92. Band Heft 4
ausgegeben am 31. 10. 1990

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1990

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 118,— einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Berthold Gaupp

Printed in Germany — ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

92. Band

B. G. Teubner Stuttgart 1990

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, Hemsbach

Inhalt

1. Abteilung

2. Abteilung
Buchbesprechungen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 92, Heft 4

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

G. Mazzola: Mathematische Musiktheorie: Status Quo 1990
R. Remmert: Karl Stein, Träger der ersten Cantor-Medaille
R. Tobies: Warum wurde die Deutsche Mathematiker-Vereinigung innerhalb der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte gegründet? – Mathematiker-Briefe zur Gründungsgeschichte der DMV –

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen weren.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
92 (1990) 145–152
AMS subject classification: 53 C 20

Manifolds of non-positive curvature

W. Ballmann, Bonn

A fundamental aspect of the intrinsic geometry of a Riemannian manifold is its local or global trigonometry. Bounds on the (sectional) curvature allow for a comparison with the corresponding simply connected complete Riemannian manifolds of constant curvature, namely the round spheres $S^n(r)$ of radius r, Euclidean space E^n and the hyperbolic spaces $H^n(\varkappa)$ of curvature $\varkappa < 0$. In this paper we discuss Riemannian manifolds of non-positive curvature. In terms of trigonometry, non-positivity of the curvature means that the sum of the interior angles in small geodesic triangles is at most π. Equivalently, the Riemannian distance is a convex function in sufficienctly small open sets. This latter property is the prevailing feature of these manifolds.

My aim is to introduce the reader into the theory of manifolds of non-positve curvature. The emphasis is on non-positive; strictly negative curvature is not the heart of the matter here. My presentation is neither comprehensive nor self-contained, and suggested further reading for the interested reader is chapter 9 in [CE], or [BGS], or [E3].

In the first section of this paper I present some examples of spaces of non-positive curvature. In the second section I derive some elementary properties of such spaces. In the third section I discuss some selected results in the theory of such spaces.

1 Examples

Example 1. The simplest example is Euclidean space E^n. Its curvature vanishes identically. If M is a complete, connected Riemannian manifold with vanishing sectional curvature, a so-called *flat* manifold, then the universal covering space $\tilde{M}$ of M (endowed with the induced metric) is (isometric to) E^n. A reference for flat manifolds is [Wf].

Example 2. A very important class of examples are the symmetric spaces of non-positive curvature. They can be obtain as follows: Let $G \subset SL(n, \mathbb{R})$ be a closed subgroup such that $G^t = G$. Assume that

$$\mathscr{P} = \mathscr{G} \cap \mathscr{P}(n, \mathbb{R}) \neq 0,$$

where $\mathscr{G}$ denotes the Lie algebra of G and $\mathscr{P}(n, \mathbb{R})$ the space of symmetric $(n \times n)$-matrices with real entries. Since $G^t = G$, the map $\sigma(A) = (A^t)^{-1}$ defines an involution of G. The subgroup $K = G \cap \boldsymbol{SO}(n, \mathbb{R})$ of fixed points of σ is a compact subgroup of G. Let $M = G/K$ and $\pi: G \to M$ the canonical projection. Then the differential of π at the identitiy matrix $I \in G$ identifies $\mathscr{P}$ and T_oM, where $o = \pi(1)$. With respect to this identification, the restriction of

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} tr(XY)$$

to $\mathscr{P}$ gives rise to a G-invariant Riemannian metric on M. In particular, M is a *homogeneous space*, that is, for all $x, y \in M$ there is an isometry of M mapping x to y. Moreover, at each point there is an isometry reflecting the geodesics through that point – the defining property of a symmetric space. At o the reflection is the map induced by σ. The curvature tensor lifted to $\mathscr{P}$ is

$$R(X, Y)Z = -[Z, [Y, X]].$$

In particular, for X, Y orthonormal, we obtain for the curvature

$$\begin{aligned} K(X \wedge Y) &= \langle R(X, Y)Y, X \rangle = -\langle [Y, [Y, X]], X \rangle \\ &= \langle [X, Y], [X, Y] \rangle \leqslant 0, \end{aligned}$$

where the latter inequality holds since $[X, Y] \in \mathscr{SO}(n, \mathbb{R})$. Concrete examples in this class of examples are $G = \boldsymbol{SL}(n, \mathbb{R})$ or $G = \boldsymbol{O}_0(p, q)$, the identity component of the group of matrices leaving invariant the quadratic form

$$Q(x, y) = -x^2 + y^2$$

on $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $p, q \geqslant 1$. In the latter case

$$K = \boldsymbol{O}_0(p, q) \cap \boldsymbol{SO}(n, \mathbb{R}) = \boldsymbol{SO}(p) \times \boldsymbol{SO}(q)$$

and G/K can be identified canonically with the space of all p-dimensional subspaces of $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ on which Q is negative definite. For $p = 1$, we obtain the projective model of the hyperbolic space of curvature -1.

A concise introduction into symmetric spaces can be found in [CE] or [K], more can be found in [H] and [Wf].

Example 3. Homogeneous spaces of non-positive curvature have been classified by Azencott and Wilson [AW1], [AW2] (those of negative curvature independently by Heintze [Hei]). They can be represented as certain solvable Lie groups with left-invariant metric. For example, if M is a symmetric space of non-compact type and KAN is an Iwasawa decomposition of its group of isometries, $S = AN$ is a solvable group and simply transitive on M. Hence M is isometric to S with an appropriate left-invariant metric.

A good source about the homogeneous spaces is the recent thesis by Wolter [Wt], but also [Hei] is suggested reading.

Example 4. If M_1 and M_2 are Riemannian manifolds, then the curvature tensor R of their Riemannian product is

$$R((X_1, X_2), (Y_1, Y_2))(Z_1, Z_2) = (R_1(X_1, Y_1)Z_1, R_2(X_2, Y_2)Z_2),$$

and thus $M_1 \times M_2$ has non-positive curvature if M_1 and M_2 have non-positive curvature.

Suppose M has non-positive curvature and $f: I \to \mathbb{R}$ is a positive smooth convex function, where I is an open interval. Then $I \times M$ with the *warped metric* $dt^2 + f^2(t)g$, where g denotes the metric of M, has non-positive curvature. If f is strictly convex without minimum, then the curvature of $I \times M$ is strictly negative. For $M = E^{n-1}$, $I = \mathbb{R}$ and $f(t) = e^{ct}$ we obtain the horospherical model of the hyperbolic space of curvature $-c^2$.

Warped metrics are a very effective tool in many direct geometric constructions of manifolds of non-positive curvature.

2 Elementary Properties

Throughout this section, we assume that M is connected, complete, and of curvature $K_M \leqslant 0$. If furthermore M is simply connected, then M will be called a *Hadamard manifold.*

Information about the behaviour of neighbouring geodesics is very useful in the discussion of the geometry of M. Suppose γ is a geodesic and suppose $\gamma(s, t)$ is smooth in $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ and t such that $\gamma = \gamma(0, \cdot)$. Then $\gamma_s = \gamma(s, \cdot)$ is called a (smooth) variation of γ. If γ_s is a geodesic for all s, then the corresponding variation field $Y(t) = \dfrac{\partial \gamma}{\partial s}(0, t)$ is a Jacobi field, that is, it satisfies the Jacobi equation

$$Y''(t) + R(Y(t), \dot\gamma(t))\dot\gamma(t) = 0,$$

where R is the curvature tensor of M. Conversely, any Jacobi field along γ arises as variation field of a variation of γ by geodesics.

2.1 Let γ be a geodesic in M and Y a Jacobi field along γ. If $Y(t_0) \neq 0$, then at t_0

$$\begin{aligned} \|Y\|'' &= (\langle Y', Y\rangle/\|Y\|)' \\ &= \frac{1}{\|Y\|^2}((\langle Y'', Y\rangle + \langle Y', Y'\rangle)\|Y\| - \langle Y', Y\rangle^2/\|Y\|) \\ &\geqslant \langle R(Y, \dot\gamma)\dot\gamma, Y\rangle/\|Y\| \geqslant 0, \end{aligned}$$

and hence $\|Y\|$ is a convex function. In particular, if $Y(0) = 0$, then

$$\|Y(t)\| \geqslant t \cdot \|Y'(0)\| \quad \text{for all} \quad t \geqslant 0.$$

Hence we obtain for the exponential map at $p \in M$,

$$\text{(2.2)} \quad \|\mathrm{dexp}_p(v) \cdot w\| \geqslant \|w\| \quad \text{for all} \quad v, w \in T_pM.$$

In particular, $\exp_p$ has maximal rank everywhere and increases lengths of curves (measured in the Euclidean sense in T_pM).

2.3 Theorem (Hadamard-Cartan). For any $p \in M$, $\exp_p : T_pM \to M$ is a covering projection.

Proof (sketch). We proved in (2.2) that $\exp_p$ has maximal rang everywhere on T_pM. Hence $g^* = \exp_p^*(g)$, g the Riemannian metric on M, is a Riemannian metric on T_pM. This metric is complete since its geodesics through O_p are the lines $tv, t \in \mathbb{R}, v \in T_pM$, which are defined for all $t \in \mathbb{R}$. Now an elementary lemma from Riemannian geometry finishes the proof, cf. 1.32 in [CE]. □

In particular, if M is Hadamard, then $\exp_p$ is a diffeomorphism for all $p \in M$ and for all $p \neq q$ in M, there is a unique geodesic (up to parametrisation) through p and q. In the general case, we conclude that $\pi_i(M) = 0$ for $i \geqslant 2$, that is, M is a $K(\pi, 1)$. Thus the homotopy type of M is determined by $\pi_1(M)$.

2.4 Cosine inequality. This is a special case of the "Inverse Toponogov". Assume M Hadamard, $p \in M$, v, $w \in T_pM$ and let $q = \exp_p(v)$, $r = \exp_p(w)$. Then

$$\operatorname{dist}(q, r) \geqslant \|v - w\|$$

or equivalently, if v, w are linearly independent and $\alpha = \sphericalangle(v, w)$,

$$\operatorname{dist}^2(q, r) \geqslant \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\| \cdot \|w\| \cos \alpha$$

Equality holds iff $\exp_p$ maps the (Euclidean) triangle spanned by 0_p, v and w isometrically and totally geodesically into M, that is, p, q and r span a *flat triangle.*

A reformulation of the cosine inequality is as follows: if p, q and r are the vertices of a geodesic triangle and α, β, γ its interior triangles, then

$$\alpha + \beta + \gamma \leqslant \pi$$

and equality holds iff p, q, and r span a flat triangle.

Proof of the cosine inequality. We may assume that v and w are linearly independent. Let $c : [0, 1] \to M$ be the unique geodesic in M connecting q and r, and let $\tilde{c} = \exp_p^{-1} \circ c$. By (2.2) we have

$$L(c) \geqslant L(\tilde{c}) \geqslant \|v - w\|.$$

Equality implies that $\tilde{c}$ is the line segment joining v to w,

$$\tilde{c}(s) = (1 - s)v + sw$$

and that equality must hold in the computation 2.1 for the Jacobi fields

$$Y_s(\mathrm{t}) = \frac{\partial}{\partial s} \exp_p(t\tilde{c}(s)).$$

It is now straightforward to conclude the equality discussion in the cosine inequality. □

2.5 Corollary. Assume M Hadamard and let $(\gamma_1, \ldots, \gamma_4)$ be a geodesic quadrilateral in M with angles α_i subtended by γ_i and γ_{i-1} ($i \bmod 4$). Then

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \leqslant 2\pi$$

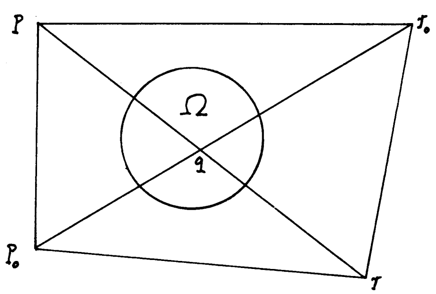
and equality holds iff $(\gamma_1, \ldots, \gamma_4)$ span a flat quadrilateral, that is, if p is a vertex, $\exp_p^{-1}(\gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_4)$ is a plane convex Euclidean quadrilateral and $\exp_p$ maps the quadrangular surface bounded by it isometrically and totally geodesically into M.

2.6 Local rigidity of E^n (after Gromov). Let g_0 be the Euclidean metric on $\mathbb{R}^n$, so $E^n = (\mathbb{R}^n, g_0)$, and let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain. If g is a Riemannian metric on $\mathbb{R}^n$ such that $g = g_0$ on $\mathbb{R}^n - \Omega$ and $K_g \leqslant 0$, then $(\mathbb{R}^n, g)$ is isometric to E^n.

Proof. By enlarging Ω is necessary we may assume that Ω is convex. We will construct now an isometry

$$F : (\mathbb{R}^n, g_0) \to (\mathbb{R}^n, g)$$

such that $F(p) = p$ for all $p \in \mathbb{R}^n - \Omega$. To that end let $q \in \Omega$ and let $\gamma_0 : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ be a line segment such that $\gamma_0(0) = p$ and $\gamma_0(1) = r$ are not contained in Ω and such that $\gamma(t_0) = q$ for some $t_0 \in (0, 1)$. Now $(\mathbb{R}^n, g)$ is Hadamard, hence there is unique g-geodesic $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ such that $\gamma(0) = p$ and $\gamma(1) = r$. We define $F(p) = \gamma(t_0)$.
We have to show that F is well-defined. To that end, choose a line segment σ_0 through q as in the figure below, $q = \sigma(s_0)$, such that the line segments joining p to p_0, p_0 to r, r to r_0 and r_0 to p do not meet $\bar{\Omega}$.



Let σ be the g-geodesic from p_0 to r_0. Now the edges of the g-quadrilateral spanned by (p, p_0, r, r_0) coincide with the edges of the g_0-quadrilateral (they do not meet Ω), and hence the angles at the vertices of the g-quadrilateral sum up to 2π. By (2.5), the g-quadrilateral is flat and hence $\sigma(s_0) = \gamma(t_0)$. It now follows easily that F is well-defined, and hence F is an isometry by the way it is defined. □

Remark (Gromov). In a symmetric space of non-compact type, if γ and $\tilde{\gamma}$ are geodesics through the same point p, there exists a sequence $\gamma = \gamma_0, \ldots, \gamma_k = \tilde{\gamma}$ of geodesics through p and a sequence of flat totally geodesic planes $F_1, \ldots, F_k$ through p such that γ_{i-1} and γ_i are contained in F_i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Hence the above argument applies and shows the local rigidity of the symmetric spaces of non-compact type.

3 Selected results

One of the main problem in the theory of manifolds of non-positive curvature is to find the pin-point at which results, which have been established for spaces with negative curvature say, fail to hold for the whole class. As a paradigm take the extension by Gromoll-Wolf and Lawson-Yau (and, somewhat more special, by Alber [A]) of Preissmann's theorem. The latter asserts, for a compact manifold M of negative curvature, that every non-trivial subgroup of $\pi_1(M)$ is infinite cyclic. The extension asserts, for M compact with non-positive curvature, that an abelian subgroup of $\pi_1(M)$ is free and represented by a totally geodesically and isometrically immersed flat torus, see [CE].

Another aspect is that of the rigidity of certain spaces of non-positive curvature. An elementary example is the local rigidity of Euclidean spaces, discussed in section 2. Another example is the Splitting Theorem of Gromoll-Wolf and Lawson-Yau, see [CE]. In the last ten years, the celebrated Rigidity Theorem of Mostow has spurred exciting developments in Riemannian geometry. Extending part of Mostow's result, Gromov proved: if M and M^* are compact manifolds of non-positive curvature and M^* is locally irreducible and locally symmetric of non-compact type of rank at least two, then an isomorphism between $\pi_1(M)$ and $\pi_1(M^*)$ is induced by an isometry between M and M^* (if the metric of M^* is normalized appropriately), see [BGS] and for the locally reducible case cf. [E2]. As for compact quotients of the hyperbolic spaces $\mathbb{C}H^n$, $\mathbb{H}H^n$ and CaH^2, Hamenstädt has the following extension of Mostow's theorem (unpublished): if M is a compact manifold of negative curvature which is $\frac{1}{4}$-pinched, that is,

$$\max\{K_M(\sigma) \mid \sigma \subset TM\} \leqslant \frac{1}{4}\min\{K_M(\sigma) \mid \sigma \subset TM\}$$

and M^* is a compact quotient of one of the above hyperbolic spaces, then an isomorphism between $\pi_1(M)$ and $\pi_1(M^*)$ is induced by an isometry between M and M^* (if the metric of M^* is normalized appropriately). For quotients of $\mathbb{C}H^n$, Hernandez showed recently that is suffices indeed to assume pointwise $\frac{1}{4}$-pinching for M, that is, for each $p \in M$ we have

$$\max\{K_M(\sigma) \mid \sigma \subset T_pM\} \leqslant \frac{1}{4}\min\{K_M(\sigma) \mid \sigma \subset T_pM\} < 0,$$

see [Hr]. For $n=2$, this had been proved by Ville [V]. For quotients of $\mathbb{H}H^n$ and CaH^2, it also suffices to assume that the curvature operator on M is non-positive. This was shown by Corlette [C]. Whereas the arguments of Hamenstädt involve the dynamic behaviour of the geodesic flow and quasiconformal maps, Hernandez and Corlette use the theory of harmonic maps – building on the work of Eells and Sampson [ES], Siu [S] and others.

Say that $v \in T_1M$ has rank k if the space of parallel Jacobi fields along the geodesic γ_v determined by v, including the field $\dot{\gamma}_v$, has dimension k and set

$$\operatorname{rank}(M) = \min\{\operatorname{rank}(v) \mid v \in T_1M\}.$$

For locally symmetric spaces this coincides with the usual notion of rank. The main result about the rank now says that M is locally symmetric if M is compact, locally irreducible and of rank at least two, see [BBE], [BBS], [B2], [BS]; cf. also [EH] for a generalization. One of the reasons that this result is interesting is the fact that rank 1 manifolds share many properties with manifolds of negative curvature. For example, if M is compact and of rank one, then M has a unit speed geodesic which is dense in $T_1 M$, see [B1]. In [BB] it is also claimed that the geodesic flow on $T_1 M$ is ergodic. However, the proof there contains a gap. What is really shown is that the geodesic flow is ergodic on the open and dense set of unit vectors of rank one. In [B3] it is shown that the Dirichlet problem at $\partial\tilde{M}$ is solvable, where $\tilde{M}$ is the universal covering space of M.

Via a certain classification of the locally reducible spaces, due to Eberlein, the distinction into rank one spaces and locally symmetric spaces above is also useful to obtain results about general manifolds of non-positive curvature. For example, via a result of Tits which covers the case of locally symmetric spaces, one obtains that the fundamental group of a compact manifold of non-positive curvature contains a free non-abelian subgroup iff the manifold is not flat, see [BE].

A k-flat in M is a totally geodesically and isometrically immersed k-dimensional Euclidean space E^k. We say that a k-flat is *closed* if there is a lattice Γ in E^k such that the immersion factors over E^k/Γ. If M is compact, of non-positive curvature and $\operatorname{rank}(M)=k$, then every geodesic in M is contained in a k-flat, see [BBE]. For a dense set of vectors, this k-flat is unique and closed, see [BBS]. A related question is as follows: if a compact manifold of non-positive curvature contains a k-flat, does it also contain a closed k-flat? In a recent and very interesting paper by Bangert and Schroeder this is affirmed in the analytic case, see [BSch]. Now a compact manifold of non-positive curvature satisfies the visibility axiom of Eberlein and O'Neill – a form of global hyperbolicity – iff it does not contain a 2-flat, see [E1]. Hence, if it is analytic as well, it satisfies the visibility axiom iff $\pi_1(M)$ satisfies the Preissmann property: every non-trivial abelian subgroup of $\pi_1(M)$ is infinite cyclic.

References

[A] Alber, S. I.: The topology of functional manifolds and the calculus of variations in the large. Russian Math. Surveys **25**, 4 (1970) 51–117

[AW1] Azencott-E., R.; Wilson, E.: Homogeneous manifolds with negative curvature I. Trans. Amer. Math. Soc. **215** (1976) 323–362

[AW2] Azencott-E., R.; Wilson, E.: Homogeneous manifolds with negative curvature II. Mem. Amer. Math. Soc. **8** (1976)

[B1] Ballmann, W.: Axial isometries of manifolds of non-positive curvature. Math. Ann. **259** (1982) 131–144

[B2] Ballmann, W.; Nonpositively curved manifolds of higher rank. Ann. of Math. **122** (1985) 597–609

[B3] Ballmann, W.: On the Dirichlet problem at infinity for manifolds of nonpositive curvature. Forum Math. **1** (1989) 201–213

[BB] Ballmann, W., Brin, M.: On the ergodicity of geodesic flows. Ergodic Theory & Dynamical Systems **2** (1982) 311–315

[BBE] Ballmann, W.; Brin, M., Eberlein, P.: Structure of manifolds of nonpositive curvature. I. Ann. of Math. **122** (1985) 171–203

[BBS] Ballmann, W.; Brin, M.; Spatzier, R.: Structure of manifolds of nonpositive curvature. II. Ann. of Math. **122** (1985) 205–235

[BE] Ballmann, W.; Eberlein, P.: Fundamental group of manifolds of nonpositive curvature. J. Differential Geometry **25** (1987) 1–22

[BGS] Ballmann, W.; Gromov, M.; Schroeder, V.: Manifolds of nonpositive curvature. Boston – Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1985

[BSch] Bangert, V.; Schroeder, V.: Existence of flat tori in analytic manifolds of nonpositive curvature. Preprint, Bern – Münster 1989

[CE] Cheeger, J.; Ebin, D.: Comparison Theorems in Riemannian Geometry. Amsterdam – Oxford: North Holland 1975

[C] Corlette, K.: Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry. Preprint, Chicago 1990

[E1] Eberlein, P.: Geodesic flows in certain manifolds without conjugate points. Transactions Amer. Math Soc. **167** (1972) 151–170

[E2] Eberlein, P.: Rigidity of lattices of non-positive curvature. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **3** (1983) 47–85

[E3] Eberlein, P.: Structure of manifolds of nonpositive curvature. In Global differential geometry and global analysis 1984, Lecture Notes in Mathematics 1156. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1985

[EH] Eberlein, P.; Heber, J.: A differential geometric characterization of symmetric spaces of higher rank. Preprint, Chapel Hill – Augsburg 1989

[ES] Eells, J.; Sampson, J.: Harmonic maps of Riemannian manifolds. Amer. J. Math. **86** (1984) 109–160

[Hei] Heintze, E.: On homogeneous manifolds of negative curvature. Math. Ann. **211** (1974) 23–34

[H] Helgason, S.: Differential Geometry and Symmetric Spaces. New York – San Francisco – London: Academic Press 1962

[Hr] Hernandez, L.: Kähler manifolds and 1/4-pinching. Preprint, Chicago 1990

[K] Klingenberg, W.: Riemannian geometry. Studies in Mathematics 1. Berlin – New York: Walter de Gruyter 1982

[S] Siu, Y.-T.: The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds. Annals of Math. **112** (1980) 73–112

[V] Ville, M.: On 1/4-pinched 4-dimensional Riemannian manifolds of negative curvature. Ann. Global Anal. Geom. 3 (1985) 329–336

[Wf] Wolf, J. A.: Spaces of Constant Curvature. Publish or Perish, Berkeley 1977 (fourth edition)

[Wt] Wolter, Th.: Homogene Mannifaltigkeiten nichtpositiver Krümmung. Thesis, Universität Zürich 1989

Werner Ballmann
Universität Bonn
Mathematisches Institut
Wegelerstr. 10
5300 Bonn 1

(*Eingegangen 1. 6. 1990*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
92 (1990) 153–168

Wilhelm Specht *in memoriam*

H. Heineken, Würzburg, und G. Schmeißer, Erlangen

Sein Leben

Wilhelm Otto Ludwig Specht wurde am 22. September 1907 als erstes von drei Kindern des Diplomingenieurs Benno Maria Specht und seiner Frau Anna, geb. Naegele in Rastatt (Baden) geboren. Die Eltern, beide in München gebürtig, entstammten alten Allgäuer Familien. Bereits im Alter von neun Jahren kam Wilhelm Specht nach Berlin, wo sein Vater Direktor einer Waggonfabrik wurde. Hier verbrachte er eine glückliche Jugend frei von finanziellen Sorgen. Er war ein hervorragender Schwimmer, von dessen Leistungen sogar die Presse berichtete, fuhr gerne Paddelboot (auch noch später als Dozent), liebte Literatur und Musik, spielte z. B. gerne Fugen von Bach auf dem Klavier, und fand sich in der Mathematik so leicht zurecht, daß er Schülern höherer Klassen Nachhilfe erteilen konnte.

Nach Absolvierung des humanistischen Fichte-Gymnasiums in Berlin im Jahre 1925 neigte er kurzzeitig zur Musik, begann dann aber an der Universität München das Studium der Mathematik, Physik und Philosophie mit dem Ziel – Begabung und finanzieller Rückhalt mögen ihm den Mut dazu verliehen haben – die Hochschullaufbahn einzuschlagen. Von seiner Münchner Zeit wissen wir relativ wenig. Er wohnte bei seinen Großeltern und schloß sich, ganz seiner Neigung zur Geselligkeit entsprechend, einem studentischen Korps an, dem er sein Leben lang treu blieb. An beeindruckenden Professoren hat er später Carathéodory, Perron und Sommerfeld öfters erwähnt.

Nach vier Semestern kehrte Specht 1927 in seine Heimatstadt Berlin zurück, um an der Friedrich-Wilhelms-Universität, der heutigen Ostberliner Humboldt-Universität, sein Studium fortzusetzen mit der Promotion als angestrebtem Abschluß. Nun folgten für Specht sieben fruchtbare Jahre, die ihn ganz entscheidend für sein weiteres Leben prägten, und zwar sowohl wissenschaftlich als auch menschlich. Wenn er später jungen Leuten einen Rat gab oder in Gesellschaft Anekdoten erzählte oder für einen Beweis mehr Eleganz suchte, immer wieder schöpfte er aus *seiner* Berliner Zeit.

Zweifellos kann das Berlin der zwanziger und dreißiger Jahre neben Göttingen als eine der Hochburgen der Naturwissenschaften angesehen werden. Specht hörte Vorträge von Einstein und besuchte Vorlesungen der Physiker von Laue und Schrödinger sowie des Chemikers Nernst, der ihn von allen Naturwissenschaftlern am meisten beeindruckte. In der Mathematik hatten ihn Erhard Schmidt und Issai Schur fasziniert. Bei Schur fand er schließlich Aufnahme als Doktorand und gelangte damit in einen durch Seminare, Kolloquien, Nachsitzungen und Institutsfeiern zusammengewachsenen Personenkreis, zu dem z. B. Robert Remak, John von Neumann, die Brüder Richard und Alfred Brauer, Bernhard Neumann mit seiner späteren Frau Hanna v. Caemmerer, Kurt Hirsch und Hans Rohrbach gehörten. Begeistert erzählte er von prunkvollen Festen, so z. B. als der junge, sehr begüterte John v. Neumann auf ein Schiff in der Havel einlud und Schur verwundert fragte, wie denn ein Assistent dies alles bezahlen kann. Spechts engster Freund wurde Bernhard Neumann, mit dem er oft und gern ein von dem Schachmeister Eduard Lasker erfundenes Brettspiel spielte aber auch stundenlang Mathematik diskutierte, des Nachts oft per Telefon. Neumann rühmt die vielseitige Begabung Spechts, der sehr gut Klavier spielte, Gedichte schrieb, komponierte und in fröhlicher Gesellschaft auch mal ein selbst kreiertes Couplet im Brecht-Weill-Stil über Instituts-Interna vortrug. Wir hören dabei auch von Spechts Mitwirkung in der Berliner MAPHA (= Mathematisch-Physikalische Arbeitsgemeinschaft), einer von Alfred Brauer gegründeten Einrichtung zur didaktischen, sozialen, kulturellen und auch finanziellen Betreuung junger Studenten durch solche höheren Semesters.

Issai Schur wurde von dieser Zeit an für Specht zu einem hochverehrten Vorbild par excellence. Begeistert erzählte er seinen Mitarbeitern und Studenten von der Ausstrahlungskraft Schurscher Vorlesungen und dem edlen Charakter seiner Person. Wenn Spechts Erlanger Assistenten ihm empfahlen, einen unangenehm auffallenden Studenten doch mit etwas weniger Nachsicht zu behandeln, so winkte er ab mit den Worten: „Nicht mit mir! Sie haben eben Schur nicht gekannt."

Im April 1931 reichte er seine Dissertation mit dem Titel „Eine Verallgemeinerung der symmetrischen Gruppe“ ein. Zweitreferent wurde E. Schmidt. Im Mai 1932 schloß er dann sein Studium mit der Promotion zum Dr. phil. ab. Von November 1931 bis März 1934 war Specht als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Seminar der Berliner Universität beschäftigt. Daneben wirkte er zeitweise auch in der Schriftleitung des von Georg Feigl geführten „Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik“.

Im April 1934 erhielt Specht auf Empfehlung von Schur durch Gabor Szegö die Stelle eines außerplanmäßigen Assistenten am Mathematisch-Physikalischen Seminar der Universität Königsberg (Ostpreußen). Hier lernte er seine spätere Frau Ursula Dannenberg kennen. Beruflich war ihm jedoch kein Glück beschert. Reidemeister war kurz vorher amtsenthoben worden. Unter seinem Nachfolger gab es Spannungen, die wohl aus Spechts kritischer Haltung zum Nationalsozialismus entsprangen. („Wozu brauchen wir den? Der ist doch kein Mathematiker.“, soll Specht gesagt haben, als in der Bibliothek das Gaußbild durch ein Hitlerbild ersetzt wurde.)

Als schließlich Szegö Königsberg verließ, erkannte Specht, daß seine Bemühungen um die Habilitation hier keinen Erfolg haben konnten. Deshalb gab er im März 1936 seine Stellung auf und ging nach Breslau, ermutigt durch die beiden dortigen Ordinarien Johann Radon und Georg Feigl. Hier nun habilitierte er sich im Frühjahr 1937 und bekam sofort die Stelle eines außerplanmäßigen Assistenten. Er selbst erzählte dazu, daß er das seltene Glück hatte, in der Diskussion zu seinem Habilitationsvortrag ein Problem eines anwesenden Physikers – es ging um Darstellung von Gruppen – vollständig lösen zu können, was das Auditorium sehr beeindruckte und ihm vielseitige Unterstützung für eine Anstellung einbrachte. Seine Bewerbung um eine Dozentur hatte indes erst im September 1938 nach dem zweiten Versuch Erfolg, da man von ministerieller Seite seine politische Haltung bemängelte.

Am Mathematischen Seminar fand Specht jedoch unter Feigl und Radon mit Kanold, Tautz und Ostmann als Kollegen eine angenehme Atmosphäre vor, die sich auch in den gesellschaftlichen Bereich hinein fortsetzte. Man traf sich bei Radon zur Hausmusik mit Radon als Geiger, Specht als Pianist und Tautz als Tenor. Feigl wiederum, dem man die Gewohnheit nachsagte, seine Mitarbeiter zu beliebiger Tags- und Nachtzeit in Anspruch zu nehmen, schätzte Specht sowohl als Mathematiker als auch als Tischtennispartner. Aus dieser Zeit stammte Spechts Abneigung gegen ein privates Telefon, denn nur durch Verzicht auf ein solches konnte er seine Verfügbarkeit für Feigl in Grenzen halten. Vielen Studierenden gab Specht in persönlichen Gesprächen Anregungen und Hilfen. Jüngere Kollegen schätzten ihn als phantasievollen Mathematiker, der ihnen offene Probleme zeigte und sie zum eigenen Forschen ermutigte. Als Specht im September 1938 heiratete und einen Hausstand gründete, war auch die Wohnung der Spechts ein beliebter Treffpunkt. Man kam, um Mathematik zu diskutieren, sich zu unterhalten oder auch nur, um sich ein wenig aufzuwärmen, wenn das eigene Brennmaterial zur Neige gegangen war.

Die Breslauer Zeit endete jäh, als Specht im August 1940 zum Wehrdienst eingezogen wurde. Nach einjähriger Dienstzeit bei der Luftwaffe wurde er Meteorologe beim Reichswetterdienst. Hier kam er mit praktischer Mathematik in Berührung. Später in Erlangen flocht er in seine Vorlesungen zur Angewandten Mathematik gerne Beispiele aus dem Wetterdienst ein. In seiner Freizeit arbeitete er vorwiegend an seinen angestammten Problemen weiter, ließ sich aber auch von seinen damaligen Aufgabenbereich zu mathematischen Untersuchungen inspirieren.

Der Krieg endete für Specht mit einer traurigen Bilanz. Sein jüngerer Bruder, Studienreferendar für Sport und Biologie, war 1944 gefallen, seine Frau geriet als Rote-Kreuz-Schwester in russische Gefangenschaft, von der sie nach unsäglichen Strapazen erst 1954 zurückkam, seine Universität, sein Haushalt in Breslau, seine Bücher waren verloren gegangen, seine Freunde aus glücklicheren Zeiten waren in alle Winde zerstreut. Geblieben war ihm ein kleiner Koffer mit wissenschaftlichen Aufzeichnungen, den er während des Krieges immer bei sich trug. So traf er nach amerikanischer Gefangenschaft in Bad Kreuznach im Juni 1945 in Herrsching am Ammersee ein, wo seine Eltern ein kleines Ferienhaus besaßen.

In den folgenden beiden Jahren war Specht zeitweise auf einem amerikanischen Flugplatz tätig, leistete Vorarbeiten für mehrere in den fünfziger Jahren erschienene Publikationen und frischte alte Freundschaften aus seiner Münchner Zeit wieder auf. Angeregt durch Fragen aus der Strahlentherapie, die ein Mediziner von der Münchner Frauenklinik an ihn herantrug, beschäftigte er sich ferner mit Strahlung in trüben Medien. Seine Untersuchungen führten zu den späteren Veröffentlichungen [24] und [30].

Zu dieser Zeit hielt Otto Haupt nach Verstärkung für die Erlanger Mathematik Ausschau. Als er von van der Waerden wärmste Empfehlung für Specht erhielt, vereinbarte er mit diesem ein Treffen in München, im Anschluß an einen Besuch der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Sein Eindruck war so positiv, daß er Specht sofort nach Erlangen holte.

Im Dezember 1947 wurde Specht zunächst wissenschaftlicher Assistent und nach erneuter Habilitation im Sommersemester 1948 Privatdozent der Universität Erlangen. Gleichzeitig erhielt er die kommissarische Vertretung eines neugeschaffenen Ordinariats für Angewandte Mathematik. Im März 1950 wurde er schließlich auf diesem Lehrstuhl zum ordentlichen Professor ernannt.

Für die Erlanger Universität erwies sich diese Ernennung als großer Gewinn. Tatsächlich belebte Specht in Erlangen zwei Lehrstuhlbereiche. Er war über viele Jahre hinweg der einzige Algebraiker und der einzige Angewandte Mathematiker. Zu seiner Ausbildung in Angewandter Mathematik bemerkte er selbst nicht ohne Ironie: „Das gab es in Berlin auch; da ging man aber nicht hin“. Doch für eine Person wie Specht erwuchs daraus kein Handikap. Stets offen dafür, etwas Neues zu erlernen, sah er es als eine besondere Gunst an, wenn Pflicht dazu aufrief. Angewandte Mathematik hatte er „von unten her“ während des Krieges kennengelernt. „Von oben her“ gab es Brücken vor allem durch seine Forschungen über Matrizen und Polynome. Zum Beispiel erlangte die von ihm angeregte Dissertation von Kippenhahn über den Wertevorrat einer Matrix Jahre später viel Beachtung in der Numerischen Linearen Algebra.

Mit hohem Sachverstand baute Specht in Erlangen die Angewandte Mathematik auf. Es begann zunächst mit Vorlesungen wie „Nomographie“,

„Numerische Methoden“ und einem mathematischen Praktikum unter Verwendung mechanischer Tischrechenmaschinen. Eine bemerkenswerte Umgestaltung vollzog sich, als Specht 1962 für den Neubau des Mathematischen Instituts die elektronische Rechenanlage Z23, genannt die ZUSE, anschaffte. Er selbst erlernte es, geschickt zu programmieren, wobei er, anders als seine Studenten, stets den unbequemeren Maschinencode verwendete, weil sich damit die Möglichkeiten der Anlage trickreicher nutzen ließen. Von da an bot er regelmäßig zwei Seminare pro Semester an, ein gruppentheoretisches und ein numerisches. Dank seiner großen Erfahrungen in der mathematischen Dokumentation gelang es ihm, die Entwicklungen in der Numerischen Mathematik in Deutschland, Amerika und der Sowjetunion aufzuspüren und in Arbeitskreisen von hohem Niveau zu verfolgen. Seine zahlreichen Mitarbeiter bildeten zwei Lager: die Betreuer der Algebraveranstaltungen, die im ersten Stock des Instituts saßen und die Numeriker, die im Untergeschoß bei der ZUSE anzutreffen waren. Für ihre eigene Promotion bei Specht arbeiteten jedoch die Angehörigen beider Lager über Gruppentheorie oder ein anderes direkt von Schur abstammendes Gebiet. Man konnte folgende Spechtsche Gepflogenheiten feststellen: *Vor der Promotion* weckte er Interesse für recht unterschiedliche, z. T. unkonventionelle Themen. So vergab er z. B. Diplom- und Staatsexamensarbeiten über Spiele, Berechnung von Stundenplänen, formales Differenzieren, Konvertierungsprobleme in der Datenverarbeitung und viele Arten von Algorithmen. *Nach der Promotion* ermutigte er seine Leute dazu, etwas Neues in Angriff zu nehmen, um nicht an seinen Arbeitsgebieten hängenzubleiben und der Gefahr „wissenschaftlicher Inzucht“, wie er es nannte, ausgesetzt zu sein. So erwuchsen denn auch aus seinen Schülern und Mitarbeitern neben Gymnasialprofessoren und Führungskräften in Industrie und Wirtschaft mehrere Hochschullehrer verschiedener Disziplinen: Mathematiker unterschiedlicher Forschungsrichtung, Informatiker, ein hochangesehener Physiker (Begründer der Synergetik) und ein bedeutender Astronom. *Die Promotion selbst* konnte jedoch nur über eines seiner angestammten Gebiete erfolgen. Man mußte Schur-Enkel werden, um Specht-Schüler zu sein.

Die schon erwähnte doppelte Funktion seines Lehrstuhls gepaart mit personellen Engpässen am Institut und die vielseitige Nachfrage nach seiner hohen fachlichen Kompetenz verbunden mit der Integrität seiner Person bürdeten ihm besonders seit Beginn der sechziger Jahre eine kaum vorstellbare Arbeitslast auf. In manchen Semestern bot er Lehrveranstaltungen im Umfang von 22 Semesterwochenstunden an. Selbst wenn man dabei den Anteil seiner Mitarbeiter großzügig berücksichtigt, so bleiben oft noch drei Vorlesungen mit einer das Lehrdeputat weit überschreitenden Gesamtstundenzahl übrig. Bis zum Bau der Berliner Mauer hielt er zudem noch regelmäßig eine Vorlesung an seiner Heimatuniversität in Ostberlin, die unterschiedlichen Anfangszeiten des Semesters an beiden Universitäten ausnutzend. Seine Beliebtheit bei den Studenten brachte es mit sich, daß er in manchen Jahren ca. 20 Diplom- und Staatsexamensarbeiten zu begutachten hatte. Lassen Sie uns noch einige Aufgaben aufzählen, die er neben Lehre und Forschung wahrnahm. Er war Dekan, Prodekan und fünf Jahre lang Finanzreferent. Entscheidend wirkte er an der Gestaltung des Neubaus des Mathematischen Instituts mit. Besondere Verdienste erwarb er sich als eines der vier Mitglieder des

Gründungsausschusses der Technischen Fakultät, einer damals in Deutschland einmaligen Einrichtung mit heute ca. 5000 Studenten. Desgleichen war er entscheidend am Aufbau des Rechenzentrums der Erlanger Universität beteiligt. Bis zu seiner Emeritierung gehörte er der Technischen Fakultät als Zweitmitglied und der Vorstandschaft des Rechenzentrums an. Seit 1962 war er Mitherausgeber des Zentralblatts für Mathematik und wirkte auch an dem von Naas und Schmidt herausgegebenen Mathematischen Wörterbuch mit.

Erstaunlicherweise merkte man ihm von dieser enormen Arbeitslast kaum etwas an. Unbürokratisch und mit einer eleganten Leichtigkeit bewältigte er seine umfangreichen Aufgaben, wobei er kritische Situationen oft mit seinem vortrefflichen Berliner Humor meisterte. Stets gutgelaunt kam er am nicht allzu frühen Vormittag ins Institut. Alles an ihm war elegant: seine Kleidung, seine Schrift, seine Beweise, sein Auto (stets ein wenig verbreitetes Coupé). Dabei blieb er jedoch im Grunde ein bescheidener Mensch. Überlegenheit zeigen zu müssen war ihm geradezu peinlich. Mitarbeitern und Studenten begegnete er mit väterlicher Güte, notwendige Kritik allenfalls in eine feine humoristische Bemerkung einbauend. Auch Studenten mit mäßigeren Leistungen konnten bei ihm viel Entgegenkommen und menschliche Wärme erfahren. Bei Examensfeiern ehrte er selbst unter großem Termindruck den Absolventen durch seine Teilnahme und machte fröhlich mit, ganz gleich, ob es sich um eine Promotion oder nur um ein Diplom handelte.

Wir haben den Bereich noch nicht erwähnt, in dem Specht Ausgleich zum Institutsbetrieb fand und neue Kraft schöpfte. Es war sein Zuhause – eine Oase der Ruhe – wo er ohne Telefon mit abstellbarer Glocke lebte, liebevoll umsorgt von Frau Specht. Hier spielte sich auch seine Forschung ab. Er betrieb sie wie ein Hobby und faßte sie nie als Arbeitslast auf, obwohl er regelmäßig bis tief in die Nacht oder den neuen Morgen hinein an seinem Schreibtisch saß. Von hier aus versorgte er seine Schüler. Zu einem Problem brachte er immer von zuhause einen Lösungsansatz mit – als Denkanstoß, nicht etwa, um Wege vorzuschreiben. Seine Ideen entfaltete er vor seinen Mitarbeitern in lockeren Gesprächen, die auch auf aktuelle Ereignisse oder amüsante Anekdoten abgleiten konnten, wenn er bei seinem Gegenüber nachlassende Konzentration bemerkte. Konnte schließlich aus den vermittelten Anregungen ein wissenschaftliches Ergebnis entwickelt werden, so lehnte er eine Dokumentation seines Einflusses stets großzügig ab.

Nach seiner Emeritierung im Sommersemester 1972 zog er sich vollständig vom Erlanger Institut zurück und lebte überwiegend in seiner Heimatstadt Berlin. Hier arbeitete er zunächst weiter an seinem Manuskripten, hatte aber offenbar nicht die Absicht, etwas davon zu veröffentlichen. Etwa um 1977 wurde bekannt, daß ihn eine Trigeminus-Neuralgie körperlich und geistig zunehmend einschränkte. Er starb am 19. Februar 1985 an den Folgen eines Sturzes und wurde am 25. Februar in Herrsching (Oberbayern) im Kreise seiner Verwandten und engsten Freunde beigesetzt.

Das Mathematische Institut der Universität Erlangen-Nürnberg gedachte seiner in einem Kolloquium am 4. Juni 1985.

Wir danken Frau Ursula Specht sowie den Herren H.-J. Kanold und B. H. Neumann für hilfreiche Information.

Sein Werk

Die Veröffentlichungen Spechts zeigen nur einen Teil seines Schaffens. Sein umfangreicher Nachlaß enthält eine Vielzahl von Manuskripten unterschiedlichen Grades an Vollständigkeit. Sein Streben nach Perfektion brachte es mit sich, daß er seine Ergebnisse oft jahrzehntelang mit sich herumtrug, ehe er etwas davon veröffentlichte. In der Zwischenzeit schrieb er mehrfach Neufassungen, feilte an der Sprache, den Begriffen und der Symbolik, bis er schließlich zu einer eleganten Darstellung mit wohldurchdachten, suggestiven Bezeichnungen gelangte. Auf diese Weise hatte er oft mehrere Themen in Bearbeitung und machte bei ihnen abwechselnd Fortschritte.

Der Tradition von Schur folgend zeichnet sich sein Werk durch eine heute kaum noch vorstellbare Breite aus, indem es von der Algebra über die Zahlentheorie bis hin zur Analysis reicht. Auf seine Schwerpunkte *Gruppentheorie, Zahlentheorie* und *Analysis der Polynome* werden wir anschließend näher eingehen.

Matrizen spielten sowohl als Forschungsgegenstand als auch als Hilfsmittel in der Gruppentheorie und der Analysis der Polynome eine wichtige Rolle. Weltweite Beachtung fand besonders die Arbeit [15], in der er ein vollständiges System von unitären Invarianten bei $n \times n$ Matrizen angab und damit eine lange offene Frage beantwortete[1]).

Aus seinen Aufzeichnungen entnehmen wir, daß er ferner an den folgenden etwas abseits liegenden Themen arbeitete: *Nichteuklidische Geometrie, Darstellung von Isobaren, Optimale Flugzeuglandung, Theorie der Planung, Strahlung in trüben Medien, Produktionsproblem, Biologisches Gleichgewicht, Funktional-* und *Rekursionsgleichungen.*

---

[1]) Als einige Forschungsbeiträge, die sich auf [15] beziehen, seien erwähnt:

Coven, M. J.; Douglas, R. G.: Complex geometry and operator theory. Acta Math. **141** (1978) 187–261

Deckard, D.; Pearcy, C.: On unitary equivalence of Hilbert-Schmidt operators. Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965) 671–675

Ernest, J.: Charting the operator terrain. Mem. Amer. Math. Soc. **6** # 171, Providence 1976

Gallagher, P. X.; Proulx, R. J.: Orthogonal and unitary invariants of families of subspaces. In: *Contributions to Algebra (Colletion of papers dedicated to E. Kolchin)*, pp. 157–164. New York: Academic Press 1977

Paulsen, V.: Continuous canonical forms for matrices under unitary equivalence. Pacific J. Math. **76** (1978) 129–142

Pearcy, C.: A complete set of unitary invariants for operators generating finite W^*-algebras of type I. Pacific J. **12** (1962) 1405–1416 – A complete set of unitary invariants for 3×3 complex matrices. Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962) 425–429 – On unitary equivalence of matrices over the ring of continuous complex-valued functions on a Stonian space. Canad. J. Math. **15** (1963) 323–331

Pearcy, C.; Ringrose, J. R.: Trace-preserving isomorphisms in finite operator algebras., Amer J. Math. **90** (1968) 444–455

Sibirskij, K. S.: Eine minimale ganzrationale Basis für unitäre Invarianten (Russisch). Mat. Sametki **3** (1968) 291–295

Gruppentheorie

Einen großen Raum unter den Veröffentlichungen von Specht nehmen die Arbeiten aus der *Gruppentheorie* ein [1–3, 5–10, 14–17, 20, 33, 38, 42, 45, 47], dazu kommen zwei Arbeiten [19, 23], die sich mit Identitäten („Gesetzen") in *Ringen* befassen; analoge Fragen in Gruppen (Varietäten) werden in den Veröffentlichungen nicht aufgegriffen.

In der Dissertation [1] ging es in heutiger Bezeichnungsweise um Kranzprodukte zweier symmetrischer Gruppen S_n, S_m (unter Verwendung der klassischen Permutationsdarstellung) und deren Charaktere. Bei den Betrachtungen über Darstellungen der symmetrischen Gruppen [3, 8, 45] ging es ihm wesentlich um die zugehörigen irreduziblen Moduln, die in die Lehrbuchliteratur als *Specht-Moduln* eingegangen sind. Deutlicher und ausführlicher geschieht diese Beschreibung in [8]. Als vollständig unsymmetrische Funktion wird

$$x_1 x_2^2 x_3^3 \ldots x_n^n$$

für die Betrachtung von S_n herangezogen; dieses Polynom erzeugt zusammen mit allen seinen Bildern unter Elementen von S_n einen freien S_n-Modul, also einen zur additiven Gruppe des Gruppenrings von S_n operatorisomorphen Modul. Alle irreduziblen Moduln sind operatorisomorph zu Untermoduln dieses freien Moduls, und die Erzeugung solcher Untermoduln wird beschrieben. Specht beruft sich für [8] auf eine Anregung von Erwin Fues; er war wohl auch der Fragesteller bei der Habilitation. Die Specht-Moduln sind bis in die neueste Literatur zu finden[2]).

Die Frage liegt nahe, wieso das Lehrbuch [33] die Darstellungstheorie von Gruppen ausläßt, obgleich alle gruppentheoretischen Arbeiten von Specht vor Erscheinen des Buches mit Darstellungstheorie zu tun hatten. Der erste Entwurf des Buches enthielt Kapitel über Darstellungstheorie, der Herausgeber hatte aber eine Kürzung des Buches verlangt. So war es wohl am einfachsten, den darstellungstheoretischen Teil vollständig herauszunehmen, zumal gerade vorher in derselben Lehrbuchreihe das gerade diesen Aspekt behandelnde Lehrbuch von Boerner[3]) erschienen war. Dem Buch von Specht blieben dadurch drei starke

---

[2]) Beispiele für Literaturstellen:

Bolker, E. D.: The finite Radon transform. In: „Integral Geometry" (ed. R. L. Bryant et al.) Contemporary Math. **63** (1987) 27–50

Clausen, M.: Letter space algebras and a characteristic-free approach to the representation theory of the linear and symmetric groups I, II. Advances Math. **33** (1979) 161–191 and **38** (1980) 152–177

Farakat, H. K.; Peel, M. H.: On the representation theory of the symmetric groups. J Algebra **67** (1980) 280–304

Joseph, A.: Towards the Jantzen conjecture. Comp. Math. **40** (1980) 35–67

James, G. D.; Peel, M. H.: Specht series for skew representations of symmetric groups. J. Algebra **56** (1979) 343–364 (Verallgemeinerung der Specht-Moduln).

James, G. D.: The representation theory of the symmetric groups. Lecture Notes in Mathematics 682. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer 1978.

Stanley, R. P.: Some combinatorical properties of Jack symmetric functions. Advances Math. **77** (1989) 76–115

[3]) Boerner, H.: Darstellung von Gruppen mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik. Berlin: Springer 1955

Komponenten erhalten. Eine dieser Komponenten ist die Betrachtung und Klassifizierung der Gruppeneigenschaften nach Vererbungsgesichtspunkten. Nur Kurosh hatte bisher Fragen dieser Art behandelt, vor allem Verallgemeinerungen von Auflösbarkeit und Nilpotenz. Die von Specht eingeführten Formeln zur Beschreibung von Gruppenklassen setzten sich gegenüber den von P. Hall und seinen Schülern benutzten nicht durch, auch so informative Bezeichnungen wie „ordnungsfinit" und „klassenfinit" wurden nicht gebräuchlich. Die Bemühung um zusammenfassende Behandlung durch Betrachtung von Gruppen mit Operatoren ist eine weitere Komponente. Außerdem nehmen freie Gruppen und freie Produkte einen für den Zeitpunkt der Veröffentlichung großen Raum ein.

Mit der Frage, welche Matrizenpaare

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit a aus $\boldsymbol{C}$ eine freie Gruppe erzeugen, beschäftigt Specht sich in [42]. Wenn dies nicht der Fall ist, nennt er a einen Ausnahmewert. Durch Abschätzungen war schon früher bekannt, daß 4 kein Ausnahmewert ist, und damit kamen reelle Zahlen von größerem Betrag als 4 ebenfalls nicht als Ausnahmewerte in Frage. Specht stellt nun zusätzlich fest: Ausnahmewerte sind algebraische Zahlen, sie liegen in der konvexen Hülle der Kreisgebiete $|a-2| \leqslant 2$ und $|a+2| \leqslant 2$. Auf den in diesem Bereich liegenden Abschnitten der reellen und der imaginären Achse liegen die Ausnahmewerte überall dicht (eine solche Untermenge wird beschrieben). Im Verlauf dieser Betrachtungen sind gekoppelte Rekursionsgleichungen zu behandeln, bevor dies schöne Resultat erreicht werden kann. Vorher war diese Frage wohl nur für reelle Matrizen behandelt worden.

Nach Erscheinen des Buches rückten Gruppen mit Endlichkeitsbedingungen mehr in Spechts Aufmerksamkeit ([38, 47], Dissertationen Strößner, Meyn). So wird in [47] eine Verbindung hergestellt zwischen Meßbarkeit und Existenz endlicher Subnormalteiler in jeder nichttrivialen Faktorgruppe.

Zahlentheorie

Sätze über das Vorkommen von Primzahlen sind das Hauptaugenmerk aller Arbeiten aus der *Zahlentheorie* [12, 18, 21, 34]; mit dem Heft [34] schließt diese Reihe. Hier werden die Beweise des Primzahlsatzes und des Primzahlsatzes für arithmetische Progressionen so gestaltet, „... daß er für jedermann verständlich wird, der sich ein wenig mit elementarer Zahlentheorie und Algebra, ein wenig mit elementarer (reeller) Funktionentheorie und Integralrechnung beschäftigt hat".

In den Arbeiten über *Zahlentheorie der Polynome* [27–29] geht es um folgende Grundfrage: Man betrachte eine Menge von Polynomen

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_i, die aus einem vorgegebenen Bereich stammen (etwa $|a_i| \leqslant x$ für alle i wie in [27], oder $\Sigma_i\, a_i^2 \leqslant x^2$ wie in [28]). Gefragt wird nach einer Abschätzung der Anzahl irreduzibler Polynome n-ten Grades in Abhängigkeit von n und x. Die Ergebnisse werden in [31] erweitert auf nicht unbedingt normierte Polynome mehrerer Variabler. Bei diesen Arbeiten ergeben sich Berührungen mit den Arbeiten über Nullstellen von Polynomen, insbesondere mit [25].

Analysis der Polynome

In seiner Monographie „Algebraische Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten" [39] hat Specht in sehr übersichtlicher Weise den damaligen Stand des Wissens auf diesem Gebiet festgehalten, Trends aufgezeigt und mit zahlreichen Literaturhinweisen eine wertvolle Fundgrube geschaffen.

Unter seinen eigenen Forschungsbeiträgen treten drei Themenkreise besonders hervor, die er selbst mit „Abschätzung der Wurzeln", „Nullstellen- und Werteverteilung" und „Lage der Nullstellen" betitelte.

Abschätzungen der Wurzeln [11, 13, 22, 25, 32, 44 und Nachlaß] – Während seiner gesamten aktiven Zeit verfolgte Specht systematisch die Frage, aus einer Information über die Koeffizienten eines Polynoms Schranken für die Beträge der Nullstellen zu gewinnen. Von seinen zahlreichen Ergebnissen wollen wir hier nur eines beschreiben, das als *Spechtsche Ungleichung* viel Beachtung fand und Anstöße zu weiterer Forschung gab.

Schreiben wir ein Polynom als

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 = \prod_{\nu=1}^{n} (z - \zeta_\nu) \tag{1}$$

und setzen

$$\|P\|_2 := (1 + |a_{n-1}|^2 + \ldots + |a_0|^2)^{1/2},$$

so besagt die Spechtsche Ungleichung [22], daß

$$|\zeta_1 \ldots \zeta_k| \leqslant \|P\|_2 \tag{2}$$

für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ bei beliebiger Numerierung der Nullstellen von $P(z)$ gilt. Interessant an einer derartigen Abschätzung ist dabei, daß sich für die nach absteigenden Beträgen geordneten Nullstellen

$$|\zeta_1| \geqslant |\zeta_2| \geqslant \ldots \geqslant |\zeta_n|$$

sofort die individuellen Schranken

$$|\zeta_k| \leqslant \|P\|_2^{1/k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gewinnen lassen.

Für den Beweis seiner Ungleichung benutzte Specht hermitesche Formen als Hilfsmittel. Mirsky bemerkte später, daß die linke Seite von (2) durch das sog. Mahler-Maß

$$M(P) := \prod_{\nu=1}^{n} \max(1, |\zeta_\nu|) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |P(e^{i\theta})| \, d\theta\right)$$

majorisiert wird und damit die Spechtsche Ungleichung aus einem Satz von Hardy, Littlewood und Pólya über Mittelwerte von Polynomen gefolgert werden kann[4]).

---

[4]) Mirsky, L.: Some applications of a minimum principle in linear algebra. Monatshefte für Math. **67** (1963) 104–112

Obwohl Specht auch zeigte, daß (2) insofern bestmöglich ist, als sich beide Seiten beliebig nahe kommen können, gelang Vicente Gonçalves die Verbesserung

$$(3) \qquad |\zeta_1 \dots \zeta_k|^2 + |\zeta_{k+1} \dots \zeta_n|^2 \leqslant \|P\|_2^2,$$

der Ostrowski eine Arbeit widmete[5]. Später fand man für (3) einen einfachen analytischen Beweis, der eine Ausdehnung auf die Gestalt

$$(|\zeta_1 \dots \zeta_k|^q + |\zeta_{k+1} \dots \zeta_n|^q)^{1/q} \leqslant \|P\|_p$$

mit $1/p + 1/q = 1$ und $p \in (1,2] \cup \{+\infty\}$ gestattete, wobei

$$\|P\|_p := \begin{cases} \max_{|z|=1} |P(z)| & \text{für} \quad p = +\infty \\ \left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} & \text{für} \quad 1 \leqslant p < +\infty \end{cases}$$

ist[6]. Daß trotz aller Verbesserungen und Erweiterungen die ursprüngliche Ungleichung von Specht wegen ihrer Einfachheit nicht an Attraktivität verloren hat, fiel uns in einer in seinem Todesjahr erschienenen Arbeit auf[7].

Nullstellen- und Werteverteilung [26, 41, 49 und Nachlaß] – Unter diesem Titel behandelte Specht die folgende Fragestellung. Man kann ein Polynom (1) in umkehrbar eindeutiger Weise durch einen Punkt

$$\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \boldsymbol{C}^n$$

angeben. Eine Teilmenge K des $\boldsymbol{C}^n$ legt damit eine Menge von normierten Polynomen des Grades n fest, genannt eine Polynomklasse $\mathscr{K}$. In dieser Situation fragte Specht danach, wie sich die Nullstellen oder Werte aller Polynome einer Klasse $\mathscr{K}$ in der komplexen Ebene verteilen.

In seiner orginellsten Arbeit [26] führte er Häufigkeitsuntersuchungen durch. Er bestimmte den Anteil $\alpha_m(W)$ derjenigen Polynome von $\mathscr{K}$, die genau m (oder mindestens m oder höchstens m) Nullstellen in einer vorgegebenen Teilmenge W der komplexen Ebene $\boldsymbol{C}$ besitzen. Der Begriff „Anteil" wird dabei mit Hilfe des Jordanschen Inhalts J als

$$\alpha_m(W) := \frac{J(K_m(W))}{J(K)}$$

festgelegt, wobei $K_m(W)$ diejenige Teilmenge von K bezeichnet, deren zugehörige Polynome die gewünschte Eigenschaft (z. B. „genau m Nullstellen liegen in W")

---

[5]) Vicente Gonçalves, J.: L'inégalité de W. Specht. Univ. Lisboa Revista Fac. Ciencias (2) **A1** (1950) 167–171

Ostrowski, A. M.: On the inequality of J. Vicente Gonçalves. Univ. Lisboa Revista Fac. Ciencias (2) **A8** (1960) 115–119

[6]) Rahman, Q. I.; Schmeißer, G.: Location of the zeros of polynomials with a prescribed norm. Trans. Amer. Math. Soc. **196** (1974) 69–78

[7]) Smyth, C. J. Some results on Newman polynomials. Indiana Univ. Math. J. **34** (1985) 195–200

besitzen. Die Schwierigkeit bei dieser Untersuchung besteht darin, das Auftreten von $K_m(W)$ zu vermeiden, allein aus Meßbarkeitsvoraussetzungen an K und W die Existenz von $\alpha_m(W)$ zu garantieren und schließlich eine Formel zur praktischen Berechnung zu finden, in die nur K, W und m eingehen. Specht ist dies alles gelungen. Statt auf Einzelheiten einzugehen, wollen wir ein Beispiel betrachten.

Liegen alle Nullstellen eines Polynoms (1) im Einheitskreis, so gilt für die Koeffizienten nach den Vietaschen Formeln die bestmögliche Abschätzung

$$(4) \qquad |a_\nu| \leqslant \binom{n}{\nu}.$$

Umgekehrt kann jedoch ein Polynom (1), dessen Koeffizienten dieser Ungleichung genügen, durchaus Nullstellen außerhalb des Einheitskreises besitzen. Sei nun $\mathscr{K}$ die Menge aller Polynome (1), für die (4) gilt. Mit Hilfe der Formel von Specht findet man, daß der Anteil derjenigen Polynome von $\mathscr{K}$ die *alle* ihre Nullstellen im Einheitskreis besitzen, genau

$$\left(n! \prod_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu}^2\right)^{-1}$$

beträgt, – ein sehr kleiner mit wachsendem n rasch abnehmender Anteil; für $n=4$ sind es nur noch 0,00045%.

Durch

$$\nu(\zeta) := \lim_{W \to \zeta} \frac{\alpha_1(W)}{J(W)} \qquad (\zeta \in W)$$

führte Specht ein Maß für die Häufigkeit ein, mit der ein gegebener Punkt $\zeta \in \boldsymbol{C}$ als Nullstelle von Polynomen aus $\mathscr{K}$ auftritt und gab eine Formel zur Berechnung dieser Größe an. Schließlich definierte er noch eine *Nullstellendichte* und stellte Beziehungen zwischen den verschiedenen Begriffen her. Seine Untersuchungen wurden von seinem Schüler Finzel auf Polynome mit reellen Koeffizienten übertragen, wobei hier vor allem interessiert, welcher Anteil einer Klasse $\mathscr{K}$ ausschließlich reelle Nullstellen besitzt[8]).

Leider scheinen diese Beiträge Spechts keine starke Beachtung gefunden zu haben, denn später wurde bei der eng verwandten Frage nach der Nullstellenverteilung zufälliger Polynome keine Beziehung zu seinen Ergebnissen hergestellt[9]).

Lage der Nullstellen [35, 36, 37, 43 und Nachlaß] – Turán schlug vor, zur Abschätzung der Imaginärteile von Nullstellen oder dem Nachweis reeller

---

[8]) Finzel, L.: Untersuchungen über die wahrscheinliche Lage der Wurzeln reeller algebraischer Gleichungen. Math. Nachr. **11** (1954) 85–104

[9]) Erdös, P.; Offord, A. C.: On the number of real roots of a random algebraic equation. Proc. London Math. Soc **6** (1956) 139–160

Šparo, D. I.; Šur, M. G.: Über die Verteilung der Wurzeln zufälliger Polynome (Russisch). Vestnik Moskov. Univ. Ser. I, Math. Meh. **1962**, 40–43

Arnold, L.: Über die Nullstellenverteilung zufälliger Polynome. Math. Zeitschr. **92** (1966) 12–18

Nullstellen nicht wie sonst üblich mit den Koeffizienten a_ν $(\nu=0,1,\dots,n)$ der Taylor-Entwicklung

$$P(z)=a_0+a_1z+\dots+a_nz^n$$

eines Polynoms $P(z)$ zu arbeiten, sondern die durch Entwicklung nach den Hermiteschen Polynomen

$$P(z)=b_0H_0(z)+b_1H_1(z)+\dots+b_nH_n(z)$$

sich ergebenden Koeffizienten b_ν $(\nu=0,1,\dots,n)$ zu verwenden. Er selbst zeigte, daß tatsächlich zu vielen Betragsabschätzungen der Nullstellen durch Taylor-Koeffizienten eine ganz analoge Abschätzung der Imaginärteile durch die Koeffizienten der Hermite-Entwicklung existiert[10]).

Davon angeregt untersuchte Specht systematisch die Lage der Nullstellen von Polynomen, die als Entwicklung nach einem beliebigen System $\{\psi_n\}_{n\in N_0}$ von orthonormalen Polynomen aufsteigendem Grades gegeben sind.

Im Falle eines Orthonormalsystems über der reellen Achse bezeichne I_n die konvexe Hülle der Nullstellen von ψ_n und

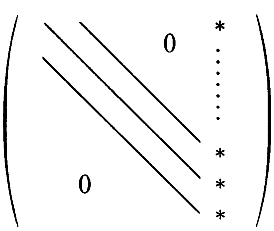
$$d_n(z):=\max_{x\in I_n}|z-x|$$

die Distanz des Punktes z vom Intervall I_n. In dieser Situation gelang es Specht für nahezu den gesamten Bestand an Betragsabschätzungen von Nullstellen ζ durch Taylor-Koeffizienten analoge Abschätzungen von $d_n(\zeta)$ durch die Koeffizienten c_ν $(\nu=0,1,\dots,n)$ der Entwicklung

$$P(z)=c_0\psi_0(z)+c_1\psi_1(z)+\dots+c_n\psi_n(z) \tag{5}$$

zu gewinnen. Auch eine analoge Spechtsche Ungleichung wurde erreicht.

In den Beweisen benutzte Specht unter anderem, daß die Nullstellen eines Polynoms (5) gleich den Eigenwerten einer Matrix



sind, die als eine nur in der letzten Spalte durch die Koeffizienten c_ν $(\nu=0,1,\dots,n)$ gestörte hermitesche Tridiagonalmatrix aufgefaßt werden kann.

---

10) Turán, P: Sur l'algèbre fonctionelle. Compt. Rend. prem. Congr. Math. Hongr. **1950**, 279–290. – Hermite-expansion and strips of zeros of polynomials. Arch. der Math. **5** (1954) 148–152 – To the analytic theory of algebraic equations. Bulg. Akad. Nauk. Otdel. Mat. Inst. **III** (1959) 123–137

Die Möglichkeit, Imaginärteile von Nullstellen gut abschätzen zu können und die eben gezeigte Verbindung zur Matrixanalysis wurden vielfach aufgegriffen und weiter verfolgt[11]).

Publikationen

[1] Eine Verallgemeinerung der symmetrischen Gruppe. Schriften Berliner Seminar **1** (1932) 1–32 – Dissertation
[2] Eine Verallgemeinerung der Permutationsgruppen. Math. Zeitschr. **37** (1933) 321–341
[3] Die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe. Math. Zeitschr. **39** (1935) 696–711
[4] Ebene hyperbolische Geometrie. Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur **108** (1935) 110–102
[5] Zur Theorie der Matrizen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **46** (1936) 45–50
[6] Darstellungstheorie der Hyperoktaedergruppe. Math Zeitschr. **42** (1937) 629–640
[7] Zur Theorie der Gruppen linearer Substitutionen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **47** (1937) 43–55
[8] Zur Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe. Math. Zeitschr. **42** (1937) 771–779
[9] Darstellungstheorie der affinen Gruppe. Math. Zeitschr. **43** (1938) 120–160 – Habilitationsschrift
[10] Darstellungstheorie der alternierenden Gruppe. Math. Zeitschr. **43** (1938) 553–572
[11] Zur Theorie der algebraischen Gleichungen Jber. d. Dt. Math.-Verein. **48** (1938) 142–145
[12] Primteiler von Zahlenfolgen. Deutsche Math. **3** (1939) 689–697
[13] Wurzelabschätzungen bei algebraischen Gleichungen. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **49** (1939) 179–190
[14] Zur Theorie der Gruppen linearer Substitutionen II. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **49** (1939) 207–215
[15] Zur Theorie der Matrizen II. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **50** (1940) 19–23
[16] Klassifikation der halblinearen Transformationen. Math. Zeitschr. **46** (1940) 637–649
[17] Darstellungstheorie der endlichen Gruppen. J. reine angew. Math. **182** (1940) 242–248
[18] Primteiler von Zahlenfolgen II. Deutsche Math. **6** (1941) 89–96
[19] Die linearen Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren. Math. Zeitschr. **51** (1948) 367–376
[20] Beiträge zur Darstellungstheorie der allgemeinen linearen Gruppe. Math. Zeitschr. **31** (1948) 377–403
[21] Zahlenfolgen mit endlich vielen Primteilern. Sitzungsber. Bayer. Akademie Wiss. **1948**, 149–169
[22] Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Math. Zeitschr. **52** (1949) 310–321

---

[11]) Barnett, S.: Congenial matrices. Linear Algebra Appl. **41** (1981) 277–298
Gautschi, W.: On the condition of algebraic equations. Numer. Math. **21** (1973) 405–424
Giroux, A.: Estimates for the imaginary parts of the zeros of polynomial. Proc. Amer. Math. Soc. **44** (1974) 61–67
Lajos László: Imaginary part bounds on polynomial zeros. Linear Algebra Appl. **44** (1982) 173–180

[23] Gesetze in Ringen I. Math. Zeitschr. **52** (1950) 557–589
[24] (mit H. A. Bomke) Der Einfluß von endlicher Präparat- und Ionisationskammergröße auf die Dosismessung in unmittelbarer Nähe von Radiumpräparaten. Strahlentherapie **81** (1950) 81–92
[25] Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen II. Math. Zeitschr. **53** (1950) 357–363
[26] Untersuchungen über die Wurzelverteilung algebraischer Gleichungen. Math. Nachr. **4** (1951) 126–149
[27] Zur Zahlentheorie der Polynome. Sitzungsber. Bayer. Akademie Wiss. **1951**, 139–146
[28] Zur Zahlentheorie der Polynome II. Math. Nachr. **7** (1952) 105–126
[29] Zur Zahlentheorie der Polynome III. Math. Nachr. **7** (1952) 127–150
[30] Eine mathematische Frage zur Strahlentherapie. J. reine angew. Math. **191** (1953) 92–96
[31] Zur Zahlentheorie der Polynome IV. Math. Zeitschr. **57** (1953) 291–335
[32] Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen III. Math. Zeitschr. **63** (1955) 324–330
[33] Gruppentheorie. Grundlehren der Math. Wiss. Band 82. Berlin: Springer Verlag 1956
[34] Elementare Beweise der Primzahlsätze. Hochschulbücher für Math. Band 30. Berlin: VEB Deutscher Verlag d. Wiss. 1956
[35] Die Lage der Nullstellen eines Polynoms. Math. Nachr. **15** (1957) 353–374
[36] Die Lage der Nullstellen eines Polynoms II. Math. Nachr. **16** (1957) 257–263
[37] Die Lage der Nullstellen eines Polynoms III. Math. Nachr. **16** (1957) 369–389
[38] Beiträge zur Gruppentheorie I: Lokalendliche Gruppen. Math. Nachr. **18** (1958) 39–56
[39] Algebraische Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten. Enzyklopädie der math. Wiss. Band I, 1, Heft 3, Teil II. Stuttgart: Teubner 1958
[40] Eine Bemerkung zum Satze von Gauß-Lucas. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **62** (1959) 86–92
[41] Zur Verteilung der Nullstellen komplexer Polynome. Math. Nachr. **21** (1960) 109–126
[42] Freie Untergruppen der binären unimodularen Gruppe. Math. Zeitschr. **72** (1960) 319–331
[43] Die Lage der Nullstellen eines Polynoms IV. Math. Nachr. **21** (1960) 201–222
[44] Nullstellenschranken für Polynome. J. reine angew. Math. **204** (1960) 35–40
[45] Die Charaktere der symmetrischen Gruppe. Math. Zeitschr. **73** (1960) 312–329
[46] Zur Theorie der elementaren Mittel. Math. Zeitschr. **74** (1960) 91–98
[47] Zur Theorie der meßbaren Gruppen. Math. Zeitschr. **74** (1960) 325–366
[48] Lösung der Aufgabe 381 (Jber. d. Dt. Math.-Verein. **62** (1959) *13*), Jber. d. Dt. Math.-Verein. **63** (1961) *18*
[49] Zur Werteverteilung der Polynome. J. reine angew. Math. **212** (1963) 73–79
[50] (mit H. Heineken) Gruppen mit endlicher Komponentenzahl fastgleicher Untergruppen. Math. Nachr. **134** (1987) 73–82

Verzeichnis der Doktoranden

Jahr	*Name*	*Titel*
1951	Hermann Haken	Zum Identitätsproblem bei Gruppen
1951	Rudolf Kippenhahn	Der Wertevorrat einer Matrix
1952	Helmut Dietz	Zur Darstellungstheorie der linearen projektiven Gruppen über einem Galoisfeld
1953	Klaus Anke	Elementarer Beweis des Primidealsatzes für Primideale in Idealklassen
1953	Lothar Finzel	Untersuchungen über die wahrscheinliche Lage der Wurzeln reeller algebraischer Gleichungen
1956	Helmut Dittmann	Strukturuntersuchungen über das Radikal einer Algebra
1959	Friedrich Grummich	Zahlentheorie der Polynome. Ein Analogon zum Dirichletschen Satz
1959	Gerhard Popp	Beiträge zur Theorie der Zappaschen Produkte
1961	Walter Höger	Über die Darstellung von Ringen als Restklassenringe
1962	Wilhelm Baumann	Über Lückenprozesse mit beschränkten Lücken
1967	Gerhard Schmeißer	Das Landau-Montelsche Problem für Entwicklungen nach Polynomsystemen
1967	Erich Wittmann	Übertragung der Fittingschen Strukturanalyse auf unendliche Gruppen
1968	Heinz Strößner	Sylowsätze in lokalerreichbaren Gruppen
1968	Hans Strauß	Zur Theorie verwandter Endomorphismen
1968	Helmut Meyn	Fastnormale Untergruppen klasseninfiniter Gruppen
1970	Walter Streb	Über Klassenringe und Stufenringe
1971	Rüdiger Inhetveen	Zur Theorie der primärzerlegbaren Gruppen
1971	Otto Mutzbauer	Fastabelsche Minimaxgruppen
1972	Bernhard Hain	Nichtkommutative Polynomerweiterungen

Prof. Dr. H. Heineken
Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Am Hubland
8700 Würzburg

Prof. Dr. G. Schmeißer
Universität Erlangen-Nürnberg
Mathematisches Institut
Bismarckstr. 1 1/2
8520 Erlangen

(*Eingegangen 18. 7. 1990*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 92 (1990) 169–181

Otto Haupt

Zu Person und Werk[1][2]

H. Bauer, Erlangen

Hohe Festversammlung!

Am 17. Mai 1977, also vor knapp 10 Jahren, feierte das Mathematische Institut dieser Universität den 90. Geburtstag unseres Jubilars durch ein Festkolloquium. Es war das erstemal, daß Herr Haupt seiner Universität und insbesondere den Erlanger Mathematikern die Zustimmung zu einer öffentlichen Feier gab, durch die er geehrt werden sollte. Selbst seine Emeritierung im Jahre 1953 vollzog sich auf seinen Wunsch hin ohne jegliche Feierlichkeiten und ohne Würdigung in der Presse.

Erneut, wie bereits vor 10 Jahren, ist mir nun die ehrenvolle Aufgabe zugefallen, unseren Jubilar zu würdigen. Es gilt, den Lebensweg und das Lebenswerk eines Gelehrten darzustellen, der vor zwei Monaten in bewundernswerter geistiger Frische sein einhundertstes Lebensjahr vollendete. Mein Versuch, dieser Aufgabe gerecht zu werden, basiert auf der engen Verflechtung meines eigenen wissenschaftlichen Werdeganges mit seiner Person und auch mit seinem Werk: Herr Haupt ist mein Lehrer. Vor nahezu 40 Jahren lernte ich ihn bei der damals obligatorischen Aufnahmeprüfung für das Studium der Mathematik und Physik kennen. Bei ihm habe ich promoviert. Nach Theodor Schneider und

[1]) Rede bei der Akademischen Feier der Universität Erlangen-Nürnberg am 5. Mai 1987 aus Anlaß des 100. Geburtstages von Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Otto Haupt.

[2]) Anmerkung der Redaktion:
Am 10. 11. 1988 verstarb Otto Haupt, emeritierter ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Erlangen-Nürnberg, in seinem 102. Lebensjahr. Im Band 89 (1987) des Jahresberichtes der DMV wurde das Werk Otto Haupts in der von Martin Barner und Friedrich Flohr verfaßten Grußadresse *Otto Haupt zum 100. Geburtstag* bereits gewürdigt. Statt eines Nachrufes sei des bisher ältesten Mitgliedes der DMV durch den ungeänderten Abdruck der lebendigen Laudatio des Haupt-Schülers Heinz Bauer gedacht. Angefügt ist eine Herrn H.-J. Vollrath zu verdankende Ergänzung des im Artikel von Barner und Flohr enthaltenen, gut gegliederten Schriftenverzeichnisses von Otto Haupt sowie eine Liste seiner Doktoranden.

Mit dem Ableben von Otto Haupt ist auch die „Otto und Edith Haupt-Stiftung" wirksam geworden, deren Hauptanliegen die Vergabe des mit mindestens 50000,- DM dotierten „Karl Georg Christian von Staudt-Preises" für herausragende Leistungen auf dem Gebiet der Theoretischen Mathematik im 3jährigen Turnus ist. Die erstmalige Vergabe des Preises wird voraussichtlich 1991 stattfinden.

Reinhold Remmert wurde ich der dritte Nachfolger auf seinem Lehrstuhl. Aus dem Lehrer wurde im Laufe der Jahre der Kollege und schließlich – hierfür bin ich besonders dankbar – der väterliche Freund.

Unser Wunsch, Herrn Haupt heute bei dieser Feier in unserer Mitte willkommen heißen zu können, ist leider nicht in Erfüllung gegangen. Trotzdem wird der Jubilar diese Feier mit größter Aufmerksamkeit verfolgen. Er erwartet mit Ungeduld die Manuskripte aller heutigen Vorträge und Reden bzw. deren Niederschrift nach der Bandaufzeichnung.

Doch lassen Sie mich nun dem Werdegang unseres Jubilars zuwenden:

Am 5. März 1887 wird Otto Haupt in Würzburg geboren. Sein Vater wirkte dort als kgl. Amtsrichter. Nach zweijährigem Besuch der Realschule tritt Haupt 1889 in das humanistische Neue Gymnasium zu Würzburg ein, das heute den Namen Riemenschneider-Gymnasium trägt. Haupt verläßt das Gymnasium im Jahre 1906 mit dem Zeugnis der Reife.

Unter dem Memorierdrill am Gymnasium hat Haupt gelitten. In seinen Erinnerungen, die er seit einiger Zeit zu Papier bringt, liest man: „Am Neuen Gymnasium ließ man sich leiten von dem bewährten didaktischen Prinzip, die beste Ausbildung des Geistes bestehe im Memorieren. Ich bediene mich dabei – der Fachdidaktiker und Fachpsychologe möge mir verzeihen – der folgenden Terminologie: Unter dem Memoriergedächtnis verstehe ich die Fähigkeit, eine sinnlose Folge von Worten (man könnte vielleicht auch sagen, eine zufallsartige Wortfolge) innerhalb jeweils vorgegebener Zeit derart dem Gedächtnis einzuprägen, daß man nach gegebener Zeit imstande ist, die Folge fehlerlos wiederzugeben. Sind nur bestimmte (sinnvolle) Folgen memorierbar, so spreche ich von einem Interessengedächtnis."

Bis zur 5. Klasse hat Haupt nach eigenen Worten „viel Fleiß aufbringen müssen, um in Mathematik einen guten Zweier zu halten", bis er dann plötzlich entdeckt, daß ihm „die in den bayerischen Schulbüchern ebenso mageren wie biederen ‚mathematischen' Tatsachen und ihre Erörterung durch die Professoren eigentlich selbstverständlich seien". Von da an fühlt er sich durch den Schulunterricht in Mathematik nicht mehr gefordert, er läßt ihn mehr oder weniger unbeteiligt über sich ergehen. Doch dann ändert sich die Situation für ihn schlagartig. Ihm fällt das Planimetriebuch eines Onkels in die Hände, das dieser auf einer höheren Schule in Baden-Baden benutzt hatte. Die Konsequenzen beschreibt Haupt so: „Beim Blättern in diesem über 400 Seiten starken Buch und unter dem Eindruck der Fülle von Lehrsätzen und Aufgaben überkam mich plötzlich ein seelisches Innewerden der Mathematik als eines für mich allerhöchsten Wertes. Ich erlebte für mich die Mathematik." Von nun an beginnt ein intensives Selbststudium. Der „Hunger nach mehr Mathematik war geweckt". Für Haupt ist es nunmehr selbstverständlich, daß er Mathematik und Physik studieren wird. Ebenso selbstverständlich ist es für ihn, daß er sich später als Studienrat der Mathematik widmen will. An eine Laufbahn als Hochschullehrer denkt er nicht. Das damalige in den gebildeten Kreisen weitverbreitete Unverständnis gegenüber naturwissenschaftlicher oder gar mathematischer Bildung irritiert ihn nicht. Glücklicherweise lacht sein Vater, als er von einem Kollegen, dem er erzählt, sein Sohn wolle Mathematik studieren, hören muß: „Herr

Oberlandesgerichtsrat, das werden Sie doch nicht dulden, das ist doch nicht standesgemäß!"

Otto Haupt beginnt im Wintersemester 1906/07 das Studium der Mathematik und Physik an der Universität seiner Heimatstadt Würzburg. Nach Ablegung der 1. Prüfung für das Lehramt verbringt er das Wintersemester 1908/09 in Berlin und kehrt dann für den Rest seiner Studienzeit nach Würzburg zurück. Im Herbst 1910 – also nach 8 Semestern – legt er den 2. Abschnitt der Lehramtsprüfung ab. Das bayerische Staatsexamen war damals eine äußerst umfangreiche und schwierige Prüfung. Die 1. Prüfung nach frühestens 4 Semestern bestand aus Klausuren während einer Woche, und zwar ganztägig; lediglich Mittwoch und Samstag wurden die Klausuren nur vormittags geschrieben. 10 Tage später schlossen sich mündliche Prüfungen an. Die 2. Prüfung nach mindestens 8 Semestern erforderte zusätzlich die Vorlage einer wissenschaftlichen Arbeit. Die Prüflinge aus der nordbayerischen Provinz, d. h. aus Würzburg und Erlangen, mußten zum Prüfungsort München reisen und dort während der Zeit der Prüfung wohnen.

Haupts wichtigste Lehrer der Mathematik sind in Würzburg neben Friedrich Prym vor allem Emil Hilb, Georg Rost und Eduard Ritter von Weber, von denen Haupt in seinen Erinnerungen mit großer Hochachtung spricht. Bei Prym muß Haupt im dritten und vierten Semester Differential- und Integralrechnung belegen. Im vierten Semester läßt er sich wenig in der Vorlesung sehen, da ihm die Aufzählung integrierbarer rationaler Funktionen zu langweilig ist. Umso mehr wundert sich Prym über Haupts Prüfungsergebnis bei der 1. Lehramtsprüfung. Als dieser erfährt, daß Haupt als einziger die Aufgabe aus der Integralrechnung gelöst hat, soll er ausgerufen haben: „Ist ja nicht möglich, der Schwänzer hat zuletzt fast immer nur gefehlt!" Diese Reaktion Pryms war umso verständlicher, wenn man hinzufügt, daß Haupt einer schlagenden Verbindung angehörte und Prym ihm schon früh prophezeite, daß schlagende Studenten nicht erfolgreich Mathematik studieren können.

Einen ganz besonderen Einfluß übt Emil Hilb auf Haupt aus. Hilb, gerade 27jährig, wird 1909 von Erlangen aus als Extraordinarius nach Würzburg berufen. Für die zum 2. Prüfungsabschnitt erforderliche wissenschaftliche Arbeit wird Haupt durch Rost zunächst auf ein vom Ministerium gestelltes Thema verwiesen. Haupts Kommentar: „Leider ergaben von mir angestellte Rechnungen, daß aus den Voraussetzungen die Negation der Behauptung folgt. Das Thema war also (vermutlich) unbrauchbar." Zum Glück, möchte man sagen, denn Haupt vertraut sich nun Hilb an, der ihm sofort ein Thema aus dem Gebiet der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung anbietet. Entgegen dem Rat Hilbs geht er das Problem in ganz neuartiger Weise an, erzielt einen entscheidenden Durchbruch und gewinnt innerhalb kürzester Zeit völlig neue Resultate, insgesamt genug Material sowohl für die wissenschaftliche Arbeit zum Staatsexamen als auch für eine Dissertation. Noch vor dem Staatsexamen im Oktober 1910 besteht er im Juli 1910 das Rigorosum.

Im unmittelbaren Anschluß an das Staatsexamen tritt er als Einjährig-Freiwilliger den Militärdienst beim 2. Trainbataillon an. „Wieder einmal unstandesgemäß", wie er selbst betont. Er bekennt, daß die Wahl des Truppenteils durch die Erfahrung bestimmt worden sei, daß man gerade beim Train viel freie Zeit habe, die er selbstverständlich für die Mathematik nützen will. Im Oktober 1911 wird er entlassen. Noch vorher wird er zum Dr. phil. promoviert.

Nun löst sich scheinbares Unglück in Glück auf: Noch vor Eintritt in den Militärdienst erreicht ihn die ministerielle Mitteilung, daß kein Prüfling seines Examensjahrganges 1910 vor 1919 in den Staatsdienst übernommen werden kann. Kaum nach der Entlassung vom Militärdienst – „körperlich und seelisch etwas erschöpft", wie er selbst sagt – folgt er dem Rat seiner Lehrer und bewirbt sich um ein Lamont-Stipendium der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Er hat Erfolg und verbringt zwei höchst anregende Semester in München, wobei Arnold Sommerfeld, der theoretische Physiker, ihn in seinen Bann zieht und eine Note Haupts über Reihenentwicklungen nach Eigenfunktionen einer Sommerfeldschen Randwertaufgabe der Bayerischen Akademie der Wissenschaften vorlegt. Ein weiteres Semester, das Wintersemester 1912/13, verbringt er in Breslau im Umkreis von Adolf Kneser, Erhard Schmidt, Constantin Carathéodory und Ernst Steinitz. Dort erreicht ihn das Angebot Adolf Krazers von der Technischen Hochschule Karlsruhe, die Stellung des 1. Assistenten bei ihm zu übernehmen. Bedingung war die baldige Habilitation. Auch Breslau versucht nun, Haupt zu halten; aber Haupt zieht Karlsruhe vor. Nach seinen eigenen Worten hatte er es niemals zu bereuen.

Mit dem Wechsel nach Karlsruhe zum Sommersemester 1913 beginnt Haupts Karriere als Hochschullehrer. Bereits im Herbst 1913 habilitiert sich Haupt mit einer Arbeit über Oszillationstheoreme. Seine Assistententätigkeit, insbesondere Vorlesungen für Maschinenbauer sowie für Architekten, bereiten ihm Freude. Er lernt Fritz Noether kennen, den Bruder Emmy Noethers, Assistent am Lehrstuhl für Mechanik in Karlsruhe, und er genießt das monatliche „Mathematische Kränzchen". Doch dann verdichten sich die dunklen Wolken am politischen Himmel. Am ersten Mobilmachungstag muß Haupt einrücken. Von Kriegsbeginn bis 1917 steht er als Adjutant einer sog. fliegenden Division im Feld. In Rumänien erkrankt er trotz Impfung an Typhus, zieht sich im Erholungsheim eine Gelbsucht zu und wird schließlich zum Ersatztruppenteil nach Würzburg versetzt, wo man ihn von einer inzwischen entdeckten chronischen Ruhr heilt. Über das Kriegsende hinaus ist er als Demobilmachungsoffizier tätig. Erst 1919 wird er ins zivile Leben entlassen; noch vorher heiratet er im November 1918. Er kehrt nach Karlsruhe zurück. Doch bereits kurze Zeit danach wird er auf ein Ordinariat für Mathematik in Rostock berufen. Dort tritt er Anfang 1920 seinen Dienst an. Die Arbeitsbedingungen erweisen sich als äußerst ungünstig; für wissenschaftliche Arbeit bleibt kaum Zeit. Aber schon vor Ablauf eines Jahres erreicht ihn ein Ruf an die Friedrich-Alexander-Universität in Erlangen. Diesen nimmt er zum Sommersemester 1921 an.

Erlanger Boden betritt Haupt erstmals im Zusammenhang mit dieser Berufung. Vorher war er nie in Erlangen gewesen. Zum Sommersemester 1921 übernimmt er das 1. Ordinariat für Mathematik an der Erlanger Universität, dem aus der Reihe seiner Vorgänger insbesondere Karl Georg Christian von Staudt und später Felix Klein, Paul Gordan, Erhard Schmidt und Ernst Fischer (bekannt durch den Fischer-Rieszschen Satz) zu Ruhm und Ansehen verholfen hatten. Dem

Wirken und dem Werk Karl Georg Christian von Staudts – 1835 nach Erlangen berufen – fühlt sich Haupt in besonderer Weise verpflichtet. Für Haupt ist das 1. Erlanger Ordinariat für Mathematik das von Staudtsche, obwohl von Staudt keineswegs der erste Inhaber dieses Lehrstuhls war. Mit Recht sieht aber Haupt in von Staudt den ersten Mathematiker moderner Prägung – nicht nur in Erlangen, sondern generell an einer bayerischen Universität. In Erlangen gibt es bei Haupts Dienstantritt neben dem von Staudtschen Ordinariat noch einen weiteren Lehrstuhl für Mathematik. Sein Inhaber ist Heinrich Tietze. Dessen Vorgänger, Max Noether, der erste Inhaber dieses zweiten Ordinariats, ist bereits emeritiert und stirbt noch Ende des Jahres 1921. In Erlangen entwickelt Haupt eine 60 Jahre anhaltende, rege Forschungstätigkeit. Rufe nach Gießen (1931), Darmstadt (1932) und Leipzig (1934) lehnt er ab. Allein in dieser Erlanger Zeit entstehen mehr als 170 Originalarbeiten neben den berühmt gewordenen Lehrbüchern und Monographien, von denen noch die Rede sein wird. Dabei lassen sich vier große Strömungen erkennen:

Zunächst werden die Untersuchungen zu dem durch seine Dissertation betretenen Fragenkreis über Oszillationstheoreme vorangetrieben und daneben Probleme aus der Funktionentheorie bearbeitet, an die Haupt durch seinen Lehrer Rost herangeführt worden war. Noch während des Rostocker Jahres publiziert Haupt als Beitrag zu dieser Forschungsrichtung Resultate über Abelsche Integrale 1. Gattung. Mehr als 60 Jahre später, nämlich 1985, erscheint eine Arbeit des Norwegers Henrik Martens[3]), in der er an diese funktionentheoretischen Untersuchungen Haupts anknüpft. Es gibt kaum einen besseren Beleg für die sich über Jahrzehnte erstreckenden Auswirkungen Hauptscher Forschungsergebnisse bis in die Gegenwart hinein. Heute Nachmittag werden wir Näheres hierzu aus dem Munde von Professor Martens hören.

Durch die Vermittlung Heinrich Tietzes lernt Haupt nach Max Noethers Tod dessen Tochter Emmy kennen. Emmy Noether war damals bereits in Göttingen habilitiert. Von nun an kommt sie häufig zu Besuch nach Erlangen und verkehrt im Hause Haupt. Von ihr, nicht zuletzt auf ausgedehnten Spaziergängen, lernt Haupt die neuen bahnbrechenden Ideen zur Algebra kennen. Haupt bezeichnet Emmy als die beste Propagandistin der damals neuen abstrakten Richtung in der Algebra. Die „Propaganda“ bleibt nicht ohne Wirkung: Haupt beginnt ein Lehrbuch über Algebra zu schreiben, ein Projekt, zu dem ihn vor allem sein Doktorvater Hilb unabhängig von Emmy Noether drängt. Allerdings will Hilb eine „klassische“ Algebra, während für Haupt nur eine „moderne“ Algebra in Frage kommt. 1929 erscheint sein zweibändiges Lehrbuch „Einführung in die Algebra“. Es ist ein Meilenstein auf dem Weg zur Verbreitung der Ideen der modernen Algebra und ist auch noch heute genußreich zu lesen. Beide Bände werden 1952 bzw. 1954 ein zweites Mal, der erste Band 1956 ein drittes Mal neu aufgelegt. Die zweite Auflage schenkt Haupt seinem Münchner Akademie-Kollegen Hans Piloty 1956 zum Weihnachtsfest, jenem Piloty, der als erster deutscher Wissenschaftler eine Forschungsgruppe über Elektronenrechner ein-

---

[3]) Martens, H. H.: On a theorem of O. Haupt characterizing periods of abelian differentials. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I., **10** (1985) 377–380

richtete und eine der ersten, in Deutschland gebauten, elektronischen Rechenanlagen, die berühmte PERM, entwickelte. Schon wenige Tage nach Weihnachten schreibt Piloty an Haupt: „Ihr Buch ist großartig. Genau das, was unsereins braucht. Sie erklären doch jedesmal, wenn ein neuer Begriff eingeführt wird, warum und wieso. Seit Weihnachten lese ich darin wie in einem spannenden Kriminalroman." So ist die Algebra die zweite große Strömung in Haupts wissenschaftlichem Schaffen, wenngleich sich diese Strömung kaum in Originalarbeiten niederschlägt. Seit jener Zeit denkt aber Haupt, bewußt oder unbewußt, in zunehmendem Maße algebraisch, auch wenn er Analysis und Geometrie betreibt.

Die dritte, besonders dominante Strömung in Haupts Oeuvre ist die reelle Analysis moderner Prägung, einer Prägung, die – ähnlich wie die moderne Algebra – ohne Vernachlässigung der Rechentechnik und der Anwendungen das Begriffliche in den Mittelpunkt der Betrachtungen rückt. In diesem Zusammenhang müssen vor allem die vielen Untersuchungen Haupts zur Maß- und Integrationstheorie, zur Theorie des Oberflächenmaßes und zur Differentiation additiver Funktionen genannt werden. Diese Forschungen Haupts finden ihren Niederschlag in seinem berühmten, zusammen mit Georg Aumann verfaßten Lehrbuch „Differential- und Integralrechnung", dessen drei Bände 1938 erscheinen. Bis zum heutigen Tag stellt dieses Werk hohe Anforderungen an den Leser. Und doch sind Generationen von Mathematikstudenten durch die harte Schule dieses „Haupt-Aumann" gegangen. Wer sein Können und seine Begabung durch die Lektüre dieses Werkes testete und nicht aufgeben mußte, der hatte für sein weiteres Studium einen felsenfesten Untergrund gelegt. Mit Recht nennt mein Kollege Konrad Jacobs[4]) dieses Werk „einen Geheimtip für ehrgeizige Studenten und Dozenten".

Während des zweiten Weltkrieges erscheint in den USA ein Nachdruck aller drei Bände. Zweimal erscheint das Werk völlig neu: einmal in den Jahren 1948–1955 und schließlich 1974–1983 unter neuem Titel als „Einführung in die reelle Analysis". Beim Erscheinen des dritten Bandes dieser dritten Auflage hat Haupt bereits das 96. Lebensjahr vollendet!

Kehren wir nun zurück in das Jahr 1924. Damals erscheint in der Mathematischen Zeitschrift eine Arbeit Haupts mit dem Titel „Kurven endlicher Ordnung". Sie kennzeichnet den Beginn der vierten großen Strömung in Haupts Forschungsarbeit, die sich bis in sein 100. Lebensjahr hinein verfolgen läßt. Es ist die Faszination der Ideen der beiden dänischen Mathematiker Christian Juel (1855–1935) und Johannes Hjelmslev (1873–1950), die unseren Jubilar zu dem von ihm ganz entscheidend geförderten Gebiet der Ordnungsgeometrie führen. Zugleich macht sich hierbei indirekt der Einfluß des Werkes von Karl Georg Christian von Staudt bemerkbar, dessen wissenschaftlichem Erbe sich Haupt von nun an noch stärker verpflichtet fühlt. Es handelt sich dabei um Fragen, die – in Haupts eigenen Worten – „erwachsen aus solchen der algebraischen Geometrie und der Differentialgeometrie, und zwar aus dem Bestreben, den geometrischen

---

[4]) Jacobs, K.: Mathematik in und um Erlangen. Das neue Erlangen, Zeitschrift für Wissenschaft, Wirtschaft und kulturelles Leben. Verlag Univ.-Buchhandlung Rudolf Merkel Erlangen, Heft 73 (1987) 2–9

Gehalt einschlägiger Sätze herauszuschälen". Grob gesagt, geht es um das Studium der „gestaltlichen Eigenschaften" von Kurven im Raum, wobei methodisch deren Schnittverhalten mit geeigneten Testkurven, den sog. Ordnungscharakteristiken, im Vordergrund steht und die Verwendung analytischer und algebraischer Hilfsmittel vermieden wird. Mehr als 130 Originalarbeiten in Haupts Schriftenverzeichnis sind diesem großen Thema gewidmet, welches häufig zu schwierigen topologischen Problemstellungen führt. Nahezu die Hälfte dieser 130 Arbeiten entsteht nach Haupts Emeritierung im Jahre 1953. Er läßt sich zu einem möglichst frühen Zeitpunkt emeritieren, um frei für die wissenschaftliche Arbeit zu sein. Hermann Künneth, der Entdecker der berühmten Künneth-Formel – in Erlangen als Gymnasiallehrer am Fridericianum tätig und von Haupt zur Habilitation gedrängt –, wird nach der Pensionierung zum engsten Mitarbeiter und Freund Haupts. Gemeinsam mit ihm vollendet Haupt die 1967 erscheinende Monographie „Geometrische Ordnungen", in der das Gebiet der Ordnungsgeometrie erstmals eine umfassende Darstellung findet. In jenen Jahren hört man aus Künneths Mund oft die Klage, daß er in seinem ganzen Leben noch sie so hart habe arbeiten müssen als unter dem Ansporn von Otto Haupt.

Unseren Jubilar sollten wir aber nicht ausschließlich in der Rolle des unentwegt forschenden Gelehrten sehen. Er war auch ein engagierter Hochschullehrer. Seine Vorlesungen bestachen durch Klarheit und Präzision, auch in der Technik des Anschreibens an die Tafel, stellten aber zugleich höchste Anforderungen an seine Hörer. Seine Studenten in den Anfangssemestern lernten sehr schnell, daß Halbheiten und Oberflächlichkeiten in der Arbeit des Mathematikers keinen Platz haben dürfen. Äußerste Präzision wird verlangt: beim Denken, beim Formulieren und auch beim Zeichnen in der Darstellenden Geometrie. Das Spektrum seines Vorlesungsangebotes war breit gefächert. Neben den klassischen Grund- und Hauptvorlesungen für die Ausbildung von Studienräten und Diplommathematikern hält er regelmäßig die Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler und über Jahre hinweg abwechselnd mit Helmut Volz, dem lange Zeit einzigen theoretischen Physiker in Erlangen, die Grundvorlesung über Theoretische Mechanik.

Auch in der akademischen Selbstverwaltung war Haupt tätig. Schon drei Jahre nach seiner Berufung nach Erlangen wählte ihn die philosophische Fakultät für das Amtsjahr 1924/25 zu ihrem Dekan. Damals gab es noch keine naturwissenschaftliche Fakultät in Erlangen; vielmehr bestand die philosophische Fakultät aus zwei Abteilungen, einer philosophischen und einer naturwissenschaftlichen. Wenige Jahre später beruft man Haupt in den Verwaltungsausschuß Medizin. Unmittelbar nach Kriegsende wird er erneut Dekan.

Die amerikanische Besatzungsmacht verpflichtet ihn, gemeinsam mit dem Chemiker Meuwsen, zur Übernahme des Dekanats. Erfolgreich verfolgt er in dieser Zeit, zusammen mit dem Experimentalphysiker Hilsch, den Ausbau der Physik und Mathematik sowohl personell als auch im Hinblick auf die räumliche Unterbringung der beiden Fächer. Wenige Jahre vor seiner Emeritierung ist Haupt dann noch maßgeblich mit großer eigener Initiative am Zustandekommen der „Erlanger Philosophen-Schule" durch die Berufung von Wilhelm Kamlah und Paul Lorenzen beteiligt. Das Erlanger Mathematische Institut prägt Haupt in den langen Jahren seines Wirkens als eine Stätte des Forschens und Lehrens. Daß dieses Institut getragen wird vom Konsens sowie vom gegenseitigen Vertrauen und Respekt der in ihm tätigen Hochschullehrer, ist sein ganz besonderes Anliegen.

Für den Außenstehenden mag es schwer verständlich sein, wie ein Forscher und Hochschullehrer vom Range Haupts ein so riesiges Arbeitspensum, insbesondere noch im hohen Alter, bewältigen konnte. Bei unserem Jubilar liegt ein Schlüssel zur Klärung dieses Geheimnisses in der Selbstzucht, die er sich in der Einteilung und Gestaltung seines Tagesablaufs auferlegte. Für den Außenstehenden bot sich das Bild einer Planung mit größter Präzision. Feste Zeiten für die Arbeit am Schreibtisch waren wohl ebenso selbstverständlich wie feste Zeiten für die Mittagsruhe, für Lektüre und für das Hören von Musik. Vor allem fehlte in der Planung seines Tagesablaufs niemals die Zeit zum Spaziergang. Er hielt es diesbezüglich mit Carl Zuckmayer, der einmal sagte: „Schon im Wort Müßiggang liegt Weisheit, denn echte Muße gibt es nur beim Gehen." Allerdings hatte Müßiggehen für Otto Haupt eine den Alltagsnormen nicht gerade entsprechende Bedeutung. Bei seinen Spaziergängen zeigte die unsichtbare Tachonadel auf eine Markierung irgendwo zwischen Laufen und Rennen, und das lange vor der Erfindung des Jogging. Hinzu kommt, daß Haupts „Gehen" nicht auf ebenen Wegen, sondern vorzugsweise auf unwegsamem Hanggelände am Rathsberg und dann meist auf der Direttissima stattfand. Fachgespräche mit Doktoranden und Kollegen wurden mit Vorliebe bei dieser Art von Spaziergängen geführt. Sie dienten dann zugleich der Kreislaufpflege bei seinen Partnern. Besonders wirksam war diese während gemeinsamer Aufenthalte am Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach im Schwarzwald. Die steilen Hänge gleich hinter dem Institut boten dazu die besten Voraussetzungen. Es ist nicht verwunderlich, daß ein amerikanischer Kollege, der Haupt auf solchen Wanderungen vor 25 Jahren begleitete, sich wie folgt erinnert[5]): "Haupt, at that time a young man of 75, was easily able to out-hike us all."

Im Leben eines Gelehrten und Hochschullehrers vom Range Otto Haupts hat es nicht an Ehrungen und Anerkennung gefehlt: Haupt ist Ehrendoktor der Universität Bonn (1962), seiner Heimatuniversität Würzburg (1963) und der Universität Nantes (1966). Er ist Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften seit 1947, der Akademie der Wissenschaften und Literatur in Mainz seit 1949 und der Société Royale des Sciences de Liège seit 1955. Noch viel wichtiger für das Fach Mathematik erscheint mir aber die Ausstrahlung nach außen, die von einem Mathematiker wie Otto Haupt ausgeht.

Damit gelange ich an einen Punkt meiner Laudatio, wo ich einen Bezug zur Wettbewerbs- und Profilierungsphase, in welcher sich unsere bundesdeutschen Universitäten derzeit ohne Zweifel befinden, nicht vermeiden kann. Im Konzert der Fächer ist das Fach Mathematik nur mit leisen Tönen herauszuhören. Das liegt nicht an der Qualität der Musiker, sprich Mathematiker; es liegt an ihrer Vorliebe für zart klingende und unaufdringliche Instrumente, einer Vorliebe, die ihnen ihre Wissenschaft aufprägt. Sie alle sehen in der Mathematik sehr viel mehr als ein

---

[5]) Schweizer, B.: Aequationes Mathematicae **28** (1985) 2

hohes Kulturgut, das es zu fördern und zu pflegen gilt. Sie alle wissen, daß gute Mathematik im Prinzip immer anwendungsfähig ist. Gerade in neuester Zeit gibt es in zunehmendem Maße Entwicklungen speziell in der sog. reinen Mathematik, die spektakuläre Anwendungen zulassen. Der 1984 veröffentlichte David-Report des US National Research Council[6]) rechnet die Mathematik unserer Tage zur high technology. Der Report gipfelt sogar in der Feststellung: Hochtechnologie ist mathematische Technologie. Aber die Mathematiker tun sich schwer, die schnell voranschreitenden und aufregenden Entwicklungen auf vielen Gebieten der Mathematik ohne Verwendung deren subtilen Sprache einer breiteren Öffentlichkeit darzustellen. Jedoch – und nun zitiere ich – „muß versucht werden, auch der Mathematik die Stellung einzuräumen, die ihr als einer der ältesten und edelsten Betätigungen des menschlichen Geistes und als eine der richtunggebenden Kräfte in seiner Entwicklung gebührt, – die sie aber im Bewußtsein der Gebildeten, wenigstens in Deutschland, leider nur selten einnimmt". Dieser Satz wurde vor mehr als 60 Jahren von Felix Klein[7]) niedergeschrieben; er ist unverändert aktuell. Um so mehr – und jetzt komme ich zum Punkt – braucht ein Fach wie die Mathematik gute Botschafter. Otto Haupt war und ist kraft seines wissenschaftlichen Ansehens ein solcher Botschafter, trotz – nein – gerade wegen seiner Bescheidenheit. Ich will versuchen, dies durch drei Beispiele zu belegen:

Zunächst soll der Schriftsteller Hans Erich Nossack zu Worte kommen. 1965 hält er an der TU Darmstadt einen Vortrag über das Thema „Die schwache Position der Literatur". Dort führt Nossack folgendes aus:

„Der Schriftsteller beobachtet die Person des Gelehrten, der auf dem Podium seinen Vortrag hält, sehr genau. Gestik und Tonfall der Stimme fesseln ihn oft mehr als das Thema. Voller Staunen sieht er, wie der Mann von seinem Thema besessen ist, das die Literatur als lebensunwichtig ablehnen würde. Doch die Besessenheit versteht der Schriftsteller nur zu gut, sie reißt ihn sogar mit, auch wenn ihm das Thema völlig fremd ist. Mir selber, wenn ich das erwähnen darf, ist folgendes passiert:

Eines Tages entwickelte ein Mathematiker ein geometrisches Problem vor der Akademie. Ich verstand nicht das geringste davon, nicht einmal die Geheimsprache und Geheimschrift der Mathematiker. Aber ich sah, wie der Mann seine Zeichen an die Tafel malte und dann träumerisch in den Saal blickte. Wie ein Dichter – in diesem Fall ist die peinliche Bezeichnung wirklich angebracht –, der nach dem rechten Ausdruck für etwas Unaussprechbares sucht. In der Diskussion sprang ich spontan auf und sagte: ‚Ich habe die ganze Zeit das Gefühl gehabt, daß da unsere Sache verhandelt wurde.'

Welch eine unwissenschaftliche Reaktion! Und doch: die Sache, um die es geht, muß stimmen, und in dem besessenen Bemühen, ihre Sache stimmend zur Darstellung zu bringen, sind Wissenschaftler und Schriftsteller sich gleich."

---

[6]) Renewing U.S. Mathematics: Critical Resource for the Future – Report of the Ad Hoc Committee on Resources for the Mathematical Sciences (Chairman: E. E. David, Jr.). National Research Council, National Academy Press, Washington, D.C. 1984

[7]) Klein, F.: Einleitung zu „Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert". Berlin: Springer-Verlag 1926

Vor Jahren schenkte mir Otto Haupt ein Büchlein[8]), das u.a. diesen Aufsatz enthält. Seine Widmungszeilen belegen, daß Nossack von ihm spricht. Beide kannten sich von der Mainzer Akademie her.

Ich komme zum zweiten Beispiel: Kaum nach Erlangen berufen, sucht und findet Haupt mühelos Kontakt zu Studienräten der Mathematik im Großraum Nürnberg. Er wirkt an der Neubearbeitung eines Kapitels eines damals gängigen Mathematik-Lehrbuchs mit. Von 1927 an entstehen aus diesen Kontakten regelmäßige Treffen mit interessierten Gymnasiallehrern, denen Haupt – zum Teil auch mit Hilfe auswärtiger Vortragender – neue Entwicklungen der Mathematik vorstellte, um sie für die Schule aufzuschließen. Ab 1933 kommt diese Tätigkeit – aus Gründen, die ich noch darlegen werde – zum Erliegen. Aber nach dem Krieg knüpft er an diese Tradition in Form der sog. „Erlanger Zusammenkünfte" wieder an: all dies lange vor einer Institutionalisierung der Lehrerfortbildung auf staatlicher Ebene. Viele Mathematiklehrer im fränkischen Raum denken noch heute dankbar an diese monatlichen Treffen im Semester zurück, die Haupt auch nach seiner Emeritierung fortführt. Auch im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach leitet er Fortbildungstagungen für Studienräte. All dies erklärt, warum ihm 1965 die Ehrenmitgliedschaft im Deutschen Verein zur Förderung des Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterrichts verliehen wurde.

Zu seinem 100. Geburtstag erreichte unseren Jubilar ein Glückwunschschreiben des französischen Mathematikers Gustave Choquet, der der Französischen Akademie angehört. Choquet schreibt u. a. – ich versuche zu übersetzen:

„... Den Mathematikern haben Sie nicht nur wesentliche, tiefe und elegante Arbeiten zur reellen und komplexen Analysis und über Ordnungsstrukturen geschenkt. Sie haben ihnen auch das Beispiel eines Lebens vorgelebt, welches allzeit geleitet war von einem hohen Ideal wissenschaftlicher Forschung und zwischenmenschlicher Kontakte ..."

Diese Worte eines großen zeitgenössischen Mathematikers rufen mir eine weitere Botschafterrolle Haupts ins Gedächtnis. Sie bezieht sich auf unser Nachbarland Frankreich.

Kurz vor Ausbruch des 2. Weltkriegs interessiert sich Haupt für die Forschungsergebnisse eines jungen französischen Mathematikers. Er heißt Christian Pauc. Es kommt zu einer kurzen Begegnung und zu zwei gemeinsamen Publikationen – mit Georg Nöbeling als weiterem Autor.

Pauc gerät als französischer Offizier in deutsche Kriegsgefangenschaft und gelangt schließlich nach Berlin, wo er die Bombennächte durchlebt. Durch die Vermittlung eines Pariser Kollegen wird Haupt auf Paucs Lage aufmerksam. Ende 1943 gelingt es ihm, den Kriegsgefangenen Pauc aus dem Gefangenenlager zur Mitarbeit ans Erlanger Mathematische Seminar zu bringen, wo er – höchst erfolgreich und von den Studenten verehrt – die Aufgaben eines wissenschaftlichen Assistenten wahrnimmt. Sofort nach Kriegsende verläßt Pauc Deutschland – als Freund und Bewunderer Haupts. Sein Heimatland nimmt ihm die Tätigkeit in Erlangen übel. Für Jahre verläßt er Frankreich.

---

[8]) Nossack, H.E.: Die schwache Position der Literatur. – Reden und Aufsätze. Edition Suhrkamp, Bd. 156. Frankfurt am Main: Suhrkamp Verlag 1966

Aber zwischen Haupt und Pauc geht der wissenschaftliche Gedankenaustausch weiter. Er führt zu vielen gemeinsamen Publikationen und schließlich zur völligen Neubearbeitung der Hauptschen Differential- und Integralrechnung mit Pauc als neuem Co-Autor.

Die Bewunderung Paucs für den Menschen und Wissenschaftler Haupt war es wohl, die Pauc 1952 bewog, einem jungen Doktoranden Haupts nicht nur sein Interesse zu schenken, sondern diesem auch den Weg nach Nancy – zu jener Zeit ein Zentrum der französischen Mathematik – und wenig später auch nach Paris zu ebnen. Pauc selbst kehrt Mitte der fünfziger Jahre nach Frankreich zurück und wird Professor in Rennes.

Beide Entwicklungen kennzeichnen den Beginn langwährender wissenschaftlicher Kontakte zwischen Mathematikern in Erlangen und Rennes, von welchen vor allem viele jüngere Mathematiker – Deutsche und Franzosen, bald auch mit Standorten weit über Erlangen und Rennes hinaus – profitierten. Lange bevor die Idee einer offiziellen Partnerschaft zwischen den Universitäten und Städten Erlangen und Rennes heranreift, tragen so die Kontakte zwischen Otto Haupt und Christian Pauc bereits ihre Früchte. Bitte verübeln Sie es mir nicht, wenn ich bekenne, daß ich der Doktorand Otto Haupts war, dem Christian Pauc und Otto Haupt den Weg zu einem ein Leben lang anhaltenden, wissenschaftlichen Gedankenaustausch mit französischen Mathematikern eröffneten. Es erfüllt mich mit besonderer Freude, daß ich dies heute nicht nur Herrn Haupt, sondern auch Madame Pauc, der Witwe des leider viel zu früh von uns gegangenen Christian Pauc in Erinnerung rufen kann. Madame Pauc hat den weiten Weg von der Atlantikküste nach Erlangen nicht gescheut, um an der heutigen Feier teilzunehmen.

Ich kann diese Würdigung Haupts nicht abschließen, ohne nicht auch auf den Menschen einzugehen, der unseren Jubilar über 63 Jahre hindurch begleitet hat, nämlich auf Frau Haupt.

Edith Hughes, die Tochter eines Sodener Arztes, und Otto Haupt heiraten am 9. November 1918, dem ersten Tag der Novemberrevolution. Frau Haupt war Halbjüdin. 1934 unterrichtet das Unterrichtsministerium die Erlanger Universität in einer sog. Entschließung, daß Frau Haupt „nicht-arisch" sei. Der damalige Syndikus, der Haupt sehr freundlich gesonnen ist, berichtet diesem von gelegentlichen Erkundigungen der Gestapo. Schwere Jahre beginnen. Es ist bezeichnend für die Bescheidenheit von Otto und Edith Haupt, daß sie trotz unserer langen Bekanntschaft mir gegenüber nie über die Qualen dieser Zeit sprachen. Erst in den letzten Jahren erfuhr ich nähere Einzelheiten durch Herrn Haupt.

Obwohl Haupt auf Grund der beunruhigenden Mitteilungen durch den Syndikus nun täglich mit seiner Entlassung rechnet, erhält er 1934 sogar den bereits erwähnten Ruf nach Leipzig. Sein dortiger Kollege Paul Koebe, der die Berufung nach Leipzig besonders fördert, war vorher durch Haupt von dessen Situation in Kenntnis gesetzt worden. Koebe schlägt Haupts Warnungen aber in den Wind. Bei den anschließenden Berufungsverhandlungen in Dresden wird Haupt Koebes Verhalten klar: Der mit Haupt verhandelnde Ministerialrat erklärt nämlich, daß eine Berufung doch nicht an der Rasse der Ehefrau scheitern könne. Das Versprechen gegenüber Haupt, man werde eine eventuelle Ablehnung des

Rufes allein ihm anrechnen, wird eingehalten. Es ist eine Ironie des Schicksals, daß Haupt für diese Rufablehnung sogar ein Lob von Julius Streicher in der Presse erhält.

Der Bericht über die kommenden Jahre liest sich in der nüchternen Berichterstattung der Hauptschen Aufzeichnungen so: „Auch Leipzig hatte für uns keine Folgen. Dagegen betrachteten wir es als ein Feuerzeichen, daß wir mehrere Monate vor dem Zusammenbruch die Lebensmittelkarten nicht mehr zugestellt bekamen. Sie mußten von meiner Frau beim Lebensmittelamt abgeholt werden. Den Rat unserer Freunde, unterzutauchen, befolgten wir nicht, da in unserer Lage ein Untertauchen zwecklos erschien. Wir vernichteten nur alle Papiere, die uns eventuell schaden konnten." Mit dem lapidaren Satz „Das war die letzte nicht-arische Aufregung" enden die Aufzeichnungen über diese dunklen Jahre.

Edith Haupt – hoch gebildet und zugleich von größter Bescheidenheit und Zurückhaltung – hat ihren Mann in seiner Arbeit immer äußerst verständnisvoll unterstützt. Traf man die beiden Haupts, so bekam man jedesmal erneut den Eindruck, als hätten sie erst vor kurzem geheiratet. Jeder von beiden war bemüht, dem anderen zu helfen. Eine Teestunde mit dem Ehepaar Haupt war immer ein besonderes Erlebnis: Langeweile im Gespräch kam nie auf, wobei im Beisein der Damen selbstverständlich jede Fachsimpelei verpönt war. Verabschiedete man sich, so verspürte man noch lange den Zauber eines beglückenden Gesprächs mit zwei wunderbaren Menschen. Edith Haupt starb 1981. Erst 1982 verläßt Haupt Erlangen. Er lebt seitdem in Bad Soden, liebevoll betreut von Verwandten.

Meine Damen und Herren! Wir alle, die wir das Glück haben und hatten, Otto und vielleicht auch Edith Haupt zu kennen, haben Grund zu großer Dankbarkeit und Freude. Seien wir insbesondere dankbar und freuen wir uns, daß es uns vergönnt war und ist, gemeinsame Wegstrecken mit Otto Haupt zurückzulegen. Er ist eine Gelehrtenpersönlichkeit par excellence, ein Botschafter unserer Wissenschaft von großer und nachhaltiger Ausstrahlung und ein großartiger Mensch. Senden wir ihm in Verehrung und Zuneigung die herzlichsten Grüße und die allerbesten Wünsche hinüber nach Bad Soden.

Ergänzung des im Jber. d. Dt. Math.-Verein. 89 (1987) 71–80 aufgelisteten Schriftenverzeichnisses von Otto Haupt

[113a] Beispiele mathematischer Begriffsbildung. Jahrb. 1953 d. Akad. d. Wiss. u. Lit., Mainz, 168–181
[126a] Friedrich Riesz. Jahrb. Bayer. Akad. Wiss. 1957, 179–183
[128a] Einiges über euklidische Raumformen. Jahrb. 1957 d. Akad. d. Wiss. u. Lit., Mainz, 247–265
[134a] Georg Rost. Jahrb. Bayer. Akad. Wiss. 1959, 170–172
[185a] Georg Aumann. Jahrb. Bayer. Akad. Wiss. 1981, 266–270

Promovenden mit Otto Haupt als 1. Referenten

1. Sauter, Ilse: Zur Theorie der Bogen n-ter (Realitäts)Ordnung im projektiven R_n (1936)
2. Buckel, Walter: Über eine Verallgemeinerung der Dupinschen Indicatrix (1940)
3. Thoma, Elmar: Über die Erweiterung und Vollständigkeit stetiger linearer Abbildungen (1952)
4. Bauer, Heinz: Reguläre und singuläre Abbildungen eines distributiven Verbandes in einem vollständigen Vektorverband, welche der Funktionalgleichung $f(x \vee y) + f(x \wedge y) = f(x) + f(y)$ genügen (1953)
5. Schmerler, Georg: Eine Verallgemeinerung ordnungsgeometrischer Sätze über Kurven (1957)

Koreferenten waren W. Krull (1.) und G. Nöbeling (2.–5.)

Weitere Literatur zum 100. Geburtstag von Otto Haupt

Bauer, H.: Otto Haupt – Zum 100. Geburtstag. Aequationes Mathematicae **32** (1987) 1–5

Schriftenverzeichnis Otto Haupt: Aequationes Mathematicae 332 (1987) 6–18

Barner, M; Flohr, F.: Otto Haupt zum 100. Geburtstag. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **89** (1987) 61–80 (mit Schriftenverzeichnis)

Prof. Dr. Heinz Bauer
Mathematisches Institut
der Universität Erlangen-Nürnberg
Bismarckstraße $1^1/_2$
D-8520 Erlangen

(Eingegangen: 1. 1. 1990)

Buchbesprechungen

Prestel, A., Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie (vieweg studium, Bd. 60, Aufbaukurs Mathematik; hrsg. von Gerd Fischer), Braunschweig: Vieweg 1986, XIV, 286pp., Pb., DM 48,–

„Mitte der sechziger Jahre ließen einige Schlußweisen und Konstruktionsmethoden der Modelltheorie die mathematische Welt aufhorchen. J. Ax und S. Kochen war es gelungen, in einer gemeinsamen Arbeit einen entscheidenden Beitrag zur ‚Artinschen Vermutung' über die Lösbarkeit von homogenen diophantischen Gleichungen in den p-adischen Zahlkörpern zu leisten. Dieses und andere Ergebnisse führten zu einem Eindringen gewisser modelltheoretischer Begriffe und Methoden in die Algebra. Aufgrund ihrer Fremdartigkeit konnten sich allerdings nur sehr wenige Algebraiker mit ihnen anfreunden." Alexander Prestel – selbst Algebraiker *und* Logiker – macht in seinem Buch, aus dessen Einleitung ich hier zitiere, ein entsprechendes Freundschaftsangebot, das beim gutwilligen Leser, sei er Student oder Berufsmathematiker, aus besagter Fremdheit Vertrautheit machen kann. Dieses Buch ist eine sowohl in inhaltlicher als auch notationeller Hinsicht gut lesbare Einführung in die Modelltheorie des klassischen Prädikatenkalküls erster Stufe, deren Umfang im wesentlichen dadurch bestimmt ist, daß als Höhepunkt der eingangs erwähnte modelltheoretische Beitrag zur Zahlentheorie behandelt wird. Es handelt sich also um eine Einführung in die „konkrete (oder sog. algebraische) Modelltheorie", welche klassische algebraische Strukturen mittels logischer Methoden zu untersuchen zum Inhalt hat. Dadurch ist zugleich bestimmt, was nicht Eingang in die Behandlung findet: Der Satz von Morley über Kategorizität und die daraus entstandene Shelahsche Stabilitäts- oder auch Klassifikationstheorie. Der Autor weist allerdings auf diese „abstrakte Modelltheorie" hin, deren Gegenstand nicht mehr nur klassische, sondern ganz beliebige, eben abstrakte mathematische Strukturen sind. Der Einheit der Modelltheorie wegen sei erwähnt, daß auch diese Theorie wieder zu klassischen Objekten führt, da sich solche – wie tiefliegende Resultate von Zil'ber und Hrushovski zeigen – in vielen abstrakten Strukturen wiederfinden lassen.

Da sich das Buch auch an Leser wendet, die auf dem Gebiet der mathematischen Logik nicht vorgebildet sind, bespricht der Autor nach einem kurzen historisch-methodologischen Abriß in der *Einleitung* zunächst in Kapitel 1 die *Logik erster Stufe.* Er führt das formale Beweisen ein und anhand von Beispielen vor, beweist den Vollständigkeitssatz (in Form der Gegenbeispielexistenz und unter Umgehung des Folgerungsbegriffs), den Korrektheitssatz und den Endlichkeitssatz und gibt Axiomatisierungen der wichtigsten im Buch vorkommenden Modellklassen an, wie Ordnungen, Gruppen, angeordnete abelsche Gruppen, Körper, angeordnete Körper etc., ferner auch das Peanosche Axiomensystem der Arithmetik und das Zermelo-Fraenkelsche der Mengenlehre.

Die nächsten beiden Kapitel beinhalten die eigentliche Einführung in die Modelltheorie: In Kapitel 2 werden nach Einführung der wichtigsten Grundbegriffe die bekanntesten *Modellkonstruktionen* (Termmodelle, Löwenheim-Skolem-Konstruktionen, Vereinigungen elementarer Ketten, saturierte Strukturen, Ultraprodukte) und deren Eigenschaften studiert. Kapitel 3 behandelt *Eigenschaften von Modellklassen* wie Kompaktheit und Separation, Kategorizität, Modellvollständigkeit und Quantorenelimination und ferner Modellbegleiter und induktive Theorien. Als Beispiel betrachtet der Autor in diesem Kapitel algebraisch abgeschlossene Körper, für die er – von der schwächsten zur stärksten Eigenschaft fortschreitend – Vollständigkeit (natürlich bei fester Charakteristik), Modellvollständigkeit und Quantorenelimination nachweist und zeigt, was sich daraus jeweils als algebraische Anwendung gewinnen läßt: Aus der Vollständigkeit folgen die bekannten

Transferprinzipien für algebraisch abgeschlossene Körper. Interesssant ist ein auf deren Anwendung beruhender (und auf Ax zurückgehender) modelltheoretischer Beweis eines Satzes der algebraischen Geometrie über die Surjektivität gewisser injektiver Abbildungen im affinen Raum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper (Satz 3.10). Der Hilbertsche Nullstellensatz folgt aus der Modellvollständigkeit, während sich aus der Quantorenelimination unmittelbar der Chevalleysche Satz über die Konstruktibilität von Projektionen konstruktibler Mengen ergibt.

In Kapitel 4 wird das Gelernte auf die *Modelltheorie einiger* weiterer *algebraischer Theorien* angewandt: auf angeordnete abelsche Gruppen und auf angeordnete und bewertete Körper. Es wird u. a. gezeigt, daß die Theorie der dividierbaren angeordneten abelschen Gruppen und die der reell abgeschlossenen Körper Quantorenelimination erlauben und somit vollständig und modellvollständig sind. Aus der Quantorenelimination für reell abgeschossene Körper folgt unmittelbar (analog zum algebraisch abgeschlossenen Fall) das Tarski-Prinzip der reellen algebraischen Geometrie, das besagt, daß Projektionen semi-algebraischer Mengen wieder semi-algebraisch sind. Dann wird gezeigt, daß sich aus der Modellvollständigkeit die Lösung des 17. Hilbertschen Problems ergibt. („The logic proof will be shorter and more perspicuous than any proof disdaining the use of logic", sagt Macintyre hierzu in seinem Abschnitt über Modellvollständigkeit in Barwise' Handbook of mathematical logic und weist darauf hin, daß selbst Jacobson in seiner Basic Algebra I diesen Zugang wählt. Im übrigen kann ich Macintyres Artikel jedem als Ergänzung zu Prestels Buch ans Herz legen, der an der Ideengeschichte des gesamten wesentlich durch Tarski und Robinson in den fünfziger (!) Jahren geformten Gebietes interessiert ist.) Bei den bewerteten Körpern stehen die henselsch bewerteten im Zentrum des Interesses. In einem gesonderten Abschnitt des Kapitels stellt der Autor zunächst die benötigten algebraischen Voraussetzungen bereit. (Beweise werden allerdings nicht voll ausgeführt und statt dessen auf andere Bücher des Autors und auf das von Endler verwiesen.) Dann beweist er den Satz von Ax, Kochen und Ershov über die elementare Äquivalenz henselscher Körper der Restklassenscharakteristik Null, um daraus schließlich den eingangs genannten Beitrag zu Artins Vermutung über p-adische Zahlkörper zu erhalten.

In einem Anhang macht der Autor abschließend einige *Bemerkungen zur Entscheidbarkeit* und deren Zusammenhang mit Axiomatisierbarkeit, Vollständigkeit und dem ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz.

Am Ende eines jeden Kapitels finden sich einige wenige Übungsaufgaben. Ein rundum empfehlenswerter Schnellkurs in algebraischer Modelltheorie!

Kiel Ph. Rothmaler

Samuel, P., Projective Geometry (Undergraduate Texts in Mathematics – Readings in Mathematics), New York u. a.: Springer-Verlag 1988, 156 S., Softcover, DM 68,–

Dieses Buch wurde, wie der Autor in der Einleitung feststellt, mit Vergnügen geschrieben. Entstanden ist ein Buch, das man mit Vergnügen liest.

Vorausgesetzt werden beim Leser im wesentlichen nur Kenntnisse der elementaren linearen Algebra. Geboten wird ihm ein wohlorganisierter Streifzug durch die klassische projektive Geometrie, angereichert durch zahlreiche Hinweise auf weitergehende Entwicklungen.

Einige Stichworte zum Inhalt: *Kapitel 1.* Projektive und affine Räume, axiomatische Beschreibung (Desargues, Pappos), projektive Abbildungen und Kollineationen, Dualität, Linearsysteme von Hyperebenen und von Kegelschnitten. *Kapitel 2.* Eindimensionale projektive Geometrie, Doppelverhältnisse, harmonische Teilung, Involutionen, rationale Kurven, projektive Struktur von Kegelschnitten (Sätze von Frégier und Pascal). *Kapitel 3.* Klassifikation von Kegelschnitten und Quadriken (euklidischer, affiner, projektiver Fall). *Kapitel 4.* Polaritäten und Kegelschnitte.

Den Abschluß bildet ein Anhang über (2, 2)-Korrespondenzen, der als Anwendung eine Beschreibung der Poncelet-Polygone enthält.

Dieses Buch ist als Grundlage für Vorlesungen und zum Selbststudium (gerade auch für Studenten) hervorragend geeignet; es vermittelt einen Eindruck von der Schönheit geometrischer Sätze und regt zu einem weiterführenden Studium, etwa der algebraischen Geometrie, an. Sehr empfehlenswert!

Freiburg P. Hauck

Bochnak, J., Coste, M., Roy, M.-F., Géométrie Algébrique Réelle (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Vol. 12), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1987, 44 figs., 390pp., Hardcover, DM 188,–

Mathematisch beschreiben wir die Welt mit Hilfe der reellen Zahlen. Deshalb ist es erstaunlich, daß in der algebraischen Geometrie, welche historisch ja oft mit ganz praktischen Problemen begründet wird, bis vor kurzer Zeit reelle algebraische Varietäten (das sind reelle Lösungsmengen von polynomialen Gleichungssystemen mit reellen Koeffizienten) nicht systematisch untersucht wurden. In vielen Büchern über algebraische Geometrie ist der Hilbertsche Nullstellensatz eines der ersten bemerkenswerten Ergebnisse (siehe z. B. R. Hartshorne: Algebraic Geometry, Theorem I 1.3.A). Die reellen Zahlen werden als Beispiel dafür herangezogen, daß der Nullstellensatz nicht über beliebigen Körpern gilt (loc. cit., Example I 1.4.5). Dies suggeriert einen Defekt der reellen Zahlen. Tatsächlich gilt aber auch über jedem reell abgeschlossenen Körper ein Nullstellensatz. Er hat sogar denselben Wortlaut wie der Hilbertsche Nullstellensatz, wenn man nur das Radikal eines Ideals durch sein reelles Radikal ersetzt. Dies ist ein typisches Beispiel dafür, daß die reelle algebraische Geometrie zwar anders, aber nicht schlechter als die algebraische Geometrie über den komplexen Zahlen ist. Weitere offensichtliche Unterschiede werden im Kapitel 3 des vorliegenden Buches sehr anschaulich diskutiert.

Als Grundkörper werden in der reellen algebraischen Geometrie oft beliebige reell abgeschlossene Körper verwendet. Daß die Untersuchung dieser Körper auch zu einem vertieften Verständnis der reellen Zahlen beiträgt, ist seit Artins Lösung von Hilberts 17. Problem bekannt: Ein entscheidendes Hilfsmittel waren reell abgeschlossene Körper. Unter einer affinen reellen algebraischen Varietät verstehen wir also eine Teilmenge $V \subset R^n$, R ein reell abgeschlossener Körper, die sich als Lösungsmenge von endlich vielen polynomialen Gleichungen $P_i(X_1, \ldots, X_n) = 0$, $i = 1, \ldots, r$ darstellen läßt. Wie jede algebraische Varietät trägt V die Zariski-Topologie. Darüber hinaus gibt es aber auf V weitere Strukturen, zu denen es in der algebraischen Geometrie über beliebigen Körpern kein Analogon gibt. Zum einen ist die starke Topologie zu nennen, die von der Intervalltopologie des eindeutig angeordneten Körpers R induziert wird. Zum anderen gibt es in V semi-algebraische Teilmengen; das sind diejenigen Teilmengen, die durch endlich viele polynomiale Gleichungen und Ungleichungen definiert werden können.

Mit starker Topologie und semi-algebraischen Teilmengen hat eine reelle Varietät einen Strukturreichtum, der zu Ergebnissen und Methoden führt, die der reellen Theorie eigentümlich sind. Nahezu jedes Resultat in dem vorliegenden Buch ist ein Beleg dafür. Ein wichtiger Punkt ist die Definition der Strukturgarbe einer reellen Varietät. Es werden die regulären Funktionen verwendet. Das sind Quotienten von Polynomfunktionen, wobei der Nenner keine Nullstellen hat. Je nach Gesichtspunkt und speziellen Interessen kann man tatsächlich ganz verschiedene Strukturgarben verwenden, etwa die Garbe der Nash-Funktionen oder die Garbe der stetigen semi-algebraischen Funktionen. Insbesondere die Untersuchung dieser verschiedenen Funktionenringe ist ein Anliegen der sogenannten reellen Algebra. Dies ist das algebraische Gegenstück zu den spezifischen reellen Phänomenen in der Geometrie. Grob gesagt läßt sie sich im Unterschied zur üblichen kommutativen Algebra dadurch charakterisieren, daß teilweise oder totale Anordnungen eine wesentliche Rolle spielen. Grundlagen aus der reellen Algebra werden in einem durch die Geometrie diktierten Umfang behandelt. Es kommen formal-reelle Körper, der Satz von Artin-Lang, das reelle Spektrum, Nash-Funktionen und reelle Stellen zur Sprache. Es ist sorgfältig darauf geachtet, daß die geometrische Relevanz dieser algebraischen Ingredienzen unmittelbar erkennbar ist.

Auf den geometrischen Seite werden einige Grundkenntnisse über semi-algebraische Mengen und Funktionen vermittelt. Delfs und Knebusch haben in eindrucksvoller Weise gezeigt, wie man mit diesen Strukturen algebraische Topologie treiben kann (H. Delfs, M. Knebusch: Locally semialgebraic spaces. Springer LNM 1173; M. Knebusch: Weakly semialgebraic spaces. Springer LNM 1367). Im vorliegenden Buch werden diese Räume jedoch nicht als eigene geometrische Objekte studiert, sondern als Hilfsmittel bei der Untersuchung von Varietäten. Es wird damit ein Rahmen geschaffen, innerhalb dessen man bequem mit regulären Funktionen, mit Nash-Funktionen und ggf. auch noch mit anderen Funktionen hantieren kann.

Auf der Basis dieser vorbereitenden und eher grundlegenden Dinge werden schließlich reelle Varietäten studiert. Insbesondere werden die folgenden Themenbereiche angesprochen: Die Topologie algebraischer Mengen (lokale Euler-Charakteristik, Betti-Zahlen, Hilberts 16. Problem), algebraische Vektorbündel (insbesondere Approximationsprobleme), Funktionen von Varietäten in Sphären und algebraische Modelle von C^∞-Varietäten (Satz von Nash und Tognoli).

Als eigenständiges Gebiet in der Mathematik ist die reelle algebraische Geometrie noch jung. Trotzdem ist ein umfassender Überblick innerhalb eines Buches schon längst nicht mehr möglich. Die Autoren haben sich auf das Studium reeller algebraischer Varietäten beschränkt. In diesem Bereich sind viele Grundlagen sowie einige speziellere neue Entwicklungen erstmals in zusammenhängender Weise dargestellt. Dabei werden zwei Dinge in anschaulicher und überzeugender Weise deutlich: Es gibt eine reelle algebraische Geometrie, die ihre eigenen Methoden und ihre spezifischen Ergebnisse hat. Und ein umfassendes Verständnis dieser reellen algebraischen Geometrie wird erst möglich, wenn Gesichtspunkte aus den verschiedensten Teilgebieten der Mathematik (Algebra, Modelltheorie, algebraische Geometrie, analytische Geometrie, algebraische Topologie) berücksichtigt werden.

Passau N. Schwartz

Lang, S., Introduction to Arakelov Theory, Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1988, 8 Abb., 187 Seiten, Hardcover, DM 98,00

Es sei K ein algebraischer Zahlkörper, $S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ das Spektrum des Ringes der ganzen Zahlen in K und X eine eigentliche Kurve über S, also z. B. ein ganzzahliges Modell einer algebraischen Kurve über $\mathbb{Q}$.

Da X Krulldimension zwei hat, heißt X arithmetische Fläche über der arithmetischen Kurve S.

Ziel der Arakelov-Theorie ist das Studium dieser arithmetischen Flächen. In Analogie zu der Theorie der algebraischen Flächen über algebraisch abgeschlossenen

Körpern kann man nun versuchen, auch auf arithmetischen Flächen ein Schnittprodukt von Divisoren zu definieren und einen Riemann-Roch-Satz und ein Hodge-Index-Theorem zu beweisen.

Der naive Versuch scheitert aber daran, daß S nicht vollständig ist, so daß X einer Fläche über einer affinen Kurve entspricht, auf der es keine vernünftige Schnittpaarung gibt, da sich zwei Divisoren erst „im Unendlichen" schneiden könnten. Arakelovs geniale Methode vervollständigt S durch Punkte im Unendlichen, die den archimedischen Stellen des Zahlkörpers K entsprechen.

Entsprechend wird auch X durch Riemannsche Flächen als Fasern im Unendlichen zu $\hat{X}$ vervollständigt. Diese Riemannschen Flächen entstehen aus der generischen Faser von X durch die verschiedenen Einbettungen von K nach $\mathbb{C}$. Damit sind diese kompaktifizierten arithmetischen Flächen zusammengesetzt aus komplex-analytischen Objekten (über den unendlichen Stellen) und arithmetisch-geometrischen Objekten (über den endlichen Stellen). Diese Dichotomie zieht sich durch die ganze Theorie; so werden z. B. Geradenbündel auf $\hat{X}$ durch eine hermitesche Metrik „kompaktifiziert".

Arakelov hat 1974 Divisoren auf $\hat{X}$ definiert und ein Schnittprodukt für diese Divisoren konstruiert. 1983 fand Faltings eine geeignete Metrik auf dem Determinantenbündel der Kohomologie und bewies dafür den Satz von Riemann-Roch, das Hodge-Index-Theorem und Noethers Formel.

Die spektakulärste Anwendung hat diese Theorie in Faltings Beweis der Modell-Vermutung gefunden, wenn auch mehr konzeptionell als beweistechnisch. Auf weitere Anwendungen im Rahmen der Bogomolov-Miyaoka-Ungleichung geht der Anhang des vorliegenden Buches von Paul Vojta ein.

Die ersten beiden Kapitel über Metriken und Greensche Funktionen auf Riemannschen Flächen befassen sich mit den Fasern im Unendlichen einer arithmetischen Fläche. Die wichtigsten Eigenschaften der Greenschen Funktionen werden alle hergeleitet, so zum Beispiel die Symmetrie, die Reproduktionsformel und die Tatsache, daß die Faltung mit der Green-Funktion den Laplace-Operator invertiert. Ferner wird Colemans Existenzbeweis gegeben und der Spezialfall von Greenschen Funktionen auf elliptischen Kurven betrachtet.

Im dritten Kapitel entwickelt Lang die Schnittheorie für das nicht kompaktifizierte X über S und zeigt, daß die Schnittpaarung über die Chowgruppen faktorisiert. Man unterscheidet hier zwischen horizontalen und vertikalen Divisoren, deren Projektion auf S surjektiv (bzw. eine echte abgeschlossene Teilmenge) ist.

Das vierte Kapitel behandelt Arakelovs Vervollständigung durch Hinzufügen von Fasern im Unendlichen. Arakelov-Divisoren sind dann Summen eines gewöhnlichen endlichen Anteils und einer reellen Linearkombination der unendlichen Fasern. Ebenso kann man eine Arakelov-Chow-Gruppe definieren und wieder zeigen, daß das entsprechend erweiterte Schnittprodukt darüber faktorisiert.

Das Hodge-Index-Theorem besagt nun, daß die Signatur dieser Schnittform vom Typ $(1, r)$ ist und beschreibt r durch den Rang der Mordell-Weil-Gruppe und die Anzahl der singulären Fasern von X.

Für die Adjunktionsformel braucht man die kanonische Garbe. Die Halme dieser Garbe sind nach dem Residuensatz isomorph zum Komplementärmodul des Zahlringes $\mathcal{O}_K$.

Die letzten beiden Kapitel sind jetzt dem Faltings-Riemann-Roch-Satz gewidmet, wobei die etwas technische Konstruktion des Faltings-Volumens auf der Determinante der Kohomologie in das letzte Kapitel delegiert wurde.

Zuerst betrachten wir den Fall einer arithmetischen Kurve: hier ist die Eulercharakteristik eines metrisierten Geradenbündels $\mathcal{L}$ das Volumen eines Fundamentalbereiches für das entsprechende Gitter. Der Satz von Riemann-Roch stellt in diesem Fall eine Beziehung zwischen der Eulercharakteristik von $\mathcal{L}$, dessen Grad und der absoluten Diskriminante her.

Falls man die Existenz des Faltings-Volumens voraussetzt, so folgt der Riemann-Roch-Satz für arithmetische Flächen aus dem Riemann-Roch-Satz für arithmetische Kurven, d. h. für horizontale Divisoren, und dem Riemann-Roch-Satz für algebraische Kurven, d.h. vertikale Divisoren. Langs Beweis vermeidet den Basiswechsel und kommt daher auch ohne Annahme über Semistabilität von X aus. Auf diesen Begriff geht Lang aber trotzdem sehr ausführlich im fünften Paragraph ein.

Bei der Konstruktion des Faltings-Volumens benutzt Lang den Theta-Divisor auf der Jacobischen und folgt so i. w. Faltings' Beweis. Schließlich wird noch das Faltings-Volumen durch das $\mathbb{L}^2$-Volumen abgeschätzt.

Das Buch gibt eine Einführung in ein aktuelles Forschungsgebiet, die etwa als Grundlage für eine fortgeschrittene Vorlesung oder ein Seminar dienen kann. Aus der Algebraischen Geometrie werden viele Ergebnisse aus Hartshornes Buch vorausgesetzt, ebenso natürlich die Theorie der Riemannschen Flächen.

Die Einleitung gibt leider keinen historischen Überblick über die Entwicklung der Theorie. Im Text vermisse ich häufig ein paar motivierende Bemerkungen, die das methodische Vorgehen transparent machen könnten. Trotzdem kann ich das Buch empfehlen, da es einen Einstieg in eine Theorie ermöglicht, die bisher nur in Originalartikeln dargestellt war.

Köln Ch. Klingenberg

Nagao, H., Tsushima, Y., Representations of finite groups, Boston – San Diego – New York – Berkeley – London – Sydney – Tokyo – Toronto: Academic Press, Inc. 1989, 424pp. $70.00

Wie die Autoren zu Beginn erklären, hat das vorliegende Buch eine Geschichte, die bis etwa in das Jahr 1957 zurückreicht. Zu dieser Zeit hatte einer der Autoren, H. Nagao, geplant, gemeinsam mit T. Nakayama ein Buch über Darstellungstheorie zu schreiben. Dieser Plan wurde dann 1959 zurückgestellt, weil Nakayama von R. Brauer gehört hatte, dieser wolle selbst ein Buch über das Thema veröffentlichen. Soweit wir wissen, wurde Brauers Buch nie geschrieben, aber das vorliegende Buch verwirklicht Nagaos Plan, wenn auch nicht in Zusammenarbeit mit Nakayama, sondern mit dessen Schüler Y. Tsushima.

Entstanden ist die Darstellungstheorie wohl aus dem Bemühen, abstrakte Gruppen in konkreter Form (hier als Matrixgruppen) zu realisieren. Heute steht im Vordergrund der Darstellungstheorie das Studium von Gruppenalgebren über einem kommutativen Ring R und deren Moduln. Man unterscheidet grob zwischen „gewöhnlicher", „modularer" und ganzzahliger Darstellungstheorie. In der gewöhnlichen Darstellungstheorie ist der zugrunde liegende Ring R meist ein Körper der Charakteristik 0, häufig sogar der Körper der komplexen Zahlen. In der modularen Theorie ist R entweder ein Körper positiver Charakteristik oder ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit einem Restklassenkörper positiver Charakteristik. In der ganzzahligen Darstellungstheorie schließlich ist R im allgemeinen ein Dedekindring, häufig der Ring der ganzen Zahlen in einem algebraischen Zahlkörper oder sogar der Ring der ganzen rationalen Zahlen.

Anwendungen der Darstellungstheorie lagen naturgemäß zunächst in der Gruppentheorie selbst, wie etwa der $p^a q^b$-Satz von Burnside, der besagt, daß Gruppen, deren Ordnung durch höchstens zwei verschiedene Primzahlen teilbar ist, auflösbar sind. Auch der Beweis des Satzes von Feit und Thompson über die Auflösbarkeit von Gruppen ungerader Ordnung beruht zu einem großen Teil auf Methoden der Darstellungstheorie. Ohne Darstellungstheorie wäre die zu Beginn der achtziger Jahre abgeschlossene Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen undenkbar gewesen.

In den etwa 100 Jahren seit ihrem Bestehen hat sich jedoch die Darstellungstheorie von einer Methode innerhalb der Gruppentheorie zu einem umfangreichen und eigenständigen Gebiet entwickelt, das auch andere Gebiete der Mathematik befruchtet und von dort Anregungen empfängt. Zu nennen ist hier vor allem die Zahlentheorie, spätestens seit Brauers Beweis seines Induktionssatzes und dessen Anwendung auf Artinsche L-Reihen. Auch in der Frage der Realisierbarkeit endlicher Gruppen als Galoisgruppen über dem Körper der rationalen Zahlen liefert die Darstellungstheorie wichtige Hilfsmittel. Ein weiteres wichtiges Anwendungsgebiet der Darstellungstheorie ist die Topologie. Zur Algebraischen Geometrie gibt es enge Verbindungen seit den bahnbrechenden Arbeiten von Déligne und Lusztig über die Darstellungstheorie endlicher Gruppen vom Lie-Typ.

Das vorliegende Buch behandelt vor allem die modulare Darstellungstheorie endlicher Gruppen, so wie sie im wesentlichen von R. Brauer und J. A. Green entwickelt wurde. Zu dieser Theorie hat auch die japanische Schule, einschließlich der Autoren, wichtige Beiträge geleistet. Auswahl und Präsentation der Ergebnisse sind dabei durchweg klassisch; allerdings haben sich die Autoren bemüht, die Beweise zu „optimieren".

Das Buch gliedert sich in fünf Kapitel. Das erste von diesen behandelt ring- und modultheoretische Grundlagen. Im zweiten Kapitel werden endlich-dimensionale Algebren über Körpern betrachtet, bis hin zur Definition der Brauergruppe eines Körpers und Eigenschaften symmetrischer und Frobenius-Algebren. Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der gewöhnlichen Darstellungstheorie einschließlich der Sätze von Clifford und dem Induktionssatz von Brauer. Aber es werden hier auch die Grundlagen der modularen Darstellungstheorie gelegt mit der Definition von Brauercharakteren, Zerlegungszahlen und Cartaninvarianten. Im vierten Kapitel folgt die im wesentlichen von Green entwickelte Theorie unzerlegbarer Moduln, ihrer Vertizes und Quellen. Höhepunkte sind dabei die Green-Korrespondenz und der Unzerlegbarkeitssatz. Das fünfte und letzte Kapitel schließlich behandelt R. Brauers Blocktheorie. Die drei Hauptsätze werden bewiesen (zum Teil mit neuen Argumenten), und es wird auch die Clifford-Theorie für Blöcke (à la P. Fong) dargelegt. Jedes Kapitel enthält eine Liste von Übungsaufgaben, zu denen am Ende des Buches Lösungen angegeben werden.

Ich habe wenig Druckfehler bemerkt, abgesehen davon, daß der Name I. M. Isaacs durchgehend falsch buchstabiert wird. In ihrer Stoffauswahl haben sich die Autoren auf die wesentlichen Ergebnisse beschränkt. Diese werden jedoch vollständig und mit allen Konsequenzen dargestellt. Jedoch wird wenig von den Dingen behandelt, die nach Brauers Tod entstanden sind. (Dies ist vielleicht verständlich durch die Entwicklungsgeschichte des Buches). Ausnahmen sind hier u. a. die Behandlung von Scott-Moduln und die von J. L. Alperin und M. Broué eingeführte Sprache der Brauer-Paare.

Was fehlt, ist z. B. die von M. Auslander und I. Reiten begründete Theorie fast zerfallender Folgen von Moduln über endlich-dimensionalen Algebren, aber es sind auch die kohomologischen Methoden, die vor allem mit dem Namen J. F. Carlson verbunden sind. Ebenfalls wird nicht auf die Darstellungstheorie spezieller Klassen von Gruppen eingegangen; denkbar wären hier p-auflösbare Gruppen oder Gruppen mit BN-Paar gewesen. Was vor allem fehlt, sind Anwendungen. (Die einzige, die ich entdecken konnte, ist der bereits oben erwähnte $p^a q^b$-Satz). Statt dessen wird auf andere Bücher verwiesen. Keine sehr gute Lösung, wie ich finde; denn diese Bücher entwickeln die Darstellungstheorie *einschließlich* der Anwendungen.

Damit sind wir auch schon beim Vergleich mit anderen Büchern angelangt. Vor allem sind hier das Buch von W. Feit [3] und die beiden Bände [2] von C. W. Curtis und I. Reiner zu nennen. Beide Konkurrenten sind länger und bieten mehr Stoff. Dennoch hat das vorliegende Buch meiner Meinung nach seinen Platz, vor allem bei Studenten, die sich in kurzer Zeit in dieses interessante Gebiet einarbeiten wollen. Wer allerdings etwas von den neueren Ergebnissen sehen möchte, sollte auch etwa in das Buch von D. Benson [1] schauen.

[1] Benson, D.: Modular representation theory: New trends and methods. Lect. Notes in Math. 1081, Springer-Verlag, Berlin 1984
[2] Curtis, C. W.; Reiner, I.: Methods of representation theory I-II. Wiley, New York 1981, 1987
[3] Feit, W.: The representation theory of finite groups. North-Holland, Amsterdam 1982

Dortmund B. Külshammer

Conway, J. H., Sloane, N. J. A., Sphere Packings, Lattices and Groups, With additional contributions by E. Bannai, J. Leech, S. P. Norton, A. M. Odlyzko, R. A. Parker, L. Queen and B. B. Venkov (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 290). New York u. a.: Springer-Verlag 1988, 112 figs., xvi + 663pp., Hardcover, DM 178,–

Vor nunmehr 25 Jahren stieß Leech auf die außerordentlich dichte Packung von Kugeln im $\mathbb{R}^{24}$, deren Mittelpunkte das nach ihm benannte Gitter bilden, und bald darauf machte Conway mit der Entdeckung seiner sporadischen Gruppen das Leech-Gitter berühmt. Dann begann Sloane (in Zusammenarbeit zunächst mit Leech), fehlerkorrigierende Codes zur Beschreibung von Kugelpackungen zu benutzen und die vielfältigen Beziehungen zwischen Codierungstheorie und Geometrie der Zahlen aufzuzeigen. Die Früchte der so initiierten, in der Folgezeit durch eine lange Reihe von Arbeiten der Autoren geprägten Entwicklung finden in der vorliegenden Monographie ihre umfassende Darstellung. In der Tat hat dieses Buch über weite Strecken den Charakter eines ausführlichen Ergebnisberichtes, weniger den eines Lehrbuches, und zu einem guten Teil ist es ein Buch über das Leech-Gitter.

Kapitel 1 und 2 (Sphere Packings and Kissing Numbers, Coverings, Lattices and Quantizers) bilden eine lebendig geschriebene Einführung in die Hauptthemen und den augenblicklichen Wissensstand. Die Fülle der dabei eingebrachten Daten und Tabellen zeigt schon, worauf es den Autoren unter anderem besonders ankommt. Erwähnung finden hier auch für den Themenkreis relevante, aber in diesem Buch durchwegs nicht näher behandelte ältere Ergebnisse (von Minkowski, Blichfeldt, Rogers). Man vermißt allerdings einen Hinweis auf die Kompaktheitsaussagen der Reduktionstheorie und somit auch eine Bemerkung dazu, wieso es eine dichteste Gitter-Kugelpackung des n-dimensionalen euklidischen Raumes gibt. Dem Anfänger bzw. Nichtkenner der Geometrie der Zahlen sei geraten, als eine weitere Einführung das zweite Kapitel des Buches „Symmetric Bilinear Forms“ von Milnor und Husemoller zu lesen. Einen sehr dankenswerten Dienst leisten Conway und Sloane am Ende von Kapitel 2 und Anfang von Kapitel 3 (Codes, Designs and Groups), wo sie, wenn auch nur im Überblick, zwei Hauptanwendungen ihres Themas behandeln: mehrdimensionale Quantisierung (Analog-Digital-Umwandlung) und Codierung für den sog. Gaußschen Kanal.

Es können hier nur einige der insgesamt dreißig Kapitel dieses umfangreichen Buches näher vorgestellt werden. Kapitel 6 (Laminated Lattices) behandelt die naheliegende Methode, eine dichte n-dimensionale Packung durch Übereinandersetzen von Schichten einer $(n-1)$-dimensionalen zu konstruieren. Auf diese Weise entstehen für $n \leqslant 29$ (mit den Ausnahmen $n = 11, 12, 13$) die dichtesten bekannten Gitter. Nach wie vor ist das Gitter-Kugelpackungsproblem allerdings nur für $n \leqslant 8$ gelöst und für $n = 6, 7, 8$ ein gut lesbarer Beweis des betreffenden Ergebnisses von Blichfeldt nicht vorhanden. Kapitel 8 (Algebraic Constructions for Lattices) beschreibt insbesondere die bis vor kurzem besten explizit bekannten Folgen von Gitter-Packungen für $n \to \infty$. Kapitel 9 (Bounds for Codes and Sphere Packings) ist ein Übersichtsartikel von Sloane über die wohl bedeutendsten Fortschritte der jüngeren Zeit bei allgemeinen Kugelpackungsproblemen. Es handelt sich um die Anwendung von Prinzipien der harmonischen Analysis und linearen Optimierung, die im Fall des euklidischen Raumes durch Kabatianski und Levenshtein zu einer asymptotischen Verbesserung der alten oberen Dichteschranken von Blichfeldt und Rogers führte. Ebenfalls als eine Anwendung dieser Theorie ergibt sich in Kapitel 13 und 14 die Optimalität der Konfigurationen von 240 bzw. 196560 Kugeln, die im E_8-Wurzelgitter bzw. im Leech-Gitter eine zentrale Kugel berühren. (Das sog. Kußzahlproblem, wieviele Kugeln gleicher Größe an eine weitere solche Kugel angelegt werden können, ist in allen Dimensionen außer 1, 2, 3, 8 und 24 ungelöst). Kapitel 15 behandelt das klassische Gebiet der Klassifikation ganzzahliger quadratischer Formen, und zwar weitgehend ohne Beweise, dafür unter dem Gesichtpunkt der für konkrete Rechnungen geeignetsten Formulierung der Invarianten. Die nächsten sechs Kapitel befassen sich mit der Klassifikation von Gittern bis zur Dimension 24, extremalen selbstdualen Gittern, Überdeckungen und Voronoi-Bereichen, die folgenden sieben Kapitel mit tieferen Eigenschaften des Leech-Gitters. Nachdem die Mathieu- und Conway-Gruppen schon in Kapitel 10 und 11 behandelt wurden, sind die beiden Schlußkapitel der Konstruktion des „Monster" gewidmet.

Da die dargestellten Ergebnisse überwiegend von den Autoren (und ihren Koautoren) stammen, war es für sie naheliegend, ihre Originalarbeiten zu Buchkapiteln zu machen; der Aufbau des Buches ist durch dieses Prinzip bestimmt. Man hat aber sehr viel Mühe darauf verwandt, alles zu überarbeiten, einheitliche Notation einzuführen, Querverweise anzubringen. Eine Reihe von Kapiteln und viele Tabellen sind neu. Bei Ergebnissen aus älterer Zeit und von anderen Autoren muß der Leser häufig auf die zitierte Literatur zurückgreifen. Damit ist nun noch ein besonderes Glanzstück des Buches angesprochen: das Literaturverzeichnis, das über 1500 Titel enthält, auch angrenzende Gebiete einbezieht und eine wahre Fundgrube darstellt. Mit all seinen Fakten, Tabellen, Graphiken und Literaturhinweisen wird dieses Buch in Zukunft ein Standardwerk sein, unentbehrlich für jeden, der in irgendeiner Weise an Kugelpackungen und Gittern interessiert ist.

Oldenburg H.-G. Quebbemann

Grötschel, M., Lovász, L., Schrijver, A., Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization (Algorithms and Combinatorics, Vol. 2), Berlin: Springer-Verlag 1987, 23 figs., xii + 362 pp., Hardcover, DM 148,–

In this excellent monograph the authors present a thorough treatment of methods and applications inspired by the results of their Fulkerson prize paper [1]. In view of the fast development of the field of combinatorial optimization and of the laborious technical details necessary for a precise mathematical formulation of the material it should not be surprising that it took about seven years for the final version of the manuscript to be ready for publication in 1988.

Avoiding the many indispensable technical conditions and restrictions, in the preface the authors state the book's central result in the following words: "If K is a convex set, and if we can decide in polynomial time whether a given vector belongs to K, then we can optimize any linear objective function over K in polynomial time". Indeed, one may say that the authors develop theoretical foundations for the study of algorithmic properties of convex sets, with their main application being to polyhedra obtained from cominatorial optimization problems.

The proof of a suitable precise formulation of such a result is based on the ellipsoid method. The essential property of an iteration of the ellipsoid method used in this context is that it suffices either to affirm feasibility of the current vector or to find one linear inequality valid for K but violated by x. Further applications of the ellipsoid method to convex sets yield results on computing geometric parameters, e.g. volume, diameter, or width. Due to the generality of the posed and solved problems, solutions are determined only in an approximate sense.

Many combinatorial optimization problems can be described as linear programming problems, at least in theory. The fact that the number of these constraints will be exponential for interesting examples is no major problem, since, as remarked above, it suffices to generate violated constraints, whenever necessary. For many different combinatorial optimization problems such "separation" procedures are available.

Now, results may be sharpened when additional information assures that the constraints appearing in a linear description of the problem are "simple". In particular, exact solutions to such combinatorial optimization problems can be calculated in polynomial time. The required technical tool is a polynomial time algorithm for solving a weaker variant of the simultaneous diophantine approximation problem. That algorithm is based on finding a "reduced basis" in some related lattice. Thus, combining the ellipsoid method and the basis reduction technique, one can develop polynomial time algorithms for a surprisingly large list of combinatorial optimization problems.

For many of the combinatorial optimization problems discussed, more efficient specialised combinatorial algorithms are available. Among the well known examples are classical network flow, matching and matroid problems. However, there are still at least two prominent examples, the stable set problem for perfect graphs and the minimization of submodular set functions, for which polynomial time algorithms can be derived from the general approach but for which, hitherto, no efficient, purely combinatorial algorithms are known.

Throughout the book considerable care has been taken to distinguish between rigid technical developments and some easier sections. At the beginning of each chapter the interested reader finds a short introduction, sometimes a longer preview, or even a mild warning (e.g. p. 225: "The results of this chapter are presented in a condensed form, to cover as much material as possible").

This monograph is a valuable compulsory contribution to any mathematical library. In particular, those working in combinatorial optimization will appreciate the precise statement of the theoretical foundations of important algorithms and the theoretical consequences for their field. I can also recommend the book to mathematicians working in areas which seem, at the time being, to be only loosely connected to integer programming. For example, one may be interested in understanding how and why techniques such as "basis reduction" from the geometry of numbers can be successfully applied in integer programming.

[1] Grötschel, M.; Lovász, L.; Schrijver, A.: The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. Combinatorica 1 (1981) 169–197.

Braunschweig U. Zimmermann

Heuser, H., Gewöhnliche Differentialgleichungen – Einführung in Lehre und Gebrauch (Mathematische Leitfäden), Stuttgart: B. G. Teubner Verlag 1989, 628 S., Kart. DM 68,–

Mit seinen beiden Lehrbüchern der Analysis hat der Autor viel Anklang bei Studenten gefunden. Nun rechnet man häufig zum Analysisstoff des Grundstudiums auch eine Einführung in die gewöhnlichen Differentialgleichungen. Hier ließen die genannten Bücher eine Lücke. Existenzsatz von Peano und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf waren zwar in mehreren Versionen und ersterer mit zwei verschiedenen Beweisen vorhanden, auch die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten wurde behandelt, aber man wünschte sich noch mehr über elementare Lösungsmethoden sowie einen Ausbau der linearen Theorie und alles weniger verstreut. Wenn nun in der selben Reihe ein über 600 Seiten starkes Buch des Autors mit dem Titel „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ vorliegt, so fragt man sich, ob hier primär das Analysiswerk vervollständigt wurde oder ob ein unabhängiges Lehrbuch entstanden ist.

Werfen wir zunächst einen Blick auf den Inhalt. Nach einem 36 Seiten langen „Zur Einstimmung“ betitelten ersten Kapitel folgen elementare Lösungsmethoden, Existenz-, Eindeutigkeits- und Abhängigkeitssätze für Differentialgleichungen erster Ordnung, lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten und danach mit variablen Koeffizienten. Das nächste Kapitel bringt Rand- und Eigenwertaufgaben, vorwiegend die Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgabe. Die letzten vier Kapitel behandeln Systeme. Nach linearen Systemen mit konstanten und variablen Koeffizienten folgen allgemeine Systeme erster Ordnung, und schließlich wendet sich der Autor unter dem Titel „Qualitative Theorie. Stabilität“ ein wenig den autonomen Systemen zu.

Das sieht nach Standardstoff aus, wie er schon in vielen Büchern von bescheidenerem Umfang zu finden ist. Der Unterschied, der dem Buch seine besondere Note gibt, liegt in der Motivation und Aufbereitung des Stoffes. Zwei Merkmale stechen dabei besonders hervor: Die enge Verbindung zu den Anwendungen und die Anknüpfung an der Kulturgeschichte. Anhand von zahlreichen Beispielen aus verschiedenen Wissens- und Lebensbereichen erfährt der Leser sowohl wie man Differentialgleichungen aufstellt als auch wie man mit ihnen umgeht. Der Autor deckt Zusammenhänge auf, erklärt seine Absichten und erläutert die Schlagkraft der Ergebnisse. Wir werden aber auch eingehüllt von Kultur und stoßen auf Namen wie Bach, Heidegger, Kant, Nietzsche, Goethe, Napoleon und Alexander der Große. Am Ende einiger Kapitel werden uns große Mathematiker, die das Gebiet entscheidend geprägt haben, mit Lebensdaten, Werk und Anekdoten vorgestellt. So lernen wir Newton, Leibniz, Jakob und Johann Bernoulli, Cauchy und Euler kennen. Von den zahlreichenAufgaben (z. T. mit Lösungen im Anhang) sind viele in Geschichten gekleidet. Selbst ein Schottenwitz muß herhalten. Das alles wirkt manchmal etwas übertrieben. Wir werden an Journalismus erinnert, wenn wir die Überschrift „Die Eisversorgung Alexanders des Großen“ lesen. Hinsichtlich dieser Art von Stil hat sich der Autor gegenüber seinen Lehrbüchern der Analysis sogar noch gesteigert. Dennoch will ich nicht grundsätzlich Kritik daran üben. Ich glaube schon, daß man Leser so ansprechen, motivieren und vielleicht sogar faszinieren kann. Dem Naturwissenschaftler und Ingenieur mag dabei bewußt werden, daß Mathematik nicht (nur) ein trockenes, aber unumgängliches Hilfsmittel ist, sondern ein Kulturgut mit einer bewegten Geschichte und gestaltet von hervorragenden Persönlichkeiten. – Überdies, wer will, kann den gesamten Kleindruck auch als ein Buch im Buche auffassen, das mehr auf Allgemeinbildung, Geschichte, Unterhaltung zielt und (mit Ausnahme der Aufgaben) unabhängig lesbar ist.

Wollen wir uns nun die eigentliche Substanz anzusehen. Der Stoff für eine breite, klassische Einführung in die gewöhnlichen Differentialgleichungen ist m. E. vollständig und reichlich vorhanden. An weniger verbreiteten Themen können die Methode der Laplace-Transformation, Behandlung von Differentialgleichungen mit schwach singulären Stellen, etwas Floquet-Theorie und ein gezieltes Eingehen auf konkrete Differentialgleichungen der Mathematischen Physik, insbesondere die der klassischen orthogonalen Polynome, der Bessel-Funktionen und der Mathieuschen Funktionen aufgezählt werden. Auch auf die Notwendigkeit numerischer Methoden wird hingewiesen und mit den Runge-Kutta-Formeln vierter Ordnung (auch für Systeme) ein leistungsfähiges Verfahren vorgestellt und numerisch getestet. Das Kapitel über qualitative Theorie vermittelt durch zahlreiche z. T. sehr lebensnahe Beispiele wertvolle Anregungen, bleibt aber ansonsten eher oberflächlich. Begriffe wie Erstes Integral, Fluß, Orbit und Differentialungleichung, die gelegentlich im schriftlichen Staatsexamen in Bayern benötigt wurden, findet man nicht, zumindest nicht explizit. Der Satz von Poincaré-Bendixson wird zwar als das Kronjuwel der Periodizitätstheorie *gepriesen,* aber nicht *bewiesen.* Wer sich mehr Tiefe wünscht oder in die Nähe eines Forschungsthemas geführt werden möchte, sei daran erinnert, daß der Untertitel das Buch auf eine „Einführung in Lehre und Gebrauch" abgrenzt.

Wie sehr der Autor bemüht ist, den Leser in kleinen Schritten und von verschiedenen Seiten her an ein Thema heranzuführen und dafür großzügig Platz in Anspruch nimmt, sehen wir sehr deutlich bei Existenz- und Eindeutigkeitsfragen. Nachdem bei der Behandlung einiger elementar lösbarer Typen von Differentialgleichungen eine individuelle Antwort gegeben worden ist, lernen wir auf den Seiten 135 bis 141 die Sätze von Peano und Picard-Lindelöf für eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung kennen. Durch das ganze Buch hindurch stellt sich danach die Existenz- und Eindeutigkeitsfrage immer wieder erneut, so bei der linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten und variabalen Koeffizienten, bei linearen Systemen mit konstanten und variablen Koeffizienten, bei allgemeinen Systemen erster Ordnung und bei der allgemeinen Differentialgleichung n-ter Ordnung. Im Falle konstanter Koeffizienten wird sie mit Hilfe von Lösungsformeln behandelt. Bei der linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit variablen Koeffizienten wird zuerst ein Exkurs über die Volterrasche Integralgleichung durchlaufen, der „Durchsichtigkeit wegen" wird dann nur der Fall $n = 2$ weiterverfolgt und letztlich hat man mit sukzessiver Approximation und Fixpunktsatz gearbeitet. In anderen Fällen genügen „ein paar Fingerzeige" oder „drucktechnische" Änderungen. Erst auf Seite 518 erfahren wir dann, daß man eine Differentialgleichung n-ter Ordnung in ein äquivalentes System erster Ordnung umwandeln kann und „im Handumdrehen" Existenz und Eindeutigkeit bei Anfangswertproblemen aus einer einzigen Version der Sätze von Peano und Picard-Lindelöf herausholt.

Kommen wir nun zur eingangs aufgeworfenen Frage zurück. Ein unbeholfener, aber gründlicher Leser wird sich wünschen, des Autors Lehrbücher der Analysis griffbereit zu haben, denn sie werden oft zitiert. Tatsächlich benötigt man jedoch keine ungewöhnlichen Vorkenntnisse mit einer einzigen Ausnahme. Der Autor benutzt mehrfach den Fixpunktsatz von Schauder aus seiner Analysis 2, der von anderen einführenden Werken her wenig bekannt ist. Es macht ihm geradezu Freude, einmal einen tieferliegenden Satz aus der Analysis heranzuziehen, während er bei der Behandlung von linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten die sich anbietende Brücke zur linearen Algebra nicht betritt. Der Begriff des Eigenwerts einer Matrix wird extra eingeführt und die Jordansche Normalform vermieden. Trotz alledem baut das Buch nicht unmittelbar auf dem Analysiswerk des Autors auf. Der aufmerksame Leser beider Werke stößt im Gegenteil öfters auf Wiederholungen bei Figuren, Beispielen, den Existenz- und Eindeutigkeitssätzen und im geschichtlichen Teil. (Dem „glänzenden" Zweizeiler von A. Pope (Analysis 2, S. 657) begegnen wir hier (S. 47) als „funkelnden".)

Wem wollen wir das Buch empfehlen? – Wer nach einigen Jahren Abstand von der Hochschule verblaßte Kenntnisse über Differentialgleichungen auffrischen möchte, aber in Feierabendstimmung nicht die Energie aufbringt, sich durch ein abstraktes Gerüst von Beweisen zu arbeiten, wird von diesem Buch begeistert sein. – Der Dozent findet ein reichhaltiges Reservoir an interessanten Beispielen unterschiedlicher Art und kann nach einer kritischen Auseinandersetzung mit dem Stil Anregungen zur Belebung seiner Lehrveranstaltungen gewinnen. – Der Student der Natur- und Ingenieurswissenschaften, häufig von der Befürchtung erfüllt, die Mathematiker könnten ihm etwas bieten was nur ihnen selbst Spaß macht, er aber in dieser Form nicht benötigt, wird sich über dieses Buch freuen. Gelegentlich ermutigt ihn der Autor sogar, Beweise zu übergehen. – Der Student der Mathematik wird für das Grundstudium gut gerüstet und kann sich damit auch noch ein Stück darüber hinaus wagen. Ich halte ihn allerdings nicht für optimal bedient, wenn er mehr ein Nachschlagewerk zur gezielten Überarbeitung einzelner Ergebnisse aus einer Vorlesung sucht, denn der Autor holt weit aus, schreitet langsam voran und gewinnt einen Großteil der Sätze durch Zusammenfassung vorangehender Überlegungen. Gerade diese Eigenschaften machen aber das Buch zum Selbststudium sehr geeignet,und hier vor allem bereichert es das Angebot.

Erlangen G. Schmeißer

Pederson G. K., Analysis Now, Berlin u.a.: Springer-Verlag 1988, XIV + 277p., hardcover, DM 98,–

„Wir haben noch keine gute Definition eines Raumes, und noch keine gute Definition eines Operators". Dieser pessimistische Ausspruch I. M. Gel'fands zu Beginn seines Hauptvortrages auf dem Moskauer Mathematikerkongreß 1966 ist heute in gewissem Sinn überholt. Im 18. und 19. Jahrhundert wurde die Analysis als Modell zur Lösung von Problemen aus der Mechanik entwickelt, im ersten Drittel dieses Jahrhunderts dagegen die Funktionalanalysis als Modell zur Lösung von Problemen aus der Analysis, sozusagen als „Supermodell" der Mechanik, mit einem ersten Höhepunkt in S. Banachs „Opérations Linéaires" (1932). Die Analysis der Gegenwart hat sich auch hiervon schon etwas entfernt: sie ist „global" geworden und kehrt damit in gewissem Sinn zu ihren mechanischen Wurzeln zurück.

Erklärtes Ziel des vorliegenden Buches ist es, durch eine umfassende Abhandlung des Supermodells Funktionalanalysis das zu vermitteln, "what every young analyst should know". Dies ist dem Autor in großartiger Weise gelungen, und zwar sowohl hinsichtlich der Auswahl des Stoffes als auch hinsichtlich seiner Darstellung.

Das Buch besteht aus 6 Kapiteln von je etwa gleichem Umfang. Das erste Kapitel („General Topology") bringt auf 40 Seiten den gesamten Stoff einer üblichen Topologie-Vorlesung, für den andere Autoren ein Vielfaches an Platz benötigen würden. Es werden nicht nur die wichtigsten Begriffe und Ergebnisse vorgestellt, sondern auch durch interessante Beispiele belegt, wie man sie sonst nur im „Counterexample"-Buch von L. A. Steen und J. A. Seebach (1978) findet. Die Knappheit der Darstellung belegt einmal mehr, daß die Mengentheoretische Topologie eine Trivialwissenschaft ist, und die eigentliche Topologie erst dort beginnt, wo sie „algebraisch" wird.

Die Kapitel 2 und 3 sind der Theorie der Banach- und Hilberträume sowie Operatoren in ihnen gewidmet. Zunächst werden die üblichen Fundamentalsätze der Funktionalanalysis behandelt, d. h. die Sätze von Baire, Banach-Steinhaus, Hahn-Banach, Alaoglu-Bourbaki, Krejn-Mil'man und Krejn-Shmuljan. Anschließend werden verschiedene Klassen beschränkter linearer Operatoren auf Hilberträumen untersucht, die besonders im Hinblick auf Anwendungen wichtig sind (normale, unitäre, selbstadjungierte, positive Operatoren usw.), sowie auch Klassen kompakter Operatoren (besonders Hilbert-Schmidt- und Spurklassen-Operatoren). Die Anwendungsbeispiele sind kanonisch: lineare Integralgleichungen, Fredholm-Theorie, Sturm-Liouville-Probleme.

Das Herzstück des Buches ist Kapitel 4 („Spectral Theory"). Der Spektralsatz wird in großer Ausführlichkeit und in der üblichen aufsteigenden Verallgemeinerung vorgestellt, d. h. im Rahmen des Operatorenkalküls zuerst für Polynome, dann für stetige Funktionen, dann für Borel-Funktionen. Hier wählt der Autor nicht – wie es in vielen Funktionalanalysis-Büchern geschieht – den (maßtheoretischen) Zugang über Spektralzerlegungen, sondern einen abstrakten (algebraischen) Zugang über den Gel'fandschen C^*-Isomorphismus. Dies ist nicht nur dem Geschmack des Autors zuzuschreiben, von dem es ja auch ein exellentes Buch über C^*-Algebren gibt (Academic Press 1979), sondern hat den Vorteil, die „Struktur" der Theorie sehr klar darzulegen. Dies ist überhaupt eine der Stärken des Buchs: Zwischen scheinbar weit auseinanderliegenden Sätzen der Analysis deckt der Autor befriedigende und zum Teil überraschende Zusammenhänge auf, indem er „des Pudels Kern“ freilegt. Beispiele hierfür sind etwa die Cauchysche Integralformel und der Spektralsatz als „Konkretisierungen“ des Satzes von Krejn-Mil'man, oder die Einbettung der Operatoren von endlichem Rang in die kompakten Operatoren als Gegenstück zur Einbettung der finiten Funktionen in die schnell fallenden Funktionen.

In Kapitel 5 werden Theorie und Anwendungen unbeschränkter Operatoren vorgestellt. Die meisten in der Natur auftretenden Operatoren sind nun einmal unbeschränkt, und leider ist die Handhabung unbeschränkter Operatoren unvergleichlich schwieriger als die beschränkter Operatoren (spektakuläres Beispiel: die Summe zweier wunderschöner unbeschränkter Operatoren braucht überhaupt nicht zu existieren!). Schwerpunkt der Darstellung ist auch hier der Spektralsatz, unter der üblichen Ausnutzung der Cayley-Transformierten.

Das letzte Kapitel („Integration Theory“) ist gewissermaßen für die Maß- und Integrationstheorie das, was Kapitel 2 und 3 für die Funktionalanalysis sind, nämlich eine Art „Taschen-Bourbaki“. Der Leser bekommt, nunmehr ausgerüstet mit umfangreichen Kenntnissen in Topologie und Funktionalanalysis, einen Steilkurs in der Theorie des Radonintegrals auf lokalkompakten Hausdorff-Räumen geboten und lernt die üblichen Fundamentalsätze der Integrationstheorie von hoher Warte aus kennen, d. h. die Sätze von Egorov, Luzin, Riesz-Fischer, Radon-Nikodým, Fubini und Torelli.

Das Buch ist äußerst kompakt geschrieben und enthält eine unglaubliche Fülle von Material. Viele Begriffe und Ergebnisse sind in Übungsaufgaben verlegt; diese reichen von „offensichtlich“ bis „sehr schwierig“, enthalten aber fast durchweg ausführliche Lösungshinweise. Der Autor schreibt selbst zutreffend über die Qualität und Quantität des Dargebotenen im Vorwort: "Graduate students in mathematics, who want to travel light, will find this book invaluable; impatient young researchers in other fields will enjoy it as an instant reference to the highlights of modern analysis". Ein großes Verdienst des Autors ist es, die Darstellung nicht mit Formalismen überladen zu haben, sondern den Kern der behandelten Probleme in verständlicher und sehr lebendiger Umgangssprache – und manchmal auch durchaus mit Humor – dem Leser nahezubringen; dies ist eine vor allem im deutschen Sprachraum selten gewordene Tugend.

Dem Autor ist ein Werk gelungen, zu dem es nach meiner Ansicht und Kenntnis keine Alternative auf dem Markt gibt; es sollte in keinem Bücherschrank fehlen.

Würzburg J. Appell

Louis, A. K., Inverse und schlecht gestellte Probleme, Stuttgart: Teubner 1989, 205 S., kartoniert, DM 26,80

Eine Gleichung $Af=g$ heißt gut gestellt, wenn die entsprechende Abbildung $A: X \to Y$ bijektiv und A^{-1} stetig ist. Sonst heißt die Gleichung schlecht gestellt. Es ist klar, daß die numerische Behandlung einer Gleichung Schwierigkeiten macht, wenn die Lösung f unstetig von g abhängt. Kleinste Fehler bei g können sich dann verheerend auswirken. Im vorliegenden Buch wird hauptsächlich der Fall einer linearen Abbildung A zwischen Hilberträumen X und Y betrachtet. Ein für die Anwendungen besonders wichtiges Beispiel bilden die Integralgleichungen 1. Art mit einem kompakten Operator $A: L_2 \to L_2$. Der Autor gibt viele interessante Beispiele.

Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung von A wird die Schlechtgestelltheit einer Gleichung quantifiziert. Zur numerischen Behandlung werden Regularisierungsverfahren betrachtet, d. h. das Problem $Af = g$ wird ersetzt durch ein geeignetes gut gestelltes Problem. Besonders bekannt ist wohl die Tikhonov-Phillips-Regularisierung, bei der ein Optimierungsproblem der Form $\|Af-g\|^2 + \gamma \cdot \|f\|^2 = \text{Min!}$ untersucht wird. Hier ist $\gamma > 0$ ein sogenannter Regularisierungsparameter, der noch geeignet zu wählen ist. Dieses und andere Regularisierungsverfahren werden eingehend studiert, auch auf stochastische Regularisierungsverfahren wird kurz eingegangen. Im vorletzten Kapitel wird die numerische Realisierung (Diskretisierung, lineare Gleichungssysteme) beschrieben. In das ganze Buch sind Beispiele eingestreut, das letzte Kapitel behandelt das Problem der Inversion der Radon-Transformation (Computer-Tomographie) besonders ausführlich.

Das Buch ist als Lektüre zu einer entsprechenden Vorlesung und zum Selbststudium nach dem Vordiplom bestens geeignet. Es enthält eine Darstellung mathematischer Hilfsmittel (zum Teil ohne Beweis) und viele wertvolle Literaturangaben. Die Darstellung ist klar und verständlich. Die Anzahl der Schreibfehler und der sprachlichen Ungenauigkeiten könnte kleiner sein. Das vorliegende Buch kann neben den Darstellungen von Baumeister (Vieweg), Groetsch (Pitman), Hofmann (Teubner, Leipzig) und Tikhonov-Arsenin (Wiley) gut bestehen.

Erlangen E. Novak

Lochak, P., Meunier, C., Multiphase Averaging for Classical Systems, With Applications to Adiabatic Theorems (Applied Mathematical Sciences 72), translated from French by H. S. Dumas, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1988, 360pp., Softcover, DM 78,–

Das Buch besteht – dem Titel entsprechend – aus zwei Teilen, von denen der erste der Mittelwertmethode, der zweite den adiabatischen Invarianten gewidmet ist.

Die Mittelwertmethode (method of averaging) befaßt sich mit Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega(I, \varphi) + \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon)$$

wobei $(I, \varphi) \in K \times T$, K eine kompakte Menge des $\mathbb{R}^m$ und $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ der n-dimensionale Torus ist. Es wird das System (1) mit dem gemittelten System

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = \varepsilon f^*(J), \qquad f^*(I) = \int_{T^n} f(I, \varphi, 0)\,\mathrm{d}\varphi$$

verglichen und das asymptotische Verhalten der Größe

$$(2) \qquad \sup_{0 < t \leqslant 1/\varepsilon} |I(t) - J(t)| \qquad (0 < \varepsilon \to 0)$$

gleichmäßig für alle Anfangswerte $\varphi(0) \in \mathrm{T}$ und $I(0) = J(0)$ aus einer möglichst großen Teilmenge von K untersucht.

Nach einem einführenden Kapitel 1 werden in den Kapiteln 2 bis 6 die wichtigsten Resultate besprochen und bewiesen, die sich auf die Abschätzung der Größe (2) beziehen und hauptsächlich auf Anosov, Arnol'd und Neistadt zurückgehen.

In Kapitel 7 wird der Satz von Nekhoroschev für Hamilton'sche Systeme (1) bewiesen, wobei

$$\omega(I, \varphi) = \omega(I) = \frac{\partial h}{\partial I}(I)$$

und h als konvex vorausgesetzt wird. Der Beweis schließt sich eng an die Darstellung von Benettin, Galgani und Giorgilli (Celestial Mechanics **37** (1985) 1–25) an. In diesem Kapitel darf natürlich ein Hinweis auf die KAM (*K*olmogorov-*A*rnol'd-*M*oser)-Theorie nicht fehlen. Das KAM-Theorem wird formuliert und erläutert, aber nicht bewiesen.

Die restlichen Kapitel 8 bis 10 machen den zweiten Teil des Buches aus. Sie betreffen adiabatische Invarianten und haben die Überschriften: Kap. 8 Adiabatic Theorems in One Dimension, Kap. 9 The Classical Adiabatic Theorems in Many Dimensions, Kap. 10 The Quantum Adiabatic Theorem. Der Zusammenhang mit den vorhergehenden Kapiteln ergibt sich zunächst dadurch, daß die Variable I in dem System (1) als Funktion der Zeit unter gewissen Voraussetzungen eine adiabatische Invariante ist. Es werden jedoch allgemeinere, vor allem Hamiltonsche Systeme (1) betrachtet, deren rechte Seiten nicht nur von den Variablen ε, I, φ, sondern auch von der Variablen $\lambda = \varepsilon t$ explicit abhängen. Auf diese Systeme lassen sich dann die früher erzielten Ergebnisse ebenfalls anwenden.

Das Hauptanliegen des Buches ist es, neuere methodische Ansätze und Resultate asymptotischer Art bei Differentialgleichungen der beschriebenen Form aus ihrem Schattendasein hervorzuholen, in das sie unverdientermaßen durch die Popularität der KAM-Theorie geraten sind. Dies zu verwirklichen ist den Autoren sehr gut gelungen. Sie bieten einen breiten Überblick über die wichtigste einschlägige KAM-freie Literatur, wobei der Leser für ihre stetigen Bemühungen dankbar ist, den Parallelen und Unterschieden der verschiedenen methodischen Ansätze bis ins Detail nachzugehen.

Viele Beweise werden vollständig durchgeführt, wobei in 9 Appendices das erforderliche Rüstzeug bereitgestellt wird.

Wie schon bemerkt, wird auf die KAM-Theorie nur kurz eingegangen, weil eben die anderen Theorien bevorzugt werden. Trotzdem mag der Hinweis auf einen Irrtum erlaubt sein, der sich in Appendix 8, Abschnitt 3. Quadratic convergence; the method of Newton, Siegel and Kolmogorov bereits in der Überschrift manifestiert: Siegel hat niemals mit quadratischer Konvergenz gearbeitet. Seine Methode beruht auf zahlentheoretischen Überlegungen, vornehmlich der Gleichverteilung.

Aber hiervon abgesehen ist das Buch sehr zu empfehlen.

Mainz H. Rüßmann

Constantin, P., Foias, C., Nicolaenko, B., Temam, R., Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations (Applied Mathematical Sciences, Vol. 70), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1988, 165 pp., Hardcover, DM 68,–

Es ist wohlbekannt, daß gewisse zeitabhängige partielle Differentialgleichungen (semi-)dynamische Systeme in unendlichdimensionalen Räumen erzeugen. Liegt Dissipation vor, kann man hoffen, daß für das Langzeitverhalten dieser Systeme nur ein kompakter Teilbereich des Phasenraumes wesentlich ist, d. h. daß es eine kompakte invariante Menge gibt, gegen die alle Lösungen für $t \to \infty$ konvergieren. Eine besonders schöne Situation liegt vor, wenn es einen solchen „globalen Attraktor" von endlicher Dimension gibt. In diesem Fall kann man hoffen, das Studium des Langzeitverhaltens im Wesentlichen auf das Studium eines endlichdimensionalen dynamischen Systems, also eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, zu reduzieren, was natürlich im Prinzip eine drastische Vereinfachung darstellte.

Das vorliegende Buch ist der Konstruktion endlichdimensionaler globaler Attraktoren mit den obigen Eigenschaften gewidmet (genauer: von endlichdimensionalen invarianten Mannigfaltigkeiten, welche den globalen Attraktor enthalten). Es stellt – abgesehen von den beigefügten „Anwendungen" – die Ausarbeitung einer Comptes-Rendus-Note dar und ist, entgegen der im Vorwort aufgestellten Behauptung, weder „self-contained" noch „at the level of a graduate student". So werden z. B. verschiedentlich

Beweise dadurch geführt, daß auf [CFT] verwiesen wird, wobei dieses Kürzel für eine andere Publikation dreier der gegenwärtigen Autoren steht. Was die „graduate students" anbelangt, so dürften sie z. B. mit der völlig unverständlichen Definition der Hausdorff- und der fraktalen Dimension auf Seite 40 kaum etwas anfangen können.

Ein weiteres Beispiel: Im Kapitel 15 wird eine Anwendung auf die Kuramoto-Sivashinskygleichung „on the space H of odd L-periodic functions" gegeben. Die Autoren geben sich nicht einmal die Mühe, die Gleichung genau anzugeben. Was der Hauptteil A der Gleichung sein soll, kann man bestenfalls erraten. In der gegebenen Form taucht eine Funktion φ auf, über die es lediglich heißt „with the explicit time-independent φ defined in [FNST, FNST1]" (wobei letzteres wieder Verweise auf Arbeiten dieses Autorenkreises sind).

Wäre dieses Werk in den *Lectures Notes* publiziert worden, für die es heißt „The timeliness of a manuscript is more important than its form, which may be unfinished or tentative ... proofs may be merely outlined", wäre es ein willkommener Beitrag zu einem interessenten und wichtigen Gebiet der Analysis gewesen. Als Buch in der Reihe *Applied Mathematical Sciences* ist es ein Ärgernis – nicht nur wegen der oben angeführten Punkte, sondern auch wegen der Hast, mit der es allem Anschein nach niedergeschrieben wurde. Einem gut durchdachten Buch stünde es schlecht an, im theoretischen Hauptteil eine Theorie für quadratische Nichtlinearitäten zu entwickeln, in den Anwendungen dann kubische Nichtlinearitäten zu behandeln; aus dem Chafee-Infante-Problem ein Chaffee-Infante-Problem zu machen (was verschiedene Personen betrifft); zu behaupten, die Existenz einer kompakten, konvexen und absorbierenden Teilmenge gehöre zu den „standard features of autonomous dissipative PDEs", wenn eher das Gegenteil der Fall ist; nicht darauf hinzuweisen, daß die entwickelte Theorie von sehr beschränkter Anwendbarkeit ist, da die benötigten Spektrallücken bei höheren Raumdimensionen kaum vorhanden sein dürften, und kommentarlos fast immer nur den Fall einer Raumdimension zu behandeln; zu ...

Zürich H. Amann

Zhu Y., Zhong X., Chen B., Zhang Z., Difference Methods for Initial-Boundary-Value Problems and Flow Around Bodies, Berlin – Heidelberg – New York – London – Paris – Tokyo: Springer, and Beijing: Science Press 1988, 600 S., DM 168,–

Zahlreiche außermathematische Phänomene führen in der mathematischen Modellierung auf Systeme quasilinearer hyperbolischer Differentialgleichungen. Als Beispiel sei an die Systeme von Erhaltungsgleichungen zur Beschreibung inviskoser Gasströmungen erinnert und an die dabei eventuell auftretenden Verdichtungsstöße, also Unstetigkeiten der physikalisch relevanten (schwachen) Lösung.

Angesichts dieser erheblichen physikalisch-technischen Bedeutung unstetiger Lösungen quasilinearer hyperbolischer Systeme sind in der Vergangenheit zahlreiche Verfahren zur numerischen Approximation derartiger Lösungen erdacht worden. Dabei wird zumeist durch Einführung kleiner künstlicher Viskositäten Glättung erzeugt, die den numerischen Aufwand reduziert, jedoch die Unstetigkeiten mehr oder weniger stark verschmiert. Überdies treten vielfach in der Nähe der Unstetigkeiten numerische Oszillationen auf. Das Ziel besteht deshalb darin, bei erträglichem Aufwand sowohl die Oszillationen zu vermeiden wie die Shocks möglichst präsize wiederzugeben. Überdies wird häufig lediglich die reine Anfangswertaufgabe behandelt (und oftmals nur ein skalares Modell betrachtet).

Die Autoren entwickeln eine Methode zur Konstruktion von Differenzenverfahren höherer Ordnung, die in den 70er Jahren auf Probleme unterschiedlicher Herkunft, insbesondere auf Überschall-Umströmungen fester Körper, angewandt wurden und auch beim Auftreten von Unstetigkeiten sehr präzise arbeiten sollen. Der Erfolg mußte freilich nach Auskunft der Verfasser mit hohem Programmier- und Rechenaufwand bezahlt werden. Die Autoren nennen ihre Methode ein „singularity-separating"-Differenzenverfahren, bei der auftretende Shocks als interne Ränder aufgefaßt und zur Lösungsberechnung an inneren Punkten nur Sterne benutzt werden, deren Punkte sämtlich auf einer Seite der Unstetigkeit liegen. Lediglich die hinzutretenden Sprungbedingungen weisen dann Punkte auf, die verschiedenen Bereichen angehören. Innerhalb der Teilbereiche können die Schrittweiten dem Lösungsverlauf angepaßt werden.

Zunächst werden Aufgaben in zwei unabhängigen Veränderlichen untersucht und zwecks Rückführbarkeit der Probleme auf solche mit rechteckigen Gebieten Umrechnungen auf krumlinige Koordinaten vorgenommen.

Bei der Konstruktion der Differenzenverfahren ist zunächst darauf zu achten, daß die Zahl der Gleichungen und die Zahl der Unbekannten übereinstimmen und die Autoren verlangen als Mindestforderung, daß das Verfahren bei Anwendung auf lineare Probleme numerisch stabil (und konsistent) ist. Bei der reinen Anfangswertaufgabe würde es zum Nachweis dieser numerischen Stabilität ausreichen, Verfahren zu konstruieren, die die von Neumann-Bedingung erfüllen. Um auch beim Anfangs-Randwertproblem Stabilität zu gewährleisten, muß eine weitere Bedingung hinzutreten, und es zeigt sich, daß die Konstruktion derartiger Verfahren zusammengesetzt werden kann aus Approximationen für vier Typen von Modell-Problemen. Die Verfasser konstruieren sodann Verfahren erster und zweiter Ordnung, weisen die Stabilität (im beschriebenen Sinne) dieser Verfahren nach und befassen sich mit der Auflösbarkeit der entstehenden Gleichungssysteme. Dabei handelt es sich zunächst ausschließlich um lineare Test-Probleme. Alsdann werden auch nichtlineare Randbedingungen zugelassen, doch bleiben die Differentialgleichungen selbst noch linear. In einem ersten Anhang zum ersten Kapitel, der eine englische Übersetzung einer Zeitschriften-Veröffentlichung darstellt, wird der Fall linearer Probleme mit variablen Koeffizienten im Falle einer reinen Anfangswertaufgabe behandelt und es werden Resultate von Lax and Kreiss zitiert und ergänzt.

Ein zweiter Anhang ist ebenfalls direkt einer Zeitschrift entnommen und behandelt die Auflösung algebraischer Gleichungssysteme, die aus vielen linearen und wenigen nichtlinearen Gleichungen bestehen.

Der dritte Anhang des ersten Kapitels war offenbar ebenfalls als Zeitschriften-Aufsatz konzipiert und behandelt neben der Stabilität von Differenzenverfahren für lineare Anfangs-Randwertaufgaben auch die Frage der Konvergenz.

Im zweiten Kapitel werden die Methoden des ersten Kapitel in aller Kürze auf Probleme mit drei unabhängigen Veränderlichen ausgedehnt.

Das dritte Kapitel des ersten Teils des Buches weist dann auf numerische Probleme bei der Approximation von Randwertaufgaben bei elliptischen Gleichungen und solchen gemischten Typs hin. Dabei wird insbesondere auf die Linienmethode ausführlicher eingegangen.

Der gesamte, sehr umfangreiche zweite Teil des Buches ist dann der Überschall-Umströmung fester Körper gewidmet. Zunächst wird ein umfangreicher historischer Überblick mit entsprechenden Literaturverweisen vorgelegt, alsdann wird das eingangs bereits genannte mathematische Modell inviskoser Gasströmungen aus den physikalischen Erhaltungssätzen motiviert, und es werden die wesentlichsten theoretischen Eigenschaften und Begriffsbildungen, wie man sie in vielen Büchern über Strömungsmechanik findet, erläutert. Die Randbedingungen bei stationärer Umströmung fester Körper werden formuliert und thermodynamische Einflüsse werden berücksichtigt. Auch chemische Reaktionen und Ionisationsprozesse und daraus resultierende Erweiterungen des mathematischen Modells werden angesprochen. Solchermaßen gerüstet, wird dann der Leser an die

Berechnung von Überschall-Umströmungen stumpfer Körper herangeführt, wobei insbesondere die früher erwähnte Linienmethode Verwendung findet und zunächst axialsymmetrische Fälle betrachtet werden. Später wird auch die Behandlung allgemeiner dreidimensionaler Probleme vorgestellt, und eine Fülle numerischer Resultate schließt das Werk ab.

Das Buch ist abschnittsweise außerordentlich technisch geschrieben, so daß die oft seitenweise ohne wesentliche Zwischentexte aneinandergefügten umfangreichen Formelsätze das Lesen sehr erschweren. Auch die als Anhänge eingestreuten Originalarbeiten beeinträchtigen durchaus die Einheitlichkeit der Darstellung und erschweren damit die Lektüre. Auf die Relevanz der linearen Test-Probleme für die später behandelten nichtlinearen Aufgabenstellungen wird kaum eingegangen, mithin auch nicht auf die eingangs genannte Frage der präzisen Beschreibung von Shocks. Es ist ausgesprochenes Ziel der Autoren, ihre eigenen Arbeiten aus den 70er Jahren gesammelt darzustellen, so daß naturgemäß die zahlreichen wichtigen Arbeiten anderer Autoren aus den 80er Jahren keine Aufnahme in den Text fanden. Dieses resultiert wohl aus dem Umstand, daß die chinesische Originalausgabe bereits 1980 publiziert wurde und die nun vorliegende englische Übersetzung aus dem Jahre 1988 mithin nicht in allen Bereichen den Stand der Wissenschaft widerspiegelt.

Dennoch enthält das Buch eine Fülle nützlicher Hinweise und Schemata, die in anspruchsvollen, technisch relevanten Beispielen auf ihre Brauchbarkeit getestet wurden (was man für die zahlreichen Verfahren aus den 80er Jahren leider nicht immer bestätigen kann). Insoweit wird es zweifellos den in der Praxis tätigen Naturwissenschaftler und Ingenieur ansprechen. Als Lehrbuch allerdings ist das Buch weniger empfehlenswert.

Hamburg R. Ansorge

Delahaye, J.-P., Sequence Transformations (Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 11), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1988, 250 pp., 164 figs., Hardcover, DM 128,–

Transformationen von Folgen spielen in mehreren Gebieten der Mathematik eine Rolle, insbesondere in der Numerik (Konvergenzbeschleunigung). Über lineare Transformationen (Limitierung) weiß man recht gut Bescheid. Die in mancher Hinsicht noch wichtigeren nichtlinearen Transformationen wurden aber meist in einem engen Umfeld betrachtet. Das vorliegende Werk bringt nun eine wertvolle Zusammenschau allgemeiner und spezieller Resultate. In einem Vorwort schildert C. Brezinski die historische Entwicklung und erläutert die Bedeutung des Buches. In 7 Kapiteln (jedes enthält eine Einleitung und ein Literaturverzeichnis) entwickelt der Autor dann seine Theorie.

Das erste Kapitel dient der Klärung von Grundbegriffen. Verf. geht aus von zwei Mengen E, F (z. T. mit Metrik) und den zugehörigen Folgen (Indizierung $n=0,1,\ldots$); die betreffenden Folgenräume bezeichnen wir hier mit Seq(E) bzw. Seq (F). Er untersucht Transformationen T, die eine Teilmenge von Seq (E) in Seq(F) abbilden. Ein solches T heißt algorithmisch, wenn das n-te Glied der Bildfolge jeweils durch einen endlichen Abschnitt der Urfolge bestimmt ist; dabei wird der Abschnitt rekursiv berechnet (unter finiter Einbeziehung der Urfolge). Ferner heißt T normal, wenn stets der Abschnitt $[0,n]$ ausreicht. Anschließend erläutert Verf. weitere Begriffe wie k-normal, k-Gedächtnis, k-stationär.

Die zwei anschließenden Kapitel befassen sich mit Entscheidbarkeit bzw. mit Teilfolgen. Eine Frage Q auf einer Teilmenge S von Seq(E) heißt entscheidbar im Limes, wenn es eine algorithmische Transformation T gibt, welche zu jeder Urfolge in S eine Folge von Antworten (in F) liefert, die von einer Stelle an alle korrekt sind. Bei der Frage nach der

Konvergenz gibt es ein solches T nur für besonders strukturierte Folgen. Weitere Probleme betreffen die Stichworte Häufungsmenge, Periodizität, Iteration. – Für die Auswahl konvergenter Teilfolgen werden drei Verfahren angegeben, die (grob gesagt) darauf beruhen, daß man in den betrachteten Abschnitten die Schwankung tunlichst klein hält. Die dabei verwendeten Voraussetzungen werden erläutert und abgegrenzt.

In den Kapitel 4 und 5 geht es um Konvergenzbeschleunigung (Akzeleration). Eine Familie S (von konvergenten Folgen) heißt akzelerierbar, wenn es eine normale Transformation T gibt (es sei $E = F$), die jeder Folge aus S eine rascher konvergierende Folge zuordnet. Präziser wird dabei auch die Stärke der Verbesserung einbezogen (5 Varianten; Vergleiche). Beispiele für akzelerierbare Familien liefern Folgen mit linearer Konvergenz o. ä. Weiter werden Strukturfragen wie Maximalität erörtert. – Bei vielen Familien kann man zeigen, daß sie nicht akzelerierbar sind. Dafür genügt eine Eigenschaft Remanenz; sie besagt in etwa: In S gibt es Folgen, die auf langen Anfangsstücken übereinstimmen, aber verschiedene Grenzwerte besitzen; überdies enthält S gewisse blockweise Kombinationen solcher Folgen. Mit derartigen Kombinationen (Diagonalisierungsprinzip; gleitender Buckel) kann man jeden Algorithmus überlisten. Die Familie Conv(E) (alle konvergenten Folgen) ist genau dann akzelerierbar, wenn E keine Häufungspunkte besitzt. Verwandte Resultate gelten für Folgen mit gewissen Monotonieeigenschaften.

Die beiden Schlußkapitel bringen zunächst eine genauere Untersuchung von Folgen mit linearer Konvergenz (z. T. in einem erweiterten Sinn). Das Delta-Verfahren von Aitken ist hier in dreierlei Hinsicht optimal. – Weiter wird die automatische Auswahl von Transformationen diskutiert. Das Grundschema besteht darin, daß man die Anfangserfolge vergleicht. Eingehender betrachtet wird die Richardson-Extrapolation unter Verwendung eines Romberg-Schemas.

Das Buch bietet einen vortrefflichen Überblick und viele nützliche Einzelresultate. Es ist für Mathematiker vieler Sparten von Bedeutung. Aus meiner Sicht ist das Buch ein gelungener Wurf – auch wenn man an einigen Stellen Kritik üben könnte. Ich wünsche dem Werk eine weite Verbreitung.

Ich schließe einige allgemeine Bemerkungen an. Konvergenz spielt eine große Rolle in der modernen Numerik. In vielen Fällen möchte man aber nur eine praktikable Approximation. Eine solche kann man u. U. auch auf der Basis von divergenten oder prinzipiell-unendlichen Prozessen erreichen. Und letztlich will man ein handliches Modell der Realität, wobei manche Abweichungen zunächst nur qualitativ erfaßt werden können (Konfidenz kontra Konvergenz). Es ist zu hoffen, daß auch solche Überlegungen präzisiert und in eine anwendungsnahe Theorie eingebracht werden.

Tübingen K. Zeller

Chui, C. K., Multivariate Splines (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics No. 54), Philadelphia: Society Ind. Appl. Math. 1988, 189 S., softcover, \$ 19,00

Mehrdimensionale Splines spielen seit etwa 15 Jahren eine entscheidende Rolle bei der Approximation von Funktionen in mehreren Veränderlichen. Hierbei steht im Augenblick – im Gegensatz zur Methode der Finiten Elemente – nicht primär die Anwendung bei der Lösung gewisser partieller Differentialgleichungen im Vordergrund. Die Forschungsaktivitäten zielen zunächst auf ein Verständnis der analytischen, lokalen und globalen Eigenschaften dieser Funktionen. Das Gebiet entwickelt sich rasch; inzwischen zeigen sich schon erste Anwendungen im Computer Aided Geometric Design. Weitere entscheidende Einflüsse auf die Signalverarbeitung und – im Fall regelmäßiger

Triangulierungen – auf das Problem der Datenreduktion bei gleichbleibender Approximationsgüte sind bald zu erwarten.

Sicher ist es heute zu früh, das im vorliegenden Werk behandelte Gebiet endgültig zu bewerten. Dies ist auch nicht das Ziel des Autors. Aufbauend auf einer Vorlesungsreihe (im August 1987 an der Howard University, Washington, D.C.) umreißt er die augenblicklichen Hauptforschungsrichtungen, zu denen er zusammen mit einigen seiner Mitarbeiter schließlich entscheidende eigene Beiträge geliefert hat. Dies erfolgt in kurzer, prägnanter Darstellung, indem den Hauptideen und zentralen Ergebnissen genügend Raum bereitgestellt, aber auf vollständige Beweise meistens verzichtet wird. Hinsichtlich der (oft technischen) Einzelheiten erfolgen zahlreiche Verweise auf Originalarbeiten unter Bezug auf das hervorragende Literaturverzeichnis.

Kurz zum Inhalt des Bandes: Einem einleitenden 1. Kapitel, das zu den mehrdimensionalen Fragestellungen anhand einiger Eigenschaften eindimensionaler Splines hinführt, folgt ein Kapitel über Box-Splines und mehrdimensionale Truncated Powers, in dem die elementaren Eigenschaften dieser Funktionen und die Räume der durch Box-Spline-Reihen darstellbaren Polynome behandelt werden. Daran schließen sich zwei Kapitel an, in denen Dimensionsfragen und Approximationsordnung von Splineräumen über dem regelmäßigen Dreirichtungs-/Vierrichtungsgitter bzw. über sog. Quasi-crosscut-Unterteilungen untersucht werden. Bezier-Techniken werden in Kap. 5 zur Beschreibung glatter Übergangsbedingungen (hinsichtlich globaler Differenzierbarkeitsordnung) und in Kap. 6 zur Darstellung sog. Vertex-Splines eingesetzt. Kapitel 7 behandelt die in der Theorie gängigen Algorithmen zur Auswertung von Spline-Flächen (diskrete Box-Splines, line averaging, Bezier-Netze). Schwerpunkte der Kap. 8 und 9 sind Quasi- und Kardinale Interpolationsoperatoren, wobei die Interpolationsräume durch Translate eines (Box-)Splines gebildet werden. Das abschließende Kap. 10 geht auf gestaltserhaltende Approximationsprozesse (hinsichtlich Positivität, Monotonie bzw. Konvexität) ein.

Als Basistext für eine Vorlesung (auch für Studenten im Hauptstudium) ist das Buch im Hinblick auf die knappe Darstellung wenig geeignet. Es sollte anders eingesetzt werden: als Orientierungshilfe für den Nichtfachmann, als Diskussionsgrundlage in Oberseminaren und als (stets griffbereite) Hilfe für den Spezialisten, der in diesem Gebiet selbst aktiv ist. Insbesondere der zuletzt angesprochenen Gruppe kann das Werk wärmstens empfohlen werden.

Duisburg K. Jetter

Jost, J., Nonlinear methods in Riemannian and Kählerian geometry (DMV Seminar, Bd. 10), Basel: Birkhäuser 1988, 154 S., Softcover, 46,–

Das vorliegende Buch ist die erweiterte Fassung von Vorlesungen, die der Autor anläßlich des DMV-Seminars „Nichtlineare Methoden in der komplexen Geometrie" im Juni 1986 in Schloß Mickeln bei Düsseldorf gehalten hat. Der Inhalt gliedert sich in fünf Kapitel, die wir zunächst kurz beschreiben wollen.

Das erste Kapitel stellt einige geometrische Grundlagen zusammen, die neben den Grundbegriffen der Riemannschen und der Kählerschen Geometrie auch die wichtigsten Tatsachen über Jacobi-Felder, charakteristische Klassen, harmonische Abbildungen und Yang-Mills-Felder enthalten, letztere vor allem in vier Dimensionen.

Das zweite Kapitel führt in wesentliche analytische Techniken der globalen Analyis ein. Es beginnt mit einem Abriß der abstrakten Kontinuitätsmethode, dann folgt eine Übersicht über die Ergebnisse der elliptischen wie parabolischen Schaudertheorie und zum Abschluß eine Anwendung der lokalen Schaudertheorie auf eine parabolische Gleichung.

Der eigentliche Text beginnt mit dem dritten Kapitel. Hier wird zunächst gezeigt, wie die Hodge-Zerlegung der quadratisch integrierbaren p-Formen mittels parabolischer Methoden folgt (nach dem Vorbild von Milgram-Rosenblum). Nach diesem Muster wird dann der Existenzsatz für harmonische Abbildungen bewiesen, wenn die Bildmannigfaltigkeit nichtpositive Krümmung hat. Das Kapitel schließt mit Eindeutigkeitssätzen für harmonische Abbildungen.

Im vierten Kapitel wird die hermitesche Yang-Mills-Gleichung behandelt und Donaldsons Resultat über die globale Existenz des zugehörigen Flusses in gegenüber dem ursprünglichen Beweis vereinfachter Form hergeleitet. Das Konvergenzproblem und sein Zusammenhang mit der Stabilität des Bündels wird ohne Einzelheiten erläutert. Das fünfte Kapitel enthält geometrische Anwendungen des entwickelten Apparates. Zu Anfang werden wohlbekannte, aber nützliche und motivierende Resultate über kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung vorgestellt: sie sind $K(\pi, 1)$, und jede auflösbare Untergruppe der Fundamentalgruppe ist eine Bieberbach-Gruppe. Dann folgt, als Höhepunkt, Sius Resultat über die Starrheit kompakter Kähler-Mannigfaltigkeiten von stark negativer Schnittkrümmung.

Das Buch führt den Leser sehr geradlinig an hochinteressante Ergebnisse der globalen Analysis heran und macht zugleich mit einigen wesentliche (nichtlinearen) Techniken vertraut. Der Autor versucht dabei immer wieder, die grundlegenden Ideen herauszustellen, und er weist oft auf die Verbindung mit benachbarten Fragen hin. So ist ein Text mit sehr viel Material entstanden, der dem Leser trotzdem keine unüberwindlichen Hürden errichtet. Der Stil bringt es natürlich mit sich, daß vieles vorausgesetzt werden muß und manche Argumente nur angedeutet werden; jedem fortgeschrittenen Studenten, der einen Einblick in das Gebiet gewinnen möchte, kann die Lektüre aber nachdrücklich empfohlen werden.

Augsburg J. Brüning

Georgii, H. O., Gibbs Measures and Phase Transitions de Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 9), Berlin – New York: Walter de Gruyter 1988, XIX, 525 pp., Hardcover, DM 178,–

Hauptthema des Buches ist das Studium mathematischer, insbesondere wahrscheinlichkeitstheoretischer Modelle für das Phänomen des Phasenüberganges. Dabei wird besonders herausgearbeitet die Rolle von Symmetrieüberlegungen. Der Prototyp dieser Erscheinung, an den man hier denken sollte, ist ein magnetisierbares Material, bei dem wir unterhalb einer kritischen Temperatur Magnetisierung beobachten, entweder in der $+$- oder $-$-Richtung. Die Symmetrie, die bei Magnetisierung gebrochen wird, ist natürlich das Vertauschen der $+,-$-Richtung. Oberhalb der kritischen Temperatur ist die Anordnung der Elementarmagneten chaotisch und global bleibt das Material unmagnetisch.

Ausgangspunkt der Modellierung dieser Erscheinungen ist die Zuordnung eines Gibbsmaßes zu jedem Gleichgewichtszustand eines physikalischen Systems. Ein Gibbsmaß ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Konfigurationsraum, das einer Konfiguration $\eta=\{\eta(i) | i \in I\}$ das Gewicht $Z \cdot \exp(-H(\eta))$ zuordnet, wobei $H(\eta)$ die Energie der Konfiguration darstellt und Z eine Konstante zur Normierung auf ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Dies macht natürlich nur Sinn für einen endlichen Konfigurationsraum. Im Falle eines unendlichen Konfigurationsraumes betrachten wir endliche Teilmengen $A \subseteq I$ und fixieren η auf $\mathscr{C}A$ und fordern, daß die Verteilung von $\{\eta(i), i \in A\}$ gegeben $\{\eta(i), i \in \mathscr{C}A\}$ gleich $Z \exp\,(-H(\eta_A))$ ist, wo η_A die Restriktion von $\eta=\{\eta(i), i \in I\}$ auf $\{\eta(i), i \in A\}$ bezeichnet.

Das Buch beginnt im Teil I mit der Definition und Konstruktion von Gibbsmaßen, behandelt das Existenzproblem im Allgemeinen, sowie für symmetrische Hamiltonfunktionen H und symmetrische Gibbsmaße im Besonderen. Von hier ausgehend werden Beispiele für den Symmetriebruch gegeben und anschließend wird das Eindeutigkeitsresultat für Gibbsmaße von Dobrushin diskutiert.

Im Teil II werden dann Markovfelder und Gaußfelder behandelt, das heißt, man betrachtet solche Hamiltonfunktionen, unter denen die extremalen Gibbsmaße Markov- bzw. Gaußfelder sind. Letztere treten auf für Konfigurationsräume der Form $(\mathbb{R})^I$ und Hamiltonfunktionen H der Form $H(\eta) = \sum_{i,j} \eta(i) J(i,j),j)\eta(j) + h\delta_{i,j}\eta(i)$,wobei $J(.,.)$ und h Parameter des Systems sind (h beschreibt die Stärke eines äußeren Feldes, während J die Kopplung der Komponenten modelliert). Im Falle der Markovfelder werden eine Vielzahl von Beispielen auf $\mathbb{Z}$ und auf Graphen explizit durchgerechnet, wie zum Beispiel das Ising-Modell auf dem Cayley-Baum.

Im Teil III des Buches wird schließlich eine Charakterisierung von Gibbsmaßen als Lösungen eines Variationsproblems gegeben. Gibbsmaße erscheinen hier als Zustände minimaler freier Energie. Zu diesem Zwecke werden die Größen Druck und Entropie betrachtet. In einem geometrischen Exkurs in die konvexe Analysis werden die Gibbsmaße als Tangente des Druckes interpretiert. Dieser dritte Teil des Buches beinhaltet auch Fragen, die bei der Betrachtung der Menge der Gibbsmaße als Simplex im Sinne von Choquet entstehen.

Der vierte Teil des Buches diskutiert die Reflexionspositivität und topologische Eigenschaften typischer Konfigurationen unter extremalen Gibbsmaßen. (Zum Beispiel hat man im Ising-Modell für $T < T_{\mathrm{kr}}$ die Plusphase ν^+ und die Minusphase ν^- und ν^+ lebt auf Konfigurationen mit einer unendlichen Zusammenhangskomponente von Pluswerten und endlichen Mengen von Minuswerten, analoges gilt für ν^-). Unter anderem werden auch noch Modelle diskutiert, wo die Phasenbildung auf einen Wettbewerb zwischen Entropie und Energie zurückgeht.

Schließlich sei noch erwähnt, was das Buch nicht enthält. Zum einen wird die Sinai-Pirogov-Theorie von Phasendiagrammen, wie man sie in Sinai: Theory of Phase Transition. Rigorous Results, findet, nicht erwähnt. Zum anderen werden die Fragen von Modellen mit einer Dynamik, die Gibbsmaße als invariante Maße haben, ausgeklammert.

Das Buch zeichnet sich aus durch eine sorgfältige und vollständige Darstellung aller Einzelschritte, die nötig sind, um einen rigorosen formalen Beweis für die behandelten Theoreme zu geben. Alle verwendeten Begriffe sind exakt definiert. Auf der anderen Seite geben die Bemerkungen am Ende von Kapiteln bzw. die Einleitungen zu den Kapiteln die notwendige Anschauung und den physikalischen Hintergrund. Die sorgfältige Trennung der heuristischen Ebene von der formal mathematischen, ist eine große Hilfe für den mathematischen Leser, der Einblick in die mathematischen Techniken sucht, aber zugleich seine Intuition entwickeln und den physikalischen Hintergrund verstehen möchte.

Die Klarheit, Sorgfalt und Ausführlichkeit wird erkauft mit einer Beschränkung in der Themenwahl, so fehlt Sinais Phasendiagramm in seiner allgemeinen Form, oder Modelle, die Evolutionen in der Zeit studieren, wie zum Beispiel in den Arbeiten von R. Holley.

Da im Moment eine echte Notwendigkeit vorhanden ist für ein Buch, das für den fortgeschrittenen Studenten und für den Nichtspezialisten eine lesbare Einführung in die Thematik gibt, ist die Form des Buches und die Wahl des behandelten Stoffes insgesamt sehr zu begrüßen.

Das Buch ist im höchsten Maße zu empfehlen und ein Beispiel für das, was man von einem guten Buch erwarten sollte, was aber leider in dem hektischen Publikationsbetrieb der letzten Dekade zur Rarität geworden ist. Mit dem Buch von Georgii ist es möglich, ein

Seminar bzw. eine Vorlesung mit dieser Vorlage abzuhalten, ohne einen Spezialisten vor Ort zu haben. Es ist daher zu hoffen, daß dies Buch ein Anstoß ist, dem Themenkreis statistische Physik mehr Raum in der probabilistischen Ausbildung zu geben, als dies bisher der Fall ist.

Heidelberg A. Greven

Gut, A., Stopped Random Walks (Applied Probability, Vol. 5), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1988, 199 pp., hard cover, DM 88,–

Seinem Titel gemäß behandelt das vorliegende Buch das Verhalten von zu zufälligen Zeitpunkten gestoppten Random Walks – die angelsächsische Bezeichnung für Folgen von Summen unabhängiger und identisch verteilter Zufallsgrößen sei hier benutzt – wobei asymptotische Aussagen bei gegen unendlich strebenden Stoppzeiten im Vordergrund stehen. Zentraler Teil des Inhalts sind dabei Forschungsresultate des Autors aus den letzten Jahren – beginnend mit dem Jahr 1973 – welche hiermit eingebettet in einer geschlossenen und auch als Lehrbuch für diesen Teil der Theorie der Random Walks geeigneten Darstellung vorliegen.

Gefolgt von einem wahrscheinlichkeitstheoretischen Anhang, der u. a. die in etlichen Beweisen des Textes wesentlich benutzten Ungleichungen vom Burkholderschen Typ beschreibt, einem Anhang analytischen Inhalts und einem umfangreichen Literaturverzeichnis enthält das Buch die Kapitel

1. Limit Theory for Stopped Random Walks
2. Renewal Processes and Random Walks
3. Renewal Theory for Random Walks with Positive Drift
4. Generalizations and Extensions
5. Functional Limit Theorems.

Das einführende erste Kapitel gibt eine systematische Darstellung von Grundlagen zur Konvergenz von gestoppten Random Walks, beinhaltend den Anscombe'schen Satz und die Behandlung gleichgradiger Integrierbarkeitsfragen mit daraus folgender Momentenkonvergenz. Schon hier zeigt sich eine Eigenschaft des Buches, die im gesamten Verlauf des Textes festzustellen ist und als Konsequenz aus dem Streben des Autors nach Vollständigkeit bei begrenzter Seitenzahl angesehen werden kann: Etliche Resultate, deren Herleitung sich nicht der im Text systematisch entwickelten Beweismethodik unterwirft, werden ohne Beweise dargestellt, wobei ein weitergehendes Studium des Lesers sich auf die angegebene gründliche Literaturdiskussion stützen kann. Als Vorbereitung auf die zentralen Kapitel 3–5 kann auch das Kapitel 2 verstanden werden, welches grundlegende Resultate der Erneuerungstheorie und einige wichtige Eigenschaften von Random Walks erörtert.

In Kapitel 3 wird nun eine ausführliche Untersuchung der Überschreitungszeiten des Niveaus t und des zu diesen zufälligen Zeitpunkten gestoppten Random Walks durchgeführt. Unter anderem werden für gegen unendlich strebendes t Gesetze der großen Zahlen und zentrale Grenzwertsätze betrachtet, Momentenkonvergenz und das asymptotische Verhalten des Überschreitungsexzesses. Das folgende Kapitel 4 enthält eine Vielzahl von interessanten Verallgemeinerungen und Anwendungen. Erwähnt seien hier nur die Betrachtung von zweidimensionalen Random Walks, von Überschreitungszeiten bei nichtlinearen Grenzen und Anwendungen auf Chromotographie, Zuverlässigkeitstheorie und Risikotheorie. In Kapital 5 werden schließlich Erweiterungen von vorstehenden Grenzwertsätzen zu funktionalen Grenzwertsätzen gegeben, aufbauend auf einem Anscombe-Donsker'schen Satz.

Das vorliegende Buch zeichnet sich durch klare Darstellungsweise aus. Es kann sowohl zur Einarbeitung in ein wichtiges Teilgebiet der Theorie der Random Walks für den wahrscheinlichkeitstheoretisch vorgebildeten Interessenten dienen, als auch dem avancierteren Leser wertvolles Nachschlagewerk und Zugangsbereiter zum aktuellen Stand der Forschung sein.

Kiel A. Irle

Heilmann, W. R., Fundamentals of Risk Theory, Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft 1988, 288 S., Paperback, DM 36,20

Die Risikotheorie versteht sich als modelltheoretische Grundlage der (vor allem Sach-)Versicherungsmathematik und der Risikopolitik von Versicherungsunternehmen. Die Risikotheorie quantifiziert die Zufallsgesetzmäßigkeit von Schadenereignissen und Schadenverläufen und entwickelt auf dieser Grundlage Entscheidungsmodelle, die die Ableitung von Problemlösungen für schadenabhängige Entscheidungssituationen der Versicherungswirtschaft (Prämien- und Tarifkalkulation, Bestimmung von Sicherheits-, Schwankungs- und Schadenreserven, Rückversicherungspolitik) gestatten.

Das vorliegende Buch von Wolf-Rüdiger Heilmann ist eine im wesentlichen unveränderte englischsprachige Ausgabe des 1987 im selben Verlag erschienenen Buches „Grundbegriffe der Risikotheorie“, das zu den ersten deutschsprachigen Lehrbüchern über diese Thematik zählt. Es ist aus Vorlesungen entstanden, die der Verfasser für Studierende der Mathematik, der Wirtschaftsmathematik und der Wirtschaftswissenschaften an den Universitäten Hamburg und Karlsruhe gehalten hat.

Kapitel 1 legt auf 94 Seiten sehr umfangreich die benötigten *wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen* der im weiteren Verlauf des Buches behandelten risikotheoretischen Modelle und Methoden. Die ausführliche Darstellung der stochastischen Basis fördert die Geschlossenheit des Buches, erleichtert Interessenten mit differierenden Vorkenntnissen den Einstieg in die Materie und erlaubt es, die Ergebnisse späterer Kapitel kompakter und eleganter abzuleiten. Positiv zu vermerken ist die vorgenommene Illustration von zahlreichen Begriffen und Ergebnissen der Wahrscheinlichkeitstheorie durch Anwendungen von versicherungsmathematischer Relevanz und die Fülle von nützlichen Resultaten, die die technische Handhabung der vorgestellten Größen erleichtern.

Kapitel 2, die Beschreibung des *Risikoprozesses,* ist das eigentliche Herzstück jeder risikotheoretischen Einführung. Aufgrund der im einleitenden Kapitel gelegten Grundlagen kann es sehr kompakt (7 Seiten!) gehalten werden. Der Risikoprozeß quantifiziert die Entwicklung der Differenz zwischen den akkumulierten Prämien (zuzüglich einer Anfangsreserve) und den akkumulierten Schäden im Zeitablauf. Die Kontrolle bzw. Steuerung des Risikoprozesses ist die Hauptaufgabe der Risikopolitik eines Versicherungsunternehmens.

Kapitel 3 befaßt sich ausführlich mit *numerischen Problemen* bei der Berechnung der *Gesamtschadenverteilung.* Diese ist als unendliche Summe von Faltungspotenzen i. d. R. nicht explizit auswertbar. Die ständig zunehmende Kapazität und Komfortabilität der heutigen EDV erlauben die numerische Auswertung dieses grundlegenden Konzepts der Risikotheorie und machen damit die darauf aufbauenden Ergebnisse zur Risikopolitik von Versicherungsunternehmen erst für die Praxis nutzbar.

Vorgestellt werden die klassischen Approximationsmethoden sowie die modernen Verfahren der rekursiven Berechnung der (diskretisierten) Gesamtschadenverteilung, die Sparse-Vector-Methode und die Fast-Fourier-Methode. Zu bemängeln ist die zu starke Gewichtigkeit der Darstellung der Approximationsmethoden, die – mit Ausnahme der Normal-Power-Methode – in der Risikotheorie nur noch wenig Bedeutung besitzen.

Kapitel 4 behandelt die Theorie der (Risiko-)*Prämienkalkulation.* Vorgestellt werden die wichtigsten in der Risikotheorie entwickelten Prämienkalkulationsprinzipien. Diese werden dann systematisch auf ihre Eigenschaften hin untersucht. Zu erwähnen ist, das Heilmann in Abschnitt 4.2.4 einen originären Zugang zur Konstruktion von Prämienkalkulationsprinzipien wählt. Aufgrund der Spezifizierung einer Verlustfunktion wird das zugehörige Prämienprinzip so bestimmt, daß der aus seiner Anwendung resultierende erwartete Verlust minimiert wird. Auf eigene Untersuchungen von Heilmann geht auch das Konzept der Robustheit von Prämienprinzipien, vorgestellt in Abschnitt 4.3.10, zurück.

Kapitel 5 stellt die Grundlagen der *Credibility-Theorie* dar. Die Credibility-Theorie ist ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell, das eine konsistente Grundlage für die Durchführung einer Erfahrungstarifierung bildet, d. h. einer Tarifierung, die den individuellen Schadenverlauf bei der Tarifierung berücksichtigt. Insbesondere gelingt es der Credibility-Theorie, das Problem der risikoadäquaten Kombination von individueller und kollektiver Schadenerfahrung bei der Tarifierung zu lösen.

Der Einstieg von Heilmann in die Credibility-Theorie ist wiederum originär. Der Ansatz ist eine Erweiterung des in Abschnitt 4.2.4 vorgestellten Verlustfunktion-Prinzips der Prämienkalkulation in der Hinsicht, daß jedes Risiko innerhalb des tarifierenden Kollektivs durch einen unbekannten (zufallsabhängigen) Parameter gekennzeichnet ist, dessen Verteilung (Strukturfunktion) die Risikostruktur des Gesamtkollektivs erfaßt. Die resultierenden Prämien können als Bayes-Schätzer im Sinne der statistischen Entscheidungstheorie aufgefaßt werden. Hinweise auf die lineare Credibility-Theorie, die den eigentlichen Kern der modernen Credibility-Theorie darstellt, wären zumindest in den Grundzügen wünschenswert gewesen, eine Reihe von fruchtbaren aktuellen Ansätzen werden durch dieses Konzept abgedeckt.

Kapitel 6 behandelt Konzepte der *Risikoteilung,* d. h. Selbstbeteiligungsvereinbarungen mit den Versicherungsnehmern und Rückversicherung von Teilen des übernommenen Risikos. Bei den hierbei entstehenden Transformationen der Original-Schadenverteilung werden wichtige Kerngrößen berechnet. Darstellungen eines Exposure-Verfahrens, der Höchstschadenrückversicherung und der Gewinnung von Stop-Loss-Schranken beenden dieses Kapitel.

Das Schlußkapitel 7 behandelt die Problematik der Bestimmung von *Ruinwahrscheinlichkeiten,* eines der klassischen Gebiete der Risikotheorie. Die Stoffauswahl bleibt auf die Darstellung einiger grundlegender klassischer Resultate beschränkt.

Als Resümee der Besprechung des Lehrbuches von Heilmann, ist diesem ein gelungener Einblick in wichtige Teilgebiete der Risikotheorie zuzusprechen. Der Autor setzt stark eigenständige Akzente und beeindruckt durch seine didaktischen Fähigkeiten bei der Vermittlung des Stoffs.

Mannheim P. Albrecht

Who copied Who?

Or

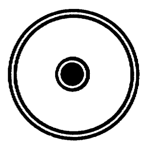
who invented the differential calculus? The historical dispute which lasted 17 years might never have occurred if these two renowned scientists had access to the **Zentralblatt für Mathematik / Mathematics Abstracts**

You can be better informed!

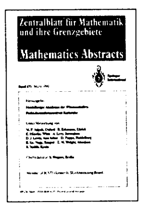
You can choose between a print, online and CD-ROM version of this important publication...

Return the form to us, and we will supply the information.

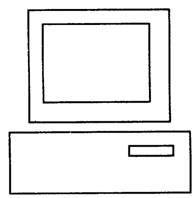
CD-ROM
CompactMATH
Compact
Mathematics
Library
1985–1989



The Classic
Zentralblatt
für Mathematik/
Mathematics
Abstracts


Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete

Mathematics Abstracts



Online
MATH
Database
on STN
since 1972

Information Request Form

Please return to:

Springer-Verlag
Dr. Nicola Klupsch
Mathematics Marketing
Tiergartenstr. 17
D-6900 Heidelberg

or:

Dr. B. Jenschke
Fachinformationszentrum
Postfach 2465
D-7500 Karlsruhe 1

Zentralblatt für Mathematik/Mathematics Abstracts

Please send me further information on
- ☐ Zentralblatt für Mathematik/Mathematics Abstracts - print version
- ☐ CompactMATH CD-ROM 1985–1989 and further editions
- ☐ MATH Database - online on STN

I/we are already online/CD-ROM users
☐ yes ☐ no

I/we subscribe regularly to the Zentralblatt für Mathematik/Mathematics Abstracts
☐ yes ☐ no

Name ________________

Address ________________

____

Date/Signature ________________

Springer-Verlag
Berlin
Heidelberg
New York
London
Paris
Tokyo
Hong Kong
Barcelona

wi.10.378/E/1