probleme eingeht. Auch hat er in seinem Leben mit vielen Wissenschaftlern korrespondiert, deren Arbeiten ihn interessiert haben oder von denen er wußte, daß seine eigenen Arbeiten auf Interesse stoßen.

Sein Lebenslauf bis zur Verleihung des Titels Dr. phil. im Jahre 1911 sei hier mit seinen eigenen Worten wiedergegeben:

Lebenslauf

Ich, OTTO HAUPT, katholischer Konfession, bin geboren am 5. März 1887 zu Würzburg als Sohn des kgl. Amtsgerichtsdirektors OTTO HAUPT in Würzburg. Nach zweijährigem Besuche der kgl. Realschule zu Bad-Kissingen trat ich im Herbst 1898 in das humanistische Neue Gymnasium zu Würzburg ein, das ich im Juli 1906 mit dem Reifezeugnis verließ. Vom W.S. 1906/07 an studierte ich in Würzburg Mathematik und Physik. Das W.S. 1908/09 brachte ich, nach Ablegung der 1. Prüfung für das Lehramt, in Berlin zu und kehrte dann für den Rest meiner Studienzzeit nach Würzburg zurück. Dem 2. Abschnitte der Lehramtsprüfung unterzog ich mich im Oktober 1910. Ich hörte die Vorlesungen und Übungen bei den Herren: CANTOR, FROBENIUS, v. HALBAN, HARMS, HILB, LEHMANN-FILHÉS, PRYM, ROST, H. A. SCHWARZ, SCHOTTKY, TAFEL, v. WEBER, WIEN.

Allen meinen verehrten Lehrern erlaube ich mir an dieser Stelle meinen herzlichen Dank auszusprechen, insbesondere den Herren Professoren HILB, PRYM, ROST, v. WEBER und WIEN für die mannig-

fache Förderung, die ich in meinen Studien durch sie erfuhr, speziell Herrn Professor HILB für die mir bei der Abfassung dieser Arbeit gewährte Unterstützung und Anregung.

Die mündliche Prüfung fand am 9. Juli 1910 statt.

Sein mündlicher Kommentar hierzu könnte lauten: Glückliche Jugend und Schulzeit, aber viel „Memorieren“ im humanistischen Gymnasium. Dann gegen Ende der Gymnasialzeit – da das Angebot der Schule gar zu bescheiden war – eigenes Einarbeiten erst in die Geometrie und dann in die Analysis; ebenfalls eine harte Arbeit, doch eine Arbeit, die ihm Freude macht und in der er, wie die Eigenkontrolle zeigt, erfolgreich ist.

Es bestand für Otto Haupt nie ein Zweifel darüber, welchem Studium er sich zuwenden sollte. Es kam nur das Mathematikstudium in Frage, wenn auch die Kollegen seines Vaters diesem gelegentlich sagten: Sie werden ihrem Sohn doch kein unstandesgemäßes Studium erlauben, wie es das Mathematikstudium ist.

Wie kam es zur Dissertation? Von dem einsemestrigen Studienaufenthalt in Berlin zurückgekehrt, schließt Haupt sich an den kaum älteren Emil Hilb an, der gerade 27-jährig nach Würzburg berufen worden war. Hieraus entsteht eine enge Zusammenarbeit und Freundschaft bis zum frühen Tod von Emil Hilb. (Nachruf Emil Hilb [37]).

Rasch entstand Haupts Doktorarbeit. Im Februar 1910 schreibt er an Felix Klein:

Bemerkung über Oszillationstheoreme.

Aus einem Schreiben an Herrn Klein.

Von

Otto Haupt in Würzburg.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung am 26. Februar 1910.

Durch Ihre Arbeiten über Lamésche Funktionen und lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung¹⁾ haben Sie zuerst wieder die Aufmerksamkeit auf die Oszillationstheoreme gelenkt. Nun hat mich Herr Hilb im Anschlusse an die von Ihnen und ihm in letzter Zeit durchgeführten Untersuchungen aufgefordert, mittels einer von ihm gegebenen Methode die Sturmschen Sätze auf die Fälle zu übertragen, welche vermittels der Hilbertschen Theorie der linearen Integralgleichungen²⁾ zugänglich sind und die von Herrn Hilbert angegebenen Randbedingungen³⁾ I...IV* als spezielle Fälle enthalten.

...

Nach mündlicher Doktorprüfung legt Haupt im Herbst desselben Jahres 1910 den zweiten Teil der bayrischen Staatsprüfung für das höhere Lehramt ab. Die Ausichten, im bayrischen Schuldienst eingestellt zu werden, waren aber zu jener Zeit auch bei ausgezeichnetem Examen schlecht.

Deshalb bewirbt sich Haupt nach Ableistung seiner Militärzeit als Einjährig-Freiwilliger (November 1910 bis Oktober 1911) um ein Lamont-Stipendium*) und erhält dieses auch. Damit geht er im Wintersemester 1911/12 nach München. In dem Nachruf auf Arthur Rosenthal [136] sagt er:

Meine Bekanntschaft mit dem Verstorbenen reicht zurück bis ins Jahr 1911. Ich kam damals, körperlich und seelisch etwas erschöpft von meinem Militärdienst, zum Weiterstudium nach München. So empfand ich die ungezwungene Liebenswürdigkeit, mit der Rosenthal mir damals entgegenkam, als besonders wohltuend.

In München schließt sich Haupt durch die Vermittlung von Rosenthal rasch einem Kreis junger Mathematiker und Physiker an, der sich um Rosenthal und F. Hartogs gebildet hatte. Vorlesungen hört er vor allem bei Sommerfeld, der Haupt als einen seiner Schüler betrachtet. In dieser Zeit entsteht die Arbeit [3], die Sommerfeld im Mai 1912 der bayrischen Akademie vorlegt.

Nach diesem Jahr 1911/12 an der Universität München geht Haupt nach Breslau, wo damals (an der Universität bzw. der Technischen Hochschule) Adolf Kneser, Erhard Schmidt, Caratheodory und Steinitz sowie der Physiker Clemens Schäfer wirkten. München und Breslau brachten für Haupt reichgefüllte, fruchtbare Studienzeiten.

Schon bald erhält er ein Angebot von Adolf Krazer auf eine Stelle als Assistent für höhere Mathematik in Karlsruhe, wobei von ihm erwartet wird, daß er sich rasch habilitiert. Bereits im Sommersemester 1913 ist er in Karlsruhe; die Habilitation findet im Herbst statt mit der Arbeit „Über eine Methode zum Beweise von Oszillationstheoremen“, die die Ideen aus seiner Doktorarbeit weiterführt und vertieft. Er charakterisiert diese folgendermaßen:

Zweck der folgenden Zeilen ist es, eine Methode — sie läßt sich als eine Kontinuitätsmethode bezeichnen — zur Gewinnung von Oszillationstheoremen darzulegen*). Bei ihrer Anwendung hat man in erster Linie festzustellen, in welcher Weise sich ausgezeichnete Parameterwerte und Oszillationszahlen ändern, sobald man die Koeffizienten der Differentialgleichung oder die Randbedingungen oder beide in gewisser Weise variiert. Lassen sich dann Änderungen angeben, bei welchen ausgezeichnete Parameterwerte und ausgezeichnete Lösungen weder verloren noch gewonnen werden und die Oszillationszahlen sich nicht oder doch nur in genau angebbarer Weise ändern, so bleibt ein Oszillationstheorem diesen Änderungen gegenüber erhalten. In diesem Falle braucht man das Oszillationstheorem nur für

*) Johann von Lamont, Astronom und Physiker, geboren am 13. 12. 1805 in Schottland, wuchs im Schottenkloster in Regensburg auf, kam 1828 als Assistent an die Sternwarte in Bogenhausen bei München, ist ab 1835 Direktor der Sternwarte. Er starb am 6. 8. 1879. Von seinem bescheidenen Gehalt sammelte er bei bedürfnisloser Lebensweise ein Vermögen an und errichtete damit eine Stiftung für Mathematikstudierende (Kapitalwert 1883: 72000 Mark).

eine spezielle, leicht zugängliche Differentialgleichung abzuleiten, um es sofort auf alle diejenigen Differentialgleichungen ausdehnen zu können, die durch Änderungen der geforderten Art aus der ursprünglichen hervorgehen.

Als Anfang der sechziger Jahre Otto Haupt als Kolloquiumsgast in Karlsruhe war, bezeichnete er seine Karlsruher Zeit ausdrücklich als eine glückliche Zeit, obgleich es natürlich für einen Assistenten an einer Technischen Hochschule viel Arbeit gab.

Im ersten Weltkrieg rückt Haupt mit Beginn der Mobilmachung ein und ist noch bis Anfang 1919 als Demobilmachungsoffizier beim Heer. Er erhält verschiedene Auszeichnungen. Im November 1918 heiratet er Edith Hughes (1892–1981), Tochter des Sodener Arztes Dr. med. Henry Hughes. Die beiden Väter waren Konphilister der Würzburger Burschenschaft Arminia. Übrigens hat sich Haupt immer positiv über Studentenverbindungen im Zusammenhang mit der Entwicklung junger Menschen geäußert.

Wir haben das Ehepaar Haupt erst zu Beginn der sechziger Jahre kennengelernt. Wir trafen sie immer gemeinsam, beide gleich bescheiden, jeder bemüht, dem anderen zu helfen. Frau Haupt hat ihren Mann in seiner Arbeit immer verständnisvoll unterstützt.

Kurz vor dem ersten Weltkrieg entstehen zwei Arbeiten zur Riemannschen geometrischen Funktionentheorie ([4], [6]) – wohl beeinflusst durch seine Würzburger Lehrer Prym und Rost und durch das Studium von Hermann Weyls gerade erschienenem Buch „Die Idee der Riemannschen Fläche“.

Anfang 1920 geht Haupt als Ordinarius nach Rostock, bereits ein Jahr später nimmt er jedoch einen Ruf nach Erlangen an, wo er zum Sommersemester 1921 seinen Dienst antritt. In Erlangen bezieht er nach einer kurzen Übergangszeit seine Wohnung in der Spardorfer-Straße 45, die er erst nach dem Tod seiner Frau (1981) und seiner Übersiedlung in das Stift in Bad Soden aufgibt.

Sechzig Jahre wissenschaftliche Arbeit liegen jetzt vor ihm, und hätten die politischen Veränderungen an den Grenzen Erlangens Halt gemacht, so hätte man sicher von einem ruhigen Gelehrten-dasein sprechen können. Aber, obgleich er immer in irgendwelche Probleme (mathematische und andere) eingesponnen war, hat er sich allgemeinen Aufgaben keineswegs verschlossen. Dabei scheinen ihm die Erfahrungen, hauptsächlich auf organisatorischem Gebiet, die er in seiner Militärzeit gesammelt hat, nützlich gewesen zu sein.

Das Jahr 1924/25 sieht ihn als Dekan der (damals noch gemeinsamen) philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät. Von der Zeit nach 1933 wissen wir nur, daß es für ihn schwere Jahre gewesen sein müssen, und daß seine aufrechte Haltung zur Folge hatte, daß er nach 1945 nicht nur erneut die Last des Dekanats zu tragen hatte, sondern auch die personellen Entscheidungen bei der Reorganisation der Universität Erlangen mittragen und mitverantworten mußte.

In Erlangen hat sich Haupt schon bald seinem Hauptarbeitsgebiet, den „Geometrischen Ordnungen“, zugewandt. Bevor wir darauf zu sprechen kommen, möchten wir über seine anderen Aktivitäten berichten. Da ist zunächst über die Herausgabe von Felix Kleins Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion in Buchform zu sprechen. Er charakterisiert seine Absichten folgendermaßen:

Vorwort.

Bei der Herausgabe der KLEINSchen Vorlesung über die hypergeometrische Funktion erschienen nur zwei Wege gangbar: Entweder eine durchgreifende Umarbeitung, auch im großen, oder eine möglichst weitgehende Erhaltung der ursprünglichen Form. Vor allem auch aus historischen Gründen wurde der letztere Weg beschritten. ...

... In Rücksicht auf möglichste Erhaltung der KLEINSchen Darstellung sind ferner Hinweise des Herausgebers auf inzwischen gemachte Fortschritte der Wissenschaft vom Texte getrennt als Anmerkungen am Schluß zusammengestellt. Diese Hinweise erheben aber in keiner Weise den Anspruch auf Vollständigkeit. ...

Übrigens habe ich darauf Bedacht genommen, auch dem *Anfänger* die Lektüre durch Anmerkungen und durch Nachweise der KLEINSchen Zitate zu erleichtern. Denn zweifellos bieten gerade diese Vorlesungen eine treffliche Ergänzung und Weiterführung dessen, was der Studierende mittleren Semesters an Geometrie und Funktionentheorie kennengelernt hat. Alles in allem wurde danach getrachtet, dem Zweck der vorliegenden Neuausgabe gerecht zu werden: Auch diesem Werke KLEINS den ihm gebührenden Platz, insbesondere im Unterrichte, zu erhalten.

...

Erlangen, im April 1933.

HAUPT.

Die Revision des Textes im einzelnen und die Anmerkungen (etwa 40 Seiten) sind mit äußerster Sorgfalt und Sachkenntnis zusammengestellt.

Dem Zusammenwirken von Universität und Gymnasium mißt Otto Haupt größte Bedeutung bei. Er trifft sich seit 1927 regelmäßig mit Gymnasiallehrern aus dem Raum Erlangen–Nürnberg–Fürth. Er beteiligt sich an der Neubearbeitung eines gängigen Gymnasiallehrbuches. Im Vorwort des Autors vom April 1928 heißt es:

Aus Fachkreisen kam die Anregung, es möchte bei der Umarbeitung des Buches, dessen Vorzüge ja anerkannt seien, der modernen Forderung nach größter Exaktheit des Ausdrucks und präzisester Fassung der grundlegenden Begriffe Rechnung getragen werden. Bei der schon gedruckt vorliegenden Ausgabe für die VII. Klasse konnte dieser Wunsch nicht mehr erfüllt werden. Dagegen glaube ich in diesem Bande dieser Forderung der modernen mathematischen Auffassung weitgehendst entgegengekommen zu sein. Besonders fühle ich mich in dieser Hinsicht den Herren „Erlanger Fachgenossen“ zu wärmsten Danke für ihre wertvollen Anregungen und Mithilfen verpflichtet.

Nach dem Krieg wurden die 1933 unterbrochenen Zusammenkünfte mit den Lehrern wieder aufgenommen und über seine Emeritierung hinaus weitergeführt. 1965 wurde Haupt zum Ehrenmitglied des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts ernannt.

Zeugnis für sein Interesse an Fragen der Fortbildung geben auch einige Vortragsauszüge und Mitteilungen in den Unterrichtsblättern für Mathematik und Naturwissenschaften (siehe III). Für die „Grundzüge der Mathematik“, die sich hauptsächlich an Gymnasiallehrer wenden, schreibt er Mitte der fünfziger Jahre zusammen mit P. Sengenhorst das Kapitel „Algebraische Körpererweiterung“. Im Jahre 1928 erscheint die zweibändige „Einführung in die Algebra“, eines der ersten Lehrbücher, das die damals noch neuen, abstrakten Vorgehensweisen durchgehend berücksichtigt; er selbst beschreibt dies im Vorwort folgendermaßen:

Das vorliegende Buch ist als Einführung in die Algebra, zunächst für Studierende, gedacht. Es beschränkt sich daher auf die Elemente, unter Berücksichtigung auch der neueren Algebra. Eben deshalb kommt das Buch vielleicht auch manchen Wünschen der Lehrer an höheren Schulen entgegen; zumal verschiedene Gegenstände, die sich mit dem Lehrstoff der höheren Schulen mehr oder minder eng berühren, ausführlicher als gewöhnlich dargestellt sind. ...

Andererseits forderten die großen Fortschritte der Algebra in den letzten Jahrzehnten zum Versuch heraus, die modernen Methoden und Ergebnisse für die Darstellung nutzbar zu machen, weil und soweit dadurch ein Gewinn an Einfachheit und zugleich Verständlichkeit zu erhoffen war. Dieser Versuch bedingt einen der Unterschiede der vorliegenden Einführung gegenüber fast allen bereits vorhandenen Lehrbüchern*). Demgemäß ist das vorliegende Buch durchweg beeinflusst von der bahnbrechenden „Algebraischen Theorie der Körper“(**) von Herrn E. Steinitz, was hier ein für allemal hervorgehoben sei. ...

*) Eine Ausnahme macht, soweit mir bekannt, nur H. Hasse, Höhere Algebra I und II, Leipzig 1926/27, Sammlung Göschen Nr. 931/32.

*) Crelles Journal 137 (1910), S. 167—309. Die im Text angebrachten Hinweise auf diese klassische Arbeit beanspruchen in keiner Weise, vollständig zu sein. — Herrn Steinitz möchte ich auch an dieser Stelle für Mitteilung eines unveröffentlichten Beispiels (vgl. 23, 3) verbindlichst danken.

Haupt bezeichnet in einem Personalblatt sein „besonderes Forschungsgebiet“ wie folgt: Teilgebiete der Geometrie und der Analysis. Tatsächlich ist in seinem Werk beides sehr stark miteinander verwoben. Seine Denkweise in der Analysis ist oft geometrisch und Grenzwertüberlegungen rechnen durchaus zur Geometrie. So bedient sich die erste Arbeit, die wir unter IV (Analysis) eingeordnet haben ([10] Über Asymptoten ebener Kurven) der geometrischen Formulierung, und die erste Arbeit, die dem Titel nach zu VI (Ordnungsgeometrie) gehört ([13] Über Kurven endlicher Ordnung), hat Beziehungen zu Fragen der Integrationstheorie. Wenn man aber von Otto Haupt im Zusammenhang mit der Analysis spricht, so denkt man in erster Linie an das dreibändige Lehrbuch, das in typisch bescheidener Weise die Beschreibung „Einführung“ trägt. Das dreibändige Werk ist in drei



jeweils völlig neugestalteten Auflagen erschienen: 1938 (mit Aumann), 1948–1955 (mit Aumann und Pauc) und 1974–1983 (mit Aumann).

Der „Haupt-Aumann“ ist so bekannt, daß wir hier nicht näher darauf eingehen sollten. Wir verweisen auf die Besprechungen in den Jahresberichten, am Ende der Besprechung zu Band 3 der letzten Auflage schreibt Heyer (diese Jahresberichte 87 (1985), S. 18):

Mit diesem 3. Band sucht die uns vorliegende „Einführung in die reelle Analysis“ ihresgleichen: geradezu monumental angelegt, inhaltlich umfassend, vielseitig ausgerichtet, am neuesten Stand der Theorie orientiert, mit Ausblicken in diverse Richtungen, vor allem mit einer unübersehbaren Betonung von geometrischer Einsicht und Anwendung stellt sie ein Standardwerk dar, welches in keiner mathematischen Bibliothek fehlen sollte.

Haupt hat immer gerne mit anderen Mathematikern zusammengearbeitet und seine Probleme besprochen. So gibt es aus der Frühzeit seiner wissenschaftlichen Tätigkeit gemeinsame Arbeiten mit Hilb. Besonders intensiv war die Zusammenarbeit mit Christian Y. Pauc, der als kriegsgefangener französischer Offizier an der Erlanger Universität tätig war. Bis in die sechziger Jahre hinein entstanden eine Reihe gemeinsamer Arbeiten zur Maßtheorie, wobei besonders auf die Arbeiten über die Ableitung absolut additiver Mengenfunktionen hingewiesen sei. Auch auf seinem Hauptarbeitsgebiet, der Ordnungsgeometrie hat er immer wieder Mitarbeiter und Gesprächspartner gefunden: Nöbeling, Denk und insbesondere Künneth. Was hat Haupt veranlaßt, sich zu Beginn seines Wirkens in Erlangen der Ordnungsgeometrie zuzuwenden? Er erzählt von seiner Freundschaft mit J. Hjelmslev (1873–1950), der ihn auf die Arbeiten von C. Juel (1855–1935) aufmerksam machte, die ihn dann faszinierten. Auch hatte sich Arthur Rosenthal, der ihm in seiner Münchner Studienzeit so freundschaftlich entgegengekommen war, im Anschluß an Juel mit Kurven endlicher Ordnung beschäftigt. Die erste Arbeit zu den geometrischen Ordnungen ist auf die Habilitationsschrift von Arthur Rosenthal bezogen, auch korrespondiert Haupt mit Rosenthal über seine Überlegungen und Ergebnisse. Schließlich fühlt sich Haupt in seiner geometrischen Denkweise dem Erbe Christian Staudts (1798–1867) – den er als den ersten bedeutenden Mathematiker in Bayern bezeichnet – zutiefst verpflichtet.

Im Gegensatz zu den Begründern der Ordnungsgeometrie, die von stückweise stetig differenzierbaren Kurven ausgingen, verzichtet Haupt auf Differenzierbarkeitsvoraussetzungen. Ein stetiger Bogen oder eine stetig geschlossene Kurve der euklidischen oder projektiven Ebene ist von der Ordnung n , falls n die Höchstzahl der Schnittpunkte mit Geraden ist, und es wirklich eine Gerade mit n Schnittpunkten gibt. Haupt verwendet in den ersten Arbeiten den Begriff der Relativordnung; dabei stehen nur die Geraden eines Büschels bzw. eine Parallelschar von Geraden zur Diskussion. Ein Bogen, der sich bijektiv durch Zentralprojektion auf einen Kreisbogen oder durch Parallelprojektion auf ein Geradenstück abbilden läßt, also von der Relativordnung 1 ist, wird relativ einfach genannt. Kann man jeden Bogen gegebener Relativordnung aus relativ einfachen Bögen zusammensetzen? Mit solchen Strukturfragen beschäftigen sich die ersten Arbeiten von Haupt, und zwar die bei-

den erstgenannten im Anschluß an Rosenthal, die beiden anderen im Anschluß an Juel. Als Beispiel geben wir die in der ersten Arbeit [13] bewiesenen Sätze wieder:

Satz I. Jeder Bogen $\mathfrak{A}$ der Relativordnung $r \leq 2$ ist in endlich viele, relativ einfache Bogen zerlegbar. Hingegen lassen sich zu jeder Relativordnung $r \geq 3$ Bogen angeben, die auf keine Weise als Aggregate von endlich vielen, relativ einfachen Bogen darstellbar sind.

Satz II. Jeder Bogen $\mathfrak{A}$ der Ordnung $n \leq 5$ ist in endlich viele, relativ einfache Bogen zerlegbar. Hingegen gibt es Bogen von jeder Ordnung $n \geq 6$, die auf keine Weise als Aggregate von endlich vielen, relativ einfachen Bogen darstellbar sind.

Nach einer Pause von fünf bis sechs Jahren, in der u. a. das zweibändige Algebra-buch entsteht, wendet sich Haupt erneut Strukturfragen in der Ordnungsgeometrie zu — jetzt im Anschluß an ein Ergebnis von Hjelmslev, indem er neben dem globalen Ordnungsbegriff den lokalen Begriff des Punktes n -ter Ordnung einführt. Mit diesem wird der Begriff des ordnungshomogenen Bogens erklärt. In den weiteren Arbeiten betrachtet er an Stelle der Bögen allgemeiner kompakte zusammenhängende Punktmengen der Ebene und knüpft dabei an Ergebnisse von Marchaud an. Er beschäftigt sich auch mit Raumkurven dritter und vierter Ordnung und wendet sich dabei der Frage nach ordnungsfester Erweiterung eines Bogens der Ebene oder des Raumes zu, wobei er insbesondere geschlossene Kurven im Blick hat. Haupt hat sich immer Rechenschaft darüber abgelegt, welche Voraussetzungen beim Beweis eines Satzes wirklich gebraucht werden, ob man nicht die Voraussetzungen abschwächen könne, ob man nicht die Untersuchungen überhaupt in einen allgemeineren Rahmen stellen könne. In der Ordnungsgeometrie hat er zunächst die zu betrachtenden Gebilde verallgemeinert, dann aber auch an Stelle von Geraden, Kreisen und Kegelschnitten in der Ebene allgemeinere Ordnungscharakteristiken zugelassen. In einer großangelegten Arbeit ([38]) führt er die Strukturtheorie für Kurven der Ebene bei beliebigen Ordnungscharakteristiken durch. Er reflektiert aber auch darüber, was Strukturfragen sind und entwickelt damit zugleich ein Programm für seine weiteren Arbeiten. An die Strukturfragen schließen sich die Gestaltsfragen an. Wir machen dies am besten deutlich, indem wir Haupt zu beiden Fragenkreisen selbst zu Wort kommen lassen:

Strukturprobleme bei reellen Gebilden.

Von Otto Haupt in Erlangen.

Vorgelegt von H. Tietze in der Sitzung vom 1. Juni 1935.

1. Die zu erörternden Fragestellungen sollen zunächst am *einfachsten Beispiele* dargelegt werden, nämlich am Falle der *Bogen* in der *Ebene*.

Dabei möge zuerst auf einen Unterschied des von uns hier eingenommenen Standpunktes gegenüber dem u. a. von Juel und

von an ihn anschließenden Autoren¹ hingewiesen werden: In den für uns augenblicklich in Betracht kommenden Arbeiten Juels und anderer handelt es sich nämlich um die Untersuchung von Kurven bzw. Bogen, welche eine *vorgegebene* (lineare) *Ordnung* n besitzen²; es ist also a priori eine Ordnung vorgeschrieben und es werden gewissermaßen die Einschränkungen untersucht, welche diese Vorschrift nach sich zieht. Demgegenüber wird in den folgenden Zeilen ein *Bogen* $\mathfrak{B}$ *beliebig vorgegeben* und man sucht unter bevorzugter *Verwendung des Ordnungsbegriffes* zu Aussagen (*allgemeiner Natur*) über das Verhalten von $\mathfrak{B}$ zu gelangen.

Gestaltsprobleme bei reellen Gebilden.

Von Otto Haupt in Erlangen.

§ 1. Einleitung.

1, 1. Untersuchungen über die Gestalt von Figuren spielen in verschiedenen Zweigen der Geometrie eine Rolle. Man denke etwa an die Topologie¹). Hierher gehört ferner die uns im folgenden ausschließlich beschäftigende Geometrie im Sinne Juels, soweit es sich bei ihr um die gestaltliche Beschreibung²) der jeweils betrachteten Gebilde handelt.

Werfen wir — zwecks einer ersten Orientierung — einen Blick zum Beispiel auf die Juelsche Klassifikation der ebenen, einteiligen Kurven³) dritter Ordnung⁴). Ihr zufolge verteilen sich besagte Kurven auf wenige verschiedene Gestaltstypen. Als Beispiel nennen wir folgenden Typ:

Die Kurve besitzt keine mehrfachen Punkte und ist darstellbar als Summe von drei und nicht weniger als drei Konvexbogen, welche in drei Wendepunkten aneinanderstoßen. Bei dieser, hier noch etwas grob formulierten, Beschreibung der Gestalt fällt vor allem in die Augen die Stellung, welche in ihr dem Konvexbogen zukommt: Er erscheint sozusagen als „Element“, aus welchem alle betrachteten Kurven aufgebaut sind.

...

Dem eben Gesagten zufolge erweist sich *somit auch der Gestaltsbegriff* als *abhängig von der*, in weitem Umfange willkürlichen, *Wahl eines Ordnungsbegriffes*. Anders ausgedrückt: Jedem Ordnungsbegriff entsprechen, neben einem Strukturproblem, Gestaltsprobleme. Letztere können, auch bei gegebenem Ordnungsbegriff, noch von der verschiedensten Art sein. So kann man bei linearer Ordnung nicht nur, wie oben bei den Kurven dritter Ordnung, nach der Klassifikation der Kurven einer Ordnung n fragen, sondern beispielsweise nach der Klassifikation der Kurven vom Maximalklassenindex⁵), u. a. m.

Bei einer Analyse des Beweises des Verteilungssatzes der Strukturtheorie reeller Gebilde erkennt Haupt, daß nur die „Monotonie-Eigenschaft“ der Ordnung wirklich gebraucht wird, und er faßt deshalb den Problemkreis „Ordnungsgeometrie“ neu und sehr viel allgemeiner. Fragen, bei denen Ordnungscharakteristiken eine Rolle spielen, werden dann in Zukunft als Juelsche Probleme bezeichnet.

Auf die erste Periode von Otto Haupts Schaffen zur Ordnungsgeometrie sind wir hier etwas näher eingegangen. Bei dem Reichtum der Ergebnisse, die nach dem zusammenfassenden Bericht [65] von 1938/39 publiziert wurden, ist es uns nicht möglich, die weiteren Entwicklungslinien im einzelnen nachzuzeichnen. Um dem Leser den Überblick zu erleichtern, haben wir versucht, Haupts ordnungsgeometrische Arbeiten nach Themenkreisen zu ordnen (selbstverständlich könnte man auch zu anderen Einteilungen gelangen, und die Zuordnung der einen oder anderen Arbeit zu einem der Themenkreise ist keineswegs eindeutig). Wir verweisen besonders auf die von Haupt selbst gegebenen Überblicksartikel und auf das große zusammenfassende Werk „Geometrische Ordnungen“, das er zusammen mit H. Künneht verfaßt hat.

8. 8. 47

Zum Kreisheitssatz und seinen Verallgemeinerungen
Der Kreisheitssatz ist wesentlich an die Vor. gebunden,
daß die „Kreistreue“ (vorhanden sein kann) stetig ist; das
Es gibt Beispiele von Ordnungen, die nicht in jedem Punkt einen
freien einzigen Kreistreuepunkt besitzen, die genau von der
zyklischen Ordnung her sind und genau zwei Teilsätze
d. h. Punkte der zyklischen Ordnung her besitzen. Es wird nun,
gestützt auf eine Herleitung der Methode von Haupt, gezeigt,
ein Beweis für die auf allgemeineren Systemen von Ordnungen
herüber (an Stelle der Kreis-) verallgemeinerten Sätze gegeben:
Betrachtet ein Oval stetige Kreistreue und wird es a) von einem
Kreis in mindestens zwei Punkten getroffen, so benutzt es mindestens
zwei Stützpunkte; b) von jedem Kreis in höchstens $2n$ Punkten getroffen,
so benutzt es ~~höchstens~~ ^{höchstens} (also genau) vier Stützpunkte. Falls die
Kreistreue nicht stetig ist, gelten schwächere Sätze. Haupt

Nach dem Erscheinen des Buches beschäftigt sich Haupt, größtenteils zusammen mit Künnet, vornehmlich mit Fragen um den Vierscheitelsatz. Es geht dabei sowohl um die Klärung des Begriffs Scheitel unter sehr allgemeinen Voraussetzungen als auch um die Frage nach der Gültigkeit des Vierscheitelsatzes (bzw. von Mehrscheitelsätzen) unter diesen allgemeinen Voraussetzungen. Später wendet sich auch Nöbeling, der Haupt nach dem Tode von Aumann 1980 bei der Fertigstellung des dritten Bandes der Analysis geholfen hat, diesem Fragenkreis zu.

Bald nach dem Krieg kommt Haupt nach Oberwolfach. Mit Kneser zusammen führt er 1956 einen Fortbildungslehrgang für Studienräte über Strukturfragen in der Analysis durch. Seit 1962 leitet er regelmäßig (mit J. D. Aczel und A. Ostrowski) die Tagungen über Funktionalgleichungen; Symposien über geometrische Ordnungen betreut er seit 1967. Oft ist er auch – zuletzt 1978 – zu Forschungsaufenthalten dort, meist zusammen mit Georg Aumann. Vor dem Frühstück springt er noch schnell den Berg hinauf, um dann bis in die Nacht hinein intensiv zu arbeiten.

Die wissenschaftlichen Leistungen Otto Haupts führten zu zahlreichen Ehrungen. Er erhielt Rufe nach Gießen (1931), Darmstadt (1931) und Leipzig (1934). 1947 wurde er ordentliches Mitglied der Bayrischen Akademie der Wissenschaften, 1949 der Akademie der Wissenschaften und der Literatur in Mainz. Er ist korrespondierendes Mitglied der Société Royale des Sciences de Liège seit 1955. Die Universitäten Bonn (1962), Würzburg (1963) und Nantes (1966) verliehen ihm die Ehrendoktorwürde.

Über dreißig Jahre war Haupt Universitätsprofessor am Mathematischen Institut in Erlangen. Nach seiner Emeritierung 1953 war er nochmals über dreißig Jahre nicht minder aktiv wissenschaftlich tätig; er arbeitete weiter regelmäßig im Institut und stellte seinen Rat und seine Hilfe zur Verfügung. Kurz vor seiner Emeritierung empfand er es als besonderes Glück, daß zwei seiner Doktoranden – Elmar Thoma (1952) und Heinz Bauer (1953) – die Hochschullehrerlaufbahn anstrebten.

Haupt wurde im September 1911 in die Deutsche Mathematiker-Vereinigung aufgenommen und gehört ihr somit seit mehr als fünfundsiebzig Jahren an. Eine so lange Mitgliedschaft ist ein Ereignis für die DMV, das wohl kaum so bald wieder eintreten wird.

Mit Otto Haupt freuen wir uns auf seinen hundertsten Geburtstag.

Otto Haupts Publikationen

Die Beiträge in Zeitschriften, von denen wir hoffen, daß wir sie vollständig zusammengestellt haben, sind nach den Einreichungsdaten durchnummeriert. Weiter haben wir versucht, sie nach Sachgebieten und innerhalb der Ordnungsgeometrie auch nach Themenkreisen zu ordnen, um den Überblick zu erleichtern.

I Oszillationstheoreme

- [1] Bemerkung über Oszillationstheoreme. Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. 1910, 2 S.
- [2] Untersuchungen über Oszillationstheoreme. Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde. (Meinen lieben Eltern zur silbernen Hochzeit). Gedruckt von B. G. Teubner, Leipzig 1911, 50 S.

- [3] Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Eigenfunktionen des Turbulenzproblems. K. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Phys. Kl. Sitzungsber. 1912, 289–301
- [5] Über eine Methode zum Beweise von Oszillationstheoremen. (Habilitationsschrift) Math. Ann. **76** (1914) 67–104
- [7] Über lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Bemerkung zur Arbeit gleichen Titels von Herrn Hamel. Math. Ann. **79** (1918) 278–285
- [12] (mit E. Hilb) Oszillationstheoreme oberhalb der Stieltjesschen Grenze. Math. Ann. **89** (1923) 130–146
- [16] (mit E. Hilb) Über Greensche Randbedingungen. Math. Ann. **92** (1924) 95–103
- [25] Über ein Oszillationstheorem. Sitzungsber. Phys.-Med. Sozietät Erlangen **61** (1929/30) 203–206

II Abelsche und Prymsche Funktionen

- [4] Bemerkung über die Integrale Riemannscher Funktionenscharen. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl. 1914, 13 S.
- [6] Zur Theorie der Prymschen Funktionen I. und N. Ordnung. Math. Ann. **77** (1915) 24–64
- [8] Ein Satz über die Abelschen Integrale 1. Gattung. Math. Z. **6** (1920) 219–237
- [9] Über eine dem sogenannten Riemannschen Problem entsprechende Randwertaufgabe für die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl. 1920, 41 S.
- [11] Zur Parametrixmethode. Math. Ann. **88** (1922) 136–150
- [20] Zur Erzeugung der Primfunktion von Prym und Rost. J. Reine Angew. Math. **158** (1927) 56–61

III Universität und Gymnasium

- [22] Zur Bestimmung des Restgliedes der Taylorschen Formel. Unterrichtsblätter **34** (1928) 296–298
- [26] Existenzbeweise in der elementaren und höheren Mathematik. Unterrichtsblätter **36** (1930) 224–226
- [31] Aus der modernen Algebra. Unterrichtsblätter **37** (1931) 289–294
- [34] Einiges aus der neueren Differentialgeometrie. I. Unterrichtsblätter **38** (1932) 229–233
- [43] Einiges aus der neueren Differentialgeometrie. II. Unterrichtsblätter **40** (1934) 18–23
- [131] (mit P. Sengenhorst) Algebraische Körpererweiterungen. In: Grundzüge der Mathematik Band I, Göttingen 1958, Kap. 7, 179–193
- [163] (mit W. L. Fischer) Die Fortbildung der Mathematiklehrer in der Bundesrepublik Deutschland. MNU **19** (1966/67) 34–37

IV Analysis

- [10] Über Asymptoten ebener Kurven. J. Reine Angew. Math. **152** (1922) 6–10 und 239
- [77] Über Lösungen linearer Differentialgleichungen mit Asymptoten. Math. Z. **48** (1942) 212–220
- [78] Über das asymptotische Verhalten der Lösungen gewisser linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen. Math. Z. **48** (1942) 289–292
- [21] Zur Theorie der Exponentialfunktion und der Kreisfunktionen. Sitzungsber. Phys.-Med. Sozietät Erlangen **60** (1928) 155–160
- [80] Über einen Eindeutigkeitssatz für gewisse Funktionalgleichungen. J. Reine Angew. Math. **186** (1944) 58–64

- [28] Zum Beweise des Häufungsstellenprinzips für Funktionen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **40** (1931) 242–245
- [33] Über die Erweiterung stetiger Abbildungen. J. Reine Angew. Math. **168** (1932) 129–130
- [74] Zur Bestimmung des Oberflächenmaßes vermittelt geometrisch ausgezeichnete Polyederfolgen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **51** (1941) 170–192
- [87] (mit Chr. Pauc) Zum Beweise des Verteilungssatzes für Punkte mit unvollständigem Kontingent. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1947, 51–55
- [120] Über die Entwicklung des Integralbegriffes seit Riemann. Schriftenreihe Inst. Math. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin **1** (1957) 303–317
- [186] Zur Verallgemeinerung des Riemannschen Integrals. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1982, 29–42
- [86] (mit G. Aumann) Bemerkung über Abhängigkeit von Funktionen. Math. Z. **50** (1944) 144–154
- [106] Wronskische Determinante und lineare Abhängigkeit. (Herrn Erich Kamke zum 60. Geburtstag am 18. August 1950 gewidmet.) Math. Z. **53** (1950) 122–130
- [156] Lineare Abhängigkeit und Wronskische Matrix. Akad. Wiss. Lit. Mainz. Abh. Math.-Naturwiss. Kl. 1964, 117–138
- [110] Bemerkung zu einem Abbildungssatz von Herrn Béla Sz.-Nagy. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1951, 147–161

V Maßtheorie

- [97] (mit Chr. Pauc) Über die Ableitung absolut additiver Mengenfunktionen. Arch. Math. **1** (1948) 23–28
- [98] Zum Beweise des Lebesgueschen Ableitungssatzes. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1948, 171–174
- [108] (mit Chr. Pauc) Vitalische Systeme in Booleschen σ -Verbänden. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1950, 187–207
- [111] Zur Differentiation additiver Funktionen. (Herrn Professor Georg Hamel zum 75. Geburtstag gewidmet.) Math. Nachr. **8** (1952) 93–97
- [112] (mit Chr. Pauc) La topologie approximative de Denjoy envisagée comme vraie topologie. C. R. Acad. Sci. Paris **234** (1952) 390–392
- [113] (mit Chr. Pauc) Halobedingungen und Vitalische Eigenschaft von Somensystemen. Arch. Math. **4** (1953) 107–114
- [116] (mit Chr. Pauc) Propriétés de mesurabilité de bases de dérivation. Portugal. Math. **13** (1953) 37–54
- [117] (mit Chr. Pauc) Über die durch allgemeine Ableitungsbasen bestimmten Topologien. Ann. Mat. Pura Appl. **IV 36** (1954) 247–271
- [99] (mit Chr. Pauc) Über die Erweiterung eines Inhaltes zu einem Maße. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1948, 247–253
- [104] (mit Chr. Pauc) Mesure et topologie adaptées. Espaces mesurés topologiques. C. R. Acad. Sci. Paris **230** (1950) 711–712
- [118] (mit Chr. Pauc) Bemerkungen über Inhalte und Maße in lokal bikompakten Räumen. (Herrn Wilhelm Süss zum 60. Geburtstag gewidmet.) Akad. Wiss. Lit. Mainz Abh. Math.-Naturwiss. Kl. 1955, 187–218
- [119] (mit Chr. Pauc) Bemerkungen über Unterteilungsintegrale und lineare Funktionale. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1955, 347–369
- [126] (mit Chr. Pauc) Über Adjunktion von Idealen in Booleschen Verbänden. Akad. Wiss. Lit. Mainz. Abh. Math.-Naturwiss. Kl. 1957, 177–193
- [128] (mit Chr. Pauc) Über Erweiterungen von Inhalten durch Adjunktion von Nullsomen. Akad. Wiss. Lit. Mainz. Abh. Math.-Naturwiss. Kl. 1957, 271–290
- [132] (mit Chr. Pauc) Mesures simplement et dénombrablement additives adaptées à une pseudo-topologie. J. Math. pur. appl., IX. Ser. **38** (1959) 213–234

- [147] (mit Chr. Pauc) Über Produkte von Inhalten und Maßen, die an eine Topologie adaptiert sind. Akad. Wiss. Lit. Mainz. Abh. Math.-Naturwiss. Kl. 1962, 379–424
- [133] (mit Chr. Pauc) Über eine Erweiterung des Fubinischen Satzes. Akad. Wiss. Lit. Mainz. Abh. Math.-Naturwiss. Kl. 1959, 1–41

VI Ordnungsgeometrie

Frühe Arbeiten zur Ordnungsgeometrie

- [13] Über Kurven endlicher Ordnung. Math. Z. **19** (1924) 284–299
- [17] Über zerlegbare Kurven. Math. Z. **22** (1925) 8–15
- [14] Bemerkung über die ebenen Elementarkurven 3. Ordnung. Math. Ann. **92** (1924) 88–94
- [18] Zur Juelschen Theorie der reellen, ebenen Kurven 4. Ordnung. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1925, 1–8

Strukturfragen bei speziellen Gebilden

- [24] Über einen Satz von Herrn J. Hjelmslev. Sitzungsber. Phys.-Med. Sozietät Erlangen **60** (1928) 327–328
- [27] Über die Struktur reeller Kurven. J. Reine Angew. Math. **164** (1931) 50–60
- [29] Über Kontinua von beschränkter Ordnung. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1931, 49–61
- [30] Über Kontinua von endlicher Relativordnung. J. Reine Angew. Math. **167** (1932) 20–39
- [32] Berichtigung zu: Über Kontinua von endlicher Relativordnung. J. Reine Angew. Math. **176** (1936) 112
- [35] Über die Struktur gewisser abgeschlossener Punktmengen. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1932, 71–78
- [39] Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung. Math. Ann. **108** (1933) 126–142
- [41] Über Raumbogen dritter Ordnung, welche die sphärische Ordnung fünf besitzen. Math. Z. **37** (1933) 589–593
- [42] Über die Erweiterung eines beliebigen Bogens dritter Ordnung, insbesondere zu einer Raumkurve dritter Ordnung. J. Reine Angew. Math. **170** (1934) 154–167
- [44] Ordnungsfeste Erweiterung ebener Bogen und Kurven. Math. Z. **39** (1935) 126–136
- [49] Über ebene Bogen und Kurven vom Maximalindex im weiteren Sinne. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1935, 37–70
- [61] Über Kongruenzregelflächen endlicher Ordnung. Monatsh. Math. Phys. **48** (1939) 245–267

Grundsatz-Arbeiten

- [38] Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven in der Ebene bezüglich vorgegebener Kurvenscharen. Monatsh. Math. Phys. **40** (1933) 1–53
- [50] Strukturprobleme bei reellen Gebilden. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1935, 183–188
- [53] Gestaltungsprobleme bei reellen Gebilden. Monatsh. Math. Phys. **43** (1936) 261–274
- [58] Zum Verteilungssatz der Strukturtheorie reeller Gebilde. Monatsh. Math. Phys. **46** (1937) 84–92

Ordnungsgeometrie und Differentialgeometrie

- [36] (mit F. Alt) Zum Krümmungsbegriff. Ergebnisse math. Kolloquium Wien 1930/31. Heft 3 (1932) 4–5
- [40] Zur Differentialgeometrie der Kurven und Flächen. J. Reine Angew. Math. **169** (1933) 177–185
- [45] Über k -dimensionale Mannigfaltigkeiten im R_n . Sitzungsber. Phys.-Med. Sozietät Erlangen **65** (1934) 95–96
- [56] Zur Differentialgeometrie k -dimensionaler Gebilde im R_n . J. Reine Angew. Math. **176** (1936) 96–111

- [46] Über die gewöhnlich-differenzierbaren Punkte der Bogen n -ter Ordnung im R_n . Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1934, 191–193
- [54] Über ebene Punktmengen mit überall unendlicher Krümmung. J. Reine Angew. Math. **175** (1936) 221–223
- [64] Über die Krümmung ebener Bogen endlicher Ordnung. Sitzungsber. Phys.-Med. Sozietät Erlangen **71** (1939) 219–227
- Sekanten und Paratingenten**
- [55] (mit G. Nöbeling) über die beliebigdimensionalen Sekanten eines Kontinuums und ihre Limiten. Sitzungsber. Phys.-Med. Sozietät Erlangen **67** (1935/36) 283–285
- [62] (mit G. Nöbeling und Chr. Pauc) über Abhängigkeitsräume. J. Reine Angew. Math. **181** (1940) 193–217
- [63] (mit G. Nöbeling und Chr. Pauc) Sekanten und Paratingenten in topologischen Abhängigkeitsräumen. J. Reine Angew. Math. **182** (1940) 105–121
- [76] Über Kontinua mit unvollständigen lokalen Halbsekantenmengen. J. Reine Angew. Math. **185** (1943) 231–240
- Ebene Kurven und Kontinua**
- [59] Bestimmung der zyklisch ordnungshomogenen ebenen Bogen. (Erste Mitteilung.). J. Reine Angew. Math. **178** (1937) 14–28
- [60] Bestimmung der zyklisch ordnungshomogenen ebenen Bogen. (Zweite Mitteilung: Konstruktion normierter Kreissysteme.). J. Reine Angew. Math. **180** (1939) 44–72
- [102] Über die Verteilung der Relativordnungen bezüglich eines Bogens. (Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.) Math. Z. **52** (1949) 527–546
- [105] Über die ebenen Bogen der linearen Ordnung Drei. (Herrn Heinrich Tietze zum 70. Geburtstag am 31. VIII. 1950 gewidmet.) Acta Sci. Math. (Szeged) **13** (1950) 153–162
- [109] Über eine Kennzeichnung von Bogen minimalen Ordnungswertes. Gaz. Mat. (Lisboa) **12**, no. **50** (1951) 23–26
- [115] Über Bogen mit lauter gleichartigen Schmieggebilden. Portugal. Math. **13** (1954) 1–23
- [122] Über Kennzeichnungen lokal konvexer, ebener Bogen, insbesondere auch dualisierbarer. (Wilhelm Blaschke zum 70. Geburtstag gewidmet.) Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **21** (1957) 44–54
- [124] Sur la notion de courbe continue dépourvue de paratingentes parallèles. C. R. Acad. Sci. Paris **244** (1957) 297–299
- [125] Sur les figures des courbes planes sans paratingentes parallèles. C. R. Acad. Sci. Paris **244** (1957) 440–442
- [135] Zur Verallgemeinerung des Rosenthalschen Struktursatzes für die ebenen dualisierbaren Kurven. (Wolfgang Krull zum 60. Geburtstag) J. Reine Angew. Math. **204** (1960) 11–29
- [142] Über die Existenz ordnungshomogener Bogen in der Ebene bezüglich vorgegebener Ordnungscharakteristiken. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **30** (1961) 195–209
- [153] Ein Kriterium für Bogensummen in der Ebene. (Kurt Reidemeister zum 70. Geburtstag gewidmet.) Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **27** (1964) 124–141
- [154] Verallgemeinerung eines Satzes über Konvexbogen. (Helmut Hasse zum 65. Geburtstag) J. Reine Angew. Math. **214/215** (1964) 419–431
- [155] Bemerkung über Maximalsekanten ebener Kontinua. Math. Ann. **155** (1964) 196–203
- [182] Über ordnungshomogene Bogen. (Georg Aumann zum 70. Geburtstag in Freundschaft und Dankbarkeit.) Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1976, 125–141
- [149] Zur Theorie der Kurven insbesondere von 2. und 3. Ordnung in topologisch ebenen projektiven Ebenen. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1962, 63–77
- [150] Zur Geometrie in topologisch ebenen hyperbolischen Ebenen. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1962, 163–166
- [157] Über ebene nicht beschränkte Bogen dritter Ordnung. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1964, 57–70
- [162] Bestimmung der nicht-beschränkten Bogen dritter Ordnung mit Doppelpunkt in projektiven Ebenen. (Georg Aumann zum sechzigsten Geburtstag in alter Freundschaft gewidmet.) Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1966, 143–162

- [164] (mit H. Künneth) Über die Gestalten der Kontinua vom schwachen Punktordnungswert Drei in topologisch projektiven Ebenen. I. (Unserem lieben Kollegen Georg Nöbeling zum sechzigsten Geburtstag gewidmet.) Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1967, 51–69
- [167] (mit H. Künneth) Über die Gestalten der Kontinua vom schwachen Punktordnungswert Drei in topologisch projektiven Ebenen. II. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1968, 157–182
- [173] (mit H. Künneth) Über sogenannte entartete Mengen bei Juelschen Problemen in der Ebene. Manuscripta Math. 3 (1970) 391–412
- [185] Über k -quasiordinäre Bogen. (Herrn J. Aczel zum 55. Geburtstag mit freundschaftlichen Wünschen.) Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1978, 71–83
- [176] (mit H. Künneth) Ordnungstreue Erweiterung ebener Bogen und Kurven vom schwachen Ordnungswert Drei. Akad. Wiss. Lit. Mainz Abh. Math.-Naturwiss. Kl. 1972, 65–101
- [178] (mit H. Künneth) Bestimmung der Bogen dritter Ordnung, insbesondere der ordnungstreu erweiterbaren, in topologisch projektiven Ebenen. J. Reine Angew. Math. 274/275 (1975) 391–406

Kurven und Kontinua im $\mathbb{R}^n$

- [57] Über den Begriff des Gebildes von endlich linearer Ordnung im n -dimensionalen Raum. Sitzungsber. Phys.-Med. Sozietät Erlangen 69 (1937) 241–246
- [88] Schwach ordnungsminimale Kontinua im projektiven $\mathbb{R}_n$. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1947, 75–76
- [92] Zur Struktur der Kompakta von endlicher Ordnung. Math. Ann. 120 (1948) 423–429
- [93] Schwache Ordnung im projektiven n -dimensionalen Raum $\mathbb{R}_n$. (Herrn Georg Faber zum siebenzigsten Geburtstag gewidmet.) Math. Ann. 120 (1948) 473–491
- [100] Kontinua von n -ter Ordnung im projektiven n -dimensionalen Raum. Math. Ann. 121 (1949) 41–51
- [103] (mit F. Denk) Über die Windungsmonotonie der Elementarbogen im $\mathbb{R}^{(n)}$. J. Reine Angew. Math. 187 (1950) 95–108
- [114] Zur Kennzeichnung der Kurven n -ter Ordnung im n -dimensionalen projektiven Raum. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1953, 289–299
- [123] Bestimmung der Kontinua im E_n ohne n richtungsabhängige Paratingenten ($n \geq 2$). (Herrn Georg Faber zum achtzigsten Geburtstag gewidmet.) Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1956, 295–327
- [127] Verallgemeinerung eines ordnungsgeometrischen Reduktionssatzes. (Herrn Hermann Künneth zum fünfundsechzigsten Geburtstag gewidmet.) J. Reine Angew. Math. 200 (1958) 170–181
- [130] Direkt-infinitesimalgeometrische Eigenschaften und lokale Ordnungswerte von Bogen. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1958, 1–8
- [138] (mit H. Künneth) Über einige allgemeine Sätze bei Juelschen Ordnungsproblemen. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1960, 17–25
- [146] Über ordnungshomogene Bogen im projektiven n -dimensionalen Raum bezüglich der Hyperebenen als Ordnungscharakteristiken. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 31, no. 5–6 (1962) 321–333
- [184] Differenzierbare ordnungshomogene Bogen im $\mathbb{R}^n$. (Georg Nöbeling zum 70. Geburtstag mit den freundschaftlichsten Wünschen.) Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1977, 167–181
- [187] (mit G. Nöbeling) Über die ordnungshomogenen Teile von Räumen, Flächen und Kurven. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1984, 25–36

Ordnungswerte und Approximation

- [47] Über ordnungsfeste Annäherung ebener Bogen. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl. 1934, 22 S.
- [71] Vollständigkeitsprobleme bei geometrischen Ordnungen. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1941, 57–66

- [83] Limessätze bei geometrischen Ordnungen. (Herrn Constantin Caratheodory zum siebenzigsten Geburtstag gewidmet.) Ann. Mat. Pura Appl. IV, Ser. 23 (1944) 123–148
- [72] Über eine Abrundung ebener Bogen. Sitzungsber. Phys.-Med. Sozietät Erlangen 72 (1940/41) 161–188
- [144] Über einige Probleme bei schwachen Komponenten- und Punktordnungswerten. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1961, 1–12
- [145] Ordnungsgeometrische Limessätze in kompakten Räumen. I. Mitteilung: Komponentenordnungswerte. (Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet.) Math. Z. 77 (1961) 81–93
- [161] Ordnungsgeometrische Limessätze in kompakten Räumen. II. Mitteilung: Punktordnungswerte. J. Reine Angew. Math. 224 (1966) 58–77

Singularitäten

- [66] (mit F. Denk) Über die Singularitäten reeller Bogen im R_n . J. Reine Angew. Math. 183 (1941) 69–91
- [68] Linear-ordnungssinguläre Punkte ebener und räumlicher Bogen. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1939, 253–263
- [70] Über ebene Bogen mit vorgeschriebenen Ordnungssingularitäten. Jber. d. Dt. Math.-Verein. 50 (1940) 256–269
- [75] Raumbogen mit Punkten von beliebig vorgegebenem linearen Ordnungswert. J. Reine Angew. Math. 184 (1942) 77–90
- [84] (mit F. Denk) Über gewöhnliche und signierte Permutationen. J. Reine Angew. Math. 186 (1949) 170–183
- [85] Über die kombinatorische Mindestordnung signierter Permutationen. J. Reine Angew. Math. 186 (1949) 221–229
- [169] Kennzeichnung der Punkte der k -Ordnung Drei auf ebenen Bogen. Bull. Soc. Math. Grèce, n. Ser. 10 (1969) 1–18

Ovale

- [73] Bemerkung über parabolisch konvexe und konkave Ovale. Sitzungsber. Phys.-Med. Sozietät Erlangen 72 (1940/41) 216–222
- [79] Über den Ovalsatz von Böhmer-Mukhopadhyaya. Math. Ann. 118 (1943) 629–635
- [82] Über Verallgemeinerungen des Böhmerschen und verwandter Ovalsätze Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. 15 (1943) 130–164
- [48] Verallgemeinerung eines Satzes der Herren Juel und Stenfors. Sitzungsber. Phys.-Med. Sozietät Erlangen 65 (1934) 279–282
- [107] Über eine Beziehung zwischen Ordnung und Singularitäten. (Seinem verehrten Lehrer Herrn Erhard Schmidt zum 75. Geburtstag gewidmet.) Math. Nachr. 4 (1951) 81–96
- [81] Bemerkungen über Konvexbogen. Monatsh. Math. Phys. 50 (1943) 339–367
- [101] Über einige affingeometrische Ovalsätze in der direkten Infinitesimalgeometrie. Math. Z. 51 (1949) 635–657

Scheitelsätze

- [89] Über eine Kennzeichnung der Ovale von der zyklischen Ordnung Vier. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1947, 73–74
- [94] Zur Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes und seiner Umkehrung. (Herrn Wilhelm Blaschke zum 60. Geburtstag gewidmet.) Ann. Mat. Pura Appl. IV 27 (1948) 293–320
- [95] Berichtigungen zu: Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes und seiner Umkehrung. Ann. Mat. Pura Appl. IV 28 (1949) 345
- [96] Zur geometrischen Kennzeichnung der Scheitel ebener Kurven. Arch. Math. 1 (1948) 102–105
- [139] Zur Verallgemeinerung des Zweischeitelsatzes bei ebenen Kurven. Arch. Math. 11 (1960) 294–297
- [140] Über einen Satz von Möbius. (Heinrich Tietze zum achtzigsten Geburtstag in herzlicher Verbundenheit.) Bull. Soc. Math. Grèce, n. Sér. 1 (1960) 19–42

- [148] Verallgemeinerung eines Satzes von Möbius. Bull. Soc. Math. Grèce, n. Sér. 3 (1962) 1–11
- [166] Bemerkungen zum Kneserschen Vierscheitelsatz. (Hermann Künneth zum fünfundsiebzigsten Geburtstag mit freundschaftlichen Wünschen gewidmet.) Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 31 (1967) 218–238
- [168] Ein allgemeiner Vierscheitelsatz für ebene Jordankurven. I. Mitteilung. Vorbereitende Betrachtungen. Erster Teil des Beweises. (Herrn Alexander Ostrowski zum 75. Geburtstag mit herzlichen Wünschen.) Aequationes Math. 2 (1969) 248–264
- [170] Über das Verhalten ebener Bogen in signierten, symmetrischen Scheiteln. Akad. Wiss. Lit. Mainz. Abh. Math.-Naturwiss. Kl. 1969, 15–46
- [171] Verallgemeinerung eines Satzes von R. C. Bose über die Anzahl der Schmiegekreise eines Ovals, die vom Oval umschlossen werden oder das Oval umschließen. (Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag.) J. Reine Angew. Math. 239/240 (1970) 339–352
- [172] Ein allgemeiner Vierscheitelsatz für ebene Jordankurven. II. Mitteilung: Beweis eines Existenzsatzes. Aequationes Math. 5 (1970) 294–311
- [174] Untere Schranken für die Anzahl der k -singulären Punkte ebener Bogen und Kurven. In: Theory of sets and topology. Collection papers in honour of Felix Hausdorff. Berlin 1972, 233–249
- [175] (mit H. Künneth) Bemerkungen zu Sätzen von Herrn S. B. Jackson über ebene Bogen von der zyklischen Ordnung Drei. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1971, 1–11
- [177] Vierscheitelsätze in der ebenen hyperbolischen Geometrie. Geom. Dedicata 1 (1973) 339–414
- [179] Über verallgemeinerte um- und einbeschriebene Schmiegekreise ebener Kurven. (Herrn Stanisław Gołąb zum siebenzigsten Geburtstag gewidmet.) Demonstratio Math. 6 (1973) 105–126
- [180] (mit H. Künneth) Über einen $2n$ -Scheitelsatz. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1974, 59–72
- [181] (mit H. Künneth) Über den $2n$ -Scheitelsatz von Herrn S. B. Jackson. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1974, 145–166
- [188] (mit G. Nöbeling) Über Anzahl und Verteilung der Scheitel ebener Bogen. Erscheint in: Geom. Dedicata

Streng konvexe Kurven

- [129] Streng-konvexe Bogen und Kurven in der direkten Infinitesimalgeometrie. (Herrn Hellmuth Kneser zum 60. Geburtstag gewidmet.) Arch. Math. 9 (1958) 110–116
- [137] Über einige Grundeigenschaften der Bogen ohne $(n-2, k)$ -Sekanten im projektiven P_n ($n \leq k$). Math. Ann. 139 (1959) 151–170
- [141] Lokal-reguläre Bogen ohne $(n-2, k)$ -Sekanten im projektiven P_n ($n \leq k$). Math. Ann. 142 (1961) 225–243
- [143] Untersuchungen zur M. Barnerschen Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes auf Raumkurven. Math. Ann. 144 (1961) 1–16

Interpolation und Ordnungscharakteristiken

- [158] Verallgemeinerung zweier Sätze über interpolatorische Funktionensysteme. Akad. Wiss. Lit. Mainz. Abh. Math.-Naturwiss. Kl. 1965, Nr. 4, 239–255
- [159] Über die Gleichwertigkeit zweier Axiomensysteme für Ordnungscharakteristiken in der Ebene. Math. Ann. 164 (1966) 42–50
- [160] Zur Verallgemeinerung der konvexen Funktionen und Kurven. Bull. Soc. Math. Grèce, n. Sér. 6 (1965) 1–26
- [165] (mit H. Künneth) Über Ketten von Systemen von Ordnungscharakteristiken. Akad. Wiss. Lit. Mainz. Abh. Math.-Naturwiss. Kl. 1967, Nr. 5, 71–94

Überblicksartikel

- [65] Geometrische Ordnungen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. 49 (1939) 190–207
- [91] Theorie der geometrischen Ordnungen. Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939–1946, Band 2, Reine Mathematik, Teil II Wiesbaden 1948, 197–215

- [121] Sur quelques problèmes de la théorie des ordres géométriques. Colloque sur les questions de réalité en géométrie, tenu à Liège en 1955 (Liège, Paris 1956), 59–76
- [134] Ordnungs- und infinitesimalgeometrische Probleme. Versuch einer Klassifikation. Portugal. Math. **18** (1959) 167–175
- [151] Aus der Theorie der geometrischen Ordnungen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **65** (1963) 148–186

VII Verschiedenes

- [15] (mit E. Hilb) Über die Transformation Liouville'scher Mannigfaltigkeiten. Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. 1924, 77–79
- [19] (mit E. Hilb) Über Liouvillesche Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **24** (1925) 105–124
- [23] Über einen Satz von E. Steinitz. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1928, 359–365
- [51] Anhang zu K. von Angerer „Berechnungen über den Einfluß der lebensverlängernden Therapie auf die Sterbeziffern bei Krankheiten mit hoher Letalität.“ Archiv für Hygiene und Bakteriologie **114** (1935) 285–286
- [52] Zur Reinhardt'schen Kennzeichnung der Kreisbogen. J. Reine Angew. Math. **174** (1936) 185–187
- [69] Über eine Kennzeichnung der Kugel. (Herrn Heinrich Tietze gewidmet.) Jber. d. Dt. Math.-Verein. **50** (1940) 113–120
- [67] Bemerkung zu einem Satz von Herrn G. Van der Lyn. Sitzungsber. Phys.-Med. Sozietät Erlangen **71** (1939) 349–352
- [90] Über die Paare ähnlicher Kegelschnitte in Kegelschnittbüscheln. (Seinem verehrten Lehrer Herrn Georg Rost zum goldenen Doktorjubiläum am 10. 11. 1942 gewidmet.) Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1947, 81–114
- [152] Bemerkung über gewisse Systeme von Kompakten. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **32**, no. 7–8 (1963) 449–455
- [37] Emil Hilb. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **42** (1933) 183–198
- [136] Arthur Rosenthal †. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **63** (1960) 89–96
- [183] Hermann Künneht zum Gedenken. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **78** (1976) 61–66

VIII Lehrbücher und Monographien

Einführung in die Algebra

Erster und zweiter Teil, XV + 367 Seiten und XIII + 296 Seiten
Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1929

- 2. Auflage des ersten Teils: 1952
- 2. Auflage des zweiten Teils: 1954
- 3. Auflage des ersten Teils: 1956

Felix Klein, Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion

herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von Otto Haupt,
IX + 344 Seiten
Julius Springer, Berlin 1933
Nachdruck, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1981

Differential- und Integralrechnung

Unter besonderer Berücksichtigung neuerer Ergebnisse

Unter Mitarbeit von G. Aumann

I. Band: Einführung in die reelle Analysis, 196 Seiten

II. Band: Differentialrechnung, 168 Seiten

III. Band: Integralrechnung, 183 Seiten

W. de Gruyter, Berlin 1938

Nachdruck aller drei Bände bei J. W. Edwards, Ann Arbor, Michigan, USA,
1944

Zweite, völlig neu bearbeitete Auflage

Unter Mitwirkung von Ch. Y. Pauc

I. Band: VIII + 218 Seiten, 1948

II. Band: 210 Seiten, 1950

III. Band: XI + 320 Seiten, 1955

W. de Gruyter, Berlin

Georg Aumann und Otto Haupt, Einführung in die reelle Analysis

3., völlig neu gestaltete Auflage des Werkes

Haupt-Aumann-Pauc, Differential- und Integralrechnung

I: Funktionen einer reellen Veränderlichen, 320 Seiten, 1974

II: Differentialrechnung der Funktionen mehrerer Veränderlicher, 314 Seiten, 1979

III: Integralrechnung der Funktionen mehrerer Veränderlicher, 298 Seiten, 1983

W. de Gruyter, Berlin – New York

Otto Haupt und Hermann Künnet, Geometrische Ordnungen

Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1967, 429 Seiten

Prof. Dr. M. Barner

Prof. Dr. F. Flohr

Mathematisches Institut

der Albert-Ludwigs-Universität

Hebelstr. 29

7800 Freiburg i. Br.

(Eingegangen 17. 11. 1986)

Schlichte Funktionen nach de Branges

W. K. Hayman, Heslington, York

1 Einführung

Es sei S die Klasse der Funktionen

$$(1.1) \quad f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n,$$

die im Einheitskreise Δ analytisch und schlicht sind. Unlängst bewies de Branges [1985] die Vermutung von Bieberbach [1916], daß für alle $n \geq 2$ die Ungleichung

$$(1.2) \quad |a_n| \leq n$$

gilt, mit dem Gleichheitszeichen nur für die Koebe-Funktionen

$$(1.3) \quad f(z) = z(1 - ze^{i\theta})^{-2} = z + 2z^2 e^{i\theta} + 3z^3 e^{2i\theta} + \dots$$

Dies war wohl das berühmteste bis dahin offene Problem in der klassischen Funktionentheorie. Vereinfachungen sind von Emel'yanov, Milin [1984] und Fitzgerald und Pommerenke [1985] gegeben worden. Ich möchte anfänglich die Geschichte dieses sensationellen Resultates kurz beschreiben. Bieberbach [1916] selbst bewies $|a_2| \leq 2$. Löwner [1923] bewies $|a_3| \leq 3$ mit einer parametrischen Methode, die auch bei de Branges' Beweis eine fundamentale Rolle spielt. Mit der Schifferschen Variationsmethode bewiesen Garabedian und Schiffer [1955] $|a_4| \leq 4$. Etwa zur gleichen Zeit bewies ich [1955], daß (1.2) für festes f und $n > n_0(f)$ gilt. Schließlich bewiesen Pedersen [1968] und Ozawa [1969] (1.2) für $n = 6$ und Pedersen und Schiffer [1972] für $n = 5$.

Um de Branges' Beweis etwas zu erläutern, müssen nun noch einige verwandte Resultate und Vermutungen erwähnt werden. Sei $f(z) \in S$. Wir schreiben

$$(1.4) \quad \log \left(\frac{f(z)}{z} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} 2c_k z^k$$

und für $0 < \lambda < \infty$

$$(1.5) \quad \left(\frac{f(z)}{z} \right)^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda) z^n.$$

Für $\lambda = 1/k$, wo k eine natürliche Zahl ist, erhalten wir die sogenannten k -symme-

trischen Funktionen in S:

$$(1.6) \quad f(z^k)^{1/k} = \sum_0^{\infty} a_n(1/k) z^{nk+1}.$$

Insbesondere erhalten wir für $k = 2$ die ungeraden schlichten Funktionen. Zwar zeigten Fekete und Szegő [1933] schon, daß das analoge Resultat zu (1.2) für die $a_2(1/2)$ nicht mehr richtig ist, und ihre Überlegung überträgt sich auf $a_2(\lambda)$ für $\lambda < 1$. Aber Robertson [1936] stellte die Vermutung

$$(1.7) \quad \sum_0^n |a_n(1/2)|^2 \leq n + 1$$

auf, die Bieberbachs Vermutung enthält in einer verallgemeinerten Form, nämlich die sogenannte Rogosinski-Vermutung [1943], daß (1.2) gültig ist für jede Funktion, die einer Funktion in S subordiniert ist.

2 Die Milin-Lebedevschen Ungleichungen

Ein wichtiger Schritt wurde von Milin [1971] und Lebedev unternommen. Wir betrachten eine formale Potenzreihe

$$(2.1) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu} z^{\nu}$$

und ihr Exponential

$$(2.2) \quad \sum_0^{\infty} \beta_{\nu} z^{\nu} = \exp \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu} z^{\nu} \right\}.$$

Ferner definieren wir die Binomialkoeffizienten $d_n(\lambda)$ durch

$$(2.3) \quad (1-z)^{-\lambda} = \sum_0^{\infty} d_n(\lambda) z^n.$$

Dann gelten die beiden Ungleichungen [Milin (1971) (2.33) S. 48]

$$(2.4) \quad \sum_0^N \frac{|\beta_{\nu}|^2}{d_{\nu}(\lambda)} \leq d_N(\lambda + 1) \exp \left\{ \frac{\lambda}{d_N(\lambda + 1)} \sum_{k=1}^N \left(\frac{k |\alpha_k|^2}{\lambda^2} - \frac{1}{k} \right) d_{N-k}(\lambda + 1) \right\}$$

und [Milin (2.37) S. 50]

$$(2.5) \quad |\beta_N| \leq d_N(\lambda) \exp \left\{ \frac{\lambda}{2d_N(\lambda)} \sum_{k=1}^N \left(\frac{k |\alpha_k|^2}{\lambda^2} - \frac{1}{k} \right) d_{N-k}(\lambda) \right\}.$$

Das Gleichheitszeichen besteht in (2.4), (2.5) nur für $\alpha_{\nu} = \lambda e^{i\nu\theta}/\nu$, $\beta_{\nu} = d_{\nu}(\lambda) e^{i\nu\theta}$, $\nu = 1, 2, \dots, N$. Setzen wir nun $\alpha_{\nu} = 2\lambda c_{\nu}$, $\beta_{\nu} = a_{\nu}(\lambda)$ und benützen wir (2.4), (2.5) mit 2λ statt λ , so erhalten wir aus (1.9), (1.5), (2.4) und (2.5)

$$(2.6) \quad \sum_{\nu=0}^N \frac{|a_{\nu}(\lambda)|^2}{d_{\nu}(2\lambda)} \leq d_N(2\lambda + 1) \exp \left\{ \frac{2\lambda}{d_N(2\lambda + 1)} \sum_{k=1}^N \left(k |c_k|^2 - \frac{1}{k} \right) d_{N-k}(2\lambda + 1) \right\}$$

und

$$(2.7) \quad |a_N(\lambda)| \leq d_N(2\lambda) \exp \left\{ \frac{\lambda}{d_N(2\lambda)} \sum_{k=1}^N \left(k |c_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \cdot d_{N-k}(2\lambda) \right\}.$$

Der Beweis von (1.2) und (1.6) folgt nun sofort aus:

Satz 1 von de Branges [1985] *Es sei $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N+1}$ eine Folge, so daß*

$$(2.8) \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{N+1} = 0$$

und

$$(2.9) \quad \sigma_k - \sigma_{k+1} \geq \sigma_{k+1} - \sigma_{k+2}, \quad 1 \leq k \leq N-1.$$

Dann gilt

$$(2.10) \quad \sum_{k=1}^N \left(k |c_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \sigma_k \leq 0,$$

wo c_k durch (1.4) definiert ist.

Wie de Branges selber bemerkt, folgt die allgemeine Form seines Satzes direkt aus dem Spezialfall $\sigma_k = N+1-k$, nämlich

$$(2.11) \quad \sum_{k=1}^N (N+1-k) \left(k |c_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \leq 0.$$

Letzteres ist die sogenannte Milinsche Vermutung. Setzen wir $\lambda = 1/2$ in (2.6) und $\lambda = 1$ in (2.7), so erhalten wir aus (2.11) und $d_n(2) = n+1$ die Vermutungen (1.7) und (1.2). Ferner ist es leicht zu sehen, daß die Bedingungen (2.8) und (2.9) auch für

$$\sigma_k = d_{N-k}(\mu), \quad \mu \geq 2$$

erfüllt sind. Setzen wir dies in (2.6) und (2.7) ein, so erhalten wir

Satz 2 [Hayman und Hummel 1986] *Es gelten für $N = 1, 2, \dots$*

$$(2.12) \quad \sum_{n=0}^N \frac{|a_n(\lambda)|^2}{d_n(2\lambda)} \leq d_N(2\lambda + 1), \quad \lambda \geq \frac{1}{2},$$

und

$$(2.13) \quad |a_N(\lambda)| \leq d_N(2\lambda), \quad \lambda \geq 1.$$

Gleichheit besteht in allen Fällen nur für die Koebe-Funktionen (1.3). Wie schon oben bemerkt wurde, ist (2.13) für $N = 2$ und $\lambda < 1$ nicht mehr richtig. Die Bemerkung, daß (2.12) und (2.13) aus (2.4), (2.5) und (2.10) folgen, wurden auch unabhängig von anderen, z. B. Grinzipan und Aharonov gemacht.

3 Das Verhalten der $a_n(\lambda)$

Obwohl (2.13) für $\lambda < 1$ nicht mehr richtig ist, bleibt die entsprechende Größenordnung

$$(3.1) \quad |a_n(\lambda)| \leq A(\lambda) n^{2\lambda-1}$$

doch noch für kleinere λ bestehen. Man findet dieses Resultat z. B. in [Hayman 1958, Satz 3.3, S. 46] für $\lambda > 1/4$. Hieraus folgen insbesondere die klassischen Resultate [Littlewood und Paley 1932]

$$(3.2) \quad \left| a_n \left(\frac{1}{2} \right) \right| < A_2$$

und [Levin 1934]

$$(3.3) \quad \left| a_n \left(\frac{1}{3} \right) \right| < A_3 n^{-1/3}$$

für die Koeffizienten der ungeraden und 3-symmetrischen Funktionen. Erst kürzlich konnte Baernstein [1986] (3.1) auf $\lambda = 1/4$ und sogar auf $\lambda > 1/4 - \delta$ verallgemeinern, wo δ eine kleine positive Zahl ist. Hiermit bewies er die sogenannte Szegő-Vermutung (siehe Levin [1934])

$$(3.4) \quad \left| a_n \left(\frac{1}{k} \right) \right| < A_k n^{2/k-1}$$

für $k = 4$. Die Vermutung ist also für $k = 2, 3, 4$ bewiesen. Andererseits zeigt ein Beispiel von Pommerenke [1975, S. 38], daß (3.4) für $k \geq 12$ falsch ist. Für $5 \leq k \leq 11$ ist die Vermutung aber noch offen.

Obwohl (2.13) für $\lambda < 1$ falsch ist, hat nach (3.1) $a_n(\lambda)$ doch die richtige Größenordnung für $\lambda > 1/4 - \delta$. Wir können noch zwei asymptotische Resultate erwähnen. Erstens existiert für eine feste Funktion $f \in S$ und $\lambda > 1/4$ der Grenzwert [Hayman 1958, S. 112]

$$\alpha(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|a_N(\lambda)|}{d_N(2\lambda)}$$

und $\alpha(\lambda) < 1$ außer für die Koebe-Funktionen (1.3). Für diese besteht in (2.13) Gleichheit für alle λ und N . Also ist auf alle Fälle (2.13) für festes f und genügend große N richtig, und mit Baernsteins Methode kann man dies wohl auch für $\lambda > 1/4 - \delta$ beweisen.

Ferner sei

$$A_n(\lambda) = \sup_{f \in S} |a_n(\lambda)|.$$

Nun bewiesen Hayman und Hummel [1986] kürzlich

Satz 3 Für $1/4 < \lambda < 1$ existiert der Grenzwert

$$K(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n(\lambda)}{d_n(2\lambda)}$$

und $1 \leq K(\lambda) < \infty$. Ist $1/4 < \lambda < 0,4998$, so ist $K(\lambda) > 1$.

Also sind, für $\lambda < 0,4998$, $A_n(\lambda)$ und $d_n(2\lambda)$ nicht mehr asymptotisch gleich. Dies ist zum Beispiel für die 3- und 4-symmetrischen Funktionen ($\lambda = 1/3, 1/4$) der Fall. Wir vermuten, daß $K(\lambda) = 1$ noch für $1/2 \leq \lambda < 1$ aber nicht mehr für $\lambda < 1/2$ gilt und daß der Grenzwert für $0 < \lambda < \lambda_0$ unendlich ist und für $\lambda_0 < \lambda < 1/2$ existiert und größer als Eins ist. Für $1/4 - \delta < \lambda \leq 1/4$ folgt dies wohl aus Baernsteins

Methode. Letztere ist übrigens kürzlich von Pommerenke [1985a] noch verbessert worden, so daß δ etwas kleiner als $1/100$ gewählt werden kann. Will man aber Szegös Vermutung für $k = 5$ beweisen, so braucht man $\delta = 1/20$.

Ein weiteres Resultat von Milin [1971] soll hier noch erwähnt werden. Er bewies

Satz 4 *Es gilt*

$$\sum_1^N \left(k |c_k|^2 - \frac{1}{k} \right) < \delta, \quad \delta < 0,312.$$

Mit $\delta = 0$ ist Satz 4 sicher falsch, denn hieraus würde (2.13) mit $\lambda = 1/2$ folgen. Immerhin schloß Milin [1971] aus Satz 4 [siehe Pommerenke 1975, S. 86]

$$\left| a_n \left(\frac{1}{2} \right) \right| < 1,17.$$

Wir bemerken, daß aus (2.7) und Satz 4 mit $\delta = \delta_N$, und

$$\delta_N \rightarrow 0, \quad \text{wenn } N \rightarrow \infty,$$

unsere Vermutung $K(\lambda) = 1$, $1/2 \leq \lambda < 1$ folgen würde.

4 Brennans Vermutung

Es sei $w = f(z)$ eine Funktion aus S und $z = \phi(w)$ ihre Umkehrung, die also ein einfach zusammenhängendes Gebiet D auf den Einheitskreis Δ abbildet. Brennan [1978] fragt, für welche Werte von p das Flächenintegral

$$(4.1) \quad \int \int_D |\phi'(w)|^p |dw|^2 = \int \int_\Delta |f'(z)|^{2-p} |dz|^2$$

bestimmt konvergiert. Betrachtet man die Koebe-Funktion (1.3), so sieht man, daß dies für $p \leq 4/3$ und $p \geq 4$ bestimmt nicht mehr der Fall sein braucht. Brennans Vermutung ist, daß das Integral (4.1) für die übrigen Werte von p , nämlich für $4/3 < p < 4$ tatsächlich konvergiert. Für $4/3 < p < 3$ folgt dies in der Tat unschwer aus klassischen Abschätzungen. Der Fall $p \geq 3$ ist schwieriger. Brennan bewies, daß seine Vermutung immerhin noch für $3 \leq p < 3 + \delta$ gilt, wo δ eine unbestimmte kleine Zahl ist, und Pommerenke [1985a] bewies die Vermutung mit $\delta = 0,399$. Ebenfalls zeigte er [1985b], daß die Konvergenz von (4.1) mit $4/3 < p < 4$ äquivalent ist mit

$$\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^{-\lambda} d\theta = O(1-r)^{-1-\epsilon}, \quad r \rightarrow 1$$

für $0 < \lambda < 2$, und jedes $f \in S$.

Hier ist noch zu sagen, daß über die Größenordnung von Koeffizienten und Mitteln von negativen Potenzen von f' bis jetzt relativ wenig bekannt ist. Ruscheweyh [1978] bewies, daß, wenn f close-to-convex ist, $1/f'$ beschränkte Koeffizienten f_n besitzt, aber Gnuschke-Hauschild und Pommerenke [1985] zeigten, daß dies für allgemeine $f \in S$ nicht mehr der Fall sein braucht und, daß sogar

$$f_n \neq O(n^{0,0642})$$

für eine gewisse Funktion $f \in S$ gilt.

5 Randverzerrung und die Resultate von Makarov

Es sei D ein Jordan-Gebiet mit Rand Γ und $f(z)$ eine konforme Abbildung der Einheitskreisscheibe Δ auf D und daher auch des Einheitskreises $C: |z| = 1$ auf Γ . Wie können wir die Größen von Punktmengen E auf C und ihren entsprechenden Abbildungsmengen $F = f(E)$ auf Γ vergleichen? Es bedeute $\alpha(E)$ die Hausdorff-Dimension einer Punktmenge E .

Offenbar kann $\alpha(\Gamma)$ eine beliebige Zahl mit $1 \leq \alpha(\Gamma) \leq 2$ sein. Hieraus schließen wir sofort, daß $\alpha(F)$ bedeutend größer als $\alpha(E)$ sein kann. Es ist viel weniger klar, ob $\alpha(F) < \alpha(E)$ möglich ist. Carleson [1973] bewies auf alle Fälle, daß, wenn E positives lineares Maß hat,

$$\alpha(F) > \frac{1}{2} + \delta$$

gilt, wo δ eine positive absolute Konstante ist. Dieses Resultat ist von Makarov [1985] in verblüffender Weise verschärft worden. Es sei weiter E eine Menge von positivem linearen Maß auf C . Dann hat die Bildmenge F bestimmt positives Hausdorff-Maß entsprechend der Hausdorff-Funktion

$$\phi(t) = t \exp \left\{ C \sqrt{\log \frac{1}{t} \log \log \log \frac{1}{t}} \right\},$$

wenn C eine genügend große Konstante ist, aber nicht immer, wenn C eine kleine Konstante ist. Insbesondere gilt auf alle Fälle $\alpha(F) \geq 1$.

Ferner zeigte Makarov, daß für ein allgemeines einfach zusammenhängendes Gebiet D , das harmonische Maß von D immer auf einer Randmenge F konzentriert ist mit $\alpha(F) = 1$. Pommerenke [1986] hat sogar bewiesen, daß F ein σ -endliches lineares Maß hat.

Für mehrfachzusammenhängende Gebiete kann die Situation anders aussehen. Carleson [1985] bewies, daß, wenn D das Komplement einer zweidimensionalen Cantor-Menge der Dimension 1 ist, das harmonische Maß D auf einer Menge der Dimension kleiner als Eins konzentriert ist.

Ich hoffe, gezeigt zu haben, daß das Gebiet der konformen Abbildung und der schlichten Funktionen auch nach de Branges noch viele interessante Probleme enthält. Auf einige von diesen konnte ich hinweisen und ich konzentrierte mich hier hauptsächlich auf Arbeiten, die in den letzten 12 Monaten entstanden und zum großen Teil noch nicht veröffentlicht sind. Es zeigt sich, daß seit dem Satz von de Branges überall neues Leben auch in ganz anderen Richtungen der schlichten Funktionen und konformen Abbildungen gekommen ist.

Literaturverzeichnis

- [1] B a e r n s t e i n , A.: Coefficients of univalent functions with restricted maximum modulus. *Complex Variables* **5** (1986) 225–236
- [2] B i e b e r b a c h , L.: Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. *S.-B. preuss. Akad. d. Wiss.* **138** (1916) 940–955

- [3] Brennan, J. E.: The integrability of the derivative in conformal mapping. J. London Math. Soc. (2) **18** (1978) 261–272
- [4] Carleson, L.: On the distortion of sets on a Jordan curve under conformal mapping. Duke Math. J. **40** (1973) 547–559
- [5] Carleson, L.: On the support of harmonic measure for sets of Cantor type. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. **10** (1985) 113–123
- [6] de Branges, L.: A proof of the Bieberbach conjecture. Acta Math. **154** (1985) 137–152
- [7] Fekete, M.; Szegő, G.: Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen. J. London Math. Soc. **8** (1933) 85–89
- [8] Fitzgerald, C.; Pommerenke, Ch.: The de Branges theorem on univalent functions. Trans. Amer. Math. Soc. (1985)
- [9] Garabedian, P. R.; Schiffer, M.: A coefficient inequality for schlicht functions. Ann. Math. (2) **61** (1955) 116–136
- [10] Gnuschke-Hauschild, D.; Pommerenke, Ch.: On Bloch functions and gap series. (2) **90** (1985) 683–690
- [11] Hayman, W. K.: The asymptotic behaviour of p-valent functions. Proc. London Math. Soc. (3) **5** (1955) 257–284
- [12] Hayman, W. K.: Multivalent functions. Cambridge University Press, 1958
- [13] Hayman, W. K.; Hummel, J. A.: Coefficients of powers of univalent functions. Complex Variables (1986)
- [14] Levin, V. I.: Ein Beitrag zum Koeffizientenproblem der schlichten Funktionen. Math. Z. **38** (1934) 306–311
- [15] Littlewood, J. E.; Paley, R. E. A. C.: A proof that an odd schlicht function has bounded coefficients. J. London Math. Soc. **7** (1932) 167–169
- [16] Löwner, K.: Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. Math. Ann. **89** (1923) 103–121
- [17] Makarov, N. G.: On the distortion of boundary sets under conformal mappings. Proc. London Math. Soc. (3) **51** (1985) 369–384
- [18] Milin, I. M.: Univalent functions and orthonormal systems (Russisch). (Izd. Nauka, Moskau 1971)
- [19] Milin, I. M.: De Branges' Beweis von Bieberbachs Vermutung (Russisch). Preprint (1984)
- [20] Ozawa, M.: On the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient. Kodai Math. Sem. Rep. **21** (1969) 97–128
- [21] Pedersen, R. N.: A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient. Arch. Rational Mech. Anal. **31** (1968) 331–351
- [22] Pedersen, R. N.; Schiffer, M.: A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient. Arch. Rational Mech. Anal. **45** (1972) 161–193
- [23] Pommerenke, Ch.: Univalent functions. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht 1975
- [24] Pommerenke, Ch.: On the integral means of the derivative of a univalent function. J. London Math. Soc. (2) **32** (1985a) 254–258
- [25] Pommerenke, Ch.: On the integral means of the derivative of a univalent function. II. Bull. London Math. Soc. **17** (1985b) 565–570
- [26] Pommerenke, Ch.: On conformal mapping and linear measure. Preprint TU Berlin 1986
- [27] Robertson, M. S.: A remark on the odd schlicht functions. Bull. Amer. Math. Soc. **42** (1936) 366–370
- [28] Rogosinski, W. W.: On the coefficients of subordinate functions. Proc. London Math. Soc. **48** (1943) 48–82
- [29] Ruscheweyh, S.: Some convexity and convolution theorems for analytic functions. Math. Ann. **238** (1978) 217–228

W. K. Hayman
University of York
Heslington, York YO1 5DD
England

(Eingegangen 28. 1. 1986)

Uniform Domains and the Ubiquitous Quasidisk¹⁾

F. W. Gehring²⁾, Ann Arbor

Introduction

Throughout this article D and D' will denote domains in euclidean n -space $\mathbb{R}^n$ or its one point compactification $\bar{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. A homeomorphism $f : D \rightarrow D'$ is said to be K -quasiconformal if for each $x \in D \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$,

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{L(x, r)}{\ell(x, r)} \leq K$$

where $L(x, r) = \max_{|x-y|=r} |f(x) - f(y)|$, $\ell(x, r) = \min_{|x-y|=r} |f(x) - f(y)|$.

A domain $D \subset \bar{\mathbb{R}}^2$ is a K -quasidisk if it is the image of an open euclidean disk under a K -quasiconformal self mapping of $\bar{\mathbb{R}}^2$.

From the definition it follows that a quasidisk D is a Jordan domain in the extended complex plane $\bar{\mathbb{R}}^2$. Conversely it is not difficult to show that a Jordan domain $D \subset \bar{\mathbb{R}}^2$ with smooth boundary $\partial D \subset \mathbb{R}^2$ is a quasidisk. On the other hand, the boundary of a quasidisk D may be quite wild. Indeed for each $1 \leq \alpha < 2$ it is not difficult to construct a quasidisk $D \subset \mathbb{R}^2$ for which ∂D has Hausdorff dimension equal to α [GV2]. In view of this it is quite surprising that this class of Jordan domains admits the following simple characterization [A1].

Theorem 1 *A Jordan domain $D \subset \bar{\mathbb{R}}^2$ is a K -quasidisk if and only if there exists a constant c such that for each pair of points z_1, z_2 in $\partial D \setminus \{\infty\}$*

$$\min_{j=1,2} \text{dia}(C_j) \leq c|z_1 - z_2|,$$

where C_1 and C_2 denote the components of $\partial D \setminus \{z_1, z_2\}$.

Quasidisks arise naturally in complex analysis, particularly in the study of Teichmüller spaces. However, recently it has become clear that they play an important role in other fields including harmonic analysis, partial differential equations, approximation theory and elasticity. Some of the more interesting proper-

¹⁾ This is a slightly expanded version of a lecture delivered to the Deutsche Mathematische Vereinigung in September 1984.

²⁾ This research was supported in part by grants from the Humboldt Foundation and the U.S. National Science Foundation.

ties of quasidisks are shared by a closely related class of domains in $\mathbb{R}^n$ which have many connections with the corresponding areas of mathematics.

The purpose of this lecture is to point out some of these relations. We begin by introducing eight different function theoretic properties concerned with the extendability and injectivity of various classes of functions defined on domains in $\mathbb{R}^n$. Next we consider six geometric properties for such domains and then conclude by indicating how these concepts are connected. It turns out that when $n = 2$, most of them can be used to characterize quasidisks.

Extension Properties

Suppose that D is a domain in $\mathbb{R}^n$ or $\bar{\mathbb{R}}^n$, that F denotes a class of functions defined on domains in $\mathbb{R}^n$ or in $\bar{\mathbb{R}}^n$ and that $F(D)$ is the subclass of $f \in F$ defined on D . We say that D is an *extension domain* for the class F if each function in $F(D)$ is the restriction to D of a function in $F(\mathbb{R}^n)$ or in $F(\bar{\mathbb{R}}^n)$. We consider here extension domains for four different classes F .

1 Lip_α extension domains

Suppose that $0 < \alpha \leq 1$ and that u is a function defined in a domain D in $\mathbb{R}^n$ with values in $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Then u is said to be *Lipschitz continuous with exponent α* , or in $\text{Lip}_\alpha(D)$, if

$$(1.1) \quad \|u\|_{\text{Lip}_\alpha(D)} = \sup_{x, y \in D} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

The function u is said to be in $\text{loc Lip}_\alpha(D)$ if

$$(1.2) \quad \|u\|_{\text{loc Lip}_\alpha(D)} = \sup_B \|u\|_{\text{Lip}_\alpha(B)} < \infty,$$

where the supremum is taken over all balls $B \subset D$.

The class loc Lip_α arises naturally when relating the Hölder continuity and rate of growth of the gradient of a smooth or Sobolev function in a domain D . For example, if f is analytic in $D \subset \mathbb{R}^2$, then a theorem due to Hardy and Littlewood [HL] implies that $f \in \text{loc Lip}_\alpha(D)$ if and only if there exists a constant c such that

$$(1.3) \quad |f'(z)| \leq c \text{dist}(z, \partial D)^{\alpha-1}$$

for $z \in D$.

It is well known that for each domain D and each function $u \in \text{Lip}_\alpha(D)$ there exists a function $v \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ with $u = v|_D$ and

$$(1.4) \quad \|v\|_{\text{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq c_m \|u\|_{\text{Lip}_\alpha(D)},$$

where c_m is a constant which depends only on m [GM1], [S]. Hence every domain D is an extension domain for Lip_α . This is not true for the class loc Lip_α . For example when $0 < \alpha < 1$, $u(x) = |x|$ is in $\text{loc Lip}_\alpha(D)$ in the infinite cylinder

$$(1.5) \quad D = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : |x_1| < \infty, x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1\},$$

while u has no extension to a function $v \in \text{loc Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$. On the other hand, D obviously has this property if D is a ball or half space and we are led to the following question.

Problem *Characterize the domains D in $\mathbb{R}^n$ which have the loc Lip_α extension property.*

A category argument implies that D is an extension domain for loc Lip_α if and only if there exists a constant $c \in [1, \infty)$ such that

$$(1.6) \quad \|u\|_{\text{Lip}_\alpha(D)} \leq c \|u\|_{\text{loc Lip}_\alpha(D)}$$

for each $u \in \text{loc Lip}_\alpha(D)$. Hence the class of domains which have the extension property for loc Lip_α coincides with the class of Lip_α -extension domains studied in [GM1], [La]. There a geometric condition is given which is necessary and sufficient for a domain D to have this property.

2 BMO extension domains

A function u is said to be of *bounded mean oscillation* in a domain $D \subset \mathbb{R}^n$, or in $\text{BMO}(D)$, if u is locally integrable in D and if

$$(2.1) \quad \|u\|_{\text{BMO}(D)} = \sup_B \frac{1}{m(B)} \int_B |u - u_B| dm < \infty,$$

where the supremum is taken over all balls B with $\bar{B} \subset D$ and

$$(2.2) \quad u_B = \frac{1}{m(B)} \int_B u dm$$

[RR], [St]. It is easy to check that

$$(2.3) \quad L^\infty(D) \subset \text{BMO}(D)$$

and that $u(x) = \log |x - x_0|$ lies in $\text{BMO}(D) \setminus L^\infty(D)$ whenever $x_0 \in D$. When D is bounded,

$$(2.4) \quad \text{Lip}_\beta(D) \subset \text{Lip}_\alpha(D) \subset \text{BMO}(D)$$

for all $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ and $\text{BMO}(D)$ may be viewed as a some kind of replacement for $\text{Lip}_0(D)$; see [Jo1].

The class BMO was introduced by John and Nirenberg in 1961 in connection with John's work in elasticity [JN], [J1]. Later Fefferman showed this class is the dual of the Hardy class H^1 settling a long standing problem in harmonic analysis [F]. Recent work has revealed close connections between BMO and many other branches of analysis including singular integrals, quasiconformal mappings and partial differential equations [Ba], [Ga], [Mo], [RR], [S], [T].

Though every domain D has the extension property for the classes L^∞ and Lip_α in (2.3) and (2.4), the domain in (1.5) is not an extension domain for BMO . On the other hand, a ball or half space D has this property [RR].

Problem *Characterize the domains D in $\mathbb{R}^n$ which have the BMO extension property.*

A complete solution is given in [Jo1]. For an alternative characterization see [GO].

3 Sobolev extension domains

A function u is said to be in the Sobolev class $W_k^p(D)$, where $D \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq p$, $k < \infty$ and k is an integer, if u has distribution derivatives,

$$(3.1) \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

in D for $|\alpha| \leq k$ and if

$$(3.2) \quad \|u\|_{W_k^p(D)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(D)} < \infty.$$

We see from (3.2) that

$$(3.3) \quad C_0^k(D) \subset W_k^p(D) \subset L^p(D),$$

where $C_0^k(D)$ denotes the class of functions which have continuous k -th derivatives and compact support in D .

Every domain D has the extension property for the classes C_0^k and L^p in (3.3); this is not true for the class W_k^p . However, a ball or half space does have this property.

Problem *Characterize the domains D in $\mathbb{R}^n$ which have the Sobolev extension property.*

A general sufficient condition is obtained in [Jo2]. This condition is also necessary for the case where $n = 2$ and D is finitely connected. See also [C], [S].

4 Quasiconformal extension domains

For each domain D in $\overline{\mathbb{R}^n}$ we let $QC(D)$ denote the family of self quasiconformal mappings of D . If D is a ball or half space, then each $f \in QC(D)$ can be extended by means of reflection to obtain a mapping $g \in QC(\overline{\mathbb{R}^n})$. Thus each ball or half space is a *quasiconformal extension domain*. Simple examples show that this is not true for all domains D . In fact when $n = 2$, a Jordan domain D has this property if and only if D is a quasidisk [Ri].

Problem *Characterize the domains D in $\mathbb{R}^n$ which have the quasiconformal extension property.*

See [GM2] for various geometric conditions related to this property.

Injectivity Properties

Suppose that F is a family of local homeomorphisms f defined in a domain D in $\mathbb{R}^n$. What conditions on F and D allow one to assert that each $f \in F$ is injective in D ? We consider this question for four different classes of local homeomorphisms.

5 Local quasiisometries

We say that f is an L -quasiisometry in a domain D in $\mathbb{R}^n$, $1 \leq L < \infty$, if

$$(5.1) \quad \frac{1}{L} |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq L |x - y|$$

for all $x, y \in D$; f is a *local* L -quasiisometry in D if for each $L' > L$, each point of D has a neighborhood U in which f is an L' -quasiisometry.

An L -quasiisometry is clearly injective for $1 \leq L < \infty$. Similarly a local L -quasiisometry is injective when $L = 1$. On the other hand,

$$(5.2) \quad f(re^{i\vartheta}) = \frac{r}{L} e^{iL^2\vartheta}$$

is a noninjective local L -quasiisometry in

$$D = \{z = re^{i\vartheta} : 0 < r < \infty, |\vartheta| < \pi\} \subset \mathbb{R}^2$$

for $1 < L < \infty$. Hence no such result holds for local L -quasiisometries when $L > 1$. However, the following result due to F. John [J2], [G1] shows that for certain classes of domains D , a local L -quasiisometry of D will be injective if L is sufficiently close to 1.

Theorem 2 *If D is a ball or half space and if f is a local L -quasiisometry in D with $L \leq 2^{1/4}$, then f is injective in D .*

P r o o f. We consider the case where $n = 2$. If f is not injective in D , then because f is a local homeomorphism, we can choose a disk B with $\bar{B} \subset D$ and points $z_1, z_2 \in \partial B$ such that f is injective in B and $f(z_1) = f(z_2)$.

Let α be the circular arc in $\bar{B}$ orthogonal to ∂B at z_1 and z_2 and let E denote the component of $B \setminus \alpha$ whose image E' is enclosed by the Jordan curve $\alpha' = f(\alpha)$. Then

$$(5.3) \quad \ell(\alpha') \leq L\ell(\alpha)$$

because f is a local L -quasiisometry in $\bar{B}$. Next the fact that f is injective in B implies f^{-1} is a local L -quasiisometry in $B' = f(B)$ and hence that

$$(5.4) \quad m(E) \leq L^2 m(E').$$

Then elementary geometry and the isoperimetric inequality allow us to conclude that

$$(5.5) \quad \frac{\ell(\alpha)^2}{2\pi} < m(E) \leq L^2 m(E') \leq L^2 \frac{\ell(\alpha')^2}{4\pi} \leq L^4 \frac{\ell(\alpha)^2}{4\pi}$$

or that $L^4 > 2$, a contradiction.

For each domain D in $\mathbb{R}^n$ we let $L(D)$ denote the supremum of the numbers $L \geq 1$ with the property that each local L -quasiisometry f in D is injective there. Theorem 2 and a simple example similar to the mapping f in (5.2) show that

$$(5.6) \quad 2^{1/4} \leq L(D) \leq 2^{1/2}$$

when D is a ball or half space. The exact value of $L(D)$ is not known in this case.

For example, a more detailed analysis [G2] yields the lower bound

$$(5.7) \quad (1 + 2^{1/2})^{1/4} \leq L(D);$$

presumably $L(D) = 2^{1/2}$.

The constant $L(D)$ may be interpreted physically if we think of D as an elastic body and f as the deformation experienced by D when subjected to a force field. Requiring that f be a local L -quasisometry bounds the strain experienced by D under the force field; $L(D)$ then measures the maximum strain allowable in D before D collapses onto itself. For this reason we say that D is *rigid* if $L(D) > 1$.

Problem Characterize the rigid domains D in $\mathbb{R}^n$.

A general sufficient condition is given in [MS]. This condition is also necessary for the case where $n = 2$ and D is finitely connected [Ge4], [GM2]. See [Ge4] also for an application to the elasticity of plane bodies.

6 Universal Teichmüller space

Suppose now that f is meromorphic and locally injective in a domain D in $\mathbb{R}^2$. The Schwarzian derivative of f ,

$$(6.1) \quad S_f = (f''/f')' - \frac{1}{2} (f''/f')^2,$$

measures how much f differs from a Möbius transformation. In particular, $S_f \equiv 0$ in D if and only if $f = g|_D$ where g is a Möbius transformation, in which case f is clearly injective in D . Suppose next that D contains at least three points in its boundary. Then D has the unit disk B as its universal covering surface and the hyperbolic metric ρ_D in D is given by

$$(6.2) \quad \rho_D(g(z)) |g'(z)| = (1 - |z|^2)^{-1}$$

where $g : B \rightarrow D$ is an analytic projection. The following result shows that whether or not f is injective in D depends on the relative sizes of $|S_f|$ and ρ_D^2 [BG], [K], [L1], [N].

Theorem 3 Suppose that f is meromorphic and locally injective in a domain D in $\mathbb{R}^2$. If f is injective, then $|S_f| \leq 12\rho_D^2$ in D . Conversely if D is a disk or half plane and if $|S_f| \leq 2\rho_D^2$ in D , then f is injective. The constants 12 and 2 are best possible.

For each domain D in $\mathbb{R}^2$ we let $\sigma(D)$ denote the supremum of the numbers $a \geq 0$ with the property that each function f , meromorphic and locally injective with $|S_f| \leq a\rho_D^2$ in D , is injective in D . Then Theorem 3 and [Le1] imply that

$$(6.3) \quad 0 \leq \sigma(D) \leq 2$$

for each simply connected domain D with equality if and only if D is a disk or half plane. The constant $\sigma(D)$ measures how rigid D is with respect to conformal deformations which are close to Möbius transformations.

Problem Characterize the domains D in R^2 with $\sigma(D) > 0$.

A sufficient condition is given in [MS] and a necessary condition in [Ge3]. Both conditions are equivalent, and hence necessary and sufficient, when D is finitely connected [GM2], [O1].

The constant $\sigma(D)$ has been calculated for several simply connected domains [Le1], [Le2], [L2]. For example,

$$(6.4) \quad \sigma(D) = 2 \left(\frac{n-2}{n} \right)^2$$

if ∂D is a regular n -sided polygon [Ca].

It turns out that the space of Schwarzian derivatives of conformal mappings of B onto such conformally rigid simply connected domains D with metric

$$(6.5) \quad \|S_f - S_g\| = \sup_{z \in B} |S_f(z) - S_g(z)| \rho_B(z)^{-2}$$

is the Bers *universal Teichmüller space* $T = T(1) [B]$, [Ge3].

7 Analytic functions

We have introduced above two domain constants $L(D)$ and $\sigma(D)$ with the following properties: $L(D) > 1$ implies that f is injective whenever f is nearly an isometry in D ; $\sigma(D) > 0$ implies that f is injective when f is nearly a Möbius transformation in D . The following analogue of Theorem 3 shows that there is another natural measure, analogous to the Schwarzian derivative, corresponding to the class of euclidean similarities [A2], [Be], [BP], [DSS], [E], [O2].

Theorem 4 Suppose that f is analytic and locally injective in a simply connected domain D in R^2 . If f is injective, then $|f''/f'| \leq 8\rho_D$ in D . Conversely if D is a disk or half plane and if $|f''/f'| \leq \rho_D$ in D , then f is injective. The constants 8 and 1 are best possible.

For each domain D in R^2 we let $\tau(D)$ denote the supremum of the numbers $b \geq 0$ with the property that each function f , analytic and locally injective with $|f''/f'| \leq b\rho_D$ in D , is injective in D . Then by Theorem 4,

$$(7.1) \quad \tau(D) = 1$$

if D is a disk or half plane. Again $\tau(D)$ measures how rigid D is with respect to analytic deformations which are close to euclidean similarities.

Problem Characterize the domains D in R^2 with $\tau(D) > 0$.

A sufficient condition is given in [MS]. A necessary condition is derived in [AG] for the case where D is simply connected; in this case both conditions are equivalent [MS].

8 Locally quasiconformal mappings

Suppose that f is a locally K -quasiconformal mapping of a domain $D \subset R^n$ into R^n . If $n \geq 3$ and $K = 1$, then by Liouville's theorem [BI], [Ge1], [Re], $f = g|D$

where g is a Möbius transformation. Hence when $n \geq 3$, $\log K$ plays a role similar to that played by the *hyperbolic norm* $\|S_f\|_D$,

$$(8.1) \quad \|S_f\|_D = \sup_{z \in D} |S_f(z)| \rho_D(z)^{-2},$$

when $n = 2$: both vanish only if f is the restriction of a Möbius transformation to D . The following result is a corresponding analogue of the second part of Theorem 3 [MS], [Sa].

Theorem 5 *For $n \geq 3$ there exists a constant $K_n > 1$ with the following property. If D is a ball or half space in $\mathbb{R}^n$ and if f is locally K -quasiconformal in D with $K \leq K_n$, then f is injective in D .*

For each domain D in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, we let $K(D)$ denote the supremum of the numbers $K \geq 1$ with the property that each function f , locally K -quasiconformal in D , is injective in D . A result due to Zorič implies that $K(\mathbb{R}^n) = \infty$ [MRV], [Z].

Problem *Characterize the domains D in $\mathbb{R}^n$ with $K(D) > 1$.*

A sufficient condition is given in [MS].

Geometric Properties

We have introduced eight different function theoretic properties for domains D in $\mathbb{R}^n$, all of which hold whenever D is a ball or half space. We consider next six geometric properties which again hold when D is a ball or half space and which are closely related to the properties discussed above.

9 Uniform domains

We say that a domain D in $\mathbb{R}^n$ is *uniform* if there exists a constant $a \in [1, \infty)$ with the following property. Each pair of points $x, y \in D$ can be joined by an arc $\alpha \subset D$ such that

$$(9.1) \quad \ell(\alpha) \leq a |x - y|,$$

$$(9.2) \quad \min(\ell(\alpha'), \ell(\alpha'')) \leq a \operatorname{dist}(z, \partial D)$$

for each $z \in \alpha$, where α', α'' denote the components of $\alpha \setminus \{z\}$ [MS]. Inequality (9.1) requires that the length of α be comparable to the distance between its endpoints; inequality (9.2) requires that α stay away from the boundary of D except near its endpoints. It is easy to check that a ball or half space D is uniform with $a = \pi/2$.

The definition for uniform domain given above differs slightly from, but is equivalent to, the one given originally in [MS]; see [GM1]. See [GO], [Ma], [M] for other equivalent formulations.

Problem *Characterize the uniform domains D in $\mathbb{R}^n$.*

A necessary geometric condition is given in [MS] for domains $D \subset \mathbb{R}^2$; this condition is also sufficient if D is finitely connected [GM2]. Other sufficient

geometric conditions for plane domains of arbitrary connectivity are derived in [H].

10 Linearly locally connected domains

A set $E \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ is *locally connected* at $y_0 \in \bar{\mathbb{R}}^n$ if for each neighborhood U of y_0 there exists a neighborhood V such that $E \cap V$ lies in a component of $E \cap U$. We say that E is *linearly locally connected* if there exists a constant $b \in [1, \infty)$ such that for each $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and $0 < r < \infty$,

$$(10.1) \quad E \cap \bar{B}(x_0, r) \text{ lies in a component of } E \cap \bar{B}(x_0, br),$$

$$(10.2) \quad E \setminus B(x_0, r) \text{ lies in a component of } E \setminus B(x_0, r/b).$$

Here $B(x_0, r)$ denotes the open ball with center x_0 and radius r . A ball or half space D satisfies both of these requirements with $b = 1$.

Condition (10.1) implies that E is locally connected in the usual sense at each $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and specifies that V may be chosen as the linear multiple $1/b$ of the largest ball about x_0 in U . Condition (10.2) is an analogous statement about the point ∞ which makes the concept invariant with respect to Möbius transformations and quasiconformal self mappings of $\bar{\mathbb{R}}^n$ [W].

The notion of linear local connectivity plays an important role in the theory of quasiconformal mappings. For example, a simply connected domain $D \subset \bar{\mathbb{R}}^2$ is a quasidisk if and only if it is linearly locally connected; a Jordan domain $D \subset \bar{\mathbb{R}}^2$ is a quasidisk if and only if ∂D has this property [Ge5]. When $n \geq 3$, a domain $D \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ can be mapped quasiconformally onto a ball only if its complement $\bar{\mathbb{R}}^n \setminus D$ is linearly locally connected [GV1], [Ge2].

Problem Characterize the linearly locally connected domains D in $\mathbb{R}^n$.

A characterization is given in [GM2] for the case where $n = 2$.

11 Decomposable domains

A domain D in $\mathbb{R}^n$ is said to be *decomposable* if there exists a constant $L \in [1, \infty)$ such that for each pair of points $x, y \in D$ there exists an L -quasiisometry f of a closed ball $\bar{B} \subset \mathbb{R}^n$ such that

$$(11.1) \quad x, y \in f(\bar{B}) \subset D.$$

Obviously D has this property with $L = 1$ whenever D is a ball or half space.

Problem Characterize the decomposable domains D in $\mathbb{R}^n$.

A characterization is given in [Ma].

12 Quasihyperbolic distance

If D is a domain in $\bar{\mathbb{R}}^2$ with at least three boundary points, then the *hyperbolic distance* between $x, y \in D$ is given by

$$(12.1) \quad h_D(x, y) = \inf_{\alpha} \int_{\alpha} \rho_D(z) ds,$$

where ρ_D is as defined in (6.2) and the infimum is taken over all rectifiable arcs α which join x and y in D . The function h_D is conformally invariant and hence a valuable tool when studying conformal mappings in $\bar{R}^2$.

There exists no analogue of the distance h_D in higher dimensions except when D is a ball or half space. However, if $z \in D \subset R^2$, then

$$(12.2) \quad \rho_D(z) \leq \frac{1}{\text{dist}(z, \partial D)}$$

by the Schwarz lemma while

$$(12.3) \quad \rho_D(z) \geq \frac{1}{4 \text{dist}(z, \partial D)}$$

by the Koebe distortion theorem when D is simply connected. This suggests replacing $\rho_D(z)$ by $\text{dist}(z, \partial D)^{-1}$ when seeking a substitute for h_D in domains $D \subset R^n$ with $n \geq 2$. We call

$$(12.4) \quad k_D(x, y) = \inf_{\alpha} \int_{\alpha} \frac{1}{\text{dist}(z, \partial D)} ds$$

the *quasihyperbolic distance* between $x, y \in D$, where the infimum is taken over all rectifiable arcs α joining x and y in D [GP]. The function k_D plays an important role in the study of quasiconformal and quasiisometric mappings in higher dimensions [GO], [TV1], [TV2].

It is not difficult to show that

$$(12.5) \quad j_D(x, y) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|x - y|}{\text{dist}(x, \partial D)} + 1 \right) \left(\frac{|x - y|}{\text{dist}(y, \partial D)} + 1 \right)$$

is a distance function, that

$$(12.6) \quad j_D(x, y) \leq k_D(x, y)$$

in each domain D and that

$$(12.7) \quad k_D(x, y) \leq 2j_D(x, y)$$

whenever D is a ball or half space [Ge5]. Thus it is natural to ask in which domains D is k_D , and hence h_D when $n = 2$, bounded by a multiple of j_D .

Problem Characterize the domains D in R^n for which there exists a constant c such that $k_D \leq cj_D$ in D .

A characterization is given in [Jo1]. A second is derived in [GO].

13 Quasiextremal distance domains

Suppose that C_0, C_1 are disjoint continua which lie in a domain $D \subset R^n$. Then $(C_0, C_1; D)$ is a *condenser* whose *conformal capacity* is given by

$$(13.1) \quad \text{cap}(C_0, C_1; D) = \inf_u \int_D |\nabla u|^n dm,$$

where the infimum is taken over all functions $u \in C^1(D)$ with $u \leq 0$ on C_0 and

$u \geq 1$ on C_1 [Lo], [Ge1]. This reduces to the usual *electrostatic capacity* when $n = 2$.

The quantity $\text{cap}(C_0, C_1; D)$ is a conformal invariant which measures the *conformal or extremal distance* between C_0 and C_1 in D . It is big if the continua C_0 and C_1 are large and close to one another in D , that is, if they can be joined by many short curves in D ; it is small if one of the continua is small or if they lie far from one another in D .

Since $C^1(\mathbb{R}^n) \subset C^1(D)$, we see from (13.1) that

$$(13.2) \quad \text{cap}(C_0, C_1; D) \leq \text{cap}(C_0, C_1; \mathbb{R}^n).$$

On the other hand,

$$(13.3) \quad \text{cap}(C_0, C_1; \mathbb{R}^n) \leq 2 \text{cap}(C_0, C_1; D)$$

if D is a ball or half space.

These inequalities show that presence of the boundary of a ball or half space D does not influence significantly the extremal distance between pairs of continua in D . We say that a domain D in $\mathbb{R}^n$ is a *quasiextremal distance domain* if there exists a constant $M \in [1, \infty)$ such that

$$(13.4) \quad \text{cap}(C_0, C_1; \mathbb{R}^n) \leq M \text{cap}(C_0, C_1; D)$$

for each pair of disjoint continua $C_0, C_1 \subset D$ [GM2].

Quasiextremal distance domains are closely connected with the problem of extending conformal and quasiconformal mappings. For example, suppose that D is a domain in $\mathbb{R}^n$. If D is a quasiextremal distance domain with $M = 1$, then each K -quasiconformal mapping of D has a K -quasiconformal extension to $\mathbb{R}^n$ [AS]. Moreover when $n = 2$, each conformal mapping of D has a conformal extension to $\bar{\mathbb{R}}^2$ if and only if D is a quasiextremal distance domain with $M = 1$ [AB]. Similar results are given in [GM2] for the case where $M > 1$.

Problem Characterize the quasiextremal distance domains D in $\mathbb{R}^n$.

A sufficient condition and several necessary conditions are obtained in [GM2].

14 Quasicircle domains

Finally we say that a domain $D \subset \bar{\mathbb{R}}^2$ is a *quasicircle domain* if there exists a $K \in [1, \infty)$ such that each component of $\bar{\mathbb{R}}^2 \setminus D$ is either a point or the closure of a K -quasidisk.

Problem Characterize the quasicircle domains D in $\bar{\mathbb{R}}^2$.

Relations between these classes

We conclude by summarizing what is currently known about relations between the fourteen classes of domains introduced above. With each class we list the number of the section in which it is discussed.

Theorem 6 *If D is a domain in $\mathbb{R}^n$, then the following statements are equivalent.*

- (2) D is a BMO extension domain.
- (9) D is uniform.
- (11) D is decomposable.
- (12) $k_D \leq c j_D$ in D for some constant c .

P r o o f. By Theorem 1 in [Jo1], D has the BMO extension property if and only if there exist constants a and b such that $k_D \leq a j_D + b$ in D ; this last statement holds if and only if D is uniform by Corollary 1 in [GO]. Next it is easy to check $k_D \leq a j_D + b$ in D for some constants a and b if and only if $k_D \leq c j_D$ for some constant c . Finally Theorem 5.1 in [Ma] implies that a uniform domain is decomposable, while the converse implication is an immediate consequence of the fact that the image of a ball under an L -quasiisometry is uniform with $a = \pi L^2/2$.

The argument in [GO] shows that when D is uniform, we may choose the arc α in (9.1) and (9.2) to be a *quasihyperbolic geodesic* joining x and y in D ; when $n = 2$ and D is simply connected, we may take α to be the corresponding *hyperbolic geodesic*.

Theorem 7 *If D is a uniform domain in $\mathbb{R}^n$, then the following statements hold.*

- (1) D is a loc Lip_α extension domain.
- (3) D is a Sobolev extension domain.
- (4) D is a quasiconformal extension domain when $n = 2$.
- (5) $L(D) > 1$.
- (6) $\sigma(D) > 0$ when $n = 2$.
- (7) $\tau(D) > 0$ when $n = 2$.
- (8) $K(D) > 1$ when $n \geq 3$.
- (10) D is linearly locally connected.
- (13) D is a quasiextremal distance domain.
- (14) D is a quasicircle domain when $n = 2$.

If $n = 2$ and D is finitely connected, then the converses to all but the first, second and sixth of the above statements hold. The converse to the second holds if D is also bounded; the converse to the sixth holds if D is also simply connected.

P r o o f. Suppose that D is a uniform domain in $\mathbb{R}^n$. Then D is a loc Lip_α extension domain by Theorem 2.24 in [GM1] and (1.4). Next a direct argument shows that D satisfies the (ϵ, ∞) condition in [Jo2] and hence is a Sobolev extension domain by Theorem 1 in [Jo2]. D is a quasiextremal distance domain by Lemma 2.18 in [GM2] and, when $n = 2$, a quasiconformal extension domain by Corollary 3.17 in [GM2]. Theorems 3.8 and 3.17 in [MS] imply that $L(D) > 1$ and that $K(D) > 1$ when $n \geq 3$, respectively. When $n = 2$, Theorem 4.24 in [MS]

and (12.2) imply that $\sigma(D) > 0$ and $\tau(D) > 0$. Finally D is linearly locally connected by the proof for Theorem III.4.1 in [Ge5] and hence a quasicircle domain when $n = 2$ by Lemma 5 in [Ge3].

For the converses suppose that $n = 2$. If $L(D) > 1$, or if D is simply connected with $\tau(D) > 0$, or if D is a quasiextremal distance domain, then D is linearly locally connected by Lemma 3 in [Ge4], or by Theorem 1.4A in [AG], or by Lemma 2.11 in [GM2], respectively. Hence in each case D is a quasicircle domain by Lemma 5 in [Ge3]. The same conclusion follows from Theorem 6 in [BG] if $\sigma(D) > 0$.

Suppose now that $n = 2$ and that D is finitely connected. If D is a quasiconformal extension domain, then D is a quasicircle domain by [GH]. Next if D is a bounded Sobolev extension domain, then D satisfies an (ϵ, ∞) condition by Theorem 4 in [Jo2] and a direct argument similar to the proof of Theorem III.4.1 in [Ge5] shows that D is linearly locally connected and hence a quasicircle domain as above. Finally if D is a quasicircle domain, then D is uniform by Theorem 5 in [O1] and Theorem 5 in [GO].

In conclusion, Theorems 6 and 7 yield the following different ways of viewing a bounded quasidisk.

Corollary *If D is a bounded simply connected domain in $\mathbb{R}^2$, then one of the following statements holds if and only if all do in which case D is a quasidisk.*

- (2) D is a BMO extension domain.
- (3) D is a Sobolev extension domain.
- (4) D is a quasiconformal extension domain.
- (5) $L(D) > 1$.
- (6) $\sigma(D) > 0$.
- (7) $\tau(D) > 0$.
- (9) D is uniform.
- (10) D is linearly locally connected.
- (11) D is decomposable.
- (12) $k_D \leq c j_D$ in D for some constant c .
- (13) D is a quasiextremal distance domain.
- (14) D is a quasicircle domain.

References

- [A1] Ahlfors, L. V.: Quasiconformal reflections. Acta Math. **109** (1963) 291–301
- [A2] Ahlfors, L. V.: Sufficient conditions for quasi-conformal extension. In: Discontinuous groups and Riemann surfaces. Ann. of Math. Studies 79, Princeton Univ. Press 1974
- [AB] Ahlfors, L.; Beurling, A.: Conformal invariants and function-theoretic null-sets. Acta Math. **83** (1950) 101–129

- [AS] Aseev, V. V.; Syčev, A. V.: On the sets which are removable for quasiconformal space mappings, *Sibirsk. Mat. Zh.* **15** (1974) 1213–1227 (Russian)
- [AG] Astala, K.; Gehring, F. W.: Injectivity, the BMO norm and the universal Teichmüller space. *J. d'Analyse Math.* **46** (1986) 16–57
- [Ba] Baernstein II, A.: Analytic functions of bounded mean oscillation. In: *Aspects of contemporary complex analysis*. Academic Press 1980
- [BG] Beardon, A. F.; Gehring, F. W.: Schwarzian derivatives, the Poincaré metric and the kernel function. *Comment. Math. Helv.* **55** (1980) 50–64
- [Be] Becker, J.: Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen. *J. reine u. angew. Math.* **255** (1972) 23–43
- [BP] Becker, J.; Pommerenke, C.: Schlichtheitskriterien und Jordangebiete. *J. reine u. angew. Math.* **354** (1984) 74–94
- [B] Bers, L.: Uniformization, moduli, and Kleinian groups. *Bull. London Math. Soc.* **4** (1972) 257–300
- [BI] Bojarski, B.; Iwaniec, T.: Another approach to Liouville theorem. *Math. Nachr.* **107** (1982) 253–262
- [C] Calderón, A. P.: Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. *Proc. Symp. Pure Math.* **4** (1961) 33–49
- [Ca] Calvis, D.: The inner radius of univalence of normal circular triangles and regular polygons. *Complex Var.* **4** (1985) 295–304
- [DSS] Duren, P. L.; Shapiro, H. S.; Shields, A. L.: Singular measures and domains not of Smirnov type. *Duke Math. J.* **33** (1966) 247–254
- [E] Epstein, C. L.: Univalence criteria and surfaces in hyperbolic space (to appear)
- [F] Fefferman, C.: Characterizations of bounded mean oscillation. *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971) 587–588
- [Ga] Garnett, J. B.: *Bounded analytic functions*. Academic Press 1981
- [Ge1] Gehring, F. W.: Rings and quasiconformal mappings in space. *Trans. Amer. Math. Soc.* **103** (1962) 353–393
- [Ge2] Gehring, F. W.: Quasiconformal mappings. In: *Complex analysis and its applications II*. International Atomic Energy Agency Vienna 1976
- [Ge3] Gehring, F. W.: Univalent functions and the Schwarzian derivative. *Comment. Math. Helv.* **52** (1977) 561–572
- [Ge4] Gehring, F. W.: Injectivity of local quasi-isometries. *Comment. Math. Helv.* **57** (1982) 202–220
- [Ge5] Gehring, F. W.: Characteristic properties of quasidisks. *Séminaire de Mathématiques Supérieures*. Les Presses de l'Université de Montréal 1982
- [GH] Gehring, F. W.; Hag, K.: Remarks on uniform and quasiconformal extension domains. *Complex Var.* (to appear)
- [GM1] Gehring, F. W.; Martio, O.: Lipschitz classes and quasiconformal mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **10** (1985) 203–219
- [GM2] Gehring, F. W.; Martio, O.: Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings. *J. d'Analyse Math.* **45** (1985) 181–206
- [GO] Gehring, F. W.; Osgood, B. G.: Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric. *J. d'Analyse Math.* **36** (1979) 50–74
- [GP] Gehring, F. W.; Palka, B. P.: Quasiconformally homogeneous domains. *J. d'Analyse Math.* **30** (1976) 172–199
- [GV1] Gehring, F. W.; Väisälä, J.: The coefficients of quasiconformality of domains in space. *Acta Math.* **114** (1965) 1–70
- [GV2] Gehring, F. W.; Väisälä, J.: Hausdorff dimension and quasiconformal mappings. *J. London Math. Soc.* **6** (1973) 504–512
- [G1] Gevirtz, J.: A sharp condition for univalence in euclidean spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* **57** (1976) 261–265
- [G2] Gevirtz, J.: Injectivity of quasi-isometric mappings of balls. *Proc. Amer. Math. Soc.* **85** (1982) 345–349
- [HL] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E.: Some properties of fractional integrals, II. *Math. Zeit.* **34** (1932) 403–439
- [H] Herron, D. A.: *Conformally invariant metrics and the geometry of uniform domains*. University of Michigan thesis 1984
- [J1] John, F.: Rotation and strain. *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961) 391–413

- [J2] John, F.: On quasi-isometric mappings, II. *Comm. Pure Appl. Math.* **22** (1969) 265–278
- [JN] John, F.; Nirenberg, L.: On functions of bounded mean oscillation. *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961) 415–426
- [Jo1] Jones, P. W.: Extension theorems for BMO. *Indiana Univ. Math. J.* **29** (1980) 41–66
- [Jo2] Jones, P. W.: Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces. *Acta Math.* **147** (1981) 71–88
- [K] Kraus, W.: Über den Zusammenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereiches mit der Kreisabbildung. *Mitt. Math. Sem. Giessen* **21** (1932) 1–28
- [La] Lappalainen, V.: Lip_p -extension domains, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss.* **56** (1985) 1–52
- [Le1] Lehtinen, M.: On the inner radius of univalence for non-circular domains. *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **5** (1980) 45–47
- [Le2] Lehtinen, M.: Estimates of the inner radius of univalence of domains bounded by conic sections. *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **10** (1985) 349–353
- [L1] Lehto, O.: Domain constants associated with Schwarzian derivative. *Comment. Math. Helv.* **52** (1977) 603–610
- [L2] Lehto, O.: Remarks on Nehari's theorem about the Schwarzian derivative and schlicht functions. *J. d'Analyse Math.* **36** (1979) 184–190
- [Lo] Loewner, C.: On the conformal capacity in space. *J. Math. Mech.* **8** (1959) 411–414
- [Ma] Martin, G. J.: Quasiconformal and bi-Lipschitz homeomorphisms, uniform domains and the quasihyperbolic metric. *Trans. Amer. Math. Soc.* **292** (1985) 169–191
- [M] Martio, O.: Definitions for uniform domains. *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **5** (1980) 197–205
- [MRV] Martio, O.; Rickman, S.; Väisälä, J.: Topological and metric properties of quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **488** (1971) 1–31
- [MS] Martio, O.; Sarvas, J.: Injectivity theorems in plane and space. *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **4** (1978–79) 383–401
- [Mo] Moser, J.: On Harnack's theorem for elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961) 577–591
- [N] Nehari, Z.: The Schwarzian derivative and schlicht functions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949) 545–551
- [O1] Osgood, B. G.: Univalence criteria in multiply-connected domains. *Trans. Amer. Math. Soc.* **260** (1980) 459–473
- [O2] Osgood, B. G.: Some properties of f''/f' and the Poincaré metric. *Indiana Univ. Math. J.* **31** (1982) 449–461
- [RR] Reimann, H. M.; Rychenner, T.: Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation. *Lecture Notes in Mathematics* **487**, Springer-Verlag 1975
- [Re] Reshetnyak, Yu., G.: Liouville's conformal mappings theorem under minimal regularity hypothesis. *Sibirsk. Math. Zh.* **8** (1967) 835–840 (Russian)
- [Ri] Rickman, S.: Extension over quasiconformally equivalent curves. *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **436** (1969) 1–12
- [Sa] Sarvas, J.: Coefficient of injectivity for quasiregular mappings. *Duke Math. J.* **43** (1976) 147–158
- [St] Staples, S.: Domains with a local to global norm property (to appear)
- [S] Stein, E. M.: Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Univ. Press 1970
- [T] Trudinger, N. S.: On the regularity of generalized solutions of linear, non-uniformly elliptic equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **42** (1971) 50–62
- [TV1] Tukia, P.; Väisälä, J.: Lipschitz and quasiconformal approximation and extension. *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **6** (1981) 303–342
- [TV2] Tukia, P.; Väisälä, J.: Bilipschitz extensions of maps having quasiconformal extensions. *Math. Ann.* **269** (1984) 561–572
- [V] Väisälä, J.: On the null-sets for extremal distances. *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **322** (1962) 1–12

- [W] Walker, M. F.: Linearly locally connected sets and quasiconformal mappings.
Ann. Acad. Sci. Fenn. **11** (1986) 77–86
- [Z] Zorič, V. A.: A theorem of M. A. Lavrentieff for space quasiconformal mappings.
Mat. Sbornik **74** (1967) 417–433 (Russian)

F. W. Gehring
Mathematical Sciences Research Institute
Berkeley, California

Technische Universität Berlin
Berlin, Federal Republic of Germany

University of Michigan
Ann Arbor, Michigan

(Eingegangen: 17. 2. 1986)

Buchbesprechungen

Hsu, P.-L., Collected Papers, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer Verlag 1983, xii, 589 pp., cloth, DM 148,—

Pao-Lu Hsu (1910–1970) gilt als der erste chinesische Mathematiker, der durch Arbeiten auf den Gebieten der Mathematischen Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie internationale Anerkennung gefunden hat. Wissenschaftlich geprägt wurde er durch einen Aufenthalt am University College London (1936–40), also zu einer Zeit, als dort sowohl J. Neyman und E. S. Pearson wie auch R. A. Fisher wirkten. Demgemäß beschäftigen sich seine Arbeiten zunächst vorwiegend mit den damals aktuellen statistischen Fragestellungen bei univariaten und multivariaten linearen Modellen und zwar im Neyman-Pearson'schen wie im Fisherschen Sinne. Erst später traten wahrscheinlichkeitstheoretische und matrizentheoretische Fragen sowie solche der Versuchsplanung hinzu: Alle spiegeln jedoch die Bereitschaft zu umfangreichen analytischen Rechnungen und seine durch die britische Ausbildung geprägte Bevorzugung von konkreten Fragestellungen gegenüber allgemeinen und abstrakten Überlegungen wider.

Von seinen 40 Arbeiten sind 21 der Statistik, 8 der Wahrscheinlichkeitstheorie, 5 der Matrizentheorie und 3 der Versuchsplanung zuzurechnen. Im einzelnen seien von den unter dem Einfluß von Neyman und Pearson geschriebenen Arbeiten diejenigen zur Optimalität des Varianzschätzers in Gauß-Markov-Modellen [4] bzw. zur Optimalität des Likelihood-Quotiententests in linearen Modellen [13] erwähnt. Auf [4] geht nicht nur die Bezeichnung Hsus Modell zurück; es werden auch erstmalig quadratische erwartungstreue Schätzer und Vorläufer der Begriffe Vollständigkeit bzw. quadratischer Teilraum benutzt. Die Arbeit [13] enthält den ersten Optimalitätsnachweis des Likelihood-Quotiententests für univariate, lineare Hypothesen in linearen Modellen, der letztlich der jetzt üblichen Charakterisierung als gleichmäßig bester invarianten Test entspricht.

Die unter dem Einfluß von Fisher geschriebenen Arbeiten haben wesentlich zur heute allgemein üblichen Verwendung matrizentheoretischer Hilfsmittel in der multivariaten Analysis beigetragen. So stellt er in [5] der mehr geometrischen Argumentation von Wishart über die Verteilung der Stichproben-Kovarianzmatrix im i.i.d.-Fall einen eleganteren algebraisch-analytisch orientierten Beweis gegenüber. Auch zu vielen anderen wichtigen Statistiken der multivariaten Analysis leitet er durch meist umfangreiche, aber elegante Rechnungen die Verteilung her; [6], [8], [10], [13] und [14]. Vermutlich sind durch diese Arbeiten die späteren, rein matrizentheoretischen Veröffentlichungen [21], [29] und [31]–[33] angeregt.

Bei seinen Aufsätzen zur Wahrscheinlichkeitstheorie fällt sein Geschick in der Handhabung charakteristischer Funktionen (im Sinne von Fourier-Transformationen) auf, etwa in [18], wo er durch eine Erweiterung der kurz zuvor entstandenen Berry-(Esseen-)Technik Approximationen für die Verteilung der Stichprobenstreuung im i.i.d.-Fall erhält. Erwähnt sei in diesem Zusammenhang auch sein Anhang III zu der von Chung besorgten Übersetzung „Limit Theorems of Sums of Independent Variables“ des bekannten Lehrbuchs von Gnedenko-Kolmogorov [25].

Bereits 1981 war eine Auswahl der wichtigsten 19 Arbeiten bei der Science Press in China erschienen. Dem Springer-Verlag ist es zu verdanken, daß nunmehr eine vollständige Ausgabe aller 40 Veröffentlichungen vorliegt und zwar durchweg in englischer Sprache. 7 Arbeiten waren bisher nur in chinesisch erschienen; 2 dieser Publikationen sind Ergebnisberichte aus Seminaren, die Hsu in seinen letzten Lebensjahren geleitet hat (über Limesverteilungen geordneter Statistiken bzw. teilweise balancierte, unvollständige Blockpläne). Auch wird eine Arbeit von W. L. Deemer und I. Olkin abgedruckt, die auf Vorlesungen von Hsu beruht. Außerdem enthält der Band neben kurzen Kommentaren chinesischer Kollegen, insbesondere zu den spä-

teren Arbeiten, die in den *Annals of Statistics*, Bd. 7, 1979, erschienenen Würdigungen des wissenschaftlichen Werkes von Pao-Lu Hsu durch E. L. Lehmann, T. W. Anderson und K. L. Chung. (Die Verweise auf das ebenfalls wieder abgedruckte Schriftenverzeichnis wurden bei dessen Ergänzung leider nicht mit abgeändert.) Zwei Fotografien und ein Faksimile-Abdruck eines handschriftlichen Briefes von Hsu an Chung ergänzen die auch äußerlich ansprechende Form.

Hsu kehrte 1940 während des chinesisch-japanischen Krieges und dann – nach einer zweijährigen Vorlesungstätigkeit in Berkeley, an der Columbia University und in Chapel Hill – 1947 unmittelbar vor der kommunistischen Machtübernahme nach China zurück, um seinen Beitrag zur Modernisierung der Mathematik-Ausbildung sowie zur Verbreitung der damals relativ jungen Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematischen Statistik zu leisten. Er blieb seiner Heimat trotz verschiedener Angebote aus den USA und entgegen dem Rat seiner Ärzte treu. Die Schilderung seiner durch angegriffene Gesundheit und Kulturrevolution überschatteten letzten Lebensjahre durch T. H. Kiang und H. F. Tuan runden das Bild eines großen und engagierten Wissenschaftlers ab.

Freiburg i. Br.

H. Witting

Kiefer, J. C., *Collected Papers* (3 vols.), vols. 1, 2: *Statistical Inference and Probability* (1951–1963) and (1964–1984), vol. 3: *Design of Experiments*, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1985, vol. 1: xxxii, 502 pp., vol. 2: xiv, 590 pp., vol. 3: xxv, 718 pp., hard cover, vols. 1 and 2: DM 278,—, vol. 3: DM 128,—

Wer sich auch nur mit einem der Aspekte aus Kiefers Arbeiten näher befaßt, der wird die Herausgabe der *Collected Papers* als hochwillkommen begrüßen. Die drei Bände enthalten im wesentlichen Kiefers ca. 100 wissenschaftliche Aufsätze, die zum Teil sonst nur verstreut in Tagungsbänden zu finden sind. Die Bände I und II umfassen in chronologischer Reihenfolge Kiefers Aufsätze zur Mathematischen Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie, die Arbeiten zur Statistischen Versuchsplanung sind in Band III zusammengefaßt. Reproduktion der Aufsätze und Ausstattung der Bände sind makellos.

Zu Beginn von Band I würdigt J. Sacks die Person Jack Kiefers [* 25. Januar 1924, † 10. August 1981, vgl. auch (Be)]. L. D. Brown umreißt sein wissenschaftliches Werk mit Ausnahme der Statistischen Versuchsplanung, über letztere gibt zu Beginn von Band III H. P. Wynn einen Überblick. Leider sind im Aufsatz von Brown die Literaturverweise nicht auf die Schlußfassung der Bibliographie abgestimmt; diese Fehlverweise sind im Nachdruck (Br) korrigiert.

Jack Kiefers erste Aufsätze in den beginnenden 50-er Jahren fielen in eine Zeit, in der mit der Entscheidungstheorie von A. Wald die Grundlagen einer soliden mathematischen Behandlung für die Statistik gerade gelegt waren. Mathematisch fundierte Statistik blieb ein Leitmotiv Kieferschen Schaffens und durchzieht seine Arbeiten in ihrer ganzen Breite, von entscheidungstheoretischen Fragestellungen über sequentielle, nichtparametrische und multivariate Analyse und stochastische Prozesse bis zur Versuchsplanung.

Rekursive und stochastische Approximationen war eines der ersten Themen, mit denen sich Kiefer befaßte. Bei den stochastischen Fragestellungen sind statt genauer Funktionswerte $f(x)$ nur von Zufallsfehlern beeinflusste beobachtete Werte $y(x)$ verfügbar. Die Aufgabe, die Maximalstelle von f zu approximieren, behandeln Kiefer und Wolfowitz [4], indem im n -ten Schritt die zwei Funktionswerte $y(X_n \pm c_n)$ beobachtet werden und der mit diesen geschätzten Steigung mit vorgegebener Schrittweite a_n bis zum neuen Punkt X_{n+1} gefolgt wird, unter geeigneten Bedingungen an (a_n) und (c_n) ist die Folge (X_n) stochastisch konvergent gegen die gesuchte Maximalstelle. Von diesen Arbeiten führt ein direkter Weg zum heute eigenständigen Gebiet der adaptiven Kontrolle stochastischer Systeme.

Mit A. Dvoretzky und J. Wolfowitz untersucht Kiefer in [2, 3, 11] Lagerhaltungsmo-
delle, bei denen ein Altbestand x auf einen Startbestand $Y(x)$ optimal erhöht werden soll, um
eine gemäß einer Verteilungsfunktion F abgerufene Nachfrage zu befriedigen. Die Autoren un-
tersuchen auch die realistischeren Problemstellungen, in denen mehrere Güter, Perioden und
Lieferzeiten zugelassen werden bzw. in denen die Nachfrageverteilung F nicht genau bekannt
ist. Ein simples Verfahren ist die sogenannte (s, S) -Politik, die bei Altbestand $x \leq s$ das Lager
auf einen Startbestand S erhöht und bei $x > s$ nichts tut. In [11] werden diejenigen Nachfrage-
verteilungen F charakterisiert, bezüglich der diese (s, S) -Politik optimal bleibt.

Bei sequentiellen Test- und Schätzproblemen bestimmen Kiefer und Koautoren in
[9, 10] exakte Lösungen für stochastische Prozesse mit kontinuierlicher Zeit und approximie-
ren damit die entsprechenden Probleme für Prozesse mit diskreter Zeit. Eine detaillierte Unter-
suchung über die asymptotische Optimalität sequentieller Verfahren liefern Kiefer und Sacks
[37]. Für zusammengesetzte Hypothesen konstruieren sie sequentielle Bayes-Tests so, daß für
Kosten $c \rightarrow 0$ die maximale Fehlerwahrscheinlichkeit von der Ordnung $c |\log c|$ verschwindet
und der erwartete Stichprobenumfang im wesentlichen beschränkt ist durch $|\log c|$ dividiert
durch den Kullback-Leibler-Abstand. Auf dieser Grundlage verallgemeinern sie schließlich das
Zweistufen-Verfahren von A. Wald.

Bei Beobachtungswerten $x_1, \dots, x_n$ aus einer „nichtparametrischen“ Verteilungsfami-
lie kommt eine zentrale Bedeutung der empirischen Verteilungsfunktion F_n zu, d. h. der Ver-
teilungsfunktion zur Gleichverteilung auf den *beobachteten* Werten. So beruht der Anpassungs-
test von Kolmogorov-Smirnow auf dem Abstand $D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$ zwischen empirischer
und hypothetischer Verteilungsfunktion. Für den Fall einer Normalverteilungshypothese wird
in [13] im Rahmen einer asymptotischen Minimaxformulierung die Überlegenheit des Kolmo-
gorov-Smirnow-Tests demonstriert: Wenn der χ^2 -Anpassungstest zur Erreichung einer gewissen
Güte n Beobachtungen braucht, so bleibt für den Kolmogorov-Smirnow-Test bei denselben
Güteanforderungen die Anzahl der Beobachtungen beschränkt von der Ordnung $n^{4/5}$. Im Ge-
gensatz zum Einstichprobenfall erweist sich der k -Stichprobenfall als sehr viel schwerer; die
Arbeiten [24, 27] bieten Teilergebnisse unter der Ausnutzung der zugehörigen asymptotischen
Wiener-Prozesse, während in [30] mittels Fourier-Transformierter die Unabhängigkeitshypo-
these untersucht wird.

Die empirische Verteilungsfunktion F_n als nichtparametrischer Schätzer der tatsäch-
lichen Verteilungsfunktion F ist das Thema in [15, 21, 25, 32, 65, 68]. Kiefer und Koautoren
zielen auf Optimalitätsaussagen, die ein tiefes Verständnis der Sache erfordern. Sie zeigen mit-
tels Diskretisierung in approximierende multinomiale Probleme und Konstruktion von ungün-
stigsten a-priori-Verteilungen, daß die empirische Verteilungsfunktion F_n ein asymptotischer
Minimax-Schätzer der tatsächlichen Verteilungsfunktion F ist bezüglich solcher Verlustfunk-
tionen, die auf dem Kolmogorov-Smirnow-Abstand D_n beruhen. Der multivariate Fall bietet
besondere Schwierigkeiten, da die Limes-Verteilung von $T_n = \sup_x \sqrt{n} \{F_n(x) - F(x)\}$ im Ge-
gensatz zum univariaten Fall von der tatsächlichen Verteilungsfunktion F abhängt. Überra-
schenderweise ergeben sich aber auch im m -variaten Fall die Abschätzungen

$$P_F(T_n \geq r) \leq c(\epsilon, m) e^{-(2-\epsilon)r^2},$$

und zwar gleichmäßig in F , n und r . Die Stärke dieser Abschätzung zeigt sich darin, daß sie so-
fort ein Gesetz vom iterierten Logarithmus nach sich zieht.

Neben der Verteilungsfunktion interessiert häufig ihr Inverses, die Quantilfunktion,
die für gegebene Masse p diejenigen möglichen Beobachtungswerte ξ_p angibt, so daß links von
 ξ_p die Masse p und rechts davon die Masse $1 - p$ liegt. In [47] verbessert Kiefer die Bahadur-
Darstellung für Quantilfunktionen, indem er statt der Beschränktheitsordnung die exakte Kon-
vergenzordnung herleitet. Vergleichbares gelingt ihm in [50] für die Skorohod-Strassen-Ein-
bettung. Die engen Verbindungen zur Kolmogorov-Smirnow-Statistik D_n werden in [52] aus-

geleuchtet. Diese Verfeinerungen der klassischen Ansätze erlauben die Diskussion des Limes-Verhaltens für $n \rightarrow \infty$ der Quantilfunktion, wenn p fest bleibt. Die gleichzeitige Konvergenz $p_n \rightarrow 0$ erfordert neue Methoden, die Kiefer in [54] entwickelt. Ein zweiter Nachteil des klassischen Ansatzes wird in [56] aufgegriffen, daß nämlich die erhaltenen Approximationen für einen einzelnen großen Stichprobenumfang n gelten, nicht aber für die gemeinsame Verteilung vieler großer Stichprobenumfänge gleichzeitig. Der springende Punkt ist der, daß die Approximation auf einem Wiener-Prozeß $W(x, t)$ mit zwei- statt eindimensionaler Zeit aufbaut. Für den Prozeß

$$K(x, n) = W(x, n) - xW(1, n)$$

beweist Kiefer in einer technischen Meisterleistung, daß

$$\sup_{x \in (0, 1)} |\sqrt{n} \{F_n(x) - x\} - K(x, n)/\sqrt{n}|$$

straff ist von der Ordnung $n^{-1/6}(\log n)^{2/3}$; ohne Einschränkung ist hier die Rechteck-(0, 1)-Verteilung zugrundegelegt.

Neben diesen eher wahrscheinlichkeitstheoretisch ausgerichteten Arbeiten pflegte Kiefer mit der multivariaten statistischen Analyse und der statistischen Versuchsplanung auch Forschungsrichtungen, die mehr der mathematischen Statistik zuzurechnen sind. In [19] entwickelt er Hunt-Stein-Sätze unter minimalen Voraussetzungen; es dreht sich um die Frage, ob ein Entscheidungsverfahren, das unter allen invarianten Verfahren optimal ist, in der größeren Klasse *aller* Verfahren seine Optimalität behält. Die hierzu geeigneten Gruppen werden durch Steins Bedingung charakterisiert, vgl. [45]: eine endliche Folge von abgeschlossenen Untergruppen steigt zur Identität ab so, daß jede Untergruppe in ihrem Vorgänger normal ist und mit ihm einen kompakten oder abelschen Quotienten bildet.

Die multivariate statistische Analyse ist eines derjenigen Gebiete, in der ohne Reduktion durch Invarianz keine vernünftigen Aussagen erzielt werden können. Leider sind die hier auftretenden Gruppen zu groß, als daß Hunt-Stein-Sätze gelten könnten. Kiefer und Koautoren präsentieren in [36, 38, 39, 42] eine Reihe von ingenösen und diffizilen ad-hoc-Methoden, um die Minimazität klassischer multivariater Tests herzuleiten. Für den Test mit Hotellings T^2 -Statistik als Prüfgröße gelingt dies gerade nur im Fall von drei Beobachtungen in zwei Dimensionen; eine ähnliche Einschränkung gilt für den Test, der auf dem multiplen Stichproben-Korrelationskoeffizienten R^2 beruht. Diese Eigenschaft bleibt erhalten, wenn die Alternative nicht fest ist, sondern gegen die Hypothese konvergiert (lokale Minimazität) oder nach unendlich entschwindet (asymptotische Minimazität). In der Arbeit [42] mit R. Schwarz wird für die auf T^2 und R^2 beruhenden Tests nachgewiesen, daß sie zulässige Bayes-Verfahren sind.

Eng verbunden mit der multivariaten Analyse und mit der Sequentialstatistik sind Selektionsprobleme, wie sie im Buch [112] zusammen mit R. E. Bechhofer und M. Sobel dargestellt werden. Kiefer fand mit diesem Thema eine Verbindung von zwei ihn interessierenden Gebieten, die früher nicht viel miteinander zu tun hatten.

Während alle diese Forschungsrichtungen von Kiefer auf großes Interesse stießen, dürften einzig seine Arbeiten [67, 69, 70, 71] über bedingte Konfidenzschätzer nicht die erhoffte Resonanz gefunden haben. Erwähnt werden sollten auch lohnende Überblicksaufsätze, wie [51, 66], oder die in [48] ausgedrückten Gedanken über die Zukunft der Statistik.

Band III ist ausschließlich der Versuchsplanung gewidmet, mit der sich Kiefer seit 1958 immer wieder und wegweisend beschäftigt hat. Leider stieß Kiefer gleich zu Beginn mit der Arbeit [26] während der Diskussion vor der Royal Statistical Society auf massiven Widerstand und spöttische Ablehnung. Ganz unabhängig von der Versuchsplanung wurde wohl die These, daß vor der mathematischen Lösung ein statistisches Problem zunächst mathematisch formuliert werden muß und daß dazu die Waldsche Entscheidungstheorie einen hilfreichen

Rahmen abgibt, diesseits und jenseits des Atlantiks grundsätzlich verschieden beurteilt. Vielleicht muß auch die Schärfe der Buchbesprechung [99] zu Kendall und Stuart vor diesem Hintergrund gesehen werden. Mit spürbarer Genugtuung konnte Kiefer aber schließlich doch in (Ki) feststellen, daß seine Sichtweite sich durchgesetzt hat.

Von Kiefers 45 Aufsätzen zur Versuchsplanung seien beispielhaft drei herausgegriffen. In [29] leiten Kiefer und Wolfowitz den nun nach ihnen benannten Äquivalenzsatz her, daß nämlich das Determinanten-Kriterium (D-Optimalität) und ein globales, an Varianzen orientiertes Kriterium (G-Optimalität) zu denselben optimalen Versuchsplänen führen. Dieses Ergebnis wird nur dadurch möglich, daß ein Versuchsplan nicht mit diskreten Anzahlen, sondern mit kontinuierlichen Anteilen identifiziert wird. Im Gefolge dieser Arbeiten wird nun zwischen einer diskreten und einer kontinuierlichen Theorie der Versuchsplanung unterschieden, in der also die geforderten Ganzzahligkeiten entweder exakt beachtet oder durch stetige Größen approximiert werden. Die Erfahrungen, die Kiefer im Laufe der Jahre mit der kontinuierlichen Theorie sammelte, sind in [58] niedergelegt. Demgegenüber wendet sich Kiefers letzter Aufsatz [98], zusammen H. P. Wynn, einem Problem der diskreten Versuchsplanung zu. Abweichend vom klassischen Modell mit unabhängigen Beobachtungen und verschiedenen Varianzen wird hier ein stationärer Fehlerprozeß zugelassen. Für die Zuordnung von Behandlungen zu Versuchseinheiten werden optimale und Minimax-Pläne hergeleitet. Wesentliche Hilfsmittel stammen dabei aus der Kodierungstheorie, die als neues Hilfsmittel in die Versuchsplanung eingeführt wird.

Die Herausgabe der Collected Papers ehrt den Menschen und Wissenschaftler Jack C. Kiefer. Für uns ist es eine nützliche Handreichung zur Fortsetzung und Vertiefung des wissenschaftlichen Werkes, das Kiefer hinterlassen hat.

- (Be) B e c h h o f e r , R.: Jack Carl Kiefer 1924–1981. *The American Statistician* **36** (1982) 356–357
- (Br) B r o w n , L. D.: The research of Jack Kiefer outside the area of experimental design. *The Annals of Statistics* **12** (1984) 406–415
- (Ki) K i e f e r , J.: Discussion on the Papers by Wynn and Laycock. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* **34** (1972) 177–178

Augsburg

F. Pukelsheim

Witting, H., Mathematische Statistik 1 (Parametrische Verfahren bei festem Stichprobenumfang), Stuttgart: Teubner 1985, xviii, 538 S., geb., DM 125,—

Das vorliegende Werk behandelt — seinem Untertitel gemäß — parametrische Verfahren bei festem Stichprobenumfang und enthält die Kapitel

1. Statistische Entscheidungen und Verteilungsklassen
2. Test- und Schätzprobleme als Optimierungsaufgaben
3. Reduktionsprinzipien: Suffizienz und Invarianz
4. Lineare Modelle und multivariate Verfahren.

Zusammen mit dem geplanten Band II über asymptotische, nichtparametrische und sequentielle Verfahren wird dann ein Gesamtwerk vorliegen, welches die zentralen Themen der mathematischen Statistik umfaßt und das sich — geht man vom Eindruck über den vorliegenden Band I aus — auszeichnet durch

- mathematische Strenge
- eine Fülle an Stoff, Beispielen und Übungsaufgaben
- eine moderne Präsentation.

Es setzt beim Leser gute Kenntnisse der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie voraus, entwickelt aber einige für die Statistik besonders wichtige Themen – wie Dichtequotient, bedingte Verteilungen, Faktorisierung in 1.6 – selbständig und faßt außerdem die wichtigsten Begriffe und Theoreme in einem nützlichen Anhang zusammen.

Vor zwanzig Jahren erschien vom gleichen Autor die „Mathematische Statistik“ und vier Jahre später (1970) zusammen mit Dr. Nölle die „Angewandte Mathematische Statistik“, im folgenden mit MS bzw. AMS abgekürzt. Es ist naheliegend, das neue Buch von Prof. Witting mit diesen Büchern zu vergleichen.

Stofflich geht die MS und das erste Kapitel der AMS (über lineare Modelle) im vorliegenden Band I auf. Das bewährte Grundprinzip der MS, die finiten parametrischen Verfahren als Optimierungsprobleme zu behandeln, ist erhalten geblieben. Dabei wird die benötigte Optimierungstheorie in 1.3 bereitgestellt, implizit zum Beweis des Fundamentallemmas in 2.1 und 2.4 verwendet und dann in der allgemeinen Testtheorie in 2.5 angewandt. Es treten gegenüber der MS viele neue und moderne Aspekte der Mathematischen Statistik hinzu, wie z. B.

- Robustheit von Tests (2.3)
- L_1 -differenzierbare Verteilungsklassen (1.8), die für das Studium lokal bester Tests (2.2.4 und 2.4.3) nützlich sind,
- Varianzkomponentenmodelle (4.3);

dazu multivariater Ein- und Zweistichprobentest (4.4) und eine ganze Reihe weiterer ergänzenden Themen, die hier zum erstenmal in Lehrbuchform dargestellt werden.

Vor allem ist gegenüber der MS für die Motivation der einzelnen theoretischen Beiträge durchweg mehr Platz eingeräumt worden. So wird jeder Unterabschnitt durch eine Präambel mit übergeordneten und motivierenden Gesichtspunkten eingeleitet. Auch wird der Leser gründlicher auf die Abhandlungen der Kapitel 2 bis 4 vorbereitet. Alle benötigten Grundtechniken – wie Quantilfunktion, lineare Modelle und Normalverteilungsfamilien, Exponentialfamilien – werden im 187 Seiten umfassenden ersten Kapitel eingeführt. Dieses erste Kapitel bietet für sich betrachtet eine vorzügliche Grundschulung in statistischer Methodik.

Angesichts der Fülle des dargebotenen Stoffes und der Strenge und Lückenlosigkeit der Argumentation konnte ein Umfang von 538 Seiten nur eingehalten werden durch Verwenden einer ausgefeilten Notation und durch eine Präsentation, die gewissermaßen redundanzfrei ist. Ein selektives Lesen einzelner Abschnitte wird dadurch erschwert. Als Kompensation bietet der Autor ein ausführliches und zuverlässiges Symbol- und Stichwortverzeichnis an. Zu bedauern bleibt, daß nicht noch mehr bibliographische Hinweise gegeben wurden und daß das Werk nicht von vornherein in englischer Sprache abgefaßt wurde.

Der mehr praxisorientierte Statistiker könnte sich daran stören, daß er über lange Strecken erst einmal hart arbeiten muß, um zu erkennen, in welcher Weise zum Beispiel der populäre Zwei-Stichproben-t-Test seine volle mathematische Auszeichnung erhält. Doch sollte es auch dieser Leserkreis begrüßen, daß er hier ein Lehrbuch in die Hände bekommt, welches die in der Praxis beliebten Verfahren in ein rigoroses – wenn auch nicht einfach zu erschließendes – Theoriengebäude einbindet und damit tiefere Einsichten über ihre Effizienz vermittelt.

Zusammenfassend möchten die Rezensenten ihrem Wunsch Ausdruck geben, daß der zweite Band nicht allzu lange auf sich warten läßt, damit dann insgesamt ein Werk vorliegt, zu dem man in dieser Verbindung von anspruchsvoller Stoffauswahl und mathematischer Qualität der Darstellung kaum Vergleichbares findet – und dies nicht nur innerhalb der deutschsprachigen Literatur.

Strasser, H., Mathematical Theory of Statistics. Statistical Experiments and Asymptotic Decision Theory (de Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 7), Berlin – New York: Walter de Gruyter 1985, xii, 491 pp., cloth, DM 158,—

Den in diesem Buch niedergelegten Kenntnissen möchte man eine größere Verbreitung im Kreise der Statistiker wünschen.

Das Buch enthält finite und asymptotische statistische Entscheidungstheorie im Stile von Wald und LeCam. Im finiten Teil steht der Epsilon-Vergleich von Experimenten im Vordergrund (zentrales Resultat: das LeCamsche Randomisierungskriterium); von diesem Standpunkt aus werden Teile der klassischen Statistik (z. B. Suffizienz, exponentielle Familien) beleuchtet. Der Rahmen für die hier behandelte Asymptotik ist durch die Existenz eines schwachen Limes der Likelihoodfunktion vorgegeben (zentrales Resultat: die Approximation durch Gauß-Shifts). Der Einschätzung des Verfassers laut Vorwort „for good reasons this theory claims to determine the framework of future developments in asymptotic statistics“ muß allerdings widersprochen werden: schließlich gibt es seit mehr als zehn Jahren eine Entwicklung der asymptotischen Statistik, in der man das Verhalten der statistischen Modelle nicht nur bei wachsender Information (Stichprobenumfang), sondern auch bei zunehmender Dimension des Parameter-raumes, allgemeiner bei steigender Modell-Komplexität untersucht; in solchen Situationen kann in der Regel keine Rede mehr von der Existenz eines schwachen Limes der Likelihoodfunktion sein.

Ebenso ist der im Titel des Buches ausgedrückte Anspruch einer mathematischen Theorie der Statistik überzogen: das Buch berührt im wesentlichen *Teile* der *klassischen* Statistik; zu moderneren Entwicklungen (wie z. B. Dichteschätzung, Resampling-Verfahren) trägt es keine Theorie bei. Angesichts der gegenwärtig zu beobachtenden divergierenden Entwicklungen in der Statistik ist die Erfüllung eines solchen Anspruchs ja auch unvorstellbar.

Das Werk enthält vieles, was bisher nicht in Buchform veröffentlicht ist, vielmehr über Journale verstreut und zum Teil nur in Form von technical reports erhältlich war. Nützlich dürfte es daher für denjenigen sein, der es als Nachschlagewerk verwenden will. Diesem Benutzer freilich macht es der Verfasser nicht leicht: wo immer man das Buch aufschlägt, wird man auf die Suche nach der Bedeutung von an anderer Stelle eingeführten Namen und Symbolen geschickt. Der Text enthält zu viele Benennungen und Bezeichnungen, die nur selten gebraucht werden.

Der Wert des Buches kann jetzt wohl noch nicht abschließend beurteilt werden. Verbesserungen auf der mathematisch-technischen Ebene scheinen angebracht: beispielsweise wird das Problem der Darstellbarkeit von positiven normierten linearen Operatoren durch Markov-Kerne nur im Rahmen von lokalkompakten Räumen mit abzählbarer Basis abgehandelt. Warum nicht in Räumen, die zu Borelschen Teilmengen von kompakten metrischen Räumen homöomorph sind? Damit wäre der wichtige Spezialfall polnischer Räume abgedeckt. Das Beweisargument wäre eher einfacher (Thm. 6.11).

Zum Schluß eine historische Anmerkung: die Formulierungen von Thm. 49.7 und Cor. 49.9 erwecken den Eindruck, als sei der Epsilon-Vergleich von Experimenten schon in 1951 von Blackwell betrachtet worden. Die zitierte Arbeit von Blackwell jedoch behandelt den „Null-Vergleich“. Meines Wissens geht die für die Beziehungen zur asymptotischen Theorie so wichtige Einführung der Epsilon-Defizienz auf LeCam (1964) zurück.

Denker, M., Asymptotic Distribution Theory in Nonparametric Statistics (Vieweg Advanced Lectures in Mathematics), Braunschweig: Vieweg 1985, VII, 204 S., kart., DM 38,—

Dieses gelungene Buch gibt eine einheitliche und übersichtliche Darstellung von Grenzwertsätzen, die für viele statistische Methoden von Bedeutung sind. In drei Kapiteln werden U-Statistiken, differenzierbare Funktionale und Permutationsstatistiken behandelt. Für jeden dieser drei Typen beweist der Autor die hierfür bekannten allgemeinen Grenzwertsätze und Invarianzprinzipien. Daran schließen sich jeweils eine Reihe von Beispielen, in denen die Anwendung der allgemeinen Sätze auf statistische Probleme ausführlich diskutiert wird. In diesen ersten drei Abschnitten des Buches geht es ausschließlich darum, die Grenzverteilungen der Statistiken unter den Hypothesen zu bestimmen. Dem Problem der Bestimmung von Grenzverteilungen unter den Alternativen und damit dem Problem der asymptotischen Effizienz der zugrundeliegenden statistischen Verfahren nähert sich der Autor in einem abschließenden weiteren Kapitel, in dem die Bestimmung von Grenzverteilungen unter benachbarten Alternativen mit Hilfe des 3. Lemmas von LeCam kurz beschrieben wird.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß der Autor bei der Gestaltung des Stoffes sehr erfolgreich war, und daß das Buch als Grundlage für eine fortgeschrittene Vorlesung oder ein Seminar zu empfehlen ist.

Bayreuth

H. Strasser

Sachs, L., Applied Statistics, A Handbook of Techniques, Second Edition (Springer Series in Statistics), New York — Berlin — Heidelberg — Tokyo: Springer-Verlag 1984, xxviii, 707 pp., hardcover, DM 154,—

Der vorliegende Text ist eine Übersetzung der 5. Auflage (1978) der deutschen Version dieses erfolgreichen Praktiker-Buchs aus der Feder eines medizinischen Statistikers. Er gibt kurze prägnante Einführungen (incl. historischer Anmerkungen) in die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie und der angewandten Stochastik und behandelt eine umfangreiche Auswahl praktischer statistischer Verfahren. Auch ganz allgemeine Maximen zur Gestaltung stochastisch-gestützten wissenschaftlichen Vorgehens findet der Leser in Tafelform zusammengestellt. Die allgemeinen Darlegungen werden stets sofort an numerischen Beispielen verdeutlicht, Rechen- (und Computer-) Hinweise und kleinere, im Text verstreute Tafeln sichern größtmögliche Nähe zur stochastischen Praxis.

Der bibliographische Anhang (74 S.) ist umfassend — die Kapitelüberschriften:

1. Statistical Decision Techniques, 2. Statistical Methods in Medicine and Technology,
3. The Comparison of Independent Data Samples, 4. Further Test Procedures, 5. Measures of Association: Correlation and Regression, 6. The Analysis of $k \times 2$ and Other Two Way Tables,
7. Analysis of Variance Techniques, Bibliography and General References, Exercises.

In meinem Augen verdient dies Buch, eine „Bibel“ für Praktiker der Stochastik zu werden.

Erlangen

K. Jacobs

Ellis, R. S., Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 271), Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo: Springer-Verlag 1985, xiv, 364 pp., hard cover, DM 184,—

Erklärtes Ziel des Lehrbuches ist es, eine Brücke zwischen der neueren Entwicklung der Theorie der Großen Abweichungen als Teil der stochastischen Analysis und den Grundbe-

griffen der Statistischen Mechanik zu schlagen. Der verbindende Begriff ist die Entropie als Maß der logarithmischen Verschiedenheit von Wahrscheinlichkeitsmaßen bzw. zufälligen Größen.

Im letzten Jahrzehnt entwickelten M. Donsker und S. Varadhan eine Theorie der Großen Abweichungen für Markov-Prozesse auf drei Ebenen: für das empirische Mittel, die empirische Verteilung und empirische stationäre Folgen. In jedem der drei Fälle werden exponentiell kleine Wahrscheinlichkeiten durch Entropiefunktionen I_1 , I_2 und I_3 beschrieben. Da das empirische Mittel aus der Verteilung und die Verteilung aus den stationären Folgen gewonnen werden können, kann auch I_1 aus I_2 und I_2 aus I_3 mittels eines Kontraktionsprinzips ausgedrückt werden.

In der vorliegenden Monographie werden diese drei Stufen der Entropie zum ersten Mal systematisch auf die Grundmodelle der Statistischen Mechanik angewandt. Die Stärke des Buches liegt in der Herausarbeitung der Beziehungen beider Theorien zueinander.

Das Buch gliedert sich in zwei Teile, einen ersten über die Ergebnisse der Theorie der Großen Abweichungen und ihre Anwendungen auf die Statistische Mechanik und einen zweiten mehr technischen Teil über konvexe Funktionen und Beweise zu den Sätzen über Große Abweichungen.

Nach einem einführenden Kapitel über die drei Stufen von Großen Abweichungen für ganz einfache „i.i.d.“-Zufallsvariablen werden im zweiten Kapitel die entsprechenden Ergebnisse für $\mathbb{R}^d$ -wertige Zufallsvariablen formuliert und über die zugehörigen Kontraktionsprinzipien in gegenseitige Beziehungen gesetzt. Dabei wird auf der Stufe 1 vorausgesetzt, daß die normierten logarithmischen Laplace-Transformierten überall konvergieren, während sich der Autor bei den Stufen 2 und 3 auf „i.i.d.“-Zufallsvariablen beschränkt. Das Variationsprinzip von Varadhan zur Berechnung von asymptotischen Erwartungswerten beschließt die allgemeinen Ergebnisse der Theorie der Großen Abweichungen.

Die folgenden drei zentralen Kapitel sind der Anwendung auf Grundmodelle der Statistischen Mechanik gewidmet.

Anhand des einfachsten Modells, desjenigen eines diskreten idealen Gases ohne Wechselwirkung, werden die Begriffe und Gesetze der beschreibenden Thermodynamik durch die entsprechenden Sätze der Großen Abweichungen konkretisiert. Die Einfachheit des Modells gestattet es, klassische thermodynamische Gesetze, wie die Maxwell-Boltzmann-Verteilung, das Boyle'sche Gesetz, die mikrokanonische oder kanonische Beschreibung, sowie das Gibbssche Variationsprinzip leicht mathematisch nachvollziehen zu können. Der Autor folgt hier dem Vorbild der Lanfordschen Arbeit von 1973 (LNPhys 20), mit dem Vorteil, nunmehr ein klareres Bild über die drei Entropiestufen liefern zu können.

Kapitel IV behandelt magnetische Modelle mit Ising-Spins auf dem eindimensionalen Gitter, sowie das Curie-Weiss-Modell. Außer bei letzterem wird die Existenz von Phasenübergängen bei langen Wechselwirkungsreichweiten, einschließlich des kritischen r^{-2} -Abfalls, ohne Beweise beschrieben. Im nicht-kritischen Bereich, $\beta < \beta_c$ oder $h \neq 0$, wird die Eindeutigkeit der Gibbsmaße bewiesen.

Die Existenz von Phasenübergängen für allgemeine nichttriviale, ferromagnetische, mehrdimensionale Gittermodelle wird im ersten Teil von Kapitel V gezeigt. Das Problem wird durch GKS-Ungleichungen auf das zweidimensionale Ising Modell reduziert und dann mit dem bekannten Peierls-Argument bewiesen.

Die nächsten zwei Abschnitte im zweiten Teil von Kapitel V halte ich für die interessantesten des Buches. Zunächst gilt der zentrale Grenzwertsatz für alle betrachteten ferromagnetischen Modelle, solange die Suszeptibilität endlich ist. Für den kritischen Punkt werden die kritischen Exponenten eingeführt und die Buckingham-Gunton-Ungleichung für sie nachgewiesen. Falls – neben anderen Bedingungen – in ihr die Gleichheit gilt, so folgt der Zusammenbruch des zentralen Grenzwertsatzes.

Das Curie-Weiss-Modell wird nochmals aufgerollt unter dem Blickpunkt der Approximation durch das mittlere Feld, des Kacschen Limes und der Gültigkeit des zentralen Grenzwertsatzes außerhalb des kritischen Punktes bzw. seiner Ungültigkeit im kritischen Punkt. Das mean-field-Modell des magnetischen Kreises mit dem Übergang zu magnetischen Wellenfunktionen beschließt die Reihe der Modelle der Statistischen Mechanik.

Der zweite Teil des Buches liefert in den Kapiteln VI–IX die benötigten mehr technischen Resultate über konvexe Funktionen, die Legendre-Transformierte sowie über die Theorie der Großen Abweichungen, wobei sich der Autor außer bei der Stufe 1 auf „i.i.d.“-Zufallsvariable mit endlichem Zustandsraum beschränkt. Vier Anhänge reichen Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Ergodentheorie, Charakterisierungen von Gibbsmaßen, sowie ausgelassene Ergebnisse und Beweise über Variationsprinzipien nach.

Vom Blickpunkt der Statistischen Mechanik enthält das Buch keine wesentlich neuen Resultate. Leider hat der Autor das Variationsprinzip nur für eindimensionale Modelle mittels Ergebnisse über Große Abweichungen hergeleitet, während er bei den mehrdimensionalen Modellen den bekannten Pfaden von Dobrushin-Lanford-Ruelle-Föllmer zum Variationsprinzip folgt. Diese Zweigleisigkeit ist überflüssig und verwirrend, und bedeutet doppelte Arbeit für Autor und Leser.

Wie bereits erwähnt, wird die Donsker-Varadhan-Theorie – außer bei der ersten Stufe – nur für den einfachsten Fall von Produktmaßen benötigt, welche im Beweis sogar Marginalmaße von endlichem Träger haben. Von ihrer über das klassische Variationsprinzip hinausgehenden Stärke wird kein Gebrauch gemacht.

An einigen Stellen hätte ich mir eine Verschiebung der Schwerpunkte gewünscht. So ist meines Erachtens der Abschnitt über kritische Phänomene und den Zusammenbruch des zentralen Grenzwertsatzes sehr kurz ausgefallen; hier fehlen – wie an verschiedenen anderen Stellen – die Beweise. Dagegen erscheint mir der gesamte Teil II über Konvexität und Große Abweichungen für „i.i.d.“-Zufallsvariablen sehr breiten Raum einzunehmen. Zusammen mit den Kapiteln I und II über die Ergebnisse dieser Theorie ergibt sich viel Redundanz.

Dennoch überzeugt das Buch durch seine sehr sorgfältig durchgearbeitete Art; es ist überaus reich an Querverbindungen, historischen Bemerkungen und Hinweisen auf weiterführende Resultate. Die Referenzliste ist riesig. Es ist meiner Meinung nach gut geeignet als Begleitung einer Einführungsvorlesung oder eines Seminars über die mathematischen Methoden der Statistischen Mechanik.

New York

Th. Eisele

Wagon, S., The Banach-Tarski Paradox (Encyclopedia of Mathematics and its Applications 24), Cambridge: Cambridge University Press 1985, 267 pp., hard cover, £ 25.00

Als ich das Buch zum erstenmal in die Hand nahm, drängte sich mir die Frage auf: Ein ganzes Buch für eine einzige Paradoxie?

Ein Blick ins Inhaltsverzeichnis zeigt bereits, daß es um mehr geht als um die Darstellung der vielleicht verblüffendsten, weil aller geometrischen Anschauung zuwiderlaufenden, geometrisch-maßtheoretischen Paradoxie. Es wird der Versuch unternommen, den gesamten Problemkreis derartiger Paradoxien unter besonderer Berücksichtigung der algebraischen und mengentheoretischen Hintergründe systematisch darzustellen. Trotzdem erscheint mir der Titel gerechtfertigt, weil die Banach-Tarski-Paradoxie (als Verschärfung der Hausdorffschen) wohl das populärste typische Beispiel für den behandelten Fragenkomplex ist:

Die Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ besitzt eine Zerlegung in endlich viele Mengen $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ derart, daß man $X = S^2$ nach Ausführung geeigneter Rotationen $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots,$

h_m sowohl aus den rotierten Mengen $g_1(A_1), \dots, g_n(A_n)$ als auch aus den Mengen $h_1(B_1), \dots, h_m(B_m)$ neu zusammensetzen kann:

$$X = \bigcup_{j=1}^n g_j(A_j) = \bigcup_{k=1}^m h_k(B_k).$$

Als Korollar erhält man daraus, daß es kein rotationsinvariantes endlich-additives Maß der Gesamtmasse 1 auf der Potenzmenge von S^2 geben kann.

Die Existenz einer derartigen paradoxen Zerlegung der Einheitssphäre hat ihre Ursache in speziellen Eigenschaften der Gruppe SO_3 aller Rotationen von S^2 . Aus diesem Grunde untersucht der Autor allgemein für eine Gruppe G anstelle von SO_3 , die auf einer Menge X operiert, ob sie eine „G-paradoxe“ Zerlegung von X (oder einer Teilmenge von X) im obigen Sinne zuläßt. Dies ist der Fall, wenn G eine freie Untergruppe mit zwei Erzeugern besitzt, deren Operation auf X (abgesehen vom neutralen Element) keine Fixpunkte hat. Mit diesem Ergebnis endet das einleitende erste Kapitel.

Im folgenden Kapitel wird damit die Hausdorff-Paradoxie hergeleitet. Für den Beweis des Banach-Tarski-Paradoxons (Kapitel 3) bedarf es noch zusätzlicher Überlegungen, da SO_3 zwar freie Untergruppen mit zwei Erzeugern hat, jede solche Untergruppe jedoch abzählbare unendlich viele störende Fixpunkte besitzt. Analoge paradoxe Zerlegungen bzgl. der Gruppe G_3 aller Isometrien des $\mathbf{R}^3$ ergeben sich für beliebige abgeschlossene Kugeln im $\mathbf{R}^3$ und für $\mathbf{R}^3$ selbst.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit der Minimierung der Anzahl $r = n + m$ der Mengen $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$, die zu einer G-paradoxen Zerlegung führen. Im Falle der Banach-Tarski-Paradoxie für S^2 erhält man als Anwendung eines allgemeinen Satzes die Minimalzahl 4.

Die verbleibenden Kapitel des ersten Teils des Buches sind:

5. Higher Dimensions and Non-Euclidean Spaces
6. Free Groups of Large Rank: Getting a Continuum of Spheres from One
7. Paradoxes in Low Dimensions
8. The Semigroup of Equidecomposability Types

Im zweiten Teil geht es um die Konstruktion invarianter endlich-additiver Maße oder, aufgrund eines in Kapitel 9 bewiesenen Satzes von Tarski äquivalent dazu, um Bedingungen für die Nichtexistenz paradoxer Zerlegungen.

Dazu werden in Kapitel 10 zunächst die amenablen Gruppen (solche, die auf ihrer Potenzmenge ein normiertes, linksinvariantes endlich-additives Maß besitzen) eingeführt und ausführlich diskutiert. Für jede derartige Gruppe G , die auf einer Menge X operiert, erhält man mit Hilfe des auf G vorhandenen invarianten Maßes ein G -invariantes Maß auf X . Beweishilfsmittel ist ein Fortsetzungssatz für G -invariante Maße auf Booleschen Algebren in X . Insbesondere folgen die Existenz isometrie-invarianter Fortsetzungen des 1- und 2-dimensionalen Lebesguemaßes auf die Potenzmenge von $\mathbf{R}^1$ bzw. $\mathbf{R}^2$ sowie translationsinvarianter Fortsetzungen des Lebesguemaßes auf die Potenzmenge für alle Dimensionen.

Kapitel 11 und 12 beschäftigen sich mit Anwendungen und Verschärfungen der Amenabilität.

Im Schlußkapitel wird die Rolle des Auswahlaxioms für die Existenz oder Nicht-Existenz von Paradoxien zusammenfassend diskutiert, nachdem bereits im Verlauf der vorangehenden Abschnitte stets auf dessen Benutzung hingewiesen worden ist. Auch auf die Kontroverse um die Berechtigung des Auswahlaxioms, die gerade durch einige der im Buch behandelten Paradoxien angeregt wurde, geht der Autor an dieser Stelle ein.

Im Verlauf des Textes werden immer wieder Varianten der paradoxen Zerlegbarkeit behandelt, bei denen die Zerlegungsmengen zusätzliche Eigenschaften haben (z. B. Borel-Meßbarkeit bzw. die Baire-Eigenschaft) oder abzählbare Zerlegungen zugelassen sind. Jedes Kapitel

endet mit kurzen Hinweisen auf die Herkunft der behandelten Ergebnisse und damit zusammenhängende Literaturstellen. Das Buch schließt mit einer Sammlung von offenen Problemen, die bereits im Verlauf des Textes genauer erläutert worden sind, und einem sehr ausführlichen Literaturverzeichnis.

Insgesamt ist es dem Verfasser gelungen, diesen sachlich schwierigen Stoff, der Fragestellungen und Methoden aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik miteinander verknüpft, überzeugend und gut lesbar darzustellen. Besonders hervorheben möchte ich dabei die ständigen Vorwärtshinweise und Rückverweise sowie die Diskussion von Beweisvarianten und verwandten Ergebnissen, die dem Verständnis der inneren Zusammenhänge wesentlich zugutekommen. Jeder, der sich für die grundlegenden Paradoxien der Maßtheorie interessiert, kann sich freuen, daß dieses Buch nun zur Verfügung steht.

Erlangen

J. Lembecke

Billingsley, P., Probability and Measure, 2nd Edition (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics), New York u. a.: John Wiley & Sons 1986, xii, 622 pp., cloth, £ 43.20

Verdientermaßen erscheint dies vorzügliche Lehrbuch nunmehr in zweiter Auflage (1. Aufl. 1979). Es ist der maßtheoretisch untermauerten Wahrscheinlichkeitstheorie gewidmet, setzt gewisse Kenntnisse aus der diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie voraus und behandelt die benötigte Maß- und Integrationstheorie stufenweise mit. Die Stufung ergibt sich aus dem Ziel, ein Maximum an wahrscheinlichkeitstheoretischer Information mit jeweils minimalem maßtheoretischem Aufwand zu vermitteln und dabei die Wahrscheinlichkeitstheorie in buntester Fülle zum Vorschein zu bringen. Dies Ziel ist hier in bewundernswerter Weise erreicht. Schon nach wenigen Seiten hat man einen Beweis von Borels Satz über normale Zahlen (also den historischen Prototyp des starken Gesetzes der großen Zahlen) in Händen, und hat dabei gleich noch die Rademacher-Funktionen kennengelernt. Bereits auf S. 45 hat man Maßtheorie im ersten Durchgang gelernt. Es folgen ausführliche Abschnitte, die mit Zufallsvariablen mit nur endlichvielen Werten auskommen und vom starken Gesetz der großen Zahlen, von Spielsystemen (incl. Optimalität der kühnen Strategie), von Markov-Ketten und vom loglog-Theorem handeln. Nach einem neuerlichen Exkurs in die Maß- und Integrationstheorie wird das Thema „Gesetz der großen Zahlen“ umfassend in Angriff genommen. Es folgen Abschnitte über den Poisson-Prozeß, Warteschlangen, Irrfahrten. Abschnitte über die schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, charakteristische Funktionen und den (mit deren Hilfe bewiesenen) Zentralen Grenzwertsatz schließen sich an. Die nächste Themengruppe: bedingte Wahrscheinlichkeiten, Erwartungen und Verteilungen, Martingale. Die letzten Abschnitte des Buches sind den stochastischen Prozessen mit kontinuierlicher Zeit gewidmet: Kolmogorovs Existenzsatz, Brownsche Bewegung. — Besonders hervorzuheben ist die Fülle der Beispiele und Übungen und der gesunde Mathematikerverstand bei vielen Bezeichnungen. Eine Spezialität des Autors ist die Darbietung von Skorohods Darstellung schwach-konvergenter Folgen von Verteilungen mittels fastsicher-konvergenter Folgen von Zufallsvariablen und die hierdurch ermöglichten eleganten Beweise wichtiger Sätze. — Im Vorwort schreibt der Verfasser: „Ich wollte ein Buch schreiben, an dem ich einst als Student selbst meinen Spaß gehabt hätte“. Das ist ihm voll gelungen. Mancher Dozent wird manches stromlinienförmiger darbieten wollen, als es hier geschieht. An Fülle der Ein-, Aus- und Durchblicke wird dies Buch nur schwer zu übertreffen sein.

Erlangen

K. Jacobs

Berg, C., Christensen, J. P. R., Ressel, P., Harmonic Analysis on Semigroups: Theory of Positive Definite and Related Functions (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 100), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1984, x, 289 pp., cloth, DM 118,—

Die harmonische Analyse verbindet in einer für das Zusammenspiel mathematischer Ideen exemplarischen Weise Themen, die sich von der Zahlentheorie über die Funktionalanalysis bis hin zur Wahrscheinlichkeitstheorie erstrecken. Die Kraft der Methode wird besonders eindrucksvoll in G. W. Mackeys Übersichtsartikel „Harmonic Analysis as the Exploitation of Symmetry – A Historical Survey“ (Bull. AMS Volume 3, Number 1 (July 1980), 543–698) herausgearbeitet. Unter den traditionellen Fragestellungen der Theorie erfährt die Darstellung von Gruppen und damit die Analyse der positiv und negativ definiten Funktionen eine besondere Zuwendung.

Seit den richtungsweisenden Arbeiten von I. J. Schoenberg aus den Jahren 1938 bis 1942 greift die harmonische Analyse auf allgemeinere als die Gruppenstrukturen über. Zunächst werden die Begriffe auf Halbgruppen ausgedehnt (wie der Übersichtsartikel von J. H. Williamson aus dem Jahre 1967 zeigt). In neuester Zeit studiert man positiv und negativ definite Funktionen erfolgreich auf Gelfand-Paaren, Hypergruppen, Koalgebren, um nur einige wenige der ins Blickfeld gerückten Strukturen zu nennen. Angesichts dieser Entwicklung ist es nicht nur angebracht, sondern ein großer Gewinn, einen „Graduate Text“ d. h. ein auf graduierte Studenten und natürlich auch auf avanciertere Interessenten zugeschnittenes Lehrbuch über die Theorie der positiv und negativ definiten Funktionen auf Halbgruppen zur Verfügung zu haben. Dieser Gewinn wird dadurch erhöht, daß sich hervorragende Fachleute zusammengetan haben, das Buch gründlich und vielseitig, dabei am aktuellen Stand der Forschung orientiert, zu gestalten.

Schwerpunkt der Vorlage ist die Verallgemeinerung der Darstellungssätze von Bochner bzw. von Lévy und Chintschin für positiv bzw. negativ definiten Funktionen auf (vorzugsweise abelschen) Halbgruppen sowie deren Zusammenhang mit dem Momentenproblem. Die Methode der Darlegung der Resultate ist dezidiert halbgruppentheoretisch; der Gruppenfall wird gänzlich ausgeklammert. Als besonders berücksichtigte Spezialfälle treten die Halbgruppen $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}_+$, deren Produkte sowie die abgeschlossene Einheitskreisscheibe auf.

Der Aufbau des Buches ist aus dem streng gegliederten Inhalt deutlich erkennbar: Betonung liegt auf der Schoenberg-Theorie in Chapter 5 und auf dem Zusammenhang mit dem Momentenproblem in Chapter 6. Eine Einführung in die notwendigen Begriffe und Fakten der Funktionalanalysis (Chapter 1) und der Radonschen Maßtheorie (Chapter 2) ist für den Leser vorteilhaft. Die Einbeziehung einer in der mathematischen Statistik geläufigen Majorisierung (Chapter 7) dient zur Illustration der Theorie.

Wie jedes gute Buch regt auch dies den Referenten zu weiterführenden Bemerkungen an: Der Einfluß der Charaktertheorie von Halbgruppen auf ihre Struktur bleibt weitgehend außer Betracht; hierfür ist die bekannte Monographie von K. H. Hofmann und P. S. Mostert auch weiterhin die Standardreferenz. Im Chapter 7 über Schur-Konvexität wäre der Bezug zum Vergleich statistischer Experimente, insbesondere zur Versuchsplanung, ein interessantes Addendum. Zu schade, daß der Buchwaltersche Beweis für die Existenz einer Lévy-Abbildung auf involutiven Halbgruppen (vgl. Kommentar im Anschluß an Definition 3.17) erst *nach* Vollendung dieses Buches erbracht war!

Knobloch, H. W., Kwakernaak, H., Lineare Kontrolltheorie, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1985, x, 270 S., geb., DM 78,—

Die lineare Kontrolltheorie (besser: Steuerungstheorie) ist eine noch verhältnismäßig junge Disziplin der angewandten Mathematik. Sie hat sich im Laufe der letzten fünfundzwanzig Jahre aus der klassischen Regelungstheorie heraus entwickelt und ist inzwischen ein eigenständiges Gebiet sowohl im Ingenieurbereich als auch in der angewandten Mathematik. Beide Autoren haben am Aufbau und an der Verbreitung dieses Gebietes in Forschung und Lehre maßgeblichen Anteil. So hat Herr Knobloch z. B. in seinem mit F. Kappel gemeinsam geschriebenen Buch „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ neben einem ganzen Kapitel über nichtlineare Kontrollprobleme auch einen Abschnitt über Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit bei linearen Systemen verfaßt, und Herr Kwakernaak hat zuvor mit R. Sivan zusammen ein umfangreiches Buch „Linear Optimal Control Systems“ geschrieben.

Mit diesem gemeinsam verfaßten Buch „Lineare Kontrolltheorie“ legen die Autoren eine profunde, moderne Einführung in dieses Gebiet vor, die geprägt ist durch Klarheit im Aufbau und Darstellung, Verständlichkeit im Detail, sorgfältige Motivation und kluge Stoffauswahl. Man merkt diesem Buch an, daß es einen langen Entstehungsprozeß hinter sich hat, auf welchen die Autoren in ihrem Vorwort auch hinweisen. Seine Diktion ist eindeutig mathematisch. Bis auf einige formale Herleitungen in Abschnitt 8.3 bei der Anwendung stochastischer Prozesse werden keine Zugeständnisse in Bezug auf mathematische Strenge gemacht. Trotzdem ist dieses Buch auch für Ingenieure lesbar, wenn diese bereit sind, sich auf mathematische Sorgfalt und Strenge einzulassen. Vielleicht mag ihnen der axiomatische Aufbau der Kontrolltheorie in Kapitel 2 etwas übertrieben erscheinen, zumal der Hauptgegenstand des Buches die Steuerung von Vorgängen ist, die ganz konkret durch Systeme linearer Differentialgleichungen beschrieben werden. Dafür wird ihnen aber der Abschnitt 2.6, der Grundbegriffe der klassischen Regelungstheorie, wie Impulsantwort, Übertragungsfunktion und Frequenzgang prägnant vorstellt, sehr vertraut erscheinen. Diese Begriffe tauchen dann später wieder auf, wenn in Abschnitt 8.3 die Antwort linearer Systeme auf stochastische Eingangsgrößen diskutiert wird.

Das Buch gliedert sich in 11 Kapitel und einen Anhang über die Lyapunovsche Matrixgleichung, die bei der Stabilisierung linearer Systeme durch Zustandsrückführung eine entscheidende Rolle spielt.

Nach einer Einleitung und der Vorstellung der Elemente der linearen Systemtheorie werden in Kapitel 3 und 4 zentrale Begriffe der Steuerungstheorie wie Steuerbarkeit, Zustandsrückführung, Polvorgabe und Rekonstruierbarkeit behandelt. Rückgekoppelte Steuerung durch lineare Zustandsrückführung ist dabei ein zentrales Anliegen. Kapitel 5 ist der sog. Steuerungsinvarianz gewidmet, d. h. der Untersuchung solcher linearer Unterräume des Zustandsraumes, die bei geeigneter Steuerung in sich abgebildet werden. Kapitel 6 behandelt die Dualisierung von Invarianzeigenschaften und Kapitel 7 die Regelung durch Ausgangsrückführung, wobei unter Anwendungsgesichtspunkten davon ausgegangen wird, bei der Rückkopplungssteuerung nicht mehr den ganzen momentanen Zustand des Systems zu verwenden. In Kapitel 8 wird auf zwei Wegen dargestellt, wie lineare Systeme auf stochastische Eingaben reagieren. Dabei ist der zweite Zugang über eine Integraldarstellung mit Hilfe eines Wiener Prozesses in der mathematischen Darstellung der strengere. Die Kapitel 9–11 befassen sich mit der optimalen linearen Zustandsrückführung, bei der man die Freiheit bei der Auswahl rückgekoppelter Steuerungen dazu ausnutzt, eine solche auszuwählen, die ein quadratisches Kostenfunktional zum Minimum macht. In Kapitel 9 und 10 wird der deterministische Fall behandelt, bei dem die Riccatische Matrix-Differentialgleichung eine zentrale Rolle spielt. Hier sollte die Klarheit der Darstellung ihrer Lösungstheorie besonders hervorgehoben werden. Im Zentrum von Kapitel 11 steht der Kalman-Bucy-Filter als optimaler Beobachter.

Nicht behandelt werden in diesem Buch zeitdiskrete Probleme und solche mit Steuerungsbeschränkungen, so daß der ganze Problemkreis der zeitoptimalen Steuerungsprobleme

nicht zur Sprache kommt. Solche Fragestellungen fügen sich aber auch nicht nahtlos in das Konzept der Steuerung durch Rückkopplung und wurden sicher aus diesem Grunde nicht berücksichtigt. Dadurch macht dieses Buch einen überaus geschlossenen Gesamteindruck, der zu seinen sonstigen Vorzügen nur noch beiträgt.

Darmstadt

W. Krabs

Schilling, K., Simpliziale Algorithmen zur Berechnung von Fixpunkten mengenwertiger Operatoren, Trier: WVT Wissenschaftlicher Verlag Trier 1986, 190 S., kart., DM 34,—

Das vorliegende Büchlein ist die bereinigte Dissertation des Verfassers. Thema sind simpliziale Fixpunktalgorithmen in Funktionenräumen und die Anwendung solcher Algorithmen auf Steuerungsprobleme.

Zunächst werden die bekannten Algorithmen zur Berechnung von Fixpunkten stückweise affiner Abbildungen des $\mathbf{R}^n$ in sich untersucht. Die Fixpunkte allgemeinerer mengenwertiger Abbildungen des $\mathbf{R}^n$ in sich werden dann durch Fixpunkte von Folgen stückweise affiner Abbildungen approximiert. Eine Bedingung (K) stellt dabei die Konvergenz sicher. Diese Bedingung enthält als Verschärfung eine ganze Reihe in der Literatur bekannter Bedingungen. Fixpunktprobleme für mengenwertige Abbildungen unendlichdimensionaler normierter Räume in sich werden dann konsequent auf Folgen von Fixpunktproblemen für mengenwertige Abbildungen endlichdimensionaler normierter Räume wachsender Dimension zurückgeführt. Dazu wird dem Vorbild von Petryshyn folgend ein Ritz-Galerkin-ähnlicher Ansatz unter Verwendung geeigneter Projektionsschemata benutzt. Die Konvergenzbeweise stützen sich auf Stetigkeitseigenschaften und geeignete Randbedingungen, kommen jedoch ohne zusätzliche Strukturen wie Differenzierbarkeit, Monotonie u. s. w. aus. So erfordert ein typisches Konvergenzresultat z. B. eine Randbedingung, die Oberhalbstetigkeit der zugrundeliegenden mengenwertigen Abbildung und die kollektive Kompaktheit einer gewissen Familie von Abbildungen.

Letzteres Resultat wird im (etwas kurz geratenen) numerischen Teil auf Anfangs- und Randwertaufgaben angewandt, die aus der Steuerungstheorie stammen. Für Anfangswertaufgaben mit unstetiger rechter Seite erweisen sich dabei simpliziale Fixpunktalgorithmen als erheblich rechenaufwendiger als andere bekannte Verfahren. Für Randwertaufgaben mit mengenwertiger rechter Seite ohne zusätzliche Struktur scheinen jedoch überhaupt erstmalig theoretisch fundierte Lösungsansätze aufgezeigt worden zu sein.

Bayreuth

J. Zowe

Jahn, J., Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Linear Spaces (Methoden und Verfahren der mathematischen Physik, Band 31), Frankfurt am Main — Bern — New York: Peter Lang Verlag 1986, 310 pp., pb., SFR 65,00

Das Buch besteht aus drei Teilen: Teil I (Convex Analysis): Hier werden aus der Theorie der linearen topologischen Räume grundlegende Sätze, insbesondere solche, die sich mit Konvexität oder mit Halbordnung beschäftigen, zusammengestellt. Dieser Teil enthält auch Formulierungen des Hahn-Banach-Satzes, des Trennungssatzes für konvexe Mengen sowie Aussagen über Tangentialkegel).

Teil II (Theory of Vector Optimization): Nach der Einführung von verschiedenen Optimalitätsbegriffen werden Ersatz-Programme durch Linearformen und durch Halbnormen besprochen und damit dann notwendige beziehungsweise hinreichende Optimalitätsbedingun-

gen hergeleitet. Es folgt eine allgemeine Theorie der Lagrange-Multiplikatoren. Der Teil schließt mit einer Dualitätstheorie für Vektroptimierungsaufgaben.

Teil III (Mathematical Applications): Behandelt wird die Vektorapproximation (verallgemeinerte Kolmogorov-Bedingung und nichtlineare Tschebychev-Vektor-Approximation) und kooperative n-Personen Differentialspiele (Maximumprinzip und Existenzaussagen für optimale Kontrollen).

Das Buch gibt einen sehr guten Überblick über dieses Gebiet und eignet sich als Einführung sowie zu Selbststudium. Dazu dürfte besonders der erste ausführliche Teil von großem Nutzen sein. Am Ende der einzelnen Abschnitte wird die benutzte Literatur kurz kommentiert; außerdem befindet sich am Schluß ein ausführliches Literaturverzeichnis.

Die Optimierungstheorie, soweit sie sich nicht mit Rechenverfahren beschäftigt, ist in den letzten Jahren weitgehend eine Theorie der Vektroptimierung geworden. Daher ist ein von der Mathematik (wenn auch nicht vom Preis) her leicht zugängliches Werk sehr zu begrüßen.

Bonn

W. Vogel

Richenhagen, G., Carl Runge (1856–1927); Von der reinen Mathematik zur Numerik (Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik 1), Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1985, XIII, 355 S., kart., DM 90,—

*Que prendrons nous de là sinon qu'il ne nous
doit chaloir lequel ce soit des deux?*

Michel de Montaigne: Essais II, 12

Das vorliegende Werk ist als Band 1 einer Monographienreihe „Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik“ erschienen, die sich „an Mathematiker, Mathematikhistoriker, Mathematikdidaktiker, Mathematiklehrer; darüber hinaus ... an Vertreter verschiedener mathematischer Anwendungsgebiete, ... , Wissenschaftshistoriker, Sozialhistoriker, Wissenschaftstheoretiker“ wenden soll.

Der Autor setzt sich zum Ziel, „das mathematische Werk Carl Runges ... unter einer mathematikhistorischen Perspektive zu analysieren“ und dabei insbesondere „die von Runge innerhalb der numerischen Mathematik vertretene Konzeption auf ihre zentralen Begriffe und methodologischen Grundannahmen hin zu befragen ...“.

Die einzelnen Abschnitte sind folgendermaßen überschrieben: Einführung: Allgemeine Charakterisierungen der Mathematik des 19. Jahrhunderts (8 Seiten), 1. Kapitel: Die Weierstraßsche komplexe Analysis (35 Seiten), 2. Kapitel: Runge und die Weierstraßsche Analysis (34 Seiten), 3. Kapitel: Praktisches Rechnen und physikalische Arbeiten (56 Seiten), 4. Kapitel: Die numerische Mathematik Carl Runges (151 Seiten). Im Anhang finden sich u. a. Briefe, die im Zusammenhang mit Ruferteilungen an Runge stehen, eine Liste der bei Runge in Göttingen angefertigten Dissertationen sowie eine Zusammenstellung von dessen Publikationen. Das Literaturverzeichnis verweist auf 233 Titel anderer Autoren.

Für den Inhalt der Kapitel 1 bis 3 – eine Einführung in die Weierstraßsche Funktionentheorie, ein Abriss des wissenschaftlichen Werdegangs von Runge bis zu seinem 30. Lebensjahr sowie eine Darstellung von Runges Arbeiten zur Spektralanalyse – genüge die angegebene kursorische Zusammenfassung. Bereits an dieser Stelle sei jedoch ein Hinweis auf zahlreiche störende Druckfehler (von „Philosophie“ bis „singuläre Stellen“) sowie die durch insgesamt mehr als 700 (!) Verweisungen auf Fußnoten erschwerte Lesbarkeit des Textes nicht unterdrückt. Die Ausführungen im zentralen 4. Kapitel fordern sodann zu einer detaillierten Stellungnahme heraus.

Der Autor geht hier von der Auffassung aus, erst die im Laufe des 19. Jahrhunderts erfolgte schrittweise Präzisierung des Funktionsbegriffes habe die Voraussetzung zur Behandlung neuartiger Fragestellungen in der Numerik (Beispiel: beste Approximation) geschaffen. Alle folgenden Ausführungen werden nun fast ausnahmslos einer solcherart doch recht willkürlich konstruierten Polarität zwischen angeblich historischem (als „konstruktiv-arithmetisch“ bezeichneten) und neuzeitlichem (sog. „relational-deskriptiven“) Mathematikverständnis untergeordnet. Die Untersuchungen Runges fallen in diesem Rahmen weitgehend der zuerst genannten Klasse zu, während der Autor seine besondere Wertschätzung der zweitgenannten Sichtweise deutlich zum Ausdruck bringt. Wie wenig die genannte Unterscheidung zu einer objektiven Klärung der aufgeworfenen Problemstellung beiträgt, soll anhand zweier charakteristischer Beispiele wenigstens andeutungsweise erläutert werden.

Im Rahmen einer Behandlung von Runges Arbeiten zum Problem der Approximation von Funktionen wird der Versuch unternommen, dessen „Darstellungsapproximationen“ (z. B. in Form von Interpolationspolynomen) durch Gegenüberstellung des (in den Augen des Autors „relational-deskriptiven“) Konzepts der besten Approximation auszuspielen. Dies kann natürlich nur unter der Voraussetzung gut gehen, daß Näherungsprozesse wie z. B. die Interpolation mit geeignet festgelegten polynomialen Spline-Funktionen hierbei einfach außer acht gelassen werden. Auf ähnlich schwankendem Boden stehen die Ausführungen im Abschnitt über iterative Verfahren zur Gleichungsauflösung: einerseits fehlt jeder Hinweis auf Ehrmanns Untersuchungen aus dem Jahre 1959 über Iterationsverfahren höherer Ordnung, die sich – obwohl auf dem „im 17. und 18. Jahrhundert wurzelnden Rungeschen Konzept“ der lokalen Annäherung durch Potenzreihen basierend – in einfachster Weise auf Gleichungen in Banachräumen übertragen lassen, andererseits wird die letztgenannte Eigenschaft gerade als besonderer Vorzug der angeblich einer „relational-deskriptiven“ Gedankenwelt entsprungenen Überlegungen von Schröder (1870) zum selben Themenkreis herausgestellt. Angesichts derartiger Ungereimtheiten mutet es umso befremdlicher an, wenn sich der Autor in einem „Resümee“ (S. 268/69) dann auch noch zu so fragwürdigen Äußerungen wie etwa den beiden nachfolgend genannten versteigt: „Von daher ist einer Auffassung entgegenzutreten, die ... die numerische Bestimmung mathematischer Objekte ... zu ihrem (d. h. der Numerik, G. M.) wesentlichen Charakteristikum macht“ oder „Die Theorien der relational-deskriptiven Numerik ... sind ... im Vergleich zu konstruktiven Konzepten ... allgemeiner, verallgemeinerbarer (?) und einheitlicher strukturiert ... Demgegenüber zerfällt eine konstruktiv vorgehende Numerik in verschiedene, relativ schwach verbundene Verfahren mit einem jeweils schmalen Anwendungsbereich“.

Bedenklich erscheint schließlich auch die Tatsache, daß der Autor, wie er zusammenfassend feststellt, seine Ausführungen im Zusammenhang mit Überlegungen „welche Form angewandter Mathematik innerhalb der Schulmathematik sinnvoll ist“ sehen möchte und sich dabei dezidiert gegen eine Bevorzugung algorithmisch-konstruktiver Aspekte wendet. Sollten derartige Vorstellungen innerhalb der gegenwärtigen mathematik-didaktischen Diskussion zu einem *Schulcurriculum* in numerischer Mathematik – obwohl dies eigentlich kaum vorstellbar erscheint – am Ende doch die Oberhand gewinnen, so hätte dies zur Folge, daß ein solches Fach sich zum Nachteil der Betroffenen darin erschöpfen müßte, „durch die so gewonnene Freiheit die numerische Erschließung des zu approximierenden Objekts selbst zum Thema (zu) machen“ (S. 287) – fürwahr nicht gerade ein ermutigender Ausblick!

Angesichts der genannten Schwächen wird der angesprochene Adressatenkreis aus einer Lektüre des vorliegenden Buches nur sehr eingeschränkten Nutzen ziehen können. Als Folge einer dem Gegenstand unangemessenen Betrachtungsweise liefert es darüber hinaus auch kaum brauchbare Beiträge zu dem Versuch einer wissenschaftlichen Biographie von Carl Runge.

Schwarz, H.-R., Numerische Mathematik, Stuttgart: Teubner 1986, 500 S., kart., DM 46,—

Dieses Lehrbuch basiert auf der langjährigen Lehrerfahrung des Verfassers an der Universität Zürich, wo der dargestellte Stoff den Studenten in einem viersemestrigen Vorlesungszyklus zu je vier Wochenstunden vermittelt wurde. Behandelt werden die grundlegenden Methoden der numerischen Mathematik in einer bemerkenswert plastischen und ausführlichen Darstellung. Der Text ist durchzogen von einer großen Zahl von erläuternden numerischen Beispielen, anschaulichen graphischen Darstellungen, leicht in Computerprogramme umsetzbaren algorithmischen Beschreibungen und ergänzenden Übungsaufgaben. Dies alles zusammen verleiht dem vorliegenden Buch sein besonderes Charakteristikum. Die Stoffauswahl selbst bewegt sich weitgehend im Bereich des Üblichen, wobei hervorgehoben werden sollte, daß ein Kapitel von 63 Seiten über partielle Differenzierung elliptischer Randwertaufgaben mit Differenzenverfahren und mit der Methode der Finiten Elemente sowie einiges über Differenzenverfahren bei parabolischen Anfangs-Randwertaufgaben dargestellt werden. Extra genannt werden sollte auch ein Kapitel von 38 Seiten über lineare Optimierung und ein Beitrag von Herrn Dr. J. Waldvogel über die Trapezmethode sowie Transformationsmethoden bei der numerischen Integralberechnung. Zu allen wichtigen Ergebnissen finden sich Beweise, wobei der Verfasser es im Zweifelsfall vorzieht, sich auf einen Spezialfall zurückzuziehen bzw. ein Ergebnis zu zitieren, als sich in Extravaganzen zu ergeben.

Das vorliegende Werk sollte in ausreichender Anzahl in jeder Lehrbuchsammlung vorhanden sein, wobei es sich bei dem recht akzeptabel erscheinenden Preis von DM 46,— auch als Anschaffung für die Privatbibliothek anbietet.

Berlin

R. D. Grigorieff

Marchuk, G. I., Shaidurov, V. V., Difference Methods and Their Extrapolations (Applications of Mathematics 19), Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo: Springer-Verlag 1983, x, 334 pp., cloth, DM 158,—

Das Prinzip der „Extrapolation zum Limes“ ist eine universelle Methode zur Beschleunigung der Konvergenz von numerischen Algorithmen. Die Grundidee ist sehr einfach: Zur näherungsweisen Berechnung eines Limes $a(0) = \lim_{h \rightarrow 0} a(h)$ wird aus einzelnen Werten $a(h_i)$ eine einfach strukturierte, meist polynomiale Approximation $A(h)$ bestimmt und für $h = 0$ ausgewertet. Diese Vorgehensweise ist seit den ersten Ansätzen von Huygens (1654), zur Berechnung der Zahl π , und den bahnbrechenden Arbeiten von Richardson (1910, 1925) in den verschiedensten Bereichen der praktischen Mathematik mit großem Erfolg angewendet worden. Ihre theoretische Begründung liegt in dem Bestehen von asymptotischen Entwicklungen der Funktion $a(h)$ nach gewissen Potenzen von h ; deren Nachweis ist das eigentliche mathematische Problem bei der Analyse des Extrapolationsverfahrens. Die Masse der dazu erschienenen Einzelarbeiten ist inzwischen kaum noch überschaubar, so daß eine dem gesamten Komplex der „Extrapolation bei Differentialgleichungen“ gewidmete Monographie längst überfällig war.

Das vorliegende Buch gibt einen weitgehend in sich abgeschlossenen Überblick über die methodischen und theoretischen Aspekte der Extrapolation zum Limes bei der Diskretisierung von Anfangs- und Randwertaufgaben sowohl gewöhnlicher als auch partieller Differentialgleichungen. Der Inhalt ist wie folgt gegliedert:

1. *Allgemeine Eigenschaften der Extrapolation*: abstrakte Entwicklungssätze, Extrapolations-schemata, Nachkorrekturmethode;

2. *Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen*: implizite Mittelpunkregel, explizite Verfahren, „Splitting“-Methode bei groß-dimensionalen Systemen;
3. *Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen* (2. Ordnung): Randbedingungen 1. und 3. Art, Eigenwertaufgaben, lineare finite Elemente, semi-lineare Probleme;
4. *Elliptische Randwertaufgaben*: Poisson-Gleichung auf glattberandeten Gebieten des $\mathbf{R}^2$, ein semi-lineares Problem, Differenzenschemata bei unstetigen Koeffizienten und einspringenden Ecken;
5. *Instantiäre Probleme*: Wärmeleitungsgleichung, Transportgleichung, „Splitting“-Methode;
6. *Algebraische Probleme und Integralgleichungen*: Regularisierung singulärer Systeme, Grenzschichtprobleme, Fredholm'sche Integralgleichungen 2. Art, Volterrasche Integralgleichungen 1. und 2. Art.

Eine Reihe von technischen Hilfssätzen, die in mehreren Kapiteln verwendet werden, sind im Appendix zusammengefaßt.

Bei der Herleitung der asymptotischen Fehlerentwicklungen wird zugunsten der Übersichtlichkeit meist auf größtmögliche Allgemeinheit verzichtet. Die naturbedingte Sprödigkeit des Stoffes wird dadurch etwa gemildert. Der Beweisgang ist dabei immer wieder dergleiche: Einsetzen des Entwicklungsansatzes

$$u(x) = u_h(x) + \sum_{j=1}^m h^j a_j(x) + R_m(x)$$

in die Differenzengleichung liefert zunächst Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Koeffizienten $a_j(x)$. Ist die zu approximierende Lösung u hinreichend glatt, so sollte das Restglied $R_m(x)$ derselben Differenzengleichung mit einer rechten Seite von der Ordnung $O(h^{m+1})$ genügen. Der verbleibende, im allg. nicht triviale Teil des Beweises ist nun die Herleitung von scharfen A-priori-Schranken für das diskrete Problem, mit deren Hilfe sich dann die gewünschte $O(h^{m+1})$ -Abschätzung für $R_m(x)$ ergibt. Die Standardmethode zur Gewinnung von A-priori-Schranken ist das „diskrete“ Maximumprinzip. Bei Verwendung „symmetrischer“ Differenzen lassen sich oft Fehlerentwicklungen nach Potenzen von h^2 erreichen, was die Effizienz der Extrapolation nach $h = 0$ natürlich wesentlich erhöht. Obwohl sich dieses Schema von Kapitel zu Kapitel wiederholt, vermißt man die ordnende Systematik in der Darstellung; der ganze Text wirkt etwas zusammengestoppelt. Dies wird besonders deutlich im letzten Kapitel, wo die Integralgleichungen völlig unmotiviert zusammen mit den algebraischen Problemen behandelt werden, obwohl gerade sie sich direkt in den Rahmen der abstrakten Theorie in Kapiteln 1 einordnen lassen.

Das Literaturverzeichnis gibt mit 146 Titeln etwa den Stand von 1979, dem Erscheinungsjahr der russischsprachigen Originalausgabe wieder. Bei der vorliegenden, überarbeiteten englischen Ausgabe wurde die Gelegenheit zu einer Aktualisierung leider nur unvollständig genutzt; man vermißt eine Reihe wichtiger Beiträge nicht-sowjetischer Autoren insbesondere zur Extrapolation bei partiellen Differentialgleichungen. Schließlich ist anzumerken, daß die Qualität der englischen Übersetzung nicht dem entspricht, was man sonst vom Springer-Verlag gewohnt ist. Die auffällige Häufung von inhaltlichen Allgemeinplätzen in den Textpassagen ist aber sicher nicht nur dem Übersetzer anzulasten.

Trotz aller der erwähnten Schwachpunkte stellt das Buch aber unzweifelhaft eine Bereicherung der einschlägigen Fachliteratur dar, insbesondere dadurch, daß hier erstmals die bedeutenden Beiträge der sowjetischen Mathematik zur Extrapolationsmethode in geschlossener Form zugänglich gemacht sind.

Törnig, W., Gipser, M., Kaspar, B., Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen der Technik (Mathematische Methoden in der Technik), Stuttgart: Teubner 1985, 183 S., kart., DM 34,—

Der vorliegende Band ist der erste einer neuen Paperback-Serie, die der Vermittlung moderner mathematischer Methoden in vorwiegend technischen Anwendungsbereichen außerhalb der Universitäten gewidmet ist. Erklärtes Ziel der Herausgeber ist die „Aufbereitung mathematischer Forschungsergebnisse und darauf aufbauender Methoden in einer für den Anwender geeigneten Form: Erläuterung der Begriffe und Ergebnisse mit möglichst elementaren Mitteln; Beweise mathematischer Sätze, die bei der Herleitung und Begründung von Methoden benötigt werden, nur dann, wenn sie zum Verständnis unbedingt notwendig sind; ausführliche Literaturhinweise; typische und praxisnahe Anwendungsbeispiele“.

Der vorliegende Text entspricht in Form und Inhalt weitgehend dieser Programmatik. Er bietet Lesern auch mit verhältnismäßig geringen einschlägigen Vorkenntnissen einen gut verständlichen Einblick in moderne Methoden zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen. Beschrieben werden die Grundzüge von Diskretisierungen elliptischer Randwertaufgaben zweiter und vierter Ordnung mit Hilfe von „finiten Differenzen“ und „finiten Elementen“. Bei letzteren werden ausführlich alle Durchführungsphasen von der Wahl der Ansatzfunktionen bis hin zur Kompilierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix erläutert. Verhältnismäßig viel Raum wird der Diskussion von Lösungsmethoden für die entstehenden algebraischen Gleichungssysteme eingeräumt. Erwähnenswert ist, daß in diesem Zusammenhang auch die „Mehrgittermethode“ Berücksichtigung findet. Seinem anspruchsvollen Titel wird der Text allerdings nur in begrenztem Umfang gerecht, da er sich ausschließlich mit der Lösung von stationären, d. h. in der Regel elliptischen, Problemen beschäftigt. Die Darstellung ist bedingt durch den begrenzten Umfang streckenweise etwas oberflächlich. Außerdem haben sich eine Reihe von Ungenauigkeiten eingeschlichen, die bei einem nicht einschlägig vorgebildeten Leser, und für solche ist der Text ja gerade gedacht, zu Mißverständnissen führen können; z. B. darf man auf S. 19 beim Randwertproblem der Laplace-Gleichung Funktionswerte nicht nur in einzelnen isolierten Randpunkten vorschreiben, und die Systemmatrix der „Fünfpunkte“-Diskretisierung des Laplace-Operators auf S. 40 ist auch bei der natürlichen zeilenweiser Knotennumerierung „konsistent geordnet“ und damit der Theorie des SOR-Verfahrens zugänglich.

Alles in allem ist der Text eine leicht verständliche und anregende Lektüre für Fachfremde, die sich einen groben Überblick über einige der modernen numerischen Methoden bei elliptischen Randwertaufgaben verschaffen wollen. Als Ergänzung oder gar Ersatz für einschlägige Vorlesungen an wissenschaftlichen Hochschulen ist er weniger geeignet und sicher auch nicht gedacht.

Heuser/Wolf

Algebra, Funktionalanalysis und Codierung

Eine Einführung für Ingenieure

Von Prof. Dr. rer. nat. Harro Heuser, Universität Karlsruhe,
und Prof. Dr.-Ing. Hellmuth Wolf, Universität Karlsruhe

1986. 168 Seiten mit 48 Bildern und 205 Beispielen.

16,2 x 22,9 cm.

ISBN 3-519-02954-5 Kart. DM 34,—

Die Mathematik durchdringt in zunehmendem Maße die Ingenieurwissenschaften. Ingenieure benötigen Kenntnisse auf mathematischen Gebieten, an deren Anwendbarkeit bis dahin kaum jemand glaubte. Mathematiker sehen sich mit dem Problem konfrontiert, diese Kenntnisse zu vermitteln, wofür jedoch im Rahmen der klassischen Ingenieurmathematik an wissenschaftlichen Hochschulen kein Platz mehr ist. Der Ingenieur muß daher diese Lücken durch Sondervorlesungen oder Selbststudium füllen. Die Autoren, ein Mathematiker und ein Ingenieur, versuchen mit diesem Buch hierbei behilflich zu sein, indem sie einige wichtige Gebiete der „modernen“ Mathematik und deren Anwendbarkeit in möglichst verständlicher Form darstellen.

Aus dem Inhalt

Mengen (Äquivalenz- und Ordnungsrelationen, Funktionen) /
Metrische Räume (topologische Grundbegriffe, Konvergenz
und Stetigkeit) / Algebraische Strukturen (Gruppen, Ringe
und Körper, Vektorräume, Homomorphismen und lineare
Operatoren, homomorphe Systeme) / Normierte Räume
(Banachräume, stetige lineare Operatoren und Funktionale,
Innenprodukt- und Hilberträume) / Nullstellen von Polynomen
(Reduzibilität, Nullstellenbestimmung und Minimalpolynome)
/ Codierung (fehlererkennende und fehlerkorrigierende
Codes, lineare und zyklische Block-Codes)



B. G. Teubner Stuttgart

Hackbusch

Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen

Von Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang Hackbusch, Universität Kiel

1986. 280 Seiten mit 40 Bildern, zahlreichen Beispielen und Übungsaufgaben. 13,7 x 20,5 cm. (Teubner Studienbücher)
ISBN 3-519-02074-2 Kart. DM 38,—

Das vorliegende Buch entstand aus einer Vorlesung über die numerische Behandlung elliptischer Differentialgleichungen für Studenten, die nicht über Kenntnisse in partiellen Differentialgleichungen und teilweise auch nicht in Funktionalanalysis verfügen. Hieraus ergab sich die Notwendigkeit, Theorie und Numerik elliptischer Gleichungen zu kombinieren und gemeinsam zu präsentieren. Einerseits lassen sich ohne Theorie numerische Probleme nicht vertiefen, während sich andererseits eine abschließliche Darstellung der Theorie oft von den konkreten Problemen entfernt. Da das Buch beiden Aspekten Rechnung trägt und Theorie und Numerik vereinigt, eignet es sich sowohl für das Selbststudium wie auch als Grundlage für eine entsprechende Vorlesung. Hinsichtlich der numerischen Behandlung werden Differenzenverfahren und Finite-Elemente-Methoden ausführlich diskutiert. Der gebotene Stoff sollte eine solide Grundlage für die Beschäftigung mit weitergehender Literatur sowohl aus dem Bereich der Theorie partieller Differentialgleichungen wie auch der Numerik bilden.

Aus dem Inhalt

Potentialgleichung: Singularitätenfunktion, Mittelwerteigenschaft, Maximumprinzip / Poisson-Gleichung: Greensche Funktion, Neumann-Randwertaufgabe / Differenzenmethode für Poisson-Gleichung: 5-Punktformel, M-Matrizen, Konvergenz, Neumann-Randwertaufgabe, allgemeines Gebiet / Allgemeine Randwertaufgabe: Dgl. 2. Ordnung, allgemeine Randbedingung, Aufgaben höherer Ordnung, biharmonische Dgl. / Exkurs über Funktionalanalysis: Sobolev-Räume, Fourier-Transformation, Dualräume, kompakte Operatoren, Bilinearformen / Variationsformulierung / Finite Elemente: Konstruktion, Fehlerabschätzungen, weitere Details / Regularität der Lösung / Dgl. mit unstetigen Koeffizienten / Die Konvektions-Diffusions-Gleichung und ihre Diskretisierung / Eigenwertprobleme: Analyse der Finite-Element-Diskretisierung / Stokes-Gleichung: Variationsformulierung, Sattelpunktprobleme, Lösbarkeit, Regularität der Lösung, gemischte finite Elemente, Stabilität, Babuska-Brezzi-Bedingung, Fehlerabschätzung



B. G. Teubner Stuttgart

v. Finckenstein

neu

Grundkurs Mathematik für Ingenieure

Von Prof. Dr. rer. nat. Karl Graf Finck v. Finckenstein, Technische Hochschule Darmstadt

1986. VIII, 448 Seiten mit zahlreichen Bildern und Beispielen.
16,2 × 22,9 cm. Kart. DM 42,-
ISBN 3-519-02961-8

Dieses einführende Lehrbuch ist aus einer viersemestrigen Grundvorlesung entstanden, die wiederholt für Studierende des Faches Maschinenbau an der Technischen Hochschule Darmstadt gehalten wurde. Die Darstellung wendet sich vorwiegend an Studierende der Ingenieurwissenschaften, dürfte aber auch für andere Studiengänge, in denen Mathematik benötigt wird (etwa Natur- oder Wirtschaftswissenschaften) von Nutzen sein.

Das Buch ist zum Gebrauch neben Vorlesungen und Übungen gedacht. Es bietet in möglichst übersichtlicher und knapper Form etwa den mathematischen Stoff dar, den ein Student der Ingenieurwissenschaften zum Vorexamen beherrschen sollte. Angesichts der dem Umfang des Buches gesteckten Grenzen mußte der Stoff natürlich teilweise gerafft werden. So sind zum Beispiel viele Beweise nur skizziert bzw. weggelassen. Zur Vertiefung des Stoffes sei auf das vierbändige Lehrbuch von Burg/Haf/Wille: „Höhere Mathematik für Ingenieure“ verwiesen und dem Leser empfohlen.

Aus dem Inhalt

Grundbegriffe / Polynome / Analytische Geometrie im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ / Komplexe Zahlen / Konvergenz und Stetigkeit / Differentiation von Funktionen / Reihen / Taylor'sche Formel und Potenzreihen / Integration von Funktionen / Lineare Algebra / Differentialgeometrie auf Kurven / Differentiation von Funktionen mehrerer Variabler / Integration von Funktionen mehrerer Variabler / Vektoranalysis und Integralsätze / Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung / Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme / Rand- und Eigenwertprobleme / Fourier-Reihen / Partielle Differentialgleichungen / Funktionen einer komplexen Veränderlichen / Grundbegriffe der Variationsrechnung

B. G. Teubner Stuttgart



Natterer

The Mathematics of Computerized Tomography

By Prof. Dr. rer. nat. Frank Natterer, Universität Münster

1986. 222 pages. 16,2 x 22,9 cm.

(Coproduction Wiley-Teubner)

ISBN 3-519-02103-X Bound DM 72,—

The central subject of this book is the reconstruction of a function from line or plane integrals, with special emphasis on applications in science, radiology and engineering. It not only covers the relevant mathematical theory of the Radon transform and related transforms, but also studies more practical questions such as sampling, resolution, stability and accuracy. Much of the book is devoted to the derivation, analysis and practical examination of reconstruction algorithms, both for standard problems and problems with incomplete data.

An appendix gives a brief review of the mathematical background needed, making the book self-contained. Also included is a four-page section of colour plates showing the results of image reconstruction by various methods, using both complete and incomplete data.

The book is intended both for the mathematician who wants to understand the theory and algorithms of computerized tomography, and also for the practitioner who wants to apply it to his own field. It should be of particular interest to mathematicians working on ill-posed problems, remote sensing, inverse scattering, Radon transforms, Fourier analysis and numerical analysis; to engineers in fields such as medical and scientific imaging, non-destructive testing, radio astronomy, electron microscopy and remote sensing; and to computer scientists in fields such as image processing and reconstruction.

Contents

Computerized Tomography / The Radon Transform and Related Transforms / Sampling and Resolution / Ill-posedness and Accuracy / Reconstruction Algorithms / Incomplete Data / Mathematical Tools



B. G. Teubner Stuttgart