93. Band Heft 1
ausgegeben am 23. 1. 1991

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1991

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 118,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Berthold Gaupp

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 93, Heft 1

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

J. Schwermer: Räumliche Anschauung und Minima positiv definiter quadratischer Formen – Zur Habilitation von Hermann Minkowski 1887 in Bonn

H. Lenz, M. Aigner, W. Deuber: Richard Rado 1906–1989

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
93 (1991) 1–5

Karl Stein, Träger der ersten Cantor-Medaille

R. Remmert, Münster

Das mathematische Schaffen von Karl Stein umspannt mehr als fünf Jahrzehnte. In dieser Zeit hat die *Theorie der analytischen Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen* große Wandlungen erfahren: Alte Ideen wurden weiter entwickelt; neue Begriffe wurden eingeführt; die französische Revolution der frühen fünfziger Jahre änderte das Denken. Die Steinschen Arbeiten sind ein eindrucksvolles Zeugnis der Geschichte dieser Evolution.

Es kann hier nicht das Steinsche Werk im einzelnen gewürdigt werden. Ich beschränke mich auf einige wesentliche Gesichtspunkte; eine genauere Analyse findet man bei Henri Cartan: *Sur les travaux de* K. Stein, Œuvres 2, 896–908.

1. Karl Stein beginnt seine wissenschaftliche Arbeit mit einer Dissertation über Holomorphiehüllen niederdimensionaler Mannigfaltigkeiten, [1937]. Schon früh wendet er sich den damals im Brennpunkt stehenden klassischen Problemen von Cousin zu: Konstruktion *global* holomorpher bzw. meromorpher Funktionen zu *lokal* vorgegebenen Null- bzw. Polstellenflächen. In seiner Habilitationsschrift [1941] leitet er *notwendige topologische Homologiebedingungen* für die Lösbarkeit dieser Probleme her (Cohomologiegruppen waren noch weitgehend unbekannt). Mit dieser Arbeit zum „Okaschen Prinzip" beginnt der Siegeszug von Methoden der algebraischen Topologie in der Funktionentheorie, die Ergebnisse wurden ein Ausgangspunkt für spätere Untersuchungen von Stein sowie Cartan und Serre.

1943 löst Stein – gemeinsam mit Behnke – ein Problem, welches Koebe und Carathéodory nicht meistern konnten: Existieren auf jeder nicht kompakten Riemannschen Fläche nichtkonstante holomorphe Funktionen? Mit Methoden der Runge-Theorie, die zunächst entwickelt werden, wird in der infolge des Krieges erst 1948 publizierten Arbeit [1948] gezeigt, wenn man die Sprache von heute spricht:

Jede nichtkompakte Riemann*sche Fläche ist eine* Stein*sche Mannigfaltigkeit.*

2. Bahnbrechend wird die Arbeit [1951a], wo u. a. das Thema der zehn Jahre alten Arbeit [1941] weiter verfolgt wird. Auf wenigen Seiten skizziert Stein, wie sich z. B. wichtige Sätze über Periodizitäten, die für Holomorphiegebiete im $\mathbb{C}^n$ gelten, auf von ihm „R-konvex" genannte komplexe Mannigfaltigkeiten übertra-

gen lassen.*) Cartan und Serre greifen die kühnen Ideen sogleich auf, nennen die neuen Mannigfaltigkeiten „variétés de Stein" und stellen 1953 der verblüfften mathematischen Öffentlichkeit in ihren Arbeiten [C_2] und [S] die berühmten Theoreme A und B für kohärente analytische Garben auf Steinschen Mannigfaltigkeiten vor. H. Grauert gibt 1955 in [G] der Definition den letzten Schliff: Seither versteht man unter einem Steinschen Raum jeden komplexen Raum $(X, \mathcal{O})$ (mit abzählbarer Topologie), auf dem so viele holomorphe Funktionen leben, daß

- zu jedem Punkt $x_1 \in X$ *endlich viele* holomorphe Funktionen $f_1, .., f_m \in \mathcal{O}(X)$ existieren, so daß x_1 isoliert in der Menge $\{x \in X : f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0\}$ liegt (*Karten-Vollständigkeit*),
- zu jeder Folge (x_ν) aus X ohne Häufigkeitspunkt in X eine Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ mit $\sup_\nu |f(x_\nu)| = \infty$ existiert (*Holomorphie-Konvexität*).

Alsdann ist X von selbst *holomorph-separabel*, d.h. zu je zwei Punkten $x_1 \neq x_2$ existiert immer eine Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Stein-Theorie wird über Nacht zu einem Schwerpunkt internationaler Forschung. 1956 greift Stein selbst noch einmal in das Geschehen ein: Er zeigt durch Ausschöpfung mittels Rungescher Paare, daß jede Überlagerung eines Steinschen Raumes wieder Steinsch ist [1956a]; damit bejaht er eine 1953 von Serre in [S] gestellte Frage. Eine erste zusammenfassende Darstellung der Stein-Theorie bis 1977 findet man in [GR_2]. Die Begriffe „Steinscher Raum, Steinsche Algebra, Steinsche Gruppe" sind heute mathematische Folklore; in den fünfziger Jahren stellte Henri Cartan gern die schelmische Existenzfrage: „Mon cher Stein, avez-vouz une de vos variétés dans votre poche?"

Das Jahr 1951 ist auch das Geburtsjahr der komplexen Räume. Seit Riemanns Dissertation 1851 hatte es verschiedene Versuche gegeben, die „Idee der n-dimensionalen Riemannschen Fläche mit inneren Singularitäten" zu präzisieren. Genau 100 Jahre später gibt es zwei Vorschläge: Für Behnke und Stein, [1951b], sind – nach Riemannschem Vorbild – komplexe Räume im Kleinen *endlich-blättrige analytisch-verzweigte Überlagerungen von Gebieten des* $\mathbb{C}^n$. Hingegen macht Cartan in [C_1] die Not zur Tugend: Seine „espaces analytiques généraux" sind – nach dem Vorbild des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes (1860) – *analytische Mengen in Gebieten des* $\mathbb{C}^n$. Cartans Definition ist algebraisch; die Definition von Behnke und Stein ist *geometrisch*. Es ist leicht zu sehen, daß *normale* Cartansche Räume stets Behnke-Steinsche Räume sind (dabei heißt X normal, wenn jeder Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ ein normaler Ring, d.h. *nullteilerfrei* und *ganz-abgeschlossen* in seinem Quotientenkörper ist). Die Umkehrung liegt nicht auf der Hand. Es ist zunächst nicht einmal klar, ob endlich-blättrige, analytisch-verzweigte Überlagerungen überhaupt hinreichend viele nicht konstante holomorphe Funktionen besitzen, daß eine Funktionentheorie für sie Sinn macht. Die positive Antwort gibt der sog. Riemannsche *Existenzsatz*, der 1958 in

*) Nebenbei erfreut er Gruppentheoretiker mit dem Satz, daß eine *abzählbare abelsche Gruppe G* genau dann frei ist, wenn $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{Z}) = 0$; damit löst er im abzählbaren Fall bereits das erst später formulierte „Whiteheadsche Problem".

[GR$_1$] bewiesen wird. Damit erweisen sich alle Behnke-Steinschen Räume als *normale* Cartansche Räume; die Polarisierung „hie Riemann, hie Weierstraß" wird eine Symbiose. Die Eigenschaft „lokal analytisch-verzweigt" ist ihrer Natur nach *schwächer* als die Eigenschaft „normal"; in der von Stein begründeten Theorie der analytischen Zerlegung (vgl. nächsten Abschnitt) wird die Äquivalenz beider Eigenschaften entscheidend benutzt. Mittels des Riemannschen Existenzsatzes läßt sich auch zeigen, daß *affine Überlagerungen des* $\mathbb{C}^n$ *affin-algebraische Räume* sind.

3. Durch Cartans Definition rücken analytische Mengen als lokale Bausteine komplexer Räume in den Mittelpunkt des Interesses. In einer gemeinsamen Arbeit mit seinem Schüler R. Remmert entwickelt Stein die Grundlagen dieser Theorie ab ovo, [1953a]. Darüber hinaus werden Fortsetzungssätze für analytische Mengen gewonnen, die fruchtbare Einsichten in die Feinstruktur solcher Mengen geben. Insbesondere wird gezeigt, daß analytische Mengen keine isolierten Singularitäten haben. Das ermöglicht nach H. Cartan einen überzeugenden „3-Zeilenbeweis" des Satzes von Chow (1948), nach dem jede analytische Menge in einem projektiv-algebraischen Raum eo ipso projektiv-algebraisch ist; dies war ein erster Gaga-Satz.

Seit 1953 beschäftigt sich Stein mit „analytischen Projektionen, analytischen Zerlegungen" und „komplexen Basen zu holomorphen Abbildungen". Nach Vorstudien in [1953b] beweist er in [1956b] seinen

Faktorisierungssatz. *Ist* $f\colon X \to Y$ *holomorph und sind alle Zusammenhangskomponenten der f-Fasern kompakt, so gibt es einen komplexen Raum* X_* *und eine holomorphe Abbildung* $f_*\colon X \to X_*$, *deren Fasern genau die Zusammenhangskomponenten der f-Fasern sind. Die Abbildung f ist durch* f_* *faktorisierbar: Es gilt* $f = g \circ f_*$ *mit einer wohlbestimmten (endlichen) Abbildung* $g\colon X_* \to Y$.

Diese Stein-Faktorisierungen wurden schnell zu einer Standardmethode beim Studium *eigentlicher* holomorpher Abbildungen. Die Arbeit [1960] behandelt u. a. maximale eigentliche holomorphe Abbildungen; es wird z. B. auf einfache Weise gezeigt, daß eigentliche holomorphe Abbildungen zwischen „allgemeinen Polyedergebieten" affin linear und meistens die Identität sind (Starrheit).

4. In der gemeinsam mit K.-J. Ramspott verfaßten Arbeit [1962] werden Approximationssätze für geschlossene holomorphe Differentialformen gewonnen. Diese Publikation wurde wie die Arbeit [1951a] auch von Nicht-Funktionentheoretikern beachtet, findet man doch hier – wiederum en passant – den gruppentheoretischen Satz, daß eine *abzählbare abelsche Gruppe A* schon dann *frei* ist, wenn zu jedem $a \in A$, $a \neq 0$, ein Homomorphismus $\gamma\colon A \to \mathbb{Z}$ mit $\gamma(a) \neq 0$ existiert.

Als schöne Anwendung des Fortsetzungssatzes aus [1953a] verallgemeinert Stein in [1968] den zweiten Riemannschen Hebbarkeitssatz auf holomorphe Abbildungen $f\colon X \setminus A \to Y$, wo X eine komplexe Mannigfaltigkeit, A eine irreduzible analytische Menge in X und Y ein komplexer Raum ist. Setzt man $\delta(f) := \min\limits_{x \in X \setminus A} \dim_x f^{-1}(f(x))$, so gilt:

Falls $\delta(f) > 1 + \dim A$, so besitzt f eine holomorphe Fortsetzung $X \to Y$. Falls $\delta(f) = 1 + \dim A$, so besitzt f eine meromorphe Fortsetzung $X \to Y$; diese ist entweder holomorph oder überall in A unbestimmt.

Für die letzte Aussage ist wesentlich, daß X keine Singularitäten hat.

Mit dieser Auswahl aus dem so reichen Steinschen Œuvre sei es genug. Man sehe es mir nach, wenn diese Schilderung selbst erlebter Mathematik gelegentlich eine persönliche Note hat. K. Stein war es vergönnt, *Begriffe, Methoden und Theoreme* zu entwickeln, auf die kommende Generationen erfolgreich zurückgreifen werden. Hermann Weyl schreibt einmal (Ges. Abh. IV, S. 479):

"The constructions of the mathematical mind are the same time free and necessary. The individual mathematician may define his notions and set up his axioms as he pleases. The question is, will he get his fellow-mathematicians interested in the constructs of his imagination?" Nun denn, Karl Stein ist es gelungen, wie nicht nur die große Zahl seiner Schüler zeigt. Wir alle wünschen dem Träger der Cantor-Medaille noch viele weitere Jahre frohen und fruchtbaren Schaffens.

Vita brevis von Karl Stein

Geb. 1. 1. 1913 in Hamm/Westfalen; 1932–36 Studium in Münster, Hamburg und Berlin; 1936 Staatsexamen und Promotion in Münster; 1938 Stipendiat in Heidelberg; 1940 Habilitation in Münster; 1946–1954 Dozent und apl. Professor in Münster, 1953/54 Gastaufenthalt in Paris; 1955 o. Professor Universität München; 1962 ord. Mitglied Bayer. Akad. Wiss.; 1966 Vorsitzender der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; 1969–1983 federführender Herausgeber der „Manuscripta Mathematica"; 1970 korr. Mitglied Gött. Akad. Wiss.; 1973 Dr. rer. nat. h. c. Math.-Nat. Fakultät Univ. Münster; 1981 Professor emeritus; 1982 korr. Mitglied Österr. Akad. Wiss.

Literaturhinweise

(es sind nur die zitierten Arbeiten von K. Stein aufgenommen)

[1937] Zur Theorie der Funktionen mehrerer Veränderlichen. Die Regularitätshüllen niederdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **114** (1937) 543–569

[1941] Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen. Math. Ann. **117** (1941) 727–754

[1948] gemeinsam mit H. Behnke: Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. **120** (1948) 430–461

[1951a] Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem. Math. Ann. **123** (1951) 201–222

[1951b] gemeinsam mit H. Behnke: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. **124** (1951) 1–16

[1953a] gemeinsam mit R. Remmert: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126** (1953) 263–306

[1953b] Analytische Projektion komplexer Mannigfaltigkeiten. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables. Bruxelles 1953, 97–107

[1956a] Überlagerung holomorph vollständiger komplexer Räume. Arch. Math. **7** (1956) 354–361

[1956b] Analytische Zerlegung komplexer Räume. Math. Ann. **132** (1956) 69–93

[1960] gemeinsam mit R. Remmert: Eigentliche holomorphe Abbildungen. Math. Z. **73** (1960) 159–189

[1962] gemeinsam mit K.-J. Ramspott: Über Rungesche Paare komplexer Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **145** (1962) 444–463

[1968] Fortsetzung holomorpher Korrespondenzen. Inv. math. **6** (1968) 78–90

Weitere zitierte Literatur

[C_1] Cartan, H.: Séminaire ENS 1951/52, Exposé 13

[C_2] Cartan, H.: Variétés analytique complexes et cohomologie. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables. Bruxelles 1953; Œuvres 2, 669–683

[G] Grauert, H.: Charakterisierung der holomorph-vollständigen Räume. Math. Ann. **129** (1955) 233–259

[GR_1] Grauert, H.; Remmert, R.: Komplexe Räume. Math. Ann. **136** (1958) 245–318

[GR_2] Grauert, H.; Remmert, R.: Theorie der Steinschen Räume. Grdl. der Math. Wiss. 227, Springer 1977

[S] Serre, J-P.: Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables. Bruxelles 1953; Œuvres 2, 259–270

Prof. Dr. R. Remmert
Universität Münster
Mathematisches Institut
Einsteinstraße 62
4400 Münster

(*Eingegangen: 17. 9. 1990*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein
93 (1991) 6–29
AMS subject classification: 14 L 30, 14 M 15, 18 B 99, 57 Q 99, 68 E 99

Mathematische Musiktheorie: Status quo 1990

G. Mazzola, Zürich

Einleitung

In dieser Übersicht soll der gegenwärtige Stand derjenigen Perspektive der Mathematischen Musiktheorie (MaMuTh), die ich an der Jahrestagung 1984 der DMV in Kaiserslautern skizziert hatte, referiert werden. In diesem Rahmen ist es nicht möglich, auf andere Anstrengungen auf dem Gebiet der MaMuTh, wie sie etwa in [29] dokumentiert sind, einzugehen. Das Ziel dieser Arbeit ist es zu zeigen, daß Begriffsbildung und Problemstellung aus der Musiktheorie – ähnlich wie bei der Physik – zu interessanten mathematischen Kategorien führen, deren Struktur ihrerseits dem Musiktheoretiker neue Erkenntnisse und Sprachmittel anbietet.

Es ist ein bemerkenswerter Nebeneffekt einer solchen „Geometrie der Töne", daß umgekehrt auch geometrische Konfigurationen „zum Tönen gebracht" werden können: eine auditorische Alternative zur traditionellen visuell-geometrischen Repräsentation mathematischer Abstrakta.

Wir können in diesem Rahmen nicht auf die musikphilosophische und -psychologische Problematik der Anwendung mathematischer Paradigmen auf das Musikdenken eingehen und verweisen dazu auf [17].

Obwohl die Mathematik für die strukturelle Beschreibung der Musik seit den Pythagoreern eine große Rolle spielt, ist eine Geschichte dieses Wirkungsfeldes noch nicht geschrieben worden; zu diesem Thema verweisen wir auf den Aufsatz [28].

Es sei stellvertretend die grundlegende Tatsache festgehalten, daß sich in der Tradition mathematischer Beschreibung musikalischer Sachverhalte zu jeder Zeit der jeweils verfügbare Wissensstand reflektiert hat, so bei Euler [3], Helmholtz [8] und Graeser [7].

Heute lassen sich musikalische Sachverhalte mit Gewinn durch „globale diskrete Strukturen" beschreiben. Diese Objekte, die wir (globale) Kompositionen nennen, werden in Kapitel I im Rahmen ihrer mathematischen Kategorien vorgestellt. Ihr Begriff ist eine Synthese zwischen „discreten" und „stetigen Mannigfaltigkeiten", wie sie Bernhard Riemann in seiner Habilitationsrede von 1854 [20] eingeführt hat. Kompositionen sind „discret", weil sie aus endlichen Mengen von Punkten (den Klängen) bestehen; man vergleicht „discrete Größen durch Zählung" [20]. Und sie sind „stetig", weil diese endlichen Punktmengen durch Teilmengen, den Karten der

Mannigfaltigkeit, überdeckt sind, die je in geometrischen Räumen (von Klangparametern) liegen, worin die „Vergleichung durch Messung" [20] geschehen kann, siehe auch [27].

In Kapitel II soll an Hugo Riemanns Funktionstheorie [21] der Nutzen der Geometrie des Kompositionsbegriffs für die Musikwissenschaft erläutert werden.

In Kapitel III werden anhand der Modulationstheorie und des Kontrapunktes Modelle der MaMuTh vorgestellt. Ein solches Modell ist - analog zur Physik - ein System mathematischer Theoreme, welche bewiesen werden können ausgehend a) von mathematischen Objekten, welche musikalischen Gegenständen zugeordnet sind, und b) von mathematischen Relationen zwischen diesen Objekten, welche Axiome musikalischen Denkens formalisieren. Diese Sätze regeln das Verhalten der betroffenen Objekte, ohne daß auf emotionale Argumente zu rekurrieren wäre.

Die beiden Modelle leisten die Einbindung einer heterogenen Vielfalt musiktheoretischer Einzelbetrachtungen (die diversen Modulationswege und -verfahren [23] oder die 287 erlaubten kontrapunktischen Schritte [18]) in einheitliche Begriffsgestalt, und so in die Form von „kompakten" Theoremen. Mathematisch besteht der Anreiz darin, kombinatorisch verzweigte Verhältnisse „auf den Begriff zu bringen" und die Algorithmen für entsprechende Computer-Beweise bereitzustellen.

In Kapitel IV wird das Klassifikationsproblem in Kategorien von Kompositionen diskutiert. Es zeigt sich, daß insbesondere für Körper als Koeffizientenringe eine vollständige Klassifikation durch Angabe von Modulschemata möglich ist. Freie Objekte unter den Kompositionen spielen dabei eine wichtige technische und musikästhetische Rolle.

Wir sehen in diesem Kontext ferner, daß molekulare Strukturen im Sinn von Dreiding-Dress-Haegi [2] aus Kompositionen durch Hinzufügen von metrischen Formbedingungen abgeleitet werden können. Bei der Klassifikation von solchen molekularen Strukturen treten allerdings Probleme auf, die für Kompositionen noch nicht existieren; die Klassifikation von Kompositionen ist notwendig, aber nicht hinreichend für diejenige von molekularen Strukturen. Abschließend verweisen wir auf Anwendungen und Probleme im Rahmen der MaMuTh.

Einige der folgenden Resultate wurden in Zusammenarbeit mit Daniel Muzzulini und Hans Straub (ETH-Zürich) realisiert; dafür sei ihnen mein Dank ausgesprochen.

1. Kategorien lokaler und globaler Kompositionen

Eine Analyse des kompositorischen, interpretatorischen und analytischen Musikdenkens [17] zeigt, daß die Objekte der Musik nicht Einzelklänge, sondern verschachtelte Gruppierungen von solchen sind. Schon 1924 schreibt Wolfgang Graeser in seiner bahnbrechenden mathematischen Untersuchung [7] zu Johann Sebastian Bachs „Kunst der Fuge" zu übergeordneten Klanggruppierungen: „Eine kontrapunktische Form ist eine Menge von Mengen von Mengen."

A. Kategorien lokaler Kompositionen

A.1 Die Objekte. Das Elementarobjekt dieses Denkens, eine *lokale Komposition* $(\mathcal{K}, \mathbf{M})$, ist durch eine nichtleere, endliche Menge $\mathcal{K}$ (Träger) von Elementen eines Moduls $\mathbf{M}$ (Trägermodul) über einem kommutativen Ring R definiert. Der Trägermodul ist ein vom jeweiligen Kontext abhängiger Raum, dessen Elemente durch musikalisch interessierende Merkmale wie Tonhöhe, Dauer, Lautstärke, Einsatzzeit, Klangfarbe etc. bestimmt sind. Ein Element in $\mathbf{M}$ heißt *Klang* und ist somit nicht die Totalität der musikalischen Realität, deren ein realer Klang fähig ist, sondern immer nur ein Aspekt derselben gemäß je und je relevanten Merkmalen.

Beispiele.

1. Interessiert man sich etwa für Rhythmen, in denen Duolen, Triolen, Quintolen und Septolen vorkommen, dann wird man nur den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}[1/2, 1/3, 1/5, 1/7]$ von Einsatzzeiten bezüglich eines gewählten Metrums benötigen.

2. Wenn man in der üblichen 12-temperierten Stimmung Harmonielehre treibt, wählt man den $\mathbb{Z}_{12}$-Modul $\mathbf{M} = \mathbb{Z}_{12}$ der Tonigkeiten (Tonhöhen modulo Oktaven), manchmal auch den Graph $\mathbf{M} = \Gamma f$ in $(\mathbb{Z}_{12})^2$ zum Quintzirkelautomorphismus $f: \mathbb{Z}_{12} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{12}: x \rightsquigarrow 7x$, um gleichzeitig Halbton- und Quintverwandschaft auszudrücken [10].

3. In der Harmonielehre zu reiner Stimmung wird im Eulermodul $\mathbf{M} = \mathbb{Z}^2$ gearbeitet, dessen Elemente (s, r) die Tonigkeiten zu Frequenzen $f = 132\,\mathrm{Hz} \cdot 2^p \cdot 3^s \cdot 5^r$ sind; $132\,\mathrm{Hz} = 2^{-1} \cdot 3 \cdot 5^{-1} \cdot 440\,\mathrm{Hz}$ ist ein zum Kammerton $a' = 440\,\mathrm{Hz}$ assoziierter Basiston c, mit 2^p variiert die Oktavlage.

4. Für allgemeinere, aus temperierten und reinen Anteilen bestehende Stimmungen, sind die Tonigkeiten in endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Moduln enthalten, deren Torsionsmodul vom temperierten Anteil, ein freies Komplement aber vom reinen Anteil der Stimmung stammt.

5. Im musikalischen Alterationsdenken ist es sinnvoll, „infinitesimale Variationen" von Klangaspekten zu betrachten. Daher arbeitet man statt in einem gegebenen R-Modul $\mathbf{M}$ im Modul $R[\varepsilon] \otimes \mathbf{M} = \mathbf{M}[\varepsilon]$ über der Algebra der dualen Zahlen $R[\varepsilon]$ über R, dessen Elemente $c + \varepsilon \cdot \Delta$ als „Pfeile" vom Basisklang c zum alterierten Klang $c + \Delta$ in $\mathbf{M}$ aufgefaßt werden. Speziell im zweistimmigen Kontrapunkt ist es vorteilhaft, ein Intervall (c, d) vom Cantus firmus c zum Diskant d in einem Tonhöhenmodul $\mathbf{M}$ in der Form $c + \varepsilon \cdot (d - c)$ einer „infinitesimalen Variation" um $d - c$ zum Cantus firmus c zu schreiben. In Kapitel III kommen wir auf diese Darstellung zurück.

A.2 Die Morphismen. Zwei lokale Kompositionen $(\mathcal{K}, \mathbf{M})$ und $(\mathcal{L}, \mathbf{N})$ über R werden durch *Morphismen* $f: (\mathcal{K}, \mathbf{M}) \to (\mathcal{L}, \mathbf{N})$ verglichen, wobei $f: \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ eine Abbildung ist, die durch eine affine Abbildung $F: \mathbf{M} \to \mathbf{N}$, einem Element von $\mathrm{Aff}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$, induziert ist. Es ist also $F = e^{\mathbf{n}} \cdot F_0$, wo F_0 in $\mathrm{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ R-linear und $e^{\mathbf{n}}: \mathbf{x} \rightsquigarrow \mathbf{n} + \mathbf{x}$ auf $\mathbf{N}$ die Translation um $\mathbf{n}$ ist. Diese Daten definieren die *Kategorie $\mathcal{L}oc_R$ der lokalen Kompositionen über R*. Wir notieren wenn immer möglich $\mathcal{K}$ statt $(\mathcal{K}, \mathbf{M})$. Dieser kategorielle Rahmen ist a priori gegeben und muß natürlich den speziellen Situationen im musikwissenschaftlichen Diskurs durch Rückzug auf geeignete Unterkategorien angepaßt werden. Insbesondere wirken sich historische Perspektiven auf eine Einschränkung der „zulässigen" Morphismen aus [11, 17].

Eine musikwissenschaftlich orientierte Motivation für unsere Wahl des Begriffs des Morphismus ergibt sich aus der Tatsache, daß das Monoid $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^2)$ von der Translation $T = e^{(0,1)}$, der Transvektion $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, der Diagonalreflektion $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, der Horizontalreflektion $K = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und den Horizontaldilatationen $D_m = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $0 \leqslant m$, erzeugt wird.

Daraus folgt, daß $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^n)$ für $n \geqslant 2$ von den Diagonaleinbettungen $d_{12}(T)$, $d_{12}(S)$, $d_{12}(K)$, $d_{12}(D_m)$, $0 \leqslant m$, und $d_{1x}(P)$, $2 \leqslant x \leqslant n$, erzeugt wird. Jede Transformation dieses Erzeugendensystem ist musiktheoretisch sinnvoll, wenn $\mathbb{Z}^n$ als Trägermodul für die folgenden traditionellen Parameter interpretiert wird: 1. Koordinate = Einsatzzeit, 2. Koordinate = Tonhöhe usw., die restlichen Koordinaten sind frei wählbar, z. B. 3. Koordinate = Dauer, 4. Koordinate = Lautstärke ... Dann lautet die musiktheoretische Deutung so:

Scholion. *Jeder Morphismus $f: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ von lokalen Kompositionen in $\mathbb{Z}^n$ ist zerlegbar als Verkettung $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots f_t$ von Morphismen zwischen lokalen Kompositionen in $\mathbb{Z}^n$, die aus folgendem Vorrat musiktheoretisch bedeutungsvoller affiner Abbildungen auf $\mathbb{Z}^n$ stammen:*

(1) $d_{12}(T)$: *Transposition,*
(2) $d_{12}(S)$: *Arpeggio,*
(3) $d_{12}(K)$: *Krebs,*
(4) $d_{12}(D_m)$: *m-fache Augmentation,*
(5) $d_{1x}(P)$: *Austausch des x-ten Parameters mit dem ersten.*

Wir geben zwei Exempel lokaler Kompositionen, welche in Kapitel III diskutiert werden.

Ex. 1. Sei $C_w = (\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}, \mathbb{Z}_{12})$ die C-Dur-Skala in 12-temperierten Tonigkeiten, wobei wir $c = 0$, cis = des = 1 etc. $h = 11$ setzen. Die Menge $\mathbf{Dur}_w$ der 12-temperierten Dur-Skalen besteht dann aus den 12 Translaten $X_w = e^x(C_w)$. Dabei hat X_w die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(X_w) = e^x \cdot (\mathrm{Aut}(C_w)) \cdot e^{-x}$, wo $\mathrm{Aut}(C_w) = \langle U_d \rangle$ durch die (Tonhöhen-)Umkehr $U_d = e^4 \cdot (-1)$ an $d = 2$ erzeugt wird. $\mathbf{Dur}_w$ ist also die Bahn von C_w unter der Gruppe $GW = e^{\mathbb{Z}_{12}} \cdot \pm 1$ der Transpositionen und Umkehrungen.

Ex. 2. Im Eulermodul $\mathbb{Z}^2$ reinstimmiger Tonigkeiten mit Ursprung $(0, 0) = c$ bedeutet $e^{(1,0)}$ die Transposition um eine Quint, $e^{(0,1)}$ diejenige um eine große Terz nach oben. Dann ist die Dur-Skala die lokale Komposition

$$C_r = (\{(-1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (-1, 1), (0, 1), (1, 1)\}, \mathbb{Z}^2).$$

Im Gegensatz zur 12-temperierten Situation gibt es hier unendlich viele Dur-Skalen, nämlich die Menge **Dur**$_r$ der Translate $X_r = e^x(C_r)$ der C-Dur-Skala. Wieder ist $\mathrm{Aut}(X_r) = e^x \cdot \mathrm{Aut}(C_r) \cdot e^{-x}$ zu einer zweielementigen Gruppe $\mathrm{Aut}(C_r)$ $= \langle Ut_e \rangle$ konjugiert, welche durch eine tonale Umkehr $Ut_e = e^{(1,0)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ an e erzeugt wird. Die Menge **Dur**$_r$ ist also die Bahn von C_r unter der von Ut_e und den Translationen erzeugten Gruppe GR.

Für beliebige Ringe R ist das Klassifikationsproblem in $\mathscr{L}oc_R$ offen. Für halbeinfache Ringe ist es „zahm" im Sinn der Darstellungstheorie. Man betrachte hierzu den Funktor

$$R?: \mathscr{L}oc_R \to \mathrm{Mod}_R : (\mathscr{K}, \mathbf{M}) \rightsquigarrow R\mathscr{K} = \Sigma_{x,y \in \mathscr{K}} R(x-y)$$

mit Werten in der Kategorie Mod_R der R-Moduln. Eine lokale Komposition $(\mathscr{K}, \mathbf{M})$ heißt erzeugend, falls $R\mathscr{K} = \mathbf{M}$. Für halbeinfache Ringe R ist die volle Unterkategorie $\mathscr{L}oc_R^e$ der erzeugenden lokalen Kompositionen in $\mathscr{L}oc_R$ zu letzterer äquivalent. Daraus ergibt sich

Satz [11]. *Sei R ein halbeinfacher Ring und $t \in \mathbb{N}$. Dann sind die Isomorphieklassen lokaler, $t+1$-elementiger Kompositionen in $\mathscr{L}oc_R$ in kanonischer Bijektion zu den R-rationalen Punkten eines algebraischen R-Schemas.*

Für den in der Praxis wichtigen Ring $\mathbb{Z}_{12}$ sind die Isomorphieklassen lokaler Kompositionen in $\mathbb{Z}_{12}$ (Akkorde) und diejenigen von lokalen Kompositionen $\mathscr{K}$ in $(\mathbb{Z}_{12})^2$ mit $\#(\mathscr{K}) \leqslant 4$ (Motive) bestimmt worden [17, 24].

B. (Globale) Kompositionen

Objekte des Musikdenkens sind oft aus mehreren lokalen Kompositionen zusammengesetzt im Sinn folgender Definition:

Definition. *Eine* (globale) Komposition *ist definiert durch:*

1. *eine endliche Menge $\mathscr{K}$ zusammen mit einer festen nichtleeren Überdeckung I von $\mathscr{K}$;*

2. *einen Atlas* $\mathbf{A}$ *für $\mathscr{K}$ und I, d. h. eine Familie $(\mathscr{K}_t, \mathbf{M}_t)$, $t \in T$, von lokalen Kompositionen $(\mathscr{K}_t, \mathbf{M}_t)$ in $\mathscr{L}oc_R$, zusammen mit Bijektionen $\phi_t : \mathscr{K}_t \to I_t$, I_t aus I, so daß:*

2.1 *die Menge aller I_t gerade I ist, und*

2.2 *für $I_t \cap I_s \neq \emptyset$ ein Isomorphismus lokaler Kompositionen*

$$\phi_s^{-1} \cdot \phi_t : (\phi_t^{-1}(I_t \cap I_s), \mathbf{M}_t) \xrightarrow{\sim} (\phi_s^{-1}(I_t \cap I_s), \mathbf{M}_s)$$

vorliegt.

Die Bijektionen ϕ_t auf den lokalen Kompositionen $(\mathscr{K}_t, \mathbf{M}_t)$ heißen die Karten des Atlas $\mathbf{A}$; *wir nennen oft die lokalen Kompositionen $\mathscr{K}_t$ oder die Überdeckungsmengen I_t Karten, wenn man sich über die ϕ_t im klaren ist.*

Zum Atlas $\mathbf{A}$ *werden alle Karten hinzugenommen, die mit* $\mathbf{A}$ *verträglich sind und erhält so den* vollständigen *Atlas* $\mathbf{A}^{\wedge}$ zu $\mathbf{A}$, *welcher die (globale) Komposition vollständig definiert.*

Genau wie bei den lokalen Kompositionen wird man die (globale) Komposition $(\mathscr{K}, I, \mathbf{A}^{\wedge})$ mit ihrem Träger $\mathscr{K}$ identifizieren, wenn keine Konfusion zu befürchten ist.

Bevor wir Beispiele von Kompositionen vorstellen, sei der Begriff des Morphismus im globalen Fall erklärt:

Definition. *Seien zwei Kompositionen* $(\mathscr{K}, I, \mathbf{A})$ *und* $(\mathscr{L}, J, \mathbf{B})$ *durch Träger, Überdeckung und Atlas über dem Ring R gegeben. Ein Morphismus von* $\mathscr{K}$ *nach* $\mathscr{L}$ *besteht aus zwei Mengenabbildungen* $f: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$, $F: I \to J$, *so daß* $f(X)$ *für jedes X aus I Teilmenge von* $F(X)$ *ist, und die Abbildung* $f|_X: X \to F(X)$ *für beliebige Karten* $\phi_t: \mathscr{K}_t \to X$ *und* $\theta_s: \mathscr{L}_s \to F(X)$ *von* $\mathscr{K}$ *und von* $\mathscr{L}$ *einen Morphismus lokaler Kompositionen* $\mathscr{K}_t \to X \to F(X) \to \mathscr{L}_s$ *induziert.*

Die Menge der Morphismen von $\mathscr{K}$ nach $\mathscr{L}$ sei mit $\mathrm{Mor}(\mathscr{K}, \mathscr{L})$ notiert. Die so definierte Kategorie $\mathscr{G}\ell_R$ der globalen Kompositionen über dem Ring R läßt sich kanonisch als Oberkategorie von $\mathscr{L}oc_R$ identifizieren. Sie verhält sich bezüglich des Yoneda-Lemmas ähnlich wie die Kategorie der Schemata über der Kategorie der Ringspektren: Schemata sind durch ihre mengenwertigen kontravarianten Hom-Funktoren auf den Ringspektren bis auf Isomorphie bestimmt.

Yoneda-Lemma für $\mathscr{G}\ell_R$. *Der Yoneda-Funktor*

$$l? : \mathscr{G}\ell_R \to \mathrm{Hom}(\mathscr{L}oc_R^{opp}, Ens) : \mathscr{K} \rightsquigarrow l_{\mathscr{K}} : \mathscr{L} \rightsquigarrow \mathrm{Mor}(\mathscr{L}, \mathscr{K})$$

ist volltreu.

Dieses musiksemiologisch zentrale Faktum korreliert das lokale und das globale Studium von Objekten des Musikdenkens auf kategorientheoretischer Ebene: Um eine globale Komposition $\mathscr{K}$ bis auf Isomorphismen zu identifizieren, genügt es, sie aus allen „lokalen Perspektiven" $\mathscr{L} \to \mathscr{K}$ zu betrachten.

Hier einige Exempel von Kompositionen, auf die wir unten zurückkommen werden.

Ex. 3 Interpretationen. Man geht aus von einer lokalen Komposition $(\mathscr{K}, \mathbf{M})$ über einem Ring R. Man stelle sich konkret eine ausgedehnte Komposition $\mathscr{K}$, etwa eine Partitur, vor, die man genauer verstehen möchte. Zu diesem Zweck gibt man eine Überdeckung I von $\mathscr{K}$ vor, um die Teile zu kennzeichnen, die für $\mathscr{K}$ elementaren Gestaltcharakter innehaben sollen. Ein Atlas $\mathbf{A}$ wird durch die Familie $(J, \mathbf{M})$, $\mathbf{1}_J$, $J \in I$, von lokalen Kompositionen und Bijektionen $\phi_J = \mathbf{1}_J$ definiert. Die Übergangsisomorphismen sind die Identitäten. Wir notieren diese globale Komposition mit $\mathscr{K}^I$ und nennen sie eine *Interpretation.* Eine globale Komposition $\mathscr{L}$, die zu einer Interpretation isomorph ist, heißt *interpretierbar.* Es gibt für das Musikdenken interessante Kompositionen, die nicht interpretierbar sind [17].

Für die Harmonielehre wichtig ist die *Dreiklangstufung* $X^{(3)}$ einer Dur-Skala X (Ex. 1/2). Die Stimmung spielt dabei keine Rolle. Wir interpretieren zunächst C durch die sieben Stufen $I_C = \{c, e, g\}$, $II_C = \{d, f, a\}$, $III_C = \{e, g, h\}$, $IV_C = \{f, a, c\}$, $V_C = \{g, h, d\}$, $VI_C = \{a, c, e\}$ und $VII_C = \{h, d, f\}$. Für 12-temperierte Stimmung ist also $I_C = \{0, 4, 7\}$ etc.; für reine Stimmung ist $I_C = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ etc. Die anderen Dur-Skalen interpretieren wir durch Translation der C-Interpretation. Man beachte, daß der nichttriviale Automorphismus von X auch einer von $X^{(3)}$ ist. Daher nennen wir $X^{(3)}$ eine *Stufung:* per definitionem eine Interpretation, für die jeder Automorphismus der ursprünglichen lokalen Komposition auch einer der Interpretation ist.

Für die Modulationstheorie ist dieses Faktum für Dreiklangstufungen wesentlich. Die Mengen $\mathbf{Dur}_w^{(3)}$ resp. $\mathbf{Dur}_r^{(3)}$ der Dreiklangstufungen 12-temperierter und rein gestimmter Dur-Skalen sind also Bahnen unter denselben Gruppen GW resp. GR wie schon $\mathbf{Dur}_w$ resp. $\mathbf{Dur}_r$. Läßt man auf Karten nur Transpositionen und Umkehrungen zu, dann folgt für eine Interpretation $\mathscr{L}^I$ einer lokalen Komposition $(\mathscr{L}, \mathbf{Z}_{12})$ und für $X^{(3)} \in \mathbf{Dur}_w^{(3)}$ aus einem Isomorphismus $\mathscr{L}^I \xrightarrow{\sim} X^{(3)}$ immer $\mathscr{L} \xrightarrow{\sim} X$, was allerdings nicht mehr gilt, sobald man Quint- und Quartzirkelisomorphismen zuläßt [17].

Ein geometrisches Bild von einer Komposition $\mathscr{K}$ ergibt der Nerv $N(\mathscr{K})$, welcher eine geometrische Realisierung des (in $\mathscr{K}$ funktoriellen, abstrakten) Nervs $n(\mathscr{K})$ der Überdeckung I von $\mathscr{K}$ ist. (Das nulldimensionale Skelett $n_0(\mathscr{K})$ ist die Überdeckungsmenge I von $\mathscr{K}$.) Mit $n^*(\mathscr{K}) = (n(\mathscr{K}), * : n(\mathscr{K}) \to \mathbb{N})$ notieren wir den durch die Funktion $*(\sigma) = \#(\bigcap \sigma) - 1$ (wir notieren für eine Menge X mit $\bigcap X$ den Durchschnitt ihrer Elemente) natürlich gewichteten Nerv von $\mathscr{K}$. Morphismen zwischen natürlich gewichteten Simplizialkomplexen, speziell Nerven, sind simpliziale Abbildungen, die mit den Gewichtsfunktionen kommutieren. Die Isomorphieklasse des gewichteten Nervs einer Komposition ist die kombinatorische Invariante für die Klassifikation von Kompositionen (siehe Kap. IV).

In der Harmonielehre tritt der Nerv $N(X^{(3)})$ einer Dreiklangstufung als sogenanntes *harmonisches Band* etwa bei Schönberg auf [23]. Dort wird allerdings nur das eindimensionale Skelett $N_1(X^{(3)})$ betrachtet, und nicht ganz $N(X^{(3)})$, welches die bemerkenswerte Gestalt eines Möbiusbandes hat (Bild 1). Wir kommen in Kap. II auf die musiktheoretische Bedeutung der Nichtorientierbarkeit des harmonischen Bandes $(H_2(N(X^{(3)}), \dot{N}(X^{(3)})) = 0)$ zu sprechen.

Unter den Kompositionen spielen freie Objekte eine wichtige Rolle für die mathematische Klassifikation (siehe Kap. IV). Sie sind aber auch für das Musikverstehen psychologisch und analytisch von Bedeutung [17]. Hier sollen diese Kompositionen als universelle Objekte einer Kategorie $\mathscr{G}\ell_R$ konstruiert werden.

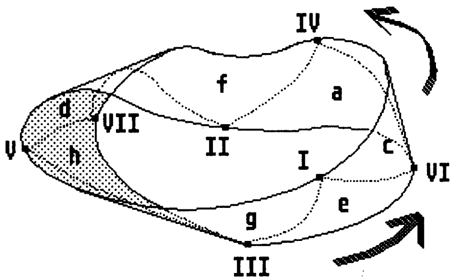

Bild 1 Der Nerv der Dreiklangstufung einer Dur- oder Moll-Skala (hier C-Dur) stellt ein Möbiusband dar. Wir nennen es nach einer Idee von Schönberg das harmonische Band

Sei dazu *Covens* die Kategorie der Paare (X, U) endlicher, nichtleerer Mengen X und Überdeckungen U von X mit nichtleeren Mengen. Ein Morphismus in *Covens* ist ein Paar $(f, F):(X, U) \to (Y, V)$ von Abbildungen $f: X \to Y$, $F: U \to V$ derart, daß man für $J \in U$ $f(J) \subset F(J)$ hat. Jedem Objekt (X, U) in *Covens* ist funktoriell ein natürlich gewichteter Nerv $n^*(X, U)$ zugeordnet, dessen Gewichtsfunktion $*$ wie für die Überdeckungen von Kompositionen definiert wird. Man hat ferner für ein fest gewähltes Objekt (X, U) aus *Covens* einen mengenwertigen Funktor

$$\Delta(X, U) : \mathscr{G}\ell_R \to Ens : \mathscr{K} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{Covens}((X, U), (\mathscr{K}, n_0(\mathscr{K}))).$$

Folgende Proposition beschreibt die in $\mathscr{G}\ell_R$ freien Objekte.

Proposition.

1. *Der Funktor $\Delta(X, U)$ ist durch ein Objekt $\Delta_{(X, U)}$ in $\mathscr{G}\ell_R$ darstellbar, dessen Isomorphieklasse durch diejenige von $n^*(X, U)$ in der Kategorie der natürlich gewichteten Simplizialkomplexe bestimmt ist.*
2. *Es ist $n^*(\Delta_{(X, U)}) \xrightarrow{\sim} n^*(X, U)$.*
3. *Für $\sigma \in n_0(U)$ ist die entsprechende Karte in $\Delta_{(X, U)}$ eine* lokale Standardkomposition $\Delta_{*(\sigma)}$, *d. h. isomorph zu einer lokalen Komposition der Gestalt $\Delta_t = (\{0, e_1, e_2, \ldots, e_t\}, R^t)$, wo $(e.)$ die kanonische Basis von R^t ist.*

Statt $\Delta_{(X, U)}$ dürfen wir also kürzer Δn^* schreiben, wobei n^* ein zu $n^*(X, U)$ isomorpher natürlich gewichteter Simplizialkomplex ist. Falls $n^*(X, U) = n^*(\mathscr{K})$ ist, schreiben wir $\Delta\mathscr{K}$ statt $\Delta n^*(\mathscr{K})$. Kompositionen, die zu einem Δn^* isomorph sind, heißen *Standardkompositionen*. Der Identität auf $(\mathscr{K}, n_0(\mathscr{K}))$ ist kanonisch ein bijektiver Morphismus $p: \Delta\mathscr{K} \to \mathscr{K}$ zugeordnet, und $n(p): n(\Delta\mathscr{K}) \to n(\mathscr{K})$ ist ein Isomorphismus. Umgekehrt ist für jeden auf den Trägern bijektiven Morphismus $q: \Delta \to \mathscr{K}$ auf einer Standardkomposition Δ, so daß $n(q)$ ein Isomorphismus ist, $\Delta \xrightarrow{\sim} \Delta\mathscr{K}$ über $\mathscr{K}$. Ein solches q bzw. das zugehörige Δ heißt *Auflösung* von $\mathscr{K}$. Auflösungen sind immer interpretierbar [11]. Für unendliche Körper gilt die folgende Verschärfung:

Proposition [11]. *Sei R ein unendlicher Körper, und sei $\mathscr{K}$ in $\mathscr{G}\ell_R$ so, daß für jede Karte U von $\mathscr{K}$ $\#(U) \leqslant n+1$ gilt. Dann kann die Auflösung von $\mathscr{K}$ als Interpretation $\mathscr{L}^I$ gewählt werden, wo $\mathscr{L}$ eine lokale Komposition in R^n ist.*

II. Funktionstheorie

Die Stufenfolge auf dem zusammenhängenden Rand des nichtorientierbaren harmonischen Bandes $N(X^{(3)})$ einer Dreiklangstufung $X^{(3)}$ ist die „Quintreihe" [1]

$$V \to I \to IV \to VII \to III \to VI \to II\ (\to V \text{ etc.}).$$

Dieser geometrische Sachverhalt hat eine musiktheoretische Interpretation betreffend die Problematik der Funktionstheorie von Hugo Riemann [21]. Diese Theorie stellt einen Funktionsbegriff in den Mittelpunkt, welcher zur *Explikation des Tonalitätsbegriffs* im Rahmen einer Harmonielehre dient. Obwohl Riemann immer reinstimmig denkt, sind die Probleme, die sich in unserer Diskussion anzeigen, nur vom Nerv der Stufung und nicht von den Trägermoduln der Karten abhängig. Riemanns Idee ist es, „Tonalität" durch drei Funktionswerte: „Tonikal", „Dominantisch" und „Subdominantisch" zu definieren, welche von Akkorden angenommen werden können. Man kann dies als ein Programm ansehen, Tonalitäten als spezielle Funktionen, die sogenannten tonalen Funktionen $\tau: CH \to TDS$ auf der Menge CH der Chorde, d. h. der lokalen Kompositionen in einem der Moduln $\mathbb{Z}_{12}$ oder $\mathbb{Z}^2$ von Tonigkeiten, mit Werten in der Menge $TDS = \{T, D, S\}$, T = Tonikal, D = Dominantisch, S = Subdominantisch, zu definieren. Es wird zwischen Dur- und Molltonalitäten unterschieden. Für jede Tonigkeit x stehen zwei Tonalitäten:

$$^{+}\tau_x : CH \to TDS \text{ (x-Dur-Tonalität)}$$

und $$^{0}\tau_x : CH \to TDS \text{ (x-Moll-Tonalität)}$$

zur Diskussion. Je nach Tonalität wird nach diesem Programm einem Chord ein anderer Funktionswert zugeordnet. So möchte man etwa

$$^{+}\tau_g(\{g, h, d\}) = T$$

haben, d. h. „$\{g, h, d\}$ ist in G-Dur-Tonalität tonikal", aber

$$^{0}\tau_c(\{g, h, d\}) = D$$

d. h. „$\{g, h, d\}$ ist in C-Moll-Tonalität dominantisch".

In der Definition von Tonalitäten geht man davon aus, daß für drei spezielle Chorde der Dreiklangstufungen $X^{(3)}$ folgendes gilt: $^{+}\tau_x(I_X) = T$, $^{+}\tau_x(V_X) = D$, $^{+}\tau_x(IV_X) = S$. Es ist das Problem der Funktionstheorie, die Werte einer Tonalitätsfunktion nicht nur auf erster, fünfter und vierter Stufe, sondern auf allen musiktheoretisch interessierenden Chorden zu definieren nach einem Vorgehen, das ein Verständnis harmonischer Verhältnisse reflektieren soll, der „harmonischen Logik". Letztere ist, wie Dahlhaus anführt, ein „dunkler Begriff". Er läßt sich aber doch soweit klären [1, p. 96]: „Die Bestimmung der Akkordbedeutungen, der ‚harmonischen Logik', ist also mit einer Regel über die Reihenfolge der Stufen verbunden."

Nach Dahlhaus ist die für die Funktionstheorie fundamentale Reihenfolge die der „Quintsequenz", die Reihenfolge der Stufen auf dem Rand des harmonischen Bandes. Diese begründet die Idee der „differenten" Stufenabstände: die Funktionswerte $^{+}\tau(V) = D$, $^{+}\tau(I) = T$, $^{+}\tau(IV) = S$ sind verschieden unter den Quintschritten $V \to I \to IV$. Um weiterzufahren, müssen die anderen vier Stufen je einen der drei bereits belegten Werte D, T oder S annehmen.

Der zweite musiktheoretische Denkansatz bezieht jede Stufe Y auf ihre „Parallelstufe" πY. Auf dem harmonischen Band ist letztere geometrisch aus der „Quintsequenz" so ableitbar: Sei für Y die in der „Quintsequenz" folgende Stufe mit δY bezeichnet. Dann bilden Y und δY mit genau einer Stufe Z ein 2-Simplex; wir setzen $\pi Y = Z$ für die Parallelstufe Z zu Y. Also etwa $\pi V = III$, $\pi I = VI$ und $\pi IV = II$. Der Begriff „Parallelklang" ist auch geometrisch korrekt, da man mit π eine Parallel-bewegung auf dem lokal gegenüberliegenden Rand ausführt. Neben dem „Quintabstand“ (δ) steht damit der „Parallelabstand“ (π).

Der Widerspruch in der Funktionstheorie entsteht dadurch, daß man Funktionsgleichheit auf Parallelklängen möchte, d. h. der Parallelabstand soll „indifferent“ sein:

$$^{+}\tau(Y) \stackrel{?}{=} {}^{+}\tau(\pi Y)$$

Die Funktion π der Parallelität impliziert, daß $\pi III = I$ und $\pi V = III$ ist. Das ergibt für die Funktionswerte den Widerspruch $^{+}\tau(III) = {}^{+}\tau(\pi III) = {}^{+}\tau(I) = T$ versus $^{+}\tau(III) = {}^{+}\tau(\pi V) = {}^{+}\tau(V) = D$.

Parallelklänge sind zur Identifikation von Funktionswerten nicht tauglich, weil sie die Nichtorientierbarkeit des harmonischen Bandes nicht berücksichtigen. Man kann mit Dahlhaus [1, p. 102] nicht einig gehen, daß die Funktionstheorie „gerade dort versagt, wo auch das Phänomen, das sie erklären soll, ins Vage und Unbestimmte gerät.“ Denn das Phänomen ist in einer präzisen geometrischen Tatsache, der Nichtorientierbarkeit des harmonischen Bandes, begründet: Der Rand ist zu sich selber „parallel“.

III. Modelle zu Modulation und Kontrapunkt

III.1 Modulation

Das hier beschriebene Modulationsmodell wird als formalisiertes Verfahren verstanden, die harmonischen Verhältnisse während des Tonartenübergangs zu regeln. Unsere Modellbildung orientiert sich an Schönbergs klassischer „Harmonielehre“ [23]. Er beschreibt eine Modulation als dreiteiligen Prozeß: A. neutrale Stufen der Ausgangstonart, B. *Fundamentschritte der Modulation* in der Zieltonart, C. Kadenzstufen der Zieltonart.

Unser Ziel ist es, diesen Prozeß für alle „Quartzirkelverwandtschaften“, d. h. für alle Paare (X, Y) aus **Dur** so zu modellieren, daß die Schönbergschen Fundamentschritte der Modulation explizit angegeben werden können.

Der Rahmen in welchem das Modulationsmodell funktionieren soll, muß zuerst präzisiert werden. Folgende Fragen sind zu beantworten:

1. Welcher ist der Vorrat an Tonarten, in dem wir uns bewegen?
2. Was sind Stufen?
3. Was sind Kadenzen?
4. Welche Mechanismen des Übergangs zwischen zwei Tonarten sind ins Auge zu fassen?
5. Wie lassen sich Fundamentschritte aus den Antworten zu Fragen 1.–4. definieren und errechnen?

Zu Frage 1. Wir wählen als Tonarten die Elemente von $\mathbf{Dur}_w^{(3)}$ bzw. $\mathbf{Dur}_r^{(3)}$, die 12-temperierten oder die reingestimmten Dreiklangstufungen von Dur-Skalen. Dies ist kein selbstverständlicher Wahlakt, denn die Hörerwartung, die objektiv notwendigen Modulationsmittel und die Kadenzen hängen stark vom Arsenal der Tonarten ab, unter denen man modulieren will.

Ferner verwenden wir durch unsere Auswahl nicht alle um den Begriff der Tonart möglichen Informationen; dieser Standpunkt wäre in seiner Allgemeinheit unpräzise. Insbesondere vernachlässigen wir hier melodische und rhythmische Aspekte von Tonarten, auch die Tonika ist eine primär nicht interessierende Information. Da wir in Tonigkeiten arbeiten, sind auch keine Umkehrungen von Akkorden (Oktavversetzung ihrer Töne) relevant. Und für das Verständnis der Akkorde, d. h. der Chorde in $\mathbb{Z}_{12}$ bzw. in $\mathbb{Z}^2$, werden nur (geeignet zu definierende!) „Dreiklanginterpretationen" derselben beigezogen.

Es muß hier an das Yoneda-Lemma erinnert werden. Eine Komposition $\mathscr{K}$ wird danach identifiziert durch Integration all ihrer Perspektiven, d. h. Morphismen $f: \mathscr{L} \to \mathscr{K}$. Die Perspektive für unsere Modulationstheorie ist die der Dreiklangstufung $\mathbf{1}_X : X^{(3)} \to X$ einer Skala X.

Zu Frage 2. Was Stufen sind, ist durch die Antwort zu Frage 1 definiert: es sind für jede Dreiklangstufung $X^{(3)}$ die sieben Dreiklangstufen $I_X, \dots VII_X$. Damit wird ein „Septakkord", z. B. $\{d, f, a, c\}$ in $C^{(3)}$ nicht einfach als II_C, sondern als Vereinigung von II_C mit IV_C „interpretiert". Und ein Akkord $\{d, fis, a\}$ ist keine zweite Stufe von C-Dur mit „hochalterierter" Terz. Stufen sind strikt Dreiklangstufen.

Zu Frage 3. In der Harmonielehre versteht man unter Kadenz die eindeutige Bestimmung einer Tonart via Kadenzparameter. Wir definieren eine *Kadenz* ganz allgemein als injektive Abbildung $k: \mathbf{T} \to P$ einer Menge $\mathbf{T}$ von Kompositionen in eine Menge P von „Kadenzparametern", welche einer Kategorie von Kompositionen entstammt, also aus Kompositionen, Morphismen und dergleichen gebildet ist. Wir verwenden sowohl im 12-temperierten Fall $\mathbf{T} = \mathbf{Dur}_w^{(3)}$ als auch im reinstimmigen Fall $\mathbf{T} = \mathbf{Dur}_r^{(3)}$ das klassische Kadenzschema der *minimalen kadenziellen Mengen:* Für eine Dreiklangstufung $X^{(3)}$ ist eine kadenzielle Menge eine Teilmenge J der Überdeckung von $X^{(3)}$, so daß X als einzige Skala in **Dur** alle Stufen von J enthält. Für $\mathbf{Dur}_w^{(3)}$ hat man fünf Typen von minimalen kadenziellen Mengen zu $X^{(3)}$:

$$J_1(X^{(3)}) = \{II_X, III_X\}, \quad J_2(X^{(3)}) = \{II_X, V_X\}, \quad J_3(X^{(3)}) = \{III_X, IV_X\},$$
$$J_4(X^{(3)}) = \{IV_X, V_X\}, \quad J_5(X^{(3)}) = \{VII_X\}$$

Für $\mathbf{Dur}_r^{(3)}$ hat man sechs Typen:

$$J_1(X^{(3)}) = \{II_X\}, \quad J_2(X^{(3)}) = \{III_X, VI_X\}, \quad J_3(X^{(3)}) = \{III_X, IV_X\},$$
$$J_4(X^{(3)}) = \{IV_X, V_X\}, \quad J_5(X^{(3)}) = \{VII_X\}, \quad J_6(X^{(3)}) = \{V_X, VI_X\}$$

Damit sind fünf bzw. sechs Kadenzen

$$\mu_s : \mathbf{Dur}^{(3)} \to \mathscr{G}\ell_{\mathbb{Z}} : X^{(3)} \rightsquigarrow J_s(X^{(3)})$$

mit Werten in globalen Teilkompositionen der Dreiklangstufungen definiert, wobei wir in der Notation nicht zwischen den beiden Stimmungen unterscheiden, da die Zeichenbedeutungen im Kontext klar sind. Man erkennt darunter μ_4 als Reminiszenz an die klassische Rameausche Kadenz $\mathrm{I} - IV - I - V - I$, die neben

$J_4(X^{(3)}) = \{IV_X, V_X\}$ noch die Tonika via I_X angibt, von der aber im Rahmen der Dreiklangstufungen abstrahiert wird.

Zu Frage 4. Welche Wege bzw. Modulationsmittel sind in unserem Kontext gegeben? Seien zunächst zwei verschiedene Dreiklangstufungen $X^{(3)}$ und $Y^{(3)}$ in $\mathbf{Dur}^{(3)}$ gegeben. Es gibt im Rahmen unserer Theorie in beiden Stimmungen genau zwei Mittel, um von $X^{(3)}$ nach $Y^{(3)}$ zu gelangen: zum einen eine Translation e^t, und zum anderen die Verknüpfung $e^t \cdot A_X = A_Y \cdot e^t$ der Translation e^t mit dem nichttrivialen Automorphismus A_X von $X^{(3)}$.

Man hat also im 12-temperierten und im reingestimmten Fall für jedes Paar $(X^{(3)}, Y^{(3)})$ von Dreiklangstufungen genau zwei „Wege“, um von $X^{(3)}$ nach $Y^{(3)}$ zu gelangen: eine Translation e^t sowie $e^t \cdot A_X$, letzteres im temperierten Fall eine Spiegelung, im reinstimmigen Fall eine schräge Schubspiegelung. Ein Isomorphismus g, der $Y^{(3)} = g(X^{(3)})$ erfüllt, heißt *Modulationsmittel* für das Paar $(X^{(3)}, Y^{(3)})$.

Damit sind wir imstande, eine *Modulation* von $X^{(3)}$ nach $Y^{(3)}$ zu definieren als ein Paar (μ_s, g) bestehend aus

1. einer der Kadenzen μ_s zu minimalen kadenziellen Mengen,
2. einem Modulationsmittel für $(X^{(3)}, Y^{(3)})$.

Dies beendet die mathematische Rekonstruktion des Modulationsbegriffs und beantwortet die vierte Frage.

Zu Frage 5. Es ist so noch nicht möglich, Fundamentschritte anzugeben. Was noch fehlt, ist ein Prozeß, der es erlaubt, aus Mathematik Musik – genauer: aus Morphismen Töne – zu machen. Wir bedienen uns zur heuristischen Veranschaulichung einer *Analogie zur Elementarteilchenphysik.*

Dazu werden die Dreiklangstufungen $X^{(3)}$ und $Y^{(3)}$ via ihre harmonischen Bänder als physikalische Elementarteilchen vorgestellt, von denen das eine, $N(X^{(3)})$, in das andere, $N(Y^{(3)})$, verwandelt wird. Als *Transformationskraft* wirkt das Modulationsmittel g der Modulation (μ_s, g). Die Lokalisierung der „Teilchen“ geschieht durch die Kadenz μ_s der Modulation. Diese Sprechweise ist der Musikwissenschaft nicht fremd: Schönberg, Uhde und viele andere sprechen nicht nur als Künstler, sondern auch als Theoretiker in einem vagen Sinne physikalistisch von „Kräften“ zwischen musikalischen Strukturen, wenn es darum geht, Veränderungen verständlich darzustellen.

Aus der Physik lernt man, daß solche Wechselwirkungskräfte durch *Wechselwirkungsquanten* übertragen werden. Jeder der vier Grundtypen von Kräften wird durch spezifische Quanten übertragen [9].

In Analogie zur Physik suchen wir ein „Modulationsquant“ $\mathcal{M}$, welches die Verwandlungskraft g zwischen $X^{(3)}$ und $Y^{(3)}$ vermittelt. Es wird angestrebt, aus diesem Teilchen die Fundamentschritte herauslesen zu können. Das Teilchen soll folgende Gestalt und Eigenschaften haben: Für den 12-temperierten Fall sei $\mathcal{M}$ eine lokale Komposition in $\mathbb{Z}_{12}$ und für den reingestimmten Fall sei $\mathcal{M}$ eine – nicht notwendig endliche – lokale Komposition in $\mathbb{Z}^2$, so daß $\mathcal{M}$ also jedenfalls im selben Modul sitzt wie die Karten der Dreiklangstufungen. Wir gehen davon aus, daß $e^t(X^{(3)}) = Y^{(3)}$ und daß eine Kadenz μ_s mit Index $s = 1, \ldots, 5$ (12-temperiert) resp.

$s=1,\dots,6$ (reingestimmt) fixiert sind. Sei G die Gruppe GW (12-temperierte Stimmung) oder GR (reine Stimmung). Dazu betrachten wir folgendes Paket (£$_s$) von Eigenschaften von:

(£$_s$)

(1) $\mathrm{Aut}(\mathscr{M}) \cap e^t \cdot \mathrm{Aut}(X^{(3)})$ ist nicht leer.

$(2)_s$ Der Träger von $\mu_s(Y^{(3)})$ ist Teilmenge von $\mathscr{M}$.

(3) $\mathscr{M} \cap Y$ ist G-**starr**, d.h. $G \cap \mathrm{Aut}(\mathscr{M} \cap Y) = \mathbf{1}$ und Vereinigung der $Y^{(3)}$-Stufen in $\mathscr{M}$.

(4) $\mathscr{M}$ ist eine minimale Menge mit (1) und $(2)_s$.

Diese Eigenschaften bedeuten folgendes: (1) besagt, daß es eine „innere Symmetrie" von $\mathscr{M}$ gibt, die $X^{(3)}$ in $Y^{(3)}$ als Modulationsmittel transformiert; $\mathscr{M}$ ist als Tonmenge Träger der Transformationskraft. $(2)_s$ besagt, daß $\mathscr{M}$ genügend Töne besitzt, um die Kadenz der Modulation auszudrücken. (3) besagt, daß das Modulationsmittel aus $\mathrm{Aut}(\mathscr{M})$ eindeutig bestimmt ist, denn aus $g(X)=h(X)=Y$ und $g(\mathscr{M})=h(\mathscr{M})=\mathscr{M}$ folgt $g \cdot h^{-1}(Y)=Y$ und $g \cdot h^{-1}(\mathscr{M})=\mathscr{M}$, d.h. $g \cdot h^{-1}(\mathscr{M} \cap Y)=\mathscr{M} \cap Y$, woraus wegen (3) $g=h$ folgt. Daß $\mathscr{M} \cap Y$ Vereinigung von Stufen sein soll, ist eine natürliche Forderung von Interpretierbarkeit durch Stufen. Die Eigenschaft (4) ist ein Ökonomieprinzip wie das Hamiltonprinzip in der Mechanik: keine überflüssigen Töne in $\mathscr{M}$, sobald (1) und (2_s) erfüllt sind.

Es ist Gegenstand des folgenden Modulationssatzes, die Frage nach Existenz und genauer Gestalt von Modulationsquanten $\mathscr{M}$ für die Parameter t und s der Modulation zu beantworten. Dabei wird es sich herausstellen, daß man auf natürliche Weise auf den Begriff der Fundamentschritte der Modulation stößt.

Sowohl in 12-temperierter Stimmung als auch in reiner Stimmung fällt das Modulationstheorem grundsätzlich gleich aus: die Existenz von Modulationsquanten und von Fundamentschritten sind garantiert. Ferner zeigen die Fundamentschritte für beide Stimmungen gute Übereinstimmung [17], und unsere Fundamentschritte stimmen überall, wo Schönberg solche angegeben hat, mit seinen Listen überein; siehe [17] für eine detailliertere Diskussion.

Modulationstheorem (12-temperierte Stimmung) [11]. *Für jedes Paar $(X^{(3)}, Y^{(3)})$ von verschiedenen Dreiklangstufungen in* $\mathbf{Dur}_w^{(3)}$ *gibt es einen Kadenzindex $s=1,2,3,4,5$ und ein Modulationsquant $\mathscr{M}$, das (£$_s$) erfüllt. Ferner ist $\mathscr{M}$ Vereinigung der Stufen von $X^{(3)}$ und von $Y^{(3)}$, die in $\mathscr{M}$ liegen; sie definieren die Dreiklanginterpretation $\mathscr{M}^{(3)}$. Die Stufen von $Y^{(3)}$, die in $\mathscr{M}$ liegen, definieren die Dreiklanginterpretationen $\mathscr{M} \cap Y^{(3)}$ und heißen die* Fundamentschritte *der Modulation (μ_s, g), die durch (£$_s$) eindeutig definiert ist.*

Für die Beweisidee sei auf [11] verwiesen. Die Ausführung des Beweises ist langwierig und kann einem Computer überlassen werden. Bild 2 zeigt die Nerven aller auftretenden Modulationsquanten.

Man beobachtet bei allen Modulationsquanten eine innere Symmetrie ihrer Gestalt. Das liegt daran, daß $\mathscr{M}$ bezüglich des Modulationsmittels symmetrisch konstruiert ist. Daraus folgt auch, daß für die umgekehrte Modulation von $Y^{(3)}$ nach $X^{(3)}$ dasselbe Quant genommen werden kann wie für die Modulation von $X^{(3)}$ nach $Y^{(3)}$. Die Fundamentschritte sind also nur die „Spur eines symmetrischen

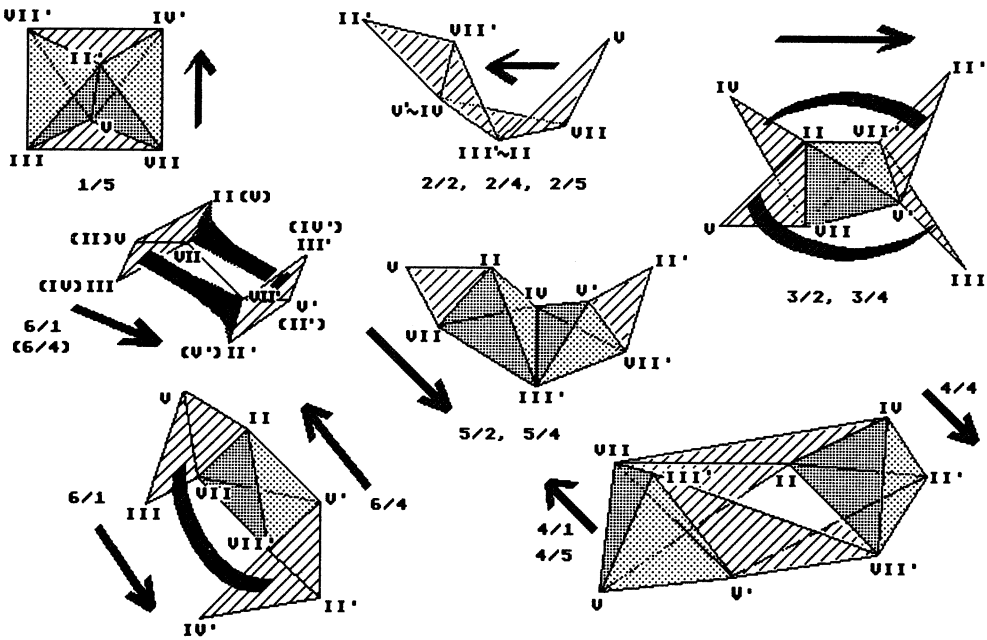

Bild 2 Für die 12-temperierte Stimmung sind die Modulationsquanten angegeben. Jedes Quant trägt einige Indices x/y, wo x die Quartverwandschaft und y die der Modulation zugrundeliegende minimale kadenzielle Menge angibt. Die ungestrichenen Stufen sind in der Ausgangstonart, die gestrichenen in der Zieltonart. Der Pfeil gibt die Modulationsrichtung an. Wenn zwei Pfeile existieren (bei $x=4$ und 6), dann beziehen sie sich je auf den dabeistehenden Index, wobei dann die gestrichenen Stufen für den zweiten Pfeil zur Ausgangstonart gehören. Die Quartverwandtschaften für $x>6$ ergeben sich durchwegs durch Vertauschung der Rollen von Ausgangs- und Zieltonart. Für $x=3$ treten 5-dimensionale Quanten auf. Die dicke Verbindung zeigt die beteiligten 6 Stufen an. Für $x=6$ hat man ein 5-dimensionales Quant (unten links) und ein 4-dimensionales, das einzige, das einer Translation als Modulationsmittel entspricht. Alle anderen Modulationsmittel sind Umkehrungen

Quants in der Zieltonart", eine *gebrochene Symmetrie*, wie man in der Symmetrietheorie sagt.

Modulationstheorem (reine Stimmung) [12]. *Für die Paare* $(X^{(3)}, Y^{(3)})$ *von verschiedenen Dreiklangstufungen in* $\mathbf{Dur}_r^{(3)}$ *gibt es einen Kadenzindex* $s=1,2,3,4,5,6$ *und ein Modulationsquant* $\mathcal{M}$, *das* (£$_s$) *erfüllt, wenn der Translationsvektor* t *einen der folgenden Werte annimt:*

$$t=(\pm 1,0),\ (0,\pm 1),\ \pm(1,1),\ \pm(1,-1),\ (\pm 2,0),\ \pm(2,-1)$$

Die Stufen von $\mathcal{M}\cap Y^{(3)}$ *heißen in diesem Fall* die Fundamentschritte *der Modulation* (μ_s, g), *die durch* (£$_s$) *eindeutig definiert ist. Das Modulationsquant ist endlich für* $t=(\pm 1,0)$ *und für* $t=(\pm 2,0)$ *und sonst unendlich.*

Das Beweisschema ist hier dasselbe wie für den 12-temperierten Fall, nur daß man es nicht notwendig mit endlichen Modulationsquanten zu tun hat. Bild 3 zeigt einige Quanten in reiner Stimmung.

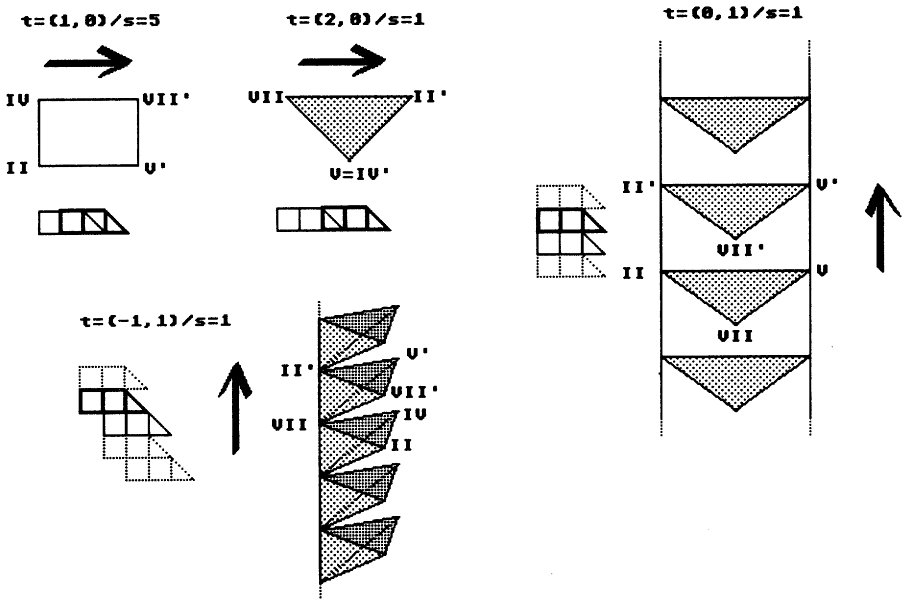

Bild 3 Für die Modulation in reiner Stimmung sind die Quanten i. allg. keine endlichen Kompositionen, so z. B. von *C*-Dur nach *E*- und nach *A*-Dur, wie hier gezeigt. Neben den Modulationsquanten sind sukzessive Transformationen der Skalen unter dem Modulationsmittel gezeigt, für die Ziele *E*- und *A*-Dur nur die unmittelbaren Vorgänger und Nachfolger von Ausgangs- und Zieltonart (fett).

Wenn wir in reiner Stimmung die Menge jener t, für welche ein Quant existiert (wir rechnen $t=(0,0)$ auch dazu: das ist die Ausgangstonart), mit der Chromatik nach Vogel [26] vergleichen, stimmen die beiden Bereiche gut überein: Nur das *fis* $(=(2,1))$ in Vogels Chromatik ist keine Zieltonika, während $b_* = (2,-1)$ und $d^* = (-2,1)$ Zieltoniken sind, deren Terzkommatranslate b und d in dieser Chromatik enthalten sind.

Der Modulationsbereich stimmt also im wesentlichen bis auf *fis* mit Vogels Chromatik überein. Insbesondere sind sinnvollerweise direkte Modulationen in Tonarten, die valenztheoretisch von der Ausgangstonart ununterscheidbar sind [17], nach dem vorliegenden Theorem nicht gegeben.

An diesem Modell interessiert nicht nur die „empirische" Übereinstimmung mit Schönbergs Listen. Es läßt sich auch mutatis mutandis auf andere Dreiklanginterpretationen anwenden und liefert so natürliche Modulationsregeln für „exotische" Tonarten. Wir haben durch Alteration der 12-temperierten Dur-Skalen alle anderen Skalen und die dadurch entstehenden Dreiklanginterpretationen auf Existenz und Anzahl von Modulationen per Computer durchrechnen lassen. Von den 38 *GW*-Bahnen gibt es deren vier, worin man nicht zwischen zwei beliebigen Dreiklanginterpretationen hin und her modulieren kann. Bei den anderen ist die Bahn $\mathbf{Dur}_w$ diejenige mit einem Minimum von 26 möglichen Modulationen, während die Bahn $\mathbf{Harm}_w$ von harmonisch Moll ein Maximum von 226 Modulationen zuläßt, eine interessante polare Stellung der beiden bekannten Skalentypen.

III.2 Kontrapunkt

Für eine ausführliche musiktheoretische Diskussion des folgenden Kontrapunktmodells verweisen wir auf [17, 18]; für dessen neurophysiologische Evidenzen im Rahmen von Tiefen-EEG-Untersuchungen verweisen wir auf [14, 15]. Hier beschränken wir uns auf die mathematische Darstellung.

Wir arbeiten in der $\mathbb{Z}_{12}$-Algebra $\mathbb{Z}_{12}[\varepsilon]$ der *dualen Zahlen*, deren Elemente *kontrapunktische Intervalle* $c+\varepsilon\cdot\Delta$ sind mit *Cantus firmus* c. Die Lehre des Kontrapunktes unterscheidet zwei Orientierungen: den *hängenden* und den *schweifenden Kontrapunkt*. Ersterer wird durch die Projektion $\Omega_-(c+\varepsilon\cdot\Delta)=c-\Delta$, letzterer durch die Projektion $\Omega_+(c+\varepsilon\cdot\Delta)=c+\Delta$ definiert. Man faßt also die Intervallzahl Δ als nach „unten" bzw. nach „oben" orientiert auf. Die Endomorphismen Ω_- und Ω_+ von $(\mathbb{Z}_{12})^2$ sind vermittels des Automorphismus $1+\varepsilon$ der Matrizendarstellung der $\mathbb{Z}_{12}$-Algebra $\mathbb{Z}_{12}[\varepsilon]$ durch die Relation $\Omega_-=-\Omega_+(1+\varepsilon)^{-2}$ verbunden. Zum Vermittler $1+\varepsilon$ zwischen den Orientierungen Ω_- und Ω_+ kann man einige andere affine Automorphismen von $\mathbb{Z}_{12}[\varepsilon]$ hinzufügen, welche alle musiktheoretisch bedeutsam sind und die Gruppe $GL^{\sim}(\mathbb{Z}_{12}[\varepsilon])$ der affinen Automorphismen von $\mathbb{Z}_{12}[\varepsilon]$ erzeugen [17], eine Situation, die uns schon aus $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}^n)$ bekannt ist. Wir nennen Elemente von $GL^{\sim}(\mathbb{Z}_{12}[\varepsilon])$ hier Symmetrien: sie haben die Gestalt $f=e^{a+\varepsilon\cdot b}\cdot(u+\varepsilon\cdot v)$, wo $a,b,v\in\mathbb{Z}_{12}$ und $u\in(\mathbb{Z}_{12})^{\times}$.

Die *Kernlehre* des Kontrapunktes [6, 26] geht aus von der dichotomischen Partition K/D der Intervallzahlen in die Konsonanzzahlen $K=\{0,3,4,7,8,9\}$ und die Dissonanzzahlen $D=\{1,2,5,6,10,11\}$. Die Intervalle in $K^{\sim}=\mathbb{Z}_{12}+\varepsilon\cdot K$ sind die *Konsonanzen*, diejenigen aus dem Komplement $D^{\sim}=\mathbb{Z}_{12}+\varepsilon\cdot D$ die *Dissonanzen*. Diese *Dichotomie* auf dem Intervallring hat folgende fundamentale Eigenschaft:

Proposition [13]. *Sei z eine Cantus-firmus-Zahl. Es gibt genau eine Symmetrie* ${}^{(z)}f$, *die sowohl* $K^{\sim}$ *und* $D^{\sim}$ *vertauscht, d. h.* $D^{\sim}={}^{(z)}f(K^{\sim})$ *und* $K^{\sim}={}^{(z)}f(D^{\sim})$, *als auch* $I_z=z+\varepsilon\cdot\mathbb{Z}_{12}$ *fest läßt, d. h.* ${}^{(z)}f(I_z)=I_z$. *Die Symmetrie* ${}^{(z)}f$ *heißt* $K^{\sim}/D^{\sim}$-Autokomplementaritätsfunktion *zum Cantus firmus z, ist gegeben durch* ${}^{(z)}f=e^{8z+\varepsilon\cdot 2}\cdot 5$ *und erfüllt die Bedingung* ${}^{(z)}f(K_x)=D_{5x-4z}$, *wobei* $K_x=x+\varepsilon\cdot K$ *und* $D_x=x+\varepsilon\cdot D$.

Bemerkung. Die Dichotomie K/D auf $\mathbb{Z}_{12}$ ist durch die Existenz der Autokomplementaritätsfunktion und durch eine maximale „Trennung" der beiden Hälften K und D durch die Distanzfunktion des „Terzabstandes" von allen Dichotomien ausgezeichnet [17].

Aus der Existenz der Autokomplementaritätsfunktion ergibt sich eine wesentliche Einsicht in die „Elastizität" der Dichotomie $K^{\sim}/D^{\sim}$. Wir nennen eine durch eine Symmetrie g abgeleitete Dichotomie $g(K^{\sim})/g(D^{\sim})$ die *g-Deformation* von $K^{\sim}/D^{\sim}$. Zwei Intervalle α und β heißen *g-polarisiert*, falls α und β in verschiedenen Hälften der g-Deformation von $K^{\sim}/D^{\sim}$ liegen.

Lemma [13]. *Es existiert für zwei verschiedene Intervalle immer eine Symmetrie g, so daß sie g-polarisiert sind.*

Das bedeutet, daß man im Prinzip die musikwissenschaftlich geforderte Spannung zwischen Konsonanzen und Dissonanzen durch g-Deformationen der Konsonanz-Dissonanz-Dichotomie auch unter Konsonanzen „imitieren“ kann. Dieser Denkansatz findet sich in Kontrapunkt-Traktaten immer wieder als Grundlage für die Fortschreitungsregeln im zweistimmigen Note-gegen-Note-Satz, wo es darum geht, von konsonantem zu konsonantem Intervall fortzuschreiten, wie wenn man zwischen Konsonanz und Dissonanz wechselte [22]. Folgende Begriffe dienen dazu, die im mathematischen Modell erlaubten Nachfolger zu einer gegebenen Konsonanz zu bestimmen.

Definition. *Sei $\alpha = c + \varepsilon \cdot k$ eine feste Ausgangskonsonanz. Dann heißt eine Symmetrie g* α-kontrapunktisch, *falls sie die folgenden Eigenschaften hat:*

(A) *Das Intervall α ist eine g-deformierte Konsonanz, d. h. α liegt in $g(K^{\sim})$.*

(B) *Die Autokomplementaritätsfunktion ${}^{(c)}f$ zum Cantus firmus c ist zugleich Autokomplementaritätsfunktion der g-Deformation $g(K^{\sim})/g(D^{\sim})$, d. h. ${}^{(c)}f(g(K^{\sim})) = g(D^{\sim})$.*

(C) *Unter den Symmetrien mit den Eigenschaften* (A) *und* (B) *wird für g die Anzahl der Konsonanzen, die g-deformierte Dissonanzen, d. h. Elemente von $g(D^{\sim})$, sind, maximal.*

Eine Konsonanz β heißt erlaubter Nachfolger von α, *wenn es eine α-kontrapunktische Symmetrie g gibt, so daß β eine g-deformierte Dissonanz ist.*

Eigenschaften (A) und (C) fordern, daß eine Konsonanz und ein erlaubter Nachfolger zueinander *g-polarisiert* sein müssen und daß in der Wahl erlaubter Nachfolger *größtmögliche Freiheit* besteht. Eigenschaft (B) besagt folgendes: Die Autokomplementaritätsfunktion ${}^{(c)}f$, welche den Cantus firmus c der Startkonsonanz auszeichnet, übernimmt auch für die g-deformierte Dichotomie ihre *polarisierende Rolle.*

Das Kontrapunkttheorem beschreibt die erlaubten Fortschreitungen im Intervallring. Dabei wählen wir die schweifende Orientierung. Für den „hängenden Kontrapunkt“ und für Orientierungswechsel gelten entsprechende Resultate.

Kontrapunkttheorem [13]. Wir fixieren dazu eine Startkonsonanz α.

(A) Struktursatz

(1) *Es existiert im Intervallring immer mindestens ein erlaubter Nachfolger der Startkonsonanz. Die Existenz eines erlaubten Nachfolgers ist auch dann noch gesichert, wenn man den Cantus firmus der Zielkonsonanz zum vornherein fixiert. Das Aussetzen eines zweistimmigen Note-gegen-Note-Satzes zu einer vorgegebenen Cantus-firmus-Melodie (ohne Einschränkungen auf spezielle Skalen) läßt sich immer zu Ende führen. Dies gilt auch dann noch, wenn man den Tonvorrat aller vorkommenden Töne auf das Material einer modalen Tonart einschränkt.*

(2) *Quintparallelen im strengen Sinn sind generell verboten, d. h. wenn das Startintervall eine Quint ($\alpha = c_1 + \varepsilon \cdot 7$) ist, kann unter den erlaubten Nachfolgern keine Quint ($\beta = c_2 + \varepsilon \cdot 7$) gefunden werden. Für alle anderen strengen Parallelen gilt kein generelles Verbot.*

(B) Tabelle erlaubter Nachfolger

Wir verweisen für eine Tabelle mit allen erlaubten Nachfolgern auf [17]. Sie stimmt sehr gut mit den Regeln von Fux überein: Die Chance, eine mindestens ebenso gute Übereinstimmung durch Würfeln zu erzielen, ist unter 0,0001%. Eine detaillierte Diskussion findet sich in [18].

Das Kontrapunkttheorem ist also wie das Modulationstheorem im wesentlichen ein *Existenzsatz.*

Zum besseren Verständnis der Natur kontrapunktischer Symmetrien wollen wir uns die Situation *geometrisch* klar machen. Wir bilden für eine gegebene kontrapunktische Symmetrie g zwei Interpretationen des Intervallrings $\mathbb{Z}_{12}[\varepsilon]$ bestehend aus den Überdeckungen:

$$\ddot{U}\mathbf{1} = \{I_x, K_x, D_x \mid x \in \mathbb{Z}_{12}\}$$

$$\ddot{U}g = \{I_x, gK_x = gK^{\sim} \cap I_x, gD_x = gD^{\sim} \cap I_x \mid x \in \mathbb{Z}_{12}\}$$

Obwohl die $K^{\sim}/D^{\sim}$-Autokomplementaritätsfunktion ${}^{(c)}f$ zum Cantus firmus c zugleich Autokomplementaritätsfunktion der g-Deformation $g(K^{\sim})/g(D^{\sim})$ ist, wirkt sie auf die Karten der beiden Interpretationen $\mathbb{Z}_{12}[\varepsilon]^{\ddot{U}1}$ und $\mathbb{Z}_{12}[\varepsilon]^{\ddot{U}g}$ qualitativ verschieden (Bild 4).

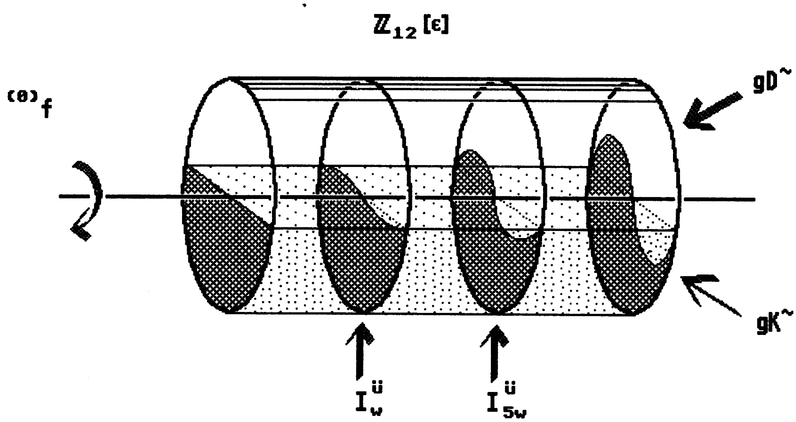

Bild 4 Die g-deformierten $K^{\sim}/D^{\sim}$-Dichotomien induzieren auf den verschiedenen Cantus-firmus Punkten *nicht* Dichotomien durch Cantus-firmus-Translation der Dichotomie in einem festen Cantus firmus. Es entspricht unter der Autokomplementaritätsfunktion ${}^{(o)}f$ dem deformiert-konsonanten Teil gK_w im Cantus firmus w der deformiert-konsonante Teil $gK_{5w} = gK_{5w} e^{\varepsilon \cdot 8w+4w}(gK_w)$ statt der Translation $e^{4w}(gK_w)$. Die Autokomplementaritätsfunktion wirkt also auf der g-deformierten Dichotomie wie eine lokale Symmetrie in der Physik. Die Spannungen zwischen den konsonanten Intervallen in der kontrapunktischen Fortschreitung haben gleichen formalen Hintergrund wie das Auftreten von Kräften in der Physik: lokale Symmetrien

Wir betrachten das Beispiel $g = e^{\varepsilon \cdot 8} \cdot (5 + \varepsilon \cdot 4)$ für die Konsonanz $\alpha = \varepsilon \cdot 9$. Dann ist:

$$gK^{\sim} = \mathbb{Z}_{12} \cdot (1 - 4 \cdot \varepsilon) + \varepsilon \cdot e^{8} \cdot 5 \cdot K.$$

Dies bedeutet für einen Cantus-firmus-Punkt w:

$$gK_w = w + \varepsilon \cdot (5 \cdot K + 8 - 4w).$$

Aber w wird unter ${}^{(o)}f$ nach $5w$ transportiert, und es ist $gK_{5w} = 5w + \varepsilon \cdot (5 \cdot K + 8 + 4w)$.

Auf der ersten Interpretation wirkt ${}^{(o)}f$ auf K_w also durch Translation auf dem Cantus firmus, $K_{5w} = e^{4w}(K_w)$, gefolgt von der Autokomplementaritätsfunktion auf I_{5w}. Auf der zweiten Interpretation aber operiert ${}^{(o)}f$ auf gK_w nicht durch Cantus-firmus-Translation plus Autokomplementaritätsfunktion auf I_{5w}, denn gK_{5w} ist von $e^{4w}(gK_w)$ verschieden. Man kann dies so deuten, daß ${}^{(o)}f$ auf der zweiten Interpretation via g-Deformation im Sinn der Physik als *lokale Symmetrie*, statt wie auf der ersten Interpretation via Konsonanzen und Dissonanzen als globale Symmetrie operiert. Letztere kann man als „Schraubung": Rotation (= Autokomplementaritätsfunktion auf jeder Karte I_w) plus Translation ($K_{5w} = e^{4w}(K_w)$) interpretieren. Erstere aber verschiebt den Teil gK_w von I_w nicht nach $e^{4w}(gK_w)$, sondern verformt ihn zu

$$gK_{5w} = 5w + \varepsilon \cdot (5 \cdot K + 8 + 4w) = e^{\varepsilon \cdot 8w}(e^{4w}(gK_w))$$

um den Faktor $\varepsilon \cdot 8w$. Dieses Phänomen ist als Analogie zur Physik daher interessant, weil Kräfte in der Physik durch lokale Symmetrien von Feldern entstehen [5]. Genauso scheinen intuitiv gesprochen *in unserem Modell die lokalen Symmetrien auf dem Intervallring für die „Kräfte" verantwortlich* zu sein, welche die Fortschreitungen von Intervall zu Intervall regeln. Dieses Kontrapunkt-Modell ist wie das Modulationsmodell auf beliebige Skalentypen anwendbar. Man stößt auch hier auf ein interessantes Faktum betreffend die dominierende Rolle der Dur-Skala. In der Analyse für die drei 7-tönigen Skalentypen, die ausschließlich Halb- und Ganztonschritte verwenden (Dur-Skala, melodische Moll-Skala und die um einen eingefügten siebten Ton erweiterte Ganztonleiter) erscheint die *Dur-Skala* als *optimal* im folgenden Sinn: Die Freiheit in der Wahl des Nachfolgeintervalls ist in der Dur-Skala mit Abstand am größten. Regelkonforme Nachfolger gibt es immer. Nur für zwei Fortschreitungen mit vorgegebenem Startintervall und Cantus-firmus-Schritt ist der Nachfolger eindeutig bestimmt. Die melodische Moll-Skala läßt in der Wahl von Nachfolgeintervallen zwar weniger Freiheit zu, es treten aber keine Fälle auf, wo keine regelkonforme Fortschreitung existiert („Sackgassen"). Hier hat man für 16 Fälle nur eine Wahl. In der „erweiterten Ganztonleiter" treten in 18 Fällen Sackgassen auf und die Wahlfreiheit ist minimal.

IV. Klassifikation

Wir wollen nach der Diskussion globaler Kompositionen an zwei musikwissenschaftlich interessierenden Modellen die Klassifikationsfrage angehen. Obwohl einige der folgenden Konstruktionen bzw. Resultate für allgemeine Grundringe funktionieren, ergibt sich gegenwärtig ein einheitliches Bild nur für Körper. Da ferner die *Theorie der stereochemischen Strukturen nach Dress-Dreiding-Haegi* [2] *sich in eine natürliche Verallgemeinerung der Theorie der globalen Kompositionen über dem Körper* $\mathbb{R}$ *der reellen Zahlen einfügt*, ist die Einschränkung auf Körper sinnvoll. Sei also von nun an der Grundring R ein Körper, obwohl wir der Einheitlichkeit halber nicht von R-Vektorräumen, sondern weiterhin von R-Moduln und ihren Kategorien Mod_R sprechen.

IV.A Modulkomplexe auf globalen Kompositionen

Ein (Modul-)Komplex N auf einer globalen Komposition $\mathscr{K}$ ist ein Koeffizientensystem auf dem Nerv $n(\mathscr{K})$ mit Werten in Mod_R, dessen Übergangshomomorphismen $f_{\sigma\tau}: N(\sigma) \to N(\tau)$ für die Simplexe $\sigma \subset \tau$ alle surjektiv sind. Wir setzen wie in der Garbentheorie üblich $\Gamma N = \mathrm{lim.\,proj.}_{n(\mathscr{K})} N(\sigma)$ für die Menge der „globalen Schnitte" von N. Wir benötigen folgende Beispiele:

Affine Funktionen. Sei $n\Gamma(\mathscr{K})$ der Komplex der affinen Funktionen auf $\mathscr{K}$, wo $n\Gamma(\sigma) = n\Gamma(\mathscr{K})(\sigma) = \{f: \cap\sigma \to R, f$ ist auf den Karten, die $\cap\sigma$ enthalten, Restriktion einer affinen Funktion auf einem entsprechenden Trägermodul$\}$, zusammen mit den Restriktionshomorphismen. Mit C notieren wir den Unterkomplex von $n\Gamma(\mathscr{K})$ der auf den Simplexen konstanten Funktionen. Die globalen Funktionen werden an Stelle von $\Gamma n\Gamma(\mathscr{K})$ kürzer mit $\Gamma(\mathscr{K})$ notiert. Ein Morphismus $f: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ von Kompositionen induziert für jeden Unterkomplex N von $n\Gamma(\mathscr{L})$ kanonisch und funktoriell das inverse Bild $f^*(N)$ in $n\Gamma(\mathscr{K})$.

Bilinearformen. Sei N ein zwischen C und $n\Gamma(\mathscr{K})$ enthaltener Komplex von affinen Funktionen. Um Bilinearformen auf $\mathscr{K}$ zu beschreiben, betrachtet man den Komplex B_N mit

$$B_N(\sigma) = \mathrm{Hom}((N(\sigma)/C)^{\wedge}, N(\sigma)/C),$$

wo $\mathbf{A}^{\wedge} = \mathrm{Hom}(\mathbf{A}, R)$. Diese Definition wird verständlich, wenn man sich für die 0-Simplexe $\sigma = \{\mathscr{S}\}$ von Karten $(\mathscr{S}, \mathbf{M}_{\mathscr{S}})$ die Inklusionen $N(\sigma)/C \to \Gamma(\sigma)/C \xrightarrow{\sim} (R\mathscr{S})^{\wedge}$ vergegenwärtigt, so daß B_N ein Komplex von Bilinearformen auf den Kartenmoduln $R\mathscr{S}$ ist. Ein Morphismus $f: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ von Kompositionen induziert für jeden Unterkomplex N von $n\Gamma(\mathscr{L})$ einen R-linearen Homomorphismus $\Gamma B_N f: \Gamma B_N \to \Gamma B_{f*N}$.

Um aus einer globalen Komposition $\mathscr{K}$ zu einer Molekülstruktur zu gelangen, benötigt man einen Formbegriff in $\mathscr{K}$. Für einen Komplex N wie eben heißt dann das Paar $(\mathscr{K}, \beta)$ von $\mathscr{K}$ und einer *globalen Bilinearform* $\beta \in \Gamma B_N$ eine *N-geformte Komposition*. Ein *Morphismus geformter Kompositionen* $f: (\mathscr{K}, \beta) \to (\mathscr{L}, \delta)$ ist ein Morphismus der unterliegenden Kompositionen, so daß $f^*(\delta) = \beta$ ist.

Äußere Formen. Ein Komplex N zwischen C und $n\Gamma(\mathscr{K})$ induziert für $n \geqslant 0$ kanonisch den Komplex $\Lambda^n(N/C)$ der äußeren n-Formen, von welchen eine *globale Form* δ in $\Gamma\Lambda^n(N/C)$ den Begriff der *Orientierung* auf $\mathscr{K}$ ermöglicht. Wie für Bilinearformen hat man auch inverse Bilder für äußere n-Formen und entsprechend den Begriff des *Morphismus orientierter Kompositionen.*

Moleküle. Für den Körper der reellen Zahlen ergeben sich aus speziellen n-geformten und orientierten Kompositionen $\mathscr{K}$ molekulare Strukturen im Sinn von [2]. Wir fügen dieses Beispiel an, weil die Klassifikation der interpretierbaren Kompositionen sich im Schwierigkeitsgrad von der der interpretierbaren Moleküle scharf unterscheidet (s. u.). Die Punkte von $\mathscr{K}$ werden intuitiv als momentane Positionen der Atome eines Moleküls im $\mathbb{R}^3$ aufgefaßt. Die Atomkernsorten werden mit $\mathbb{N}$ parametrisiert und deren Verteilung in $\mathscr{K}$ durch eine Markierungsfunktion $\alpha: \mathscr{K} \to \mathbb{N}$ definiert. Man verlangt ferner, daß $\dim(n\Gamma(\mathscr{S})/C)) \leqslant 3$ für alle Karten $\mathscr{S}$, daß $\mathscr{K}$ durch eine (auf den Karten) positiv definite symmetrische Bilinearform β geformt sei und gibt als Orientierung eine β-normierte 3-Form Ω, d. h. $\Omega^2 = \det(\beta, \beta)$. Ein solches 4-tupel $(\mathscr{K}, \alpha, \beta, \Omega)$, d. h. eine α-markierte, β-geformte und Ω-orientierte Komposition $\mathscr{K}$, nennen wir *globales Molekül.* Was Morphismen zwischen globalen Molekülen sind, ist dann klar. Ein zu einer Interpretation eines lokalen Moleküls isomorphes Molekül heißt *interpretierbar.*

Interpretierbaren Molekülen sind auf kanonische Weise bevorzugte molekulare Strukturen im Sinn von Dreiding-Dress-Haegi zugeordnet:

Proposition [19]. *Die zu interpretierbaren Molekülen gehörigen molekularen Strukturen sind (d, χ)-definiert im Sinn von* [2].

Die Klassifikation von Kompositionen ist somit die Basis für die Klassifikation von Molekülen. Es ist allerdings ungleich schwerer, die interpretierbaren Moleküle zu charakterisieren als die interpretierbaren Kompositionen, weil keine guten Kriterien existieren, um Formen auf den Karten auf die ganze Komposition zu erweitern.

IV.B Kompositionen aus Modulkomplexen

Für eine lokale Komposition $\mathscr{K}$ und einen Untermodul L von $\Gamma(\mathscr{K})$ hat man die Abbildung $\hat{}: \mathscr{K} \to L^\wedge : k \rightsquigarrow k^\wedge, k^\wedge(l) = l(k)$. Für eine globale Komposition $\mathscr{K}$, einen Modulkomplex N in $n\Gamma(\mathscr{K})$ und σ in $n(\mathscr{K})$ ergibt das eine Abbildung

$$\sigma^\wedge : \cap \sigma \to N(\sigma)^\wedge.$$

Wir erhalten ein Koeffizientensystem $\sigma \rightsquigarrow (\sigma^\wedge(\cap \sigma), N(\sigma)^\wedge)$ mit Werten in $\mathscr{L}oc_R$ und mit injektiven Übergangsmorphismen. Ferner sind alle $\sigma^\wedge$ injektiv, falls dies für die 0-Simplices so ist, in welchem Fall N *separierend* heißt.

Wir setzen $\mathscr{K}/N = \text{lim. inj.}_{n(\mathscr{K})} \sigma^\wedge(\cap \sigma)$, woraus sich wegen $\mathscr{K} = \text{lim. inj.}_{n(\mathscr{K})} \cap \sigma$ eine kanonische Mengenabbildung $\pi : \mathscr{K} \to \mathscr{K}/N$ ergibt. Falls N separierend ist, bildet das System $(\sigma^\wedge(\cap \sigma), N(\sigma)^\wedge)$ einen kanonischen Atlas für eine Komposition $\mathscr{K}/N$, und π wird zu einem bijektiven Morphismus zwischen Kompositionen, welcher auf den Nerven ein Isomorphismus $n(\pi) : n(\mathscr{K}) \xrightarrow{\sim} n(\mathscr{K}/N)$ ist. Sobald C in N enthalten ist, hat man $\pi^*(n\Gamma(\mathscr{K}/N) = N$.

Satz [11]. *Sei $\mathscr{K}$ eine globale Komposition über einem Körper, dann hat man mit den obigen Notationen ein kommutatives Dreieck*

$$\begin{tikzcd} & \Delta\mathscr{K} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ \Delta\mathscr{K}/p^*(n\Gamma(\mathscr{K})) \arrow[rr, "c"'] & & \mathscr{K} \end{tikzcd}$$

von bijektiven Morphismen globaler Kompositionen, und das durch p und π eindeutig bestimmte c ist ein Isomorphismus.

Eine globale Komposition $\mathscr{K}$ über einem Körper R läßt sich also aus einer Standardkomposition $\Delta\mathscr{K}$ und einem separierenden Modulkomplex $p^*(n\Gamma(\mathscr{K}))$

von affinen Funktionen auf $\Delta\mathscr{K}$ bis auf Isomorphie rekonstruieren. Sei nun n^* ein natürlich gewichteter Nerv einer Überdeckung aus *Covens*. Wir wählen eine feste Standardkomposition Δn^* zu n^*. Sei dann $\mathbf{D}(n^*)$ die Menge der separierenden Modulkomplexe N in $n\Gamma(\Delta n^*)$, die C enthalten. Via inverse Bilder operiert die endliche Gruppe A der Automorphismen von Δn^* von links auf $\mathbf{D}(n^*)$. Dann hat man

Satz [11]. *Der Bahnenraum $A\backslash\mathbf{D}(n^*)$ ist in Bijektion mit der Menge der Isomorphieklassen von Kompositionen $\mathscr{K}$ in $\mathscr{G}\ell_R$, so daß $n^*\mathscr{K} \xrightarrow{\sim} n^*$.*

Durch die üblichen Techniken der Grassmannschemata ergibt sich ferner

Satz [11]. *Der Bahnenraum $A\backslash\mathbf{D}(n^*)$ ist in kanonischer Bijektion zu den R-rationalen Punkten eines R-algebraischen Schemas $I(n^*)$.*

Betreffend die Rolle der Klassifikation, insbesondere der Technik der Auflösung von Kompositionen für die Musikästhetik sei auf [17] verwiesen. Für die Aufführbarkeit eines Musikstücks, welches wir hier als Komposition repräsentieren, ist dessen Interpretierbarkeit wesentlich, denn dann existieren globale Koordinatenfunktionen, die es erlauben, eine „abstrakte" Komposition effektiv in physikalischen Parameterräumen einzubetten.

Da eine Komposition $\mathscr{K}$ durch ihren Modulkomplex $p^*(n\Gamma(\mathscr{K}))$ in $\Delta\mathscr{K}$ bis auf Isomorphie beschrieben ist, sollte es derselbe auch erlauben, zu entscheiden, ob $\mathscr{K}$ interpretierbar ist. Wir nennen einen Modulkomplex N in einer Komposition $\mathscr{K}$ *welk*, falls die Restriktionsabbildung $\Gamma N \to N(\mathscr{S})$ für jede Karte $\mathscr{S}$ von $\mathscr{K}$ surjektiv ist. Für einen Modulkomplex N von affinen Funktionen auf $\mathscr{K}$ sagen wir, N sei *global separierend*, falls die globalen Schnitte von N Punkte von $\mathscr{K}$ trennen. Dann gilt

Satz [11]. *Ein Modulkomplex N in $\mathbf{D}(n^*)$ definiert eine interpretierbare Komposition $\Delta n^*/N$ genau dann, wenn N welk und global separierend ist.*

Aus dem Beweis des Satzes ergibt sich

Korollar [11]. *Ist der Grundring R ein unendlicher Körper, dann kann man eine interpretierbare Komposition $\mathscr{K}$ in R^m interpretieren, wobei $m+1 = \mathrm{Max}\{$Kardinalität von lokalen Kompositionen der Karten von $\mathscr{K}\}$.*

Darauf beruht u.a. die Einsicht [17], daß die Bedeutung des Streichquartetts Ende des 18. Jahrhunderts möglicherweise aus einem strukturellen Zusammenhang der damaligen Musiktheorie (Kontrapunkt und Harmonielehre) mit der Mannigfaltigkeit (im naiven Sinn) der Klangfarben der Familie der Geigen, wie sie von Ludwig Finscher in der Theorie des Streichquartetts [4] beschrieben wird, resultiert.

An der Frage der Interpretierbarkeit ersieht man eine *scharfe Dichotomie zwischen Kompositionen und Molekülen.* Während man Isomorphieklassen von Molekülen genauso wie die von Kompositionen als rationale Punkte von algebraischen Schemata parametrisieren kann [19], ist es uns gegenwärtig nicht möglich, ausgehend von entsprechenden Modulkomplexen etc. auf Standardkompositionen, notwendige und hinreichende Kriterien für die Interpretierbarkeit von Molekülen anzugeben.

Schlußbemerkung Eine Mathematische Musiktheorie kann, neben einer sorgfältigen Auseinandersetzung mit musikwissenschaftlichen Belangen, nicht auf eine „Operationalisierung“ der Theorie verzichten. Das bedeutet die Aufgabe der Transformation von Abstrakta der mathematischen Theoriebildung in handhabbare Objekte für arbeitende Musiker und Musikwissenschaftler. Dieses Problem ist in der *computergraphischen Operationalisierung* der MaMuTh in der Software ***presto*** [16], einem gemeinsamen Projekt mit Informatikern der ETH-Zürich und der Fraunhofer-Gesellschaft, Arbeitsgruppe Graphische Datenverarbeitung (Darmstadt), angegangen worden und stellte uns vor interessante Aufgaben der Visualisierung hochdimensionaler Objekte, wie sie Kompositionen und deren Nerven sind.

Das obige Kontrapunktmodell wurde 1986–1988 in einem interdisziplinären Projekt des Schweizerischen Nationalfonds zum *Tiefen-EEG während Darbietungen von Konsonanzen und Dissonanzen* [14, 15] verwendet. Darin konnte eine experimentelle Evidenz für die Präsenz der Autokomplementaritätsfunktion im Hirnstrombild aus intracorticalen Multielektroden-Ableitungen beim Menschen gefunden werden.

Es wird aus den erwähnten Problemen zur Klassifikation klar, daß man *aus der mathematischen Betrachtung musikalischer* (resp. chemischer) *Strukturen interessante Fragen der Invariantentheorie ziehen* kann, welche aus dem Themenbereich „discrete Mannigfaltigkeiten“ im Geiste Bernhard Riemanns stammen.

Bibliographie

[1] Dahlhaus, C.: Über den Begriff der tonalen Funktion. In: Beiträge zu Musiktheorie des 19. Jahrhunderts (Hrsg. Vogel, M.). Regensburg: Bosse 1966

[2] Dreiding, A.; Dress, A.; Haegi, H.: Classification of Mobile Molecules by Category Theory. In: Symmetries and Properties of Non-Rigid Molecules. Studies in Physical and Theoretical Chemistry, 23, 1983

[3] Euler, L.: Tentamen novae theoriae musicae (1739). In: Opera Omnia, Ser. III, Vol. 1 (Ed. Bernoulli E. et al.), Leipzig: Teubner 1926

[4] Finscher, L.: Studien zur Geschichte des Streichquartetts. Kassel: Bärenreiter 1974

[5] Freedman, D. Z.; Nieuwenhuizen, P. van: Supergravitation und die Einheit der Naturgesetze. In: Teilchen, Felder und Symmetrien (Hrsg. Dosch, H. G.). Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft 1984

[6] Fux, J. J.: Gradus ad Parnassum (1725). Dt. und kommentiert von L. Mitzler, Leipzig 1742

[7] Graeser, W.: Bachs „Kunst der Fuge“. In: Bach-Jahrbuch 1924

[8] Helmholtz, H. von: Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage der Musik. (1863), Nachdr. Darmstadt 1968

[9] t'Hooft, G.: Symmetrien in der Physik der Elementarteilchen. In: Teilchen, Felder und Symmetrien (Hrsg. Dosch, H. G.). Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft 1984

[10] Lakner, Y.: Tonbeziehungen veranschaulichen. SMPV Schweizer musikpädagogische Blätter, Nr. 2, Juni 1987

[11] Mazzola, G.: Gruppen und Kategorien in der Musik. Berlin: Heldermann 1985

[12] Mazzola, G.: Modulation und Stimmung. Manuskript, TH Darmstadt 1985

[13] Mazzola, G.: Der Kontrapunkt und die K/D-Dichotomie. Manuskript, Univ. Zürich 1987

[14] Mazzola, G.; Wieser, H.-G.; Brunner, V.; Muzzulini, D.: A Symmetry-oriented Mathematical Model of Classical Counterpoint and Related Neurophysiological Investigations by Depth-EEG. In: Symmetry II, CAMWA. New York: Pergamon 1989
[15] Mazzola, G.; Graber, V.; Wieser, H.-G.: Hirnelektrische Vorgänge im limbischen System bei konsonanten und dissonanten Klängen. In: Musik - Gehirn - Spiel. Petsche, H. (Hrsg.). Basel: Birkhäuser 1989
[16] Mazzola, G.: Handbuch zur ***presto***-Software. Zürich: Marvin AG 1989
[17] Mazzola, G.: Geometrie der Töne. Basel: Birkhäuser 1990
[18] Mazzola, G.; Muzzulini, D.: Deduktion des Quintparallelenverbots aus der Konsonanz-Dissonanz-Dichotomie. Musiktheorie, 1990
[19] Mazzola, G.: Algebro-Geometric Classification of Dreiding-Dress-Haegi Molecular Structures. Ersch. in Symmetry. New York: VCH 1990
[20] Riemann, B.: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Gött. Abh. No. 13, 1867
[21] Riemann, H.: Handbuch der Harmonielehre. Leipzig 6/1912
[22] Sachs, K.-J.: Der Contrapunctus im 14. und 15. Jahrhundert. AMW, Wiesbaden: Franz Steiner 1974
[23] Schönberg, A.: Harmonielehre (1911). Wien: Universal Edition 1966
[24] Straub, H.: Beiträge zur modultheoretischen Klassifikation musikalischer Motive. Diplomarbeit ETH-Zürich, Zürich 1989
[25] Vogel, M.: Arthur v. Oettingen und der harmonische Dualismus. In: Beiträge zu Musiktheorie des 19. Jahrhunderts (Hrsg. Vogel, M.). Regensburg: Bosse 1966
[26] Vogel, M.: Die Lehre von den Tonbeziehungen. Bonn-Bad Godesberg: Verlag für systematische Musikwissenschaft 1975
[27] Weyl, H.: Riemanns geometrische Ideen. Berlin et al.: Springer 1988
[28] Wille, R.: Musiktheorie und Mathematik. In: Musik und Mathematik (Hrsg. Götze, H.; Wille, R.). Berlin: Springer 1985
[29] Wille, R.: Symmetrien in der Musik. Neue Zeitschrift für Musik Nr. 143 (1982), Heft 12

Guerino Mazzola
Mathematisches Institut der Universität
Rämistraße 74
CH-8001 Zürich

(*Eingegangen 26. 2. 1990*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 93 (1991) 30–47
AMS subject classification: 01 A 74

Warum wurde die Deutsche Mathematiker-Vereinigung innerhalb der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte gegründet?

Mathematiker-Briefe zur Gründungsgeschichte der DMV*)

R. Tobies, Leipzig

Jubiläen sind ein würdiger Anlaß, sich der Geschichte eines Ereignisses zu widmen. Somit ist unsere Jubilarin, die Deutsche Mathematiker-Vereinigung, auch schon mehrfach Gegenstand historischer Untersuchungen gewesen (vgl. [Gutzmer], [Krazer], [Gericke], [Schappacher, Kneser]). Die vorliegende Darstellung widmet sich der Gründungsgeschichte der Vereinigung. Die Auswertung von Briefen zeitgenössischer Mathematiker bringt dazu einige detailliertere Einsichten.

Das 19. Jahrhundert zeichnete sich durch ein starkes Anwachsen der mathematischen Produktivität aus. In einer Reihe hochentwickelter Staaten verband sich damit ein Bedürfnis nach Kommunikation zwischen den Mathematikern, zunächst im nationalen Rahmen, gegen Ende des Jahrhunderts im internationalen Maßstab. Infolgedessen entstanden seit den 60er Jahren mathematische Gesellschaften, die zum Teil im Namen die Bindung an einen Ort auswiesen, aber bald nationalen Charakter annahmen. Zu diesen Gesellschaften gehörten der Verein für freie Vorträge aus der Mathematik und Physik in Prag (1862), die London Mathematical Society (1865), die Moskauer Mathematische Gesellschaft (1867), die Sociéte Mathematique de France (1872), die Physikalisch-mathematische Gesellschaft Japans (1884), die New York Mathematical Society (1888), welche 1894 in die American Mathematical Society umgewandelt wurde. Diesen Organisationen folgte am 18. September 1890 die Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Weitere nationale mathematische Gesellschaften wurden erst nach 1900 gegründet.

Die erste fachspezifische Gesellschaft war in Deutschland bereits 1690 entstanden. Die als „Kunstrechnungs liebende Societät" in Hamburg gegründete Vereinigung hatte ihren Namen mehrfach geändert: 1790 „Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften in Hamburg", 1870 „Mathemati-

---

*) Die Darstellung wurde im Rahmen eines Studienaufenthaltes ausgearbeitet, welcher im Zeitraum vom 1. April bis 30. Juni 1990 an der Universität Kaiserslautern, der Technischen Hochschule Darmstadt und an dem dort etablierten Zentrum für Praktische Mathematik verbracht werden konnte. Die Autorin bedankt sich auf diese Weise für den Studienaufenthalt.

sche Gesellschaft zu Hamburg". Ihr folgten erst im 19. Jahrhundert weitere an einen Ort gebundene Gremien, 1850 die Mathematische Gesellschaft in Jena und 1862 das Mathematische Kränzchen zu Karlsruhe (vgl. auch [Tobies 1985]).

Im nationalen Rahmen vereinten sich die deutschen Mathematiker zunächst innerhalb der 1822 gegründeten Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. Seit 1843 bestand auf den Naturforscherversammlungen eine Sektion, welche Mathematik, verbunden mit anderen Wissenschaften, in ihrem Namen führte. Die Aufnahme der Mathematik beruhte vor allem auf dem Interesse von Naturwissenschaftlern an mathematischen Kenntnissen. Bedeutende Mathematiker beteiligten sich zunächst sehr selten. Die Teilnahme von C. F. Gauß (1777–1855) auf der Versammlung 1828 in Berlin ist im Mitgliederverzeichnis belegt (ohne Vortrag). Im Jahre 1856 besuchten Karl Weierstraß (1815–1897) und Ernst Eduard Kummer (1810–1893) die Wiener Versammlung. Erst seit Mitte der 60er Jahre nutzten bedeutende Forscher diese Kommunikationsmöglichkeit in größerem Maße (vgl. hierzu ausführlicher [Tobies, Volkert]). Dies führte zu dem Wunsch, eine selbständige nationale Vereinigung der Mathematiker zu schaffen. Seit dieser Zeit bis zur tatsächlichen Gründung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1890 können wir zwei Etappen unterscheiden. In einer ersten Etappe trachtete eine Gruppe von Mathematikern danach, von der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte getrennte Mathematikerversammlungen durchzuführen, was schließlich scheiterte. In einer zweiten Etappe bildete sich die Deutsche Mathematiker-Vereinigung innerhalb der Jahresversammlungen deutscher Naturforscher und Ärzte heraus.

1 Das Scheitern separater Mathematikerversammlungen

Die relativ lockere Form der Naturforscherversammlungen genügte den Ansprüchen vieler Wissenschaftler in den 60er Jahren des 19. Jahrhunderts nicht mehr. Es gab in der Regel kein vorher abgestimmtes inhaltliches Programm für die Sektionsvorträge, so daß oftmals sehr spezielle Themen vorgestellt wurden. Aus diesem Grunde hatten sich die Astronomen bereits 1863 entschlossen, von der Naturforscherversammlung getrennte Zusammenkünfte durchzuführen. Daß die Mathematiker ähnliche Gedanken hegten und sich am Beispiel der Astronomen orientierten, ist der Rede zu entnehmen, welche Alexander Brill (1842–1935) auf der Mathematikerversammlung 1873 in Göttingen hielt:

„Daß die Frequenz derselben (d. h. der Versammlungen deutscher Naturforscher und Ärzte, R. T.) von Jahr zu Jahr eine schwächere wurde, ist unzweifelhaft in erster Linie den ... Übelständen (nicht zur Sache gehörige Festlichkeiten, ausführliche Vorträge über spezielle Themata etc.) zuzuschreiben, die wohl auch die Astronomen zu einer Abtrennung veranlaßt haben, gewiß aber nicht dem Umstande, daß für Mathematiker das Bedürfnis mündlichen Verkehrs überhaupt nicht vorhanden wäre." [Bericht 1873, S. 20]

Die Göttinger Mathematikerversammlung, die vom 16. bis 18. April 1873 losgelöst von den Versammlungen der Naturforscher und Ärzte stattfand, sollte eine neue Form der organisatorischen Vereinigung deutscher Mathematiker begründen. Ihr Zustandekommen hat eine längere Vorgeschichte. Sie beginnt mit der Naturforscherversammlung 1867 in Frankfurt a. M., wo Alfred Clebsch (1833–1872) erstmals befürwortete, separate Zusammenkünfte durchzuführen. So trafen sich Ostern 1868 zwanzig Mathematiker zu einer Wanderung an der Bergstraße. Hier entstand die Idee zur Begründung der „Mathematischen Annalen", welche seit 1869 durch Alfred Clebsch und Carl Neumann (1832–1925) herausgegeben wurden (vgl. [Gutzmer 1904, S. 1]).

Alfred Clebsch bemühte sich in besonderem Maße, dem zunehmenden Bedürfnis der Mathematiker nach wissenschaftlicher Kommunikation zu entsprechen. Er gehörte bereits 1862 zu den Gründern des Mathematischen Kränzchens in Karlsruhe. Die große Zahl seiner Schüler, unter ihnen Alexander Brill, Paul Gordan (1837–1912), Max Noether (1844–1921), Felix Klein (1849–1925) und Aurel Voß (1845–1931), regte er an, die organisatorischen Pläne zu unterstützen.

Nach dem Ende des Deutsch-Französischen Krieges und der vollzogenen Einigung des Deutschen Reiches nahmen diese Pläne konkretere Gestalt an. Aus dem Briefwechsel zwischen Felix Klein und dem Leipziger Mathematiker Adolph Mayer ist der Zeitpunkt ersichtlich. Am 10. Oktober 1871 schrieb Klein an Mayer:

„Vielleicht erinnern Sie sich, daß wir vergangene Ostern davon sprachen, wie wünschenswerth es sei, in nicht zu ferner Zeit eine Mathematikerversammlung zu Stande zu bringen. Seitdem habe ich mich etwas umgehört und den Eindruck gewonnen, daß eine Versammlung im nächsten Frühjahr, etwa zur Pfingstzeit, von vielen Seiten mit Vergnügen begrüßt werden würde. Clebsch, der übrigens dieser Tage nach Leipzig kommt, ist auch ganz für den Plan eingenommen. Ich möchte nun mit gegenwärtigem Briefe an Sie die Anfrage richten: ob Sie gesonnen wären, ev. die Sache mit in die Hand zu nehmen. Ich habe im gleichen Sinne an Noether in Heidelberg geschrieben, den ich persönlich genau kenne. Wir drei: Sie, Noether und ich würden ev. ein Comite ‚behufs Abhaltung einer Mathematikerversammlung' bilden". (Vollständig abgedruckt in [Tobies, Rowe, S. 59])

Max Noether hatte die Idee der Mathematiker-Zusammenkünfte selbständig wieder hervorgebracht. Dies ist einem Brief zu entnehmen, den Felix Klein am 19. Oktober 1871 an ihn richtete:

„Du sprichst zunächst davon, wie wünschenswerth es sei, im nächsten Sommer eine Mathematikerversammlung zu Stande zu bringen. Nun ist sehr merkwürdig: die vierzehn Tage, die ich, ehe Dein Brief eintraf, hier zubrachte, hatte ich mit Clebsch wiederholt über einen solchen Plan gesprochen. Clebsch ist ganz dabei; augenblicklich in Berlin und Leipzig, denkt er möglicherweise dort schon die Leute mit dem Gedanken vertraut zu machen. Er wünscht indeß – und das scheint mir sehr gut – daß die eigentliche Anregung dazu von den jüngeren Leuten ausgehen muß" [UBG, Cod. Ms Klein XII].

Max Noether erfuhr in dieser Zeit von Leo Koenigsberger (1837–1921), daß Berliner Kollegen eine ähnliche Versammlung planen. Vor allem die um das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" gruppierten Mathematiker hatten ein derartiges Interesse. Diese neue Situation führte zur Abstimmung mit den Berliner Mathematikern und letztendlich zur Verschiebung des zunächst vorgesehenen Termins um ein Jahr. Es ist bemerkenswert, daß es den Initiatoren wichtiger war, eine Einigung zu erzielen, als eine übereilte Zusammenkunft herbeizuführen. Der 22jährige Felix Klein koordinierte die Vorbereitungen. Noch als Privatdozent an der Universität Göttingen tätig, schrieb er am 19. November an Noether:

„Nun aber durch die Mitteilung von Koenigsberger das Berliner Project *mehr* deutlichere Umrisse erhält, erscheint es mir das Richtigste zu sein,

1) den allgemeinen Grundsatz aufzustellen, keine Zersplitterung eintreten zu lassen,
2) im Uebrigen abzuwarten". [UBG Cod. Ms Klein XII Nr. 542]

Noether regte nun an, einen Berliner Mathematiker in das Vorbereitungskomitee aufzunehmen. Darüber informierte Klein Adolph Mayer. Außerdem zog er bei Georg Cantor (1845–1918), der aus der Berliner Schule stammend näher mit den dortigen Plänen vertraut sein konnte, Erkundigungen ein. Cantor, der Klein in einem Brief vom 1. Dezember 1871 antwortete, wußte jedoch nichts Näheres über ein derartiges Berliner Vorhaben und zeigte sich zu diesem Zeitpunkt auch persönlich sehr uninteressiert an diesen organisatorischen Zielen (vgl. [Tobies, Rowe S. 62]).

Nun wandte sich Felix Klein an Carl Ohrtmann (1839–1885), der Oberlehrer am Berliner Realgymnasium und einer der Begründer des „Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik" war. Klein hatte Ohrtmann während seines Studienaufenthaltes 1869/70 in Berlin kennengelernt und beteiligte sich als Referent an dem Referate-Journal. Klein leitete daraus einen inhaltlichen Programmpunkt für die geplante Mathematikerversammlung ab. Am 12. Januar 1872 teilte er Max Noether mit:

„Ich dachte, man solle sich bei der Versammlung nach gemeinsamen Plane (d. h. wer sich dafür interessiert) über Referate für den Ohrtmann'schen mathematischen Jahresbericht verständigen". [UBG Cod. Ms. Klein XII Nr. 542]

Im Januar 1872 stand immer noch der Pfingsttermin desselben Jahres zur Diskussion; dieser wurde wohl durch private Probleme und später durch langwierige vorbereitende Verhandlungen, insbesondere über die Länge der Einladungslisten, verschoben. Aus den Briefen Kleins sind viele Details zu erfahren. So schrieb er Max Noether:

„Solch' eine Mathematikerversammlung ist doch eine üble Sache. Du wirst gehört haben, daß Mayer sich verlobt hat. Nun schreibt mir Mayer vor einigen Tagen, daß er Pfingsten Hochzeit machen werde, daß er deßhalb weder an der Versammlung noch an dem Comité werde Theil nehmen können ... Er schlägt als Ersatzmann Von der Muehll vor ..." [Cod. Ms Klein XII Nr. 543]

Der Leipziger Mathematiker Karl Von der Mühll (1841–1912) nahm die Komitee-Mitgliedschaft an. Im März (Ostern) 1872 reiste Felix Klein nach Berlin und berichtete darüber am 30. März sowohl seinem österreichischen Studienfreund – aus der Berliner Zeit – Otto Stolz (1842–1905) (vgl. [Binder]) als auch Max Noether, der wegen des Todes seiner Mutter verhindert war mitzureisen. Klein schrieb an Noether, daß er bereits acht Tage in Berlin weilte und noch weitere acht Tage bleiben will, weil für die kommende Woche die Zusammenkunft der Mathematiker geplant sei. Die Terminverschiebung war zu diesem Zeitpunkt schon sicher:

„... müssen wir wohl den Gedanken, diese Pfingsten die Versammlung zu Stande zu bringen, fallen lassen. Man denkt vielmehr an nächste Ostern" [UBG Cod. Ms Klein XII Nr. 544].

Als besonders wichtig wurde es betrachtet, „... die alten Herren zu gewinnen" [Nr. 544]. Am 6. April konnte Klein schließlich an Noether schreiben:

„... Local-Versammlung veranstaltet, die von circa 50 Mathematikern besucht war, und haben derselben unser Project vorgelegt. Die großen Herren waren anwesend und hat namentlich Weierstrass seine Betheiligung, wenn ihn nicht ganz unvorhergesehene Umstände verhinderten' zugesagt. Das Heranziehen der Berliner scheint also gelungen, ohne daß ich glaube, uns etwas vergeben zu haben." [UBG. Cod. Ms Klein XII Nr. 548].

In Berlin wurde das Vorbereitungskomitee für die geplante große Mathematikerversammlung noch erweitert. Auf Kleins Wunsch trat Emil Lampe (1840–1918) „als Corrector am Crelle'schen Journal" bei, außerdem Carl Ohrtmann für das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" und Ludwig Kiepert (1846–1934), der zu diesem Zeitpunkt in Freiburg wirkte. Kiepert war gemeinsam mit Klein nach Berlin gekommen.

Eine weitere Vorversammlung fand im September 1872 in Göttingen statt. Vorbereitend darauf schrieb Klein am 28. August 1872 an Mayer:

„Es wird ... nöthig, ... die Vorberathung für die Mathematikerversammlung zum Abschlusse zu bringen ... Ohrtmann präparirt zu dem Zwecke eine Comité-Versammlung im Laufe des September; die Wahl des Ortes und Festsetzung der Zeit läßt er mir frei; da habe ich ihm denn in einem Briefe ... als Ort Göttingen, als Zeit den 22. September, einen Sonntag vorgeschlagen. Maßgebend war der Umstand, daß Clebsch von hier nicht fort kann und doch gern an den Berathungen wenigstens im Allgemeinen, participiren würde ... Ich habe Ohrtmann und Kiepert gegenüber eine Reihe Vorschläge und Fragen formuliert ...:

1) Der Zweck der Versammlung ist rein wissenschaftlich, nicht pädagogischer Art.

2) Die Form ist die bewußte anspruchslose ohne Vorträge etc. aber mit einem ausgearbeiteten Programm, welches eben die Vorversammlung festzusetzen hat.

3) Die Einladung erfolgt durch ein nunmehr aufzusetzendes Circular. Sie ist an Alle Universitäts und Polytechnikenlehrer zu schicken; aber welcher Modus ist bei den Gymnasiallehrern einzuhalten?

4) Die Absendung der Einladungen erfolgt nun Weihnachten; Antwort ist bis Ende Februar erforderlich etc. etc.

5) Jedes Comité Mitglied wird gebeten, darüber nachzudenken, was sonst berathen werden muß oder unternommen werden kann" (vollständig abgedruckt in [Tobies, Rowe, S. 65f.])

Nachdem Clebsch plötzlich im November 1872 neununddreißigjährig an einem Diphtheritisanfall verstorben war, wurde beschlossen, die Vorbereitungen der Mathematikerversammlung dennoch fortzusetzen. Das Komitee hatte eine sehr lange Liste von 600 Namen aufgestellt, an welche Einladungen versandt werden sollten. Obwohl Noether entschieden für eine Reduzierung der Liste eintrat, während die Berliner keine Einschränkungen wünschten, ist daran das groß angelegte Vorhaben ersichtlich. Klein schrieb darüber am 14. Dezember 1872 an Noether:

„Mein Programm ist: Einigung der deutschen Mathematik, auch ihrer isolirten Mitglieder, sofern sie von wirklichem Interesse belebt sind. Aber dieses Programm kann nicht auf der ersten Versammlung seinem ganzen Umfange nach gelöst werden, und die Weise, daß man, um alle brauchbaren Elemente einzuladen, Alles mitnimmt, ist unpraktisch. Ich bin vielmehr lieber zu exclusiv, als daß ich den wissenschaftlichen Charakter des Ganzen in Gefahr bringen wollte. Erst mag sich ein tüchtiger Kern bilden, dann werden in späteren

Zeiten von selbst die außerhalb noch befindlichen Kräfte sich anschließen. Ich habe ihm [Klein meinte Ohrtmann, dem er das Programm entwickelte R. T.] schließlich vorgestellt, daß unser Plan und sein Gelingen auf einem von verschiedenen Seiten geschlossenen Compromisse beruhe und daß sich bei solchen Gelegenheiten der Einzelne der Gesammtheit gegenüber immer etwas bequemen müsse."

Klein schlug nun vor:

„1.) Die erste Liste bleibt bestehen und Ihr also gebt nach. Es ist das eigentlich, was ich jetzt wünsche, obgleich ich eine kleinere Liste für zweckentsprechender halte. Warum? Um des lieben Friedens willen, um nicht einen bösen Gegensatz zwischen Universitäts- und Gymnasiallehrer zum neuen Ausdrucke gelangen zu lassen.
oder:

2) Es findet eine Reduction der Liste statt, deren Odium ich auf mich nehme. Ich würde das aber nur thun, wenn ich der Zustimmung der übrigen Comité-Mitglieder oder wenigstens ihrer rückhaltlosen Erlaubniß sicher wäre. Die zu erhalten, scheint mir schwer, da noch Mayer, Schubert[1]), Riecke, Neesen[2]) in Betracht kommen und diese jedenfalls mehr für Vorschlag 1) sind. Ich mag vor allen Dingen nicht den glücklichen Zusammenschluß gefährden, so der einmal gelungen ist und dem ich hohe Bedeutung für die Entwicklung unserer Wissenschaft beilege" [Cod. Ms. Klein XII Nr. 559].

Dies alles schrieb ein 23jähriger Mathematiker, der im Oktober sein erstes Ordinariat an der Universität Erlangen angetreten hatte, dort seine berühmte Erlanger Programmschrift vorgelegt [Klein 1872] [Rowe 1983] und sein Unterrichtsprogramm am 6. Dezember in seiner Erlanger Antrittsrede [Jacobs] [Rowe 1985] entwickelt hatte. Zu dieser Zeit hielt er Vorlesungen und Übungen, förderte Mathematiker, die durch Clebschs Tod zu ihm nach Erlangen gekommen waren, kümmerte sich um den Nachlaß von Clebsch, leitete die Ausarbeitung einer wissenschaftlichen Biographie über diesen Mathematiker. Er wurde am 9. Dezember 1872 Mitglied der Physicalisch-medicinischen Societät Erlangen und beteiligte sich aktiv an deren Sitzungen [UA Erlangen].

Kleins organisatorische Begabung und sein Denken für die Gesamtentwicklung der Mathematik traten schon in diesen Jahren deutlich hervor.

Hinsichtlich der Mathematikerversammlung führte er schließlich eine Einigung herbei. Während einer Zusammenkunft in Leipzig reduzierte er gemeinsam mit Mayer und Ohrtmann die bisherige Liste der Einzuladenden. Er informierte Noether am 4. Januar 1873:

„Wir haben 250 von den 600 Namen gestrichen, darunter alle reinen Astronomen und Physiker" [UBG, Cod. Ms Klein XII Nr. 561].

---

[1]) Hannibal Hermann Schubert (1848–1911) war mit Klein eng befreundet, „entdeckte" während seiner Gymnasiallehrerzeit in Hildesheim (1872–1876) Adolf Hurwitz (1859–1919) als mathematisches Talent und schickte ihn nach dem Abitur zum Studium zu Felix Klein an die TH München.

[2]) Die Physiker Eduard Riecke (1845–1915) und Friedrich Neesen (1849–1923) kannte Klein bereits seit seiner Studienzeit in Bonn. Sie waren während seiner Privatdozententätigkeit ebenfalls in Göttingen. Vgl. dazu [Lorey 1916, S. 191].

Zusätzlich vereinbarten sie, einigen Mathematikern noch besondere Briefe zu schreiben, um sie privat einzuladen. Die entsprechende Zuteilung der Namen schrieb Klein am 25. Januar 1873 sowohl an Noether als auch an Mayer. Im Brief an Adolph Mayer heißt es:

„Bezüglich der Versammlung scheint es nothwendig, noch an diejenigen Herren, die uns besonders wichtig scheinen, persönlich zu schreiben. Auf Grund von Vorschlägen von Kiepert, Noether möchte ich Sie bitten, an Richelot, Heine, Aronhold die bez. Mittheilungen zu richten, während Kiepert – die Berliner

Noether – Fuchs, Schwarz, Hesse
Brill – Christoffel, Reye, Weber
ich – Lipschitz, Fiedler, Graßmann, Schlaefli

„übernommen haben" [Tobies, Rowe, S. 70].

Jedoch erschien nicht einer dieser besonders eingeladenen Mathematiker. Es kamen insgesamt 52 Wissenschaftler. In Anbetracht der Tatsache, daß diese Größenordnung schon bei der Berliner Vorversammlung erreicht worden war und die Zahl der Eingeladenen weitaus beträchtlicher war, könne wir das angestrebte Ziel als nicht erreicht ansehen.

Von den 52 Wissenschaftlern waren 29 im Alter bis zu 32 Jahren, 7 über 55 Jahre alt. 25 Teilnehmer hatten durch Studium, Promotion, wissenschaftliche Tätigkeit engen Kontakt zur Universität Göttingen. 8 Mathematiker gehörten zum Berliner Kreis des „Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik" und des „Archivs für Mathematik und Physik". Es beteiligten sich außerdem 6 Lehrer aus anderen Orten und 8 ausländische Mathematiker (3 Ungarn, 2 Dänen, je einer aus Belgien, Italien und Norwegen). Mit A. Mayer und Karl Von der Mühll aus Leipzig, welche seit 1873 dem Redaktionskollegium der „Mathematischen Annalen" angehörten, sowie Moritz Pasch (1843–1930) aus Gießen und Rudolf Sturm (1841–1919) aus Darmstadt, welcher mit Brill und Klein befreundet war, beteiligten sich weiterhin vier Professoren außerhalb der Zentren Göttingen und Berlin.

Der bewußt angestrebte übergreifende Charakter über die verschiedenen mathematischen Schulen wurde nicht in vollem Maße erreicht. Alexander Brill führte auf der Versammlung aus:

„Freilich, wenn die Versammlung dieser gewichtigen Stellung sich erfreuen, wenn sie den Charakter tragen soll einer solchen, welche die ganze Wissenschaft und alle Gebiete umfaßt, welche über den Parteien und den Privatinteressen steht und deren einzige Einseitigkeit vielleicht in einem ausgeprägten nationalen Bewußtsein gefunden wird –, so muß die gesamte deutsche Mathematik ohne Unterschied der Richtungen ihre unverkümmerte Teilnahme dem Unternehmen zuwenden" [Bericht 1873, S. 21].

Wenn sich Klein in verschiedenen Briefen auch recht zufrieden mit dem Ergebnis der Versammlung zeigte und insbesondere eine bessere Abstimmung über die im „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" zu publizierenden Referate erreicht werden konnte, so gaben er und seine Freunde doch das Vorhaben auf, zukünftig separate Versammlungen zu organisieren. Klein und Mayer beschlossen im Oktober 1874, dafür jede weitere Initiative zu unterlassen. Klein schrieb darüber am 24. Oktober 1874 an Moritz Abraham Stern (1807–

1894), der als einer der älteren Mathematiker an der Göttinger Versammlung teilgenommen hatte:

„Hier in Leipzig soll ich mit Ohrtmann und Enneper ... wegen der Mathematiker-Versammlung berathen. Ich gehe eigentlich mit sehr getheilter Empfindung daran, denn einen glänzenden Erfolg haben wir sicher dieses zweite Mal nicht zu erwarten, und es ist wohl möglich, daß wir angesichts dieses Umstandes nach einem Wege suchen, der uns gestattet, einstweilen die Versammlung zu verschieben." [UBG Cod. Ms Klein XI Nr. 1160B]

Andererseits ist bekannt, daß für 1875 eine weitere Versammlung in Würzburg vorgesehen war. Wilhelm Lorey (1873–1955), der historische Untersuchungen auf Anregung Kleins betrieb und die Erkenntnisse aus erster Hand gewann, hat in mehreren seiner Darstellungen überliefert:

„Der Göttinger Mathematikerversammlung von 1873 sollte 1875 eine in Würzburg folgen. Diese kam nicht zustande, weil die dortigen Mathematiker erklärten abzureisen!" [Lorey 1938, S. 131] [Lorey 1916, S. 215]

In Würzburg wirkten seit 1869 Friedrich Prym (1841–1915) als Ordinarius und seit 1860 Eduard Selling (1834–1920) als Extraordinarius. Prym hatte 1863 in Berlin promoviert, Selling 1859 in München.

Das Bemühen Kleins und seiner Freunde, die schon historischen Differenzen zwischen Berliner Mathematikern und Mathematikern anderer Schulen zu überwinden, war zunächst gescheitert. Klein hatte zwar mit Ludwig Kiepert einen Schüler von Karl Weierstraß (1815–1897) für seine Ideen gewonnen, dennoch blieben Differenzen bestehen. Ludwig Kiepert, der dem Komitee der Göttinger Versammlung 1873 angehört hatte, schilderte in einem Brief vom 15. Oktober 1881 an Klein die historisch gewachsenen Aversionen:

„Mein lieber Felix!

Deine Antrittsrede habe ich mit großem Interesse gelesen und ich befinde mich mit Dir in voller Übereinstimmung. Zunächst müssen die Mathematiker der gleichen oder verschiedener Richtung von *einander* etwas halten, ehe sie Achtung in dem großen Publicum beanspruchen dürfen. Bei der persönlichen Feindschaft, wie sie zwischen Steiner und Plücker bestand, oder bei dem Achselzucken von Kronecker über Clebsch u.s.w. kommt Nichts heraus. Um so mehr freut es mich, daß Du mir, obgleich wir aus ganz verschiedenen Schulen hervorgegangen sind, Deine Freundschaft treulich bewahrt hast, und ich hoffe, daß wir mit der Zeit immer mehr gemeinsamen Boden finden werden" [UBG Cod. Ms Klein, X, Nr. 84].

Hinter diesen Aversionen verbargen sich unterschiedliche Ansichten über den Wert bestimmter mathematischer Methoden. Differenzen bestanden zwischen Mathematikern, die mit analytischen bzw. synthetischen Methoden in der Geometrie arbeiteten sowie zwischen einer anschaulich geometrisch-physikalischen Denkrichtung und der zunehmend dominierenden Arithmetisierungstendenz. Aversionen zwischen Mathematikern verschiedener Arbeitsrichtungen blieben lange Zeit erhalten. (Vgl. auch [Biermann, S. 305ff.])

Nachdem die separaten Einigungsbestrebungen in den 70er Jahren gescheitert waren, blieben die Versammlungen deutscher Naturforscher und Ärzte das

Gremium, in welchem sich Mathematiker im nationalen Rahmen trafen. Diese Versammlungen bildeten in den folgenden Jahren den Ausgangspunkt für einen engeren Zusammenschluß der Mathematiker.

2 Der Zusammenschluß innerhalb der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte

Die zunächst mit den separaten Versammlungen verfolgten Ziele, einen breiten Kreis von Wissenschaftlern zu vereinen und der Vorbereitung entsprechender Zusammenkünfte mehr Aufmerksamkeit zu widmen, wurden ab Mitte der 70er Jahre wieder innerhalb der Naturforscherversammlungen angestrebt. Das Gelingen des Vorhabens war jedoch in erheblichem Maße von der örtlichen Tagungsleitung abhängig. Als Höhepunkte ragen die Zusammenkünfte der Sektion 1877 in München und 1886 in Berlin hervor.

Felix Klein hat als Organisator der Sektion 1877 bewußt ein breites inhaltliches Programm mit starker internationaler Beteiligung gestaltet. In einem Brief vom 17. Januar 1877 an den italienischen Mathematiker Luigi Cremona (1830–1903), der schließlich die Sektion mit seinem Vortrag einführte, betonte Klein „... die Absicht, dieses Mal weniger als sonst Gewicht zu legen auf die Festlichkeiten als auf den wissenschaftlichen" Inhalt [Nachlaß L. Cremona].

Wenn auch die Teilnahme an den Naturforscherversammlungen in der Folgezeit sehr unterschiedlich war, so haben die Mathematiker die in den 70er Jahren ausgedrückte Absicht nie ganz aus den Augen verloren. Ludwig Kiepert, der sich an der Naturforscherversammlung beteiligte, welche vom 18. bis 24. September 1881 in Salzburg stattfand, schrieb am 30. September 1881 an Felix Klein, daß er mit ihm unbedingt die Frage erörtern möchte:

„Was für Vorbereitungen sind für die nächsten Naturforscher-Versammlungen zu treffen, damit die Sitzungen der mathematischen Section wirklich Anregungen und Förderung herbeiführen?" [UBG Cod. Ms Klein X, Nr. 83].

Klein nahm nach einem gesundheitlichen Zusammenbruch im Jahre 1882 erst 1886 wieder an einer Naturforscherversammlung teil. Er erlebte die in Berlin stattfindende Veranstaltung als einen besonderen Höhepunkt. In einem Brief an Max Noether schilderte er seine Eindrücke und verband diese mit den Ideen aus den 70er Jahren:

„Weierstraß und Fuchs fehlten, so dass Kronecker das Präsidium hatte. Von unseren näheren Freunden war eigentlich nur Lie da (mit dem ich mich verabredet hatte). Dafür aber eine überaus grosse Menge anderer Mathematiker: obenan Sylvester, Lipschitz, Schröter etc. etc., auch Mittag-Leffler, Cantor, Frobenius. Ich habe das angenehme Gefühl, manche persönliche Verbindung gewonnen zu haben, die über das bloss Conventionelle hinausging, und wollte nun, unter dem frischen Eindruck stehend, bei Dir und den Anderen den Gedanken anzeigen, dass wir doch in Zukunft solche Zusammenkünfte eifriger benutzen mögen, als seither geschah; vielleicht dass dann jener Plan der nach 1873 missglückte, schließlich doch noch zum Gelingen kommt, jedenfalls aber, dass wir uns selbst in solchen Kreisen, die uns sonst ferner stehen, mehr zur Geltung bringen" [UBG Cod. Ms Klein XII Nr. 610].

Als jedoch Georg Cantor schließlich in Heidelberg 1889 erreichte, daß die Übereinkunft getroffen wurde, eine engere Vereinigung der deutschen Mathematiker vorzubereiten, verhielt sich Klein zunächst skeptisch. Leo Königsberger, Georg Cantor und Walther Dyck (1856–1934), ein Schüler Kleins, hatten in Heidelberg den Auftrag übernommen, eine derartige Vereinigung mit einem Zirkular vorzubereiten. In diesem Zirkular wurden die Mathematiker aufgefordert, sich 1890 an der Versammlung in Bremen zu beteiligen. Klein schrieb kurz nach Erhalt des Zirkulars an Adolph Mayer:

„Was sagen Sie zu dem G. Cantorschen Circular? Ich stehe diesen Plänen auf Neuerrichtung eigener Mathematikerversammlungen einstweilen noch skeptisch gegenüber; die Erlebnisse 1872–74 lasten noch zu schwer auf mir; ich würde auch ablehnen, jetzt bei dieser Sache einen hervorragenden Antheil zu haben. Dagegen meine ich, daß wir jedenfalls Alle an der Berathung in Bremen participiren sollten. Wenn Sie und Lie von Leipzig kommen, Lindemann von Königsberg etc. etc., dann würden wir durch unsere bloße Zahl ein solches Schwergewicht haben, daß alle Beschlüsse, die eine unheilvolle Concentration unserer Wissenschaft bezwecken könnten, hintangehalten werden würden" [Tobies, Rowe, S. 176].

Klein, der sich doch relativ rasch entschloß, der neuen Vereinigung seine Ziele mit aufzuprägen, hat im Vorfeld der Bremer Versammlung einen intensiven Briefwechsel geführt. Offiziell versuchte er, im Hintergrund zu bleiben. Durch das Bemühen, viele seiner Freunde und Schüler zur Teilnahme in Bremen zu bewegen, die Zusammensetzung eines zu bildenden Vorstandes vorzuschlagen und die neue Vereinigung weiterhin an die Naturforscherversammlungen zu binden, hat er dennoch entscheidenden Einfluß ausgeübt.

Am 16. Mai 1890 schrieb Klein an Adolf Hurwitz (1859–1919):

„... ich will doch berichten, daß ich mich in der Zwischenzeit zur Theilnahme an der Bremer Versammlung habe bestimmen lassen. Wenn einmal, so will ich natürlich auch sorgen, dass die Versammlung, was Mathematiker angeht, ordentlich zu Stande kommt.

Ich habe mich also an das Localcomité gewandt und die Antwort erhalten, dass in diesem Jahre innerhalb der Sectionen noch nach altem Brauch verfahren wird, dass dann aber 4 Herren gewählt werden sollen, um die nächstjährigen Sectionsverhandlungen vorzubereiten. Da gilt es also, zahlreich am Platze zu sein, um die Wahlen so zu dirigiren, wie wir das für zweckmässig halten. Theilen Sie [das] doch bitte auch Lindemann, Hilbert und Eberhard mit" [UBG Mathematiker-Archiv].

Am 15. Juni 1890 schrieb er schon über konkrete personelle Vorstellungen an Paul Gordan. Beide waren als Clebsch-Schüler 1873 in die Redaktion der „Mathematischen Annalen" eingetreten und hatten während ihrer gemeinsamen Zeit in Erlangen 1874/75 und darüber hinaus wissenschaftlich eng zusammengearbeitet.

Klein schrieb:

„Bremen läßt sich jetzt so an, daß ich befürworte

1) Möglichst zahlreichen Besuch seitens unserer Freunde, womöglich so, daß seitens derselben jetzt schon Vorträge angemeldet werden ...

2) Später Wahl eines 4 gliedrigen Comités aus den in Bremen anwesenden Herren, welche die nächstjährige math. Section zweckmässig vorbereiten sollen. Ich beantrage 2 norddeutsche und 2 süddeutsche Mitglieder, also etwa einerseits G. Cantor und (wenn Kronecker

nicht zu haben sein sollte) Schubert, andererseits Dyck und Königsberger, oder wenn K.[önigsberger] nicht kommt, wie ich fast glaube, Lüroth ..." (abgedruckt in [Tobies, Rowe, S. 19]).

Leo Königsberger nahm tatsächlich nicht teil. Jacob Lüroth (1844–1910) stammte aus der Clebsch-Schule, fuhr aber nicht nach Bremen. Georg Cantor wurde natürlich als wesentlicher Initiator der neuen Vereinigung zum Vorsitzenden gewählt. Die anderen Vorschläge von Klein gingen in Erfüllung. Der Hamburger Gymnasiallehrer Hannibal Schubert und Walther Dyck wurden Mitglieder des Vorstandes. Als Vierter trat der Berliner Emil Lampe hinzu.

Bemerkenswert ist, daß sich Klein bereits in der Vorbereitungsphase in einer Frage gegenüber Cantor durchsetzen konnte. Es handelte sich um die Entscheidung, ob die neue Vereinigung sich innerhalb der Naturforscherversammlungen oder als separates Gremium bilden sollte. Während Cantor für eine Trennung von der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte von Beginn an plädierte, trat Klein für ein Beibehalten der Beziehung zu den Naturforschern ein. Einerseits hatte er noch lebhafte Erinnerungen an das Scheitern regelmäßiger separater Tagungen in den 70er Jahren. Andererseits erhellen Briefe und Reden, welcher Wert auf einen engen Kontakt zu den Vertretern der Anwendungsgebiete gelegt wurde, was im Rahmen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte besser möglich war.

Klein tauschte sich mit einer Reihe von Mathematikern über dieses Problem aus. In einem Brief vom 24. April 1890 teilte er Paul Gordan die Ansicht von Heinrich Weber (1842–1913) zu dieser Frage mit:

„Heute Antwort Weber. Er ... ist übrigens dagegen die Mathematikerversammlungen von den Naturforscherversammlungen abzutrennen. Mir scheint das auch am Rationellsten. Dann braucht Mauerblümchen nicht engagiert zu werden!" [UBG Cod. Ms Klein XII Nr. 494].

Mit dem Mauerblümchen meinte Felix Klein die Mathematik, welche durch eine Trennung von den Naturforscherversammlungen isoliert werden konnte.

Am 20. Juni 1890 berichtete er Gordan jedoch über die gegenteilige Ansicht von Georg Cantor:

„Ich selbst habe mich in Bremen schon mit Vortrag über die ‚hypergeometrische Reihe' angemeldet ...
Mit Cantor bin ich z. Z. uneins. Er will die ‚math. Vereinigung' gleich anfangs von den Naturforschern ablösen, was ich für einen Unsinn halte; ich will erst ablösen, wenn wir hinreichend stark geworden sind oder wenn es zu sehr einengt" [UBG Cod. Ms Klein XII Nr. 497].

Mit Dyck korrespondierte Klein ebenfalls über dieses Problem. Dyck antwortete am 22. Juni 1890:

„Was den Anschluß an die Naturforscherversammlung betr. so glaube ich hat Cantor überhaupt eine „Deutsche Mathematische Gesellschaft" nach Art der Pariser ‚Societé math. de France' im Auge. Auch ich glaube, daß es besser ist, sich zunächst an die Organisation der Naturforscherversammlung zu halten, besonders weil es doch wol nur so möglich sein wird, Fühlung mit den Physikern zu behalten" [UBG Cod. Ms Klein VIII Nr. 681].

Klein konnte sich gegenüber Cantor durchsetzen. Die „Bremer Beschlüsse“, mit welchen der Gründungsakt der Deutschen Mathematiker-Vereinigung am 18. September 1890 vollzogen wurde, drückten aus: „Die mathematisch-astronomische Abteilung der Gesellschaft soll ... einen *erweiterten Kreis ihrer Betätigung* erhalten, *welcher die gesamten wissenschaftlichen Interessen der Mathematik umfaßt*“ [Verh. GDNÄ 1890, S. 13]. Die Bindung der Mathematiker-Vereinigung an die Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte war durch organisatorische Veränderungen innerhalb der Gesellschaft, die vor allem von den Medizinern Rudolf Virchow (1821–1902) und Wilhelm His (1831–1904) ausgingen, erleichtert worden (vgl. [Degen]).

An der Gründung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung beteiligten sich 33 Mathematiker. Neun davon hatten bereits an der Mathematiker-Versammlung 1873 in Göttingen teilgenommen. 14 gehörten Universitäten an, 11 Technischen Hochschulen, einer kam von einer Bergakademie und sieben lehrten an höheren Lehranstalten. Die Altersstruktur sah wie folgt aus: sechs bis zu 32 Jahre, neun von 33 bis 40, acht von 41 bis 50 und vier über 50 Jahre, von weiteren sieben, insbesondere weniger bekannten Lehrern, konnten die Lebensdaten nicht ermittelt werden. Mit Felix Klein (seit 1886 in Göttingen), Heinrich Weber (1892–1895 in Göttingen), David Hilbert (1862–1943) (seit 1895 in Göttingen), Hermann Minkowski (1864–1909) (1902–1909 in Göttingen) und Carl Runge (1856–1927) (seit 1904 in Göttingen) gehörten Mathematiker zu den Gründern, die für längere oder kürzere Zeit maßgebliche Vertreter der bedeutenden Göttinger mathematischen Schule waren. Wenn man bedenkt, daß gerade zu diesem Zeitpunkt die Berliner mathematische Schule ihre Vorrangstellung einbüßte, Ernst Eduard Kummer, Karl Weierstraß und Leopold Kronecker (1823–1891) ihren Zenit überschritten hatten, aber z. T. die neue Vereinigung lebhaft begrüßten, so ist die Einschätzung berechtigt, daß die Gründung von den bedeutendsten deutschen Mathematikern getragen wurde. Die Analyse der Mitglieder, welche der Vereinigung bis Ende 1891 beitraten (insgesamt 205), belegt dies ebenfalls. Unter ihnen befand sich die Mehrzahl der Unversitätsprofessoren, u. a. die Berliner Leopold Kronecker, Georg Frobenius (1849–1917), Friedrich Schottky (1851–1935), die Leipziger Otto Hölder (1859–1937), Adolph Mayer, Wilhelm Scheibner (1826–1908), Von der Mühll, außerdem Leo Königsberger, Jacob Lüroth, Max Noether, Moritz Pasch (1843–1930), Paul Stäckel (1862–1919), Otto Staude (1857–1928) u. a. Richard Dedekind (1831–1916) schickte der Jahresversammlung 1891 in Halle ein Manuskript und trat 1892 bei [Jber. d. dt. Math.-Verein. **1** (1891/92)].

Die Satzungen formulierten die Aufgabe sehr allgemein, um alle verschiedenen Gebiete gleichmäßig zu fördern. Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung stellte sich die Aufgabe, „... die mathematische Wissenschaft nach allen Richtungen zu fördern und auszubauen, ihre verschiedenen Teile und zerstreuten Organe in lebensvolle Verbindung und Wechselwirkung zu setzen, ihre Stellung im geistigen Leben der Nation nach Gebühr zu heben, ihren Vertretern und Jüngern Gelegenheit zu ungezwungenem kollegialischen Verkehr und zum Austausch von Ideen, Erfahrungen und Wünschen zu bieten“ [Statuten, S. 12].

Sowohl Cantor als auch Klein zeigten sich mit den ersten Ergebnissen sehr zufrieden. Wenn sie auch unterschiedliche Interessen verfolgt hatten – Cantor vor allem eine gerechte Beurteilung und Verbreitung seiner mengentheoretischen Erkenntnisse im Auge hatte und Klein die lange Zeit vernachlässigten Anwendungen der Mathematik wieder ins rechte Licht zu rücken suchte –, so entsprach die vielseitige Orientierung ihren Absichten.

Klein formulierte seine ersten Eindrücke über die Bremer Versammlung in einem Brief vom 19. Oktober 1890 an Adolf Hurwitz:

„Ich sehe die Bremer Beschlüsse ... als durchaus günstig und glückverheissend an. Cantor weiß ... die Sache so zu wenden, dass ihr Weierstrass, Kronecker und jetzt auch Neumann gleichförmig sympathisch gegenüber stehen! Es wird jetzt darauf ankommen, die Tage in Halle möglichst vielseitig auszugestalten. Da bin ich dann auch wieder auf dem Platze, während ich mich sonst gerade im Interesse des Unternehmens – damit dasselbe ja nicht irgendwelchen Parteiencharakter erhält – zurückhalte" [UBG Mathematiker-Archiv].

Trotz der vorsichtigen Zurückhaltung Kleins hatten wohl einige seine dominante Figur im Hintergrund nicht übersehen. Ein Brief Georg Cantors vom 21. September 1891 an den Weierstraß-Schüler Wilhelm Thomé (1841–1910) drückte die aus der Berliner Schule herrührende Abneigung gegenüber Klein aus. Cantor schrieb:

„Die Begründung Deines Nichtkommens nach Halle (Abneigung gegen die Kleinsche Mache) leuchtet mir nicht ein. Denn es kann Dir nicht unbekannt sein, daß *meine* Aversion gegen die Kleinsche Art der deinigen nicht nachsteht; ich müßte also, wenn Du Recht hättest, aus demselben Grunde streiken" [Purkert, Ilgauds, S. 126].

So konnte es nicht ausbleiben, daß es innerhalb des Vorstandes zum Zerwürfnis zwischen Cantor und Klein-Anhängern kam und Cantor schließlich 1893 vom Vorsitz zurücktrat. Bereits am 11. Juni 1891 hatte Dyck an Klein geschrieben:

„Man wird ja jedenfalls im nächsten Jahr die Wahl des Ausschusses noch etwas eingehender behandeln müssen wie im vergangenen – wo es sich wesentlich um einen geschäftlichen Ausschuß handelte. Ob wol G.[eorg] C.[antor] in der Folge gerade der geeignete Mann ist? Ich möchte es ein wenig bezweifeln" [UBG Cod. Ms Klein VIII].

W. Dyck, der im ersten Vorstand der DMV als Schriftführer tätig war, erhielt bei vielen organisatorischen Aufgaben kaum Unterstützung von den anderen Vorstandsmitgliedern. Deshalb wandte er sich in vielen Briefen an Felix Klein um Rat. Gemeinsam überlegten sie, ob Klein Cantors Vorschlag aufgreifen solle, bereits in Halle 1891 einen allgemeinen Vortrag zu halten, um „... die völlige Ignorirung unserer Wissenschaft in Bremen" im Kreise der Naturforscher zu überwinden [Cod. Ms Klein VIII Nr. 687]. Sie beschlossen, einen derartigen Vortrag zu verschieben, um „... in dem engeren Kreise unserer Fachgenossen nicht wieder allerlei Mißdeutungen erfahren ..." zu müssen [Nr. 687]. Dyck beriet mit Klein die Statuten der DMV, die in Halle beschlossen wurden, die konkrete Art der Beziehungen zur Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte sowie das Problem der Mitgliedergewinnung. In einem Brief vom 1. November 1890 schilderte Dyck, wie die Namensliste vorbereitet wurde:

„Betreffs der Versendung des Berichtes [von Bremen, R. T.] aber die schwere Frage: Welche Grenze soll man ziehen?

1) Hochschul Dozenten Deutschlands, Oesterreichs, der Schweiz + Deutsch Rußlands.

2) Gymnasiallehrer + sonstige publizierende Math.

Betreffs 2) sitzt seit fast 3 Wochen ein recht gewissenhafter Student in meinem Zimmer + macht Auszüge aus dem *Jahrbuch.* Wir hatten in Bremen + Hamburg besprochen, daß dies die einzige Möglichkeit ist, die wissenschaftl. publizirenden Mathematiker zu erfahren. Wir sind dabei bis Bd. 11 (1879) zurückgegangen. – Ich hatte aber nicht geglaubt, daß das eine Auswahl von etwa (mindestens) 1000! Namen würde. Nun habe ich den betr. Studiosus veranlaßt, die Namen zu streichen, die lediglich in elementaren Lehrbüchern, in Philosophie, Meteorologie etc. gemacht haben. Es bleibt trotzdem noch eine Unsumme gänzlich unbekannter Namen übrig. – Und andererseits auch mancher sehr mißliebig bekannter – z. B. F. W. Schüler u. derartiges Caliber. Wie soll man nun weiter sieben? Es hat doch keinen Zweck, daß wir alle diese Unbekannten Größen einladen? Andererseits entgehen uns viele Namen jüngerer eifriger Leute, deren man nur habhaft werden kann, wenn man an die Hochschul Docenten die Aufforderung richtet, Namen ihrer Schüler mitteilen zu wollen ...“ [Cod. Ms Klein VIII Nr. 688].

Kleins Vorschlag, nur an die Hochschulprofessoren zu schreiben, lehnte Dyck ab, da sonst die Gymnasiallehrer nicht bedacht würden. Für diesen Kreis wurde schließlich eine Auswahl nach persönlichem Ermessen angestrebt (vgl. [Cod. Ms Klein VIII Nr. 689]).

Kleins Beitrag und intensive Mitwirkung an der Entwicklung der DMV in den ersten Jahren zeigt u. a. eine handschriftliche Randbemerkung, welche er auf einem Brief Dycks vom 30. März 1891 notierte:

„Verständigung mit Hertz.
Hilbert. Referat über algebr. Functionen? Wer sonst?
Schriftliche Anträge von Dyck.
Eröffnungsvortrag? – Zuletzt doch Cantor. (Cantors eigene Ideen: Leipzig)
Werbung noch ausstehender Persönlichkeiten.
(Bruns, Lipschitz, Wirtinger. Die math, Physiker.)“
[UBG Cod. Ms Klein VIII, Nr. 702].

Klein forderte nicht nur persönlich Mathematiker, Astronomen und Physiker zum Beitritt auf, sondern regte sehr viele umfassende Berichte an. Dazu gehörten nachweislich die Referate von Hilbert „Die Theorie der algebraischen Zahlkörper“, von Franz Meyer (1856–1934) „Über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie“, von Alexander Brill und Max Noether über „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit“, von Arthur Schoenflies (1853–1928) über „Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten“, von Heinrich Burkhardt (1861–1914) „Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen“; auch die „Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimalrechnung von Euler bis auf die heutige Zeit“ erstellte Georg Bohlmann (1869–1928) im Auftrage von Klein. Dessen besonderes Bestreben bestand darin, die Mehrzahl der mathematischen Gebiete auf diese Weise untersuchen zu lassen und dabei auch die Anwendungsgebiete der Mathematik zu berücksichtigen. Die ersten derartigen Referate von Lebrecht Henneberg (1850–1933), Fritz Kötter (1857–1912), August Föppl (1854–1924) beruhen maßgeblich auch auf Kleins Anregung. So schrieb z. B. Henneberg, der 1878 für Mathematik an die TH Darmstadt berufen worden war und dort von 1880 bis 1920 das Gesamtgebiet der Mechanik vertrat, der zu den Gründungsmitgliedern der DMV gehörte, in einem Brief vom 3. April 1891 an Klein:

„Wenn der neu gegründete mathematische Verein sich nicht auf die reine Mathematik beschränken, sondern seine Thätigkeit auch auf die angewandte Mathematik und speciell auf die technische Mechanik ausdehnen will, so kann ich einen solchen Entschluß nur begrüssen. Ich bin der Ansicht, dass der mathematische Verein in dieser Richtung einen bedeutenden und heilsamen Einfluss auszuüben im Stande ist. Ich sehe es als einen Uebelstand an, wenn die Mathematiker sich zu sehr von den Anwendungen fern halten und glaube auch, dass diese Anwendungen zu vielen Problemen Veranlassung geben, welche des Studiums eines Mathematikers wohl würdig sind. Wenn daher von mir eine Bethätigung in der angegebenen Richtung gewünscht wird, so bin ich gern bereit, meine Kräfte zur Verfügung zu stellen und ein grösseres Referat für die Versammlung im Jahre 1892 zu übernehmen." [UBG, Cod. Ms Klein IX Nr. 679]

Entsprechend Kleins Vorschlag stimmte sich Henneberg mit Fritz Kötter über die Referate zur technischen Mechanik ab. Während Kötter die Lehre vom Erddruck[3]) ausarbeitete, widmete sich Henneberg der Theorie der einfachen Fachwerke[4]), welche er später in ein Referat über graphische Statik für den Band Mechanik des Projektes „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen" auf Wunsch von Klein einbrachte.[5])

Klein hatte zu diesem Zeitpunkt keine offizielle Funktion in der DMV. Er trat erstmals 1896 in den Vorstand ein und übernahm zum ersten Male 1897 den Vorsitz. Die Briefe dokumentieren jedoch sein sehr frühes Eingreifen in die Tätigkeit der DVM, welches in den folgenden Jahren noch weiter forciert wurde.

Es ist schon verständlich, daß Cantor schließlich den Vorsitz niederlegte, insbesondere nach Differenzen mit Dyck im Verlaufe der Vorbereitung der Versammlung 1892, welche wegen einer Epidemie nicht stattfand und 1893 in München durchgeführt wurde.

Nach dem Ausscheiden von Cantor wurde für jedes Jahr ein neuer Vorsitzender gewählt. Die Wahl von Paul Gordan (1894), Heinrich Weber (1895), Alexander Brill (1896), Felix Klein (1897), Aurel Voß (1898), Max Noether (1899), David Hilbert (1900), Walther Dyck (1901), Franz Meyer (1902), Felix Klein (1903), Heinrich Weber (1904) zeigt für lange Zeit eine Dominanz der Clebsch-Schüler und der mit Klein mehr oder weniger verbundenen Mathematiker.

Der hohe Anteil, welcher dem Wirken Kleins zukam, ist z. B. aus einem Briefe ersichtlich, den Max Noether am 1. Januar 1899 an Klein richtete:

---

[3]) Kötter, F.: Bericht über die Entwicklung der Lehre vom Erddruck. Jber. d. dt. Math.-Verein. **2** (1891–92) 75–154.

[4]) Henneberg, L.: Über die Entwicklung und die Hauptaufgaben der Theorie der einfachen Fachwerke. Jber. d. dt. Math.-Verein. **3** (1892–93) 567–599.

[5]) Henneberg, L.: Die Graphische Statik der starren Körper (1903). In: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Bd. IV, Teil 1. Leipzig: B. G. Teubner 1901–1908, 345–434.

„Indem ich mit dem heutigen Tage das Amt des Vorsitzenden der D.-Math. Vereinigung für 1899 übernehme, ist es mein Erstes, mein großes Bedauern auszudrücken, daß diese Uebernahme gerade mit Deinem Ausscheiden aus dem Vorstande zusammenfällt und ich daher persönlich Dein officielles Mitwirken vermissen muß. Aber ich spreche nicht nur in meinem Namen, sondern in dem des Vorstandes, wenn ich dem Bedauern über Dein Scheiden aus dem Vorstande Ausdruck gebe. Du bist mehr als irgend ein Anderer mit der ganzen Entwicklung unserer jungen Vereinigung eng verbunden, die bei ihrer Jugend der führenden Hand noch sehr bedarf; Deine Initiative hat ihr in den letzten Jahren die Wege gewiesen und auf diese Fürsorge sieht sie sich auch weiter angewiesen, trotz Deines ... Scheidens. So hoffen wir, oder vielmehr, wir möchten bei dem Interesse, das Du für die Vereinigung hegst, bestimmt darauf rechnen, daß Du den Vorstand und seine Aufgabe auch weiterhin mit Deinem Rathe durch Wort und That unterstützt; und insbesondere dürfen wir bestimmt darauf hoffen, Dich auch bei der Münchener Versammlung, deren Programm Du in den Grundsätzen im Wesentlichen entworfen hast, in erster Linie mitthätig zu sehen – weniger bei der Vorbereitung als bei der Durchführung. Jedenfalls nimm den Dank des Vorstandes für all' Deine Bemühungen" [UBG Cod. Ms. Klein XI Nr. 120].

Das lange angestrebte Ziel, alle verschiedenen mathematischen Richtungen einschließlich ihrer Anwendungen, aber auch Fragen des mathematischen Unterrichts, gleichermaßen zu fördern, wurde im Rahmen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung unter dieser Leitung ganz bewußt verfolgt. Nach dem Vorschlage von Klein wurde eine Organisation der Naturforscherversammlungen geschaffen, welche insbesondere die mathematische und physikalische Sektion zu einer engeren Zusammenarbeit durch eine vorbereitende Absprache der Programme führte. Die Beziehungen zu den Anwendungen, insbesondere zu den Naturwissenschaften nicht zu verlieren, war eines der wichtigsten persönlichen Anliegen Kleins. Hatte er noch 1891 abgelehnt, einen allgemeinen Vortrag in Halle zu halten, so ergriff er 1894 mit Freude die Gelegenheit zu einem öffentlichen Vortrag auf der Wiener Naturforscherversammlung. Nach der Absage von Hermann Helmholtz (1821–1894) war Klein das Angebot zu einem derartigen Vortrag unterbreitet worden. Klein schrieb am 12. August 1894 an Paul Gordan, daß er mit diesem Vortrag beabsichtige, die Stellung der Mathematik „... innerhalb des Kreises der verwandten Naturwissenschaften zu sichern" [UBG Cod. Ms Klein XII Nr. 515].

In diesem Vortrag, den er mit dem Titel „Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik" versah, erläuterte er noch einmal, warum die Bindung der Mathematiker-Vereinigung an die Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte erfolgt war:

„Ich spreche hier nicht als einzelner, ich spreche im Namen der sämtlichen Mitglieder der *mathematischen Vereinigung,* welche sich im Anschluß an die Gesellschaft der Naturforscher und Ärzte vor einigen Jahren gebildet hat, und die, wenn nicht formal, so doch tatsächlich mit ihrer ersten Sektion identisch ist. Wir empfinden, daß unter dem Einflusse der modernen Entwicklung unsere fortschreitende Wissenschaft je länger je mehr Gefahr läuft, sich zu isolieren. Die enge Beziehung zwischen Mathematik und theoretischer Naturwissenschaft, wie sie zum Segen beider Gebiete seit dem Emporkommen der modernen Analysis bestand, droht zu zerreißen. Hier liegt eine große, täglich wachsende Gefahr. Dem wollen wir Mitglieder der mathematischen Vereinigung nach Kräften entgegenwirken. In diesem Sinne war es, daß wir uns an die Naturforscherversammlung angeschlossen haben. Wir wünschen von Ihnen im persönlichen Verkehr zu lernen, wie sich der wissenschaftliche Gedanke in Ihren Disziplinen entwickelt, und wo dementsprechend der Ansatzpunkt für das Eingreifen des Mathematikers gegeben sein mag. Wir wünschen umgekehrt, von Ihrer Seite für unsere Auffassungen und Bestrebungen einiges Interesse und Verständnis zu finden" [Klein, 1923, S. 482f.].

Die Bindung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung an die Naturforscherversammlungen blieb noch lange Zeit erhalten. Als die Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte 1913 beschloß, ab 1920 nur noch alle zwei Jahre zu tagen, trafen sich die Mathematiker und Physiker (Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Reichsverband deutscher mathematischer Gesellschaften und Vereine (1921 gegr.), Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik (1922 gegr.), Deutsche Physikalische Gesellschaft, Gesellschaft für technische Physik (gegr. 1919)) auch in den Zwischenjahren am gemeinsamen Tagungsort. Das besondere Bemühen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung um gute Beziehungen zur theoretischen Physik ist verschiedentlich dokumentiert. Klein hat u. a. mit Ludwig Boltzmann (1844–1906) derartige Absprachen getroffen. Diese Tradition setzte sich auch später fort. Zum Beispiel hat Robert Fricke (1861–1930), ein Neffe Kleins, die Diskussion um die Einsteinsche Relativitätstheorie 1920 in Bad Nauheim angeregt. Fricke war in diesem Jahr Vorsitzender der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Sein Bericht an Felix Klein vom 28. September 1920 über diese Diskussion soll als interessantes Dokument abschließend zitiert werden:

„Die sensationelle Relativitätssitzung nahm einen überaus glänzenden Verlauf, der mich in die grösste Begeisterung versetzt hat. Die Entwicklung wurde zu einem Triumph Einsteins, der wirklich ein überlegener Geist ist. Ich bin stolz darauf, zu dieser Sitzung den Anstoss gegeben zu haben, und freue mich nach der Sitzung, Einstein persönlich meine Empfindungen habe aussprechen können. Nächst Einstein machte Weyl den tiefsten Eindruck, aber auch der vierte Vortrag über die Rotverschiebung des Spektrums wirkte [darunter in der Handschrift F. Klein: Laue?] ausserordentlich und erregte sicherlich auch bei Einstein selbst grosses Interesse. Bei der Diskussion war die Überlegenheit Einsteins über Lenard selbst dem Laien fühlbar ..." [UBG Cod. Ms Klein IX Nr. 286 F].

Diese Beziehung zu den Physikern lag ganz im Interesse Kleins, der Albert Einstein (1879–1955) noch 1920 selbst aufgefordert hat, als einer der Herausgeber in die Redaktion der „Mathematischen Annalen" einzutreten (vgl. hierzu [Tobies, Rowe S. 29]). Diese Bezugnahme zu den wichtigsten Anwendungsgebieten der Mathematik entsprach den Intentionen bei der Gründung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung innerhalb der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte.

Bibliographie

Bericht über die Mathematiker-Versammlung zu Göttingen am 16., 17. und 18. April 1873. In: Gutzmer 1904, S. 19–24

Biermann, K.-R.: Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität, 1810–1933. Berlin: Akademie-Verlag 1988

Binder, Ch.: Über den Briefwechsel Felix Klein – Otto Stolz. Wiss. Zschr. E.-M.-Arndt-Univ. Greifswald, math.-nat. Reihe, **38** (1989) 4, 3–7

Degen, H.: Krise und Wandlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte 1886–1891. Naturwissenschaftliche Rundschau **11** (1958) 9, 327–337

Gericke, H.: Aus der Chronik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Jber. d. dt. Math.-Verein. **68** (1966) 46–74

Gutzmer, A.: Geschichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von ihrer Begründung bis zur Gegenwart dargestellt. Leipzig: B. G. Teubner 1904

Jacobs, K. (Hrsg.): Felix Klein, Handschriftlicher Nachlaß. Erlangen 1977

Klein, F.: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen: Verlag von Andreas Deichert 1872

Klein, F.: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. 3. Berlin: Springer 1923

Krazer, A.: Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung in den Jahren 1903–1920. Jber. d. dt. Math.-Verein. **31** (1922) 2. Abb., S. 21–34

Lorey, W.: Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts. IMUK-Abhandlung, Bd. III, H. 9. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner 1916

Lorey, W.: Der deutsche Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e. V. 1891–1938. Frankfurt a. M.: Verlag Otto Salle 1938

Nachlaß L. Cremona. Bibliothek der Ingenieurschule Rom, Handschriftenabteilung

Purkert, W.; Ilgauds, H.-J.: Georg Cantor 1845–1918. Vita Mathematica. Bd. 1. Hrsg. v. E. A. Fellmann. Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser 1986

Rowe, D. E.: A Forgotten Chapter in the History of Felix Klein's Erlanger Programm. Historia Mathematica **10** (1983) 448–454

Rowe, D. E.: Felix Klein's „Erlanger Antrittsrede": A Transcription with English Translation and Commentary. Historia Mathematica **12** (1985) 123–141

Schappacher, N.; Kneser, M.: Fachverband - Institut - Staat. Streiflichter auf das Verhältnis von Mathematik zu Gesellschaft und Politik in Deutschland seit 1890 unter besonderer Berücksichtigung der Zeit des Nationalsozialismus. In: Fischer, G.; Hirzebruch, F.; Scharlau, W.; Törnig, W. (Hrsg.): Ein Jahrhundert Mathematik 1890–1990, Festschrift zum Jubiläum der DMV, S. 1–82. Dokumente zur Geschichte der Mathematik Band 6, Braunschweig/Wiesbaden: F. Vieweg 1990

Statuten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Jber d. dt. Math.-Verein. **1** (1890–91) 12–13

Tobies, R.: Zur Geschichte deutscher mathematischer Gesellschaften. In: Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der DDR, 1986, H. 2/3, S. 112–134

Tobies, R.: Die gesellschaftliche Stellung deutscher mathematischer Organisationen und ihre Funktion bei der Veränderung der gesellschaftlichen Wirksamkeit der Mathematik (1871–1933), Habilitationsschrift (Manuskriptdruck, 260 S. u. 49 S. Anhang) Universität Leipzig 1985

Tobies, R.; Rowe, D. E. (Hrsg.): Korrespondenz Felix Klein - Adolph Mayer. Auswahl aus den Jahren 1871–1907. Teubner-Archiv zur Mathematik, Bd. 14. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft KG 1990

Tobies, R.; Volkert, K.: Mathematik auf den Versammlungen deutscher Naturforscher und Ärzte 1843–1890. Schriftenreihe zur Geschichte der Versammlungen Deutscher Naturforscher und Ärzte. Hrsg. v. D. v. Engelhardt und H. Schipperges. Stuttgart: Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft 1991 (in Vorbereitung)

Universitätsarchiv Erlangen, Handschriftenabteilung, Akten der Physicalisch-medicinischen Societät Erlangen

Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, Nachlaß Felix Klein = UBG Cod Ms Klein

Universitätsbibliothek Göttingen (UBG), Handschriftenabteilung, Mathematiker-Archiv

Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte = Verh. GDNÄ

Frau Dr. sc. Renate Tobies
Karl-Marx-Universität
Karl-Sudhoff-Institut für Geschichte
der Medizin und der Naturwissenschaften
Augustusplatz 9
O-7010 Leipzig

(*Eingegangen 30. 7. 1990, revidiert 6. 9. 1990*)

Buchbesprechungen

Radon, J., Gesammelte Abhandlungen, (2 Bände) hrsg. von der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, unter Mitwirkung von Peter Manfred Gruber, Edmund Hlawka, Wilfried Nöbauer, Leopold Schmetterer. Basel, Boston: Birkhäuser Verlag. Wien 1987. Bd. 1: xiii, 377 S. Bd. 2: vii, 487 S., insges. DM 360,–

Zum 100. Geburtstage von Johannes Radon, am 16. 12. 1987, gab die Österreichische Akademie der Wissenschaften die Gesammelten Abhandlungen ihres langjährigen Mitgliedes und Sekretärs heraus. Die zweibändige Ausgabe ist – bis auf die Arbeiten Radons – zweisprachig: deutsch und englisch. Die Arbeiten Radons wurden nach folgenden Themen zusammengefaßt und von den nachstehend genannten Fachvertretern kommentiert:

(1) Biographisches (E. Hlawka, Wien), (2) Maß- und Integrationstheorie, Potentialtheorie (H. Bauer, Erlangen), (3) Matrizen (Olga Taussky, Pasadena), (4) Konvexität (M. Gruber, Wien), (5) Radontransformation (L. Schmetterer, Wien), (6) Variationsrechnung (H. Sagan, Raleigh), (7) Geometrie (Hans R. Müller, Braunschweig). Band 2 enthält noch folgende Beiträge Radons: (8) Weitere Arbeiten, (9) Vorträge, (10) Nachrufe von Johann Radon.

In (1) wird der Lebenslauf Radons gleichermaßen lebendig und dokumentarisch dargestellt. Mit einer genauen Schilderung seines akademischen Werdeganges wird zugleich die Entstehung des mathematischen Lebenswerkes Radons skizziert. Die nachfolgenden Kommentare (2)–(7) widmen sich der historischen und sachlichen Erläuterung der einzelnen Arbeiten Radons (welche im folgenden mit der gleichen Nr. wie in der Edition zitiert werden).

Erfreulicherweise machen viele Kommentatoren auf zwischen den Themenkreisen bestehende Querverbindungen aufmerksam. Wertvoll sind ferner die über Lehrbuchliteratur hinausgehenden Hinweise auf moderne Ergebnisse ebenso wie die historischen Sachbemerkungen. Unter letzteren vermißt der Ref. allerdings Informationen über die wissenschaftlichen Wechselbeziehungen Radons zu seinen Lehrern und Kollegen.

Daß nicht alle Gebiete, welche durch Radons Arbeiten befruchtet wurden, gesondert kommentiert werden konnten, liegt teilweise in der Natur der Sache, teilweise an der gewählten Aufteilung. Der erste Grund trifft zu auf die Funktionalanalysis, welche vor allem die Themenkreise (2) und (5) gleichzeitig tangiert, der zweite auf die Klassische Analysis und auf die Naturwissenschaften. Von den drei Arbeiten Radons zur Klassischen Analysis werden in (2) die Arbeit [36] über Kubatur ausführlich sowie die Arbeit [26] über eine Integraldarstellung für das Fehlerglied bei Approximationsverfahren nur kurz besprochen, die Arbeit [40] über den Bernsteinschen Approximationssatz für analytische Funktionen in (8) unkommentiert wiedergegeben. Viele Aspekte der Radontransformation wurden durch die in (5) zugänglich gemachte Literatur nicht erfaßt. Radons Arbeit [16] über statische Gravitationsfelder findet sich unkommentiert unter (8).

Die Gelegenheit, das Lebenswerk von Johann Radon in der Vielgestaltigkeit seiner Ideen und seiner zum Teil bis heute andauernden Fortentwicklungen zu würdigen, wurde – unbeschadet des eindrucksvollen Panoramas, welches Herausgeber und Kommentatoren mit der vorliegenden Edition lieferten – auf einigen Gebieten nur teilweise wahrgenommen.

Erlangen

D. Kölzow

Shafarevich, I. R., Collected Mathematical Papers, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1988, 780 S., hard cover, DM 184,–

Nur wenige Mathematiker unserer Zeit haben einen Einfluß auf die Entwicklung der Algebra und insbesondere der algebraischen Zahlentheorie und algebraischen Geometrie gehabt wie I. R. Shafarevich (1923), um so erfreulicher ist es, daß seine gesammelten Werke bereits zu seinen Lebzeiten erschienen sind, versehen mit eigenen Anmerkungen. Für den Referenten, der gewohnt ist, diese Werke in Russisch zu lesen, erscheint es fast als ein Sakrileg, sie nun in Englisch und nur in Englisch publiziert zu sehen, aber eine zweisprachige Ausgabe wäre wohl zu aufwendig gewesen. Über die Beschäftigung mit der Herausgabe der eigenen Werke schreibt Shafarevich im Vorwort: "To go over my old papers and to recollect the hopes and ideas connected with them turned out to be much more interesting and edifying to me than I could have imagined. I was especially struck by the following observation: how often the published paper was only a small part of far more ambitious plans! Some papers now appear to me as remainders of a shipwreck, although the reader probably will not notice it. I wonder whether this is so with other mathematicians. Can it be a subconscious device analogous to Machiavelli's 'arcieri prudenti' who chose a much higher aim in order to hit a remote object?"

Das Schaffen von I. R. Shafarevich läßt sich in zwei Perioden einteilen: Die erste reicht bis zum Jahre 1965 und enthält hauptsächlich Arbeiten über algebraische und p-adische Zahlkörper. Die zweite Periode schließt an die erste an. In ihr überwiegen Arbeiten zur algebraischen Geometrie. Als weiteres wichtiges Thema treten auf: Liesche Algebren in endlicher Charakteristik, Zusammenarbeit mit A. I. Kostrikin. Tatsächlich fallen in die erste Periode vier Arbeiten über die Arithmetik Abelscher Mannigfaltigkeiten, die eine Mittelstellung einnehmen und Zeugnis ablegen von der Auseinandersetzung eines algebraischen Zahlentheoretikers mit der algebraischen Geometrie, die zum Teil durch Vorlesungen von E. Kähler in Moskau initiiert war. Die ersten drei dieser Arbeiten sind (kurze) Dokladi-Noten. In der vierten „Principal homogeneous spaces over a function field" wird u. a. die Rolle der Gruppe aller prinzipalen homogenen Räume, die lokal überall einen Punkt über dem Grundkörper enthalten, geklärt. Diese Gruppe wird heute als Tate-Shafarevich-Gruppe bezeichnet. Sie erlangte Berühmtheit in der Arithmetik elliptischer Kurven.

Wir kommen nun zu Anmerkungen über andere Arbeiten der ersten Periode. Die erste Arbeit stammt aus dem Jahre 1943. Es werden die topologischen Körper charakterisiert, in denen man eine Bewertung einführen kann. Die damals schon bekannten Sätze über die Struktur lokal kompakter Körper folgen leicht.

Bereits die zweite Arbeit von 1946 stellt einen mathematischen Paukenschlag dar. Sie beantwortet eine Frage, die H. Hasse 1947 in seiner Arbeit „Invariante Kennzeichnung relativ-abelscher Zahlkörper mit vorgegebener Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers" (Abh. der Deutschen Akademie der Wissenschaften Berlin, Math. -Nat. Kl. 5–56) gestellt und in den einfachsten Spezialfällen gelöst hat. Dabei geht es um den Kozyklus, welcher zu der Gruppenerweiterung gehört, die sich aus einem Klassenkörper über einem relativ normalen Erweiterungskörper ergibt. Die Antwort ist verblüffend einfach:

Der Kozyklus ist das Bild der kanonischen Klasse bei der Reziprozitätsabbildung. Die Gedankengänge von Shafarevich wurden später von A. Weil weitergeführt zu einer Theorie, die heute unter dem Begriff Weilsche Gruppe eine zentrale Rolle in den Langlands-Vermutungen spielt.

Das Ergebnis der dritten Arbeit „On p-extensions" besagt in heutiger Sprechweise, daß die Galoissche Gruppe der maximalen p-Erweiterung eines p-adischen Zahlkörpers K, der die p-ten Einheitswurzeln nicht enthält, die freie Pro-p-Gruppe mit $[K:Q_p]+1$ Erzeugenden ist. Diese Arbeit war Anregung und Ausgangspunkt für eine Reihe von Arbeiten verschiedener Autoren, die schließlich im Fall $p \neq 2$ zur vollständigen Aufklärung der Struktur der Galoisschen Gruppe der algebraischen Abschließung eines p-adischen Zahlkörpers führten. Im Fall $p = 2$ sind nur Teilergebnisse bekannt.

In der folgenden Arbeit „A general reciprocity law" wird eine Konstruktion des Hilbert-Symbols angegeben, welche das genaue Analogon zur Definition des Residuums eines Abelschen Differentials darstellt. Die Arbeit kann als Lösung des neunten Hilbertschen Problems angesehen werden. Der Wert des Hilbert-Symbols wird allerdings mit einer zum gleichen Zweck in einem Spezialfall von Artin und Hasse eingeführten Funktion und deren Verallgemeinerungen berechnet, so daß eine direkte Ausrechnung des Symbols im allgemeinen schwierig ist. Die Ausdrücke von Shafarevich besitzen jedoch gute funktorielle Eigenschaften bezüglich zahmer Erweiterungen. Das hat ihre Benutzung bei der Strukturbestimmung der Galoisschen Gruppe der algebraischen Abschließung eines p-adischen Zahlkörpers ermöglicht.

Ein weiterer Höhepunkt des zahlentheoretischen Werkes von Shafarevich sind die vier Arbeiten in den Isvestija Akademii Nauk **18** (1954), in denen die Existenz einer normalen Erweiterung eines algebraischen Zahlkörpers mit gegebener auflösbarer Galoisgruppe bewiesen wird. In der ersten dieser Arbeiten wird ein Satz von A. I. Skopin für beliebige Primzahlen p benutzt, der von Skopin nur für $p \neq 2$ bewiesen wird. Dies, obgleich vielen Mathematikern seit langem bekannt und als unwesentlich erkannt, da die bei Shafarevich gebrauchte Information auch im Falle $p = 2$ gültig ist, hat in jüngster Zeit zu Kritik geführt. Shafarevich ist des großen Interesses halber auf diese Frage in Matematitscheskie Zametki **45** (1989) eingegangen.

Der Vortrag „Algebraic number fields" auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Stockholm 1962 betrachtet Fragen über algebraische Zahlkörper parallel zu entsprechenden Fragen über algebraische Funktionenkörpern. Der körpertheoretische Teil der Lösung des Klassenkörperturmproblems wird angegeben (Beweise werden in der folgenden Arbeit ausgeführt) und die verbleibende gruppentheoretische Vermutung, welche zur negativen Lösung des Klassenkörperturmproblems führt, wird formuliert. Diese Vermutung wurde dann erst ein Jahr später von Shafarevich, zusammen mit E. S. Golod, in der Arbeit „On class field towers" gelöst. Ich erwähne eine weitere Vermutung dieses Vortrags: Es gibt nur endlich viele algebraische Funktionenkörper in einer Unbestimmten über einem algebraischen Zahlkörper von fixiertem Geschlecht $g > 1$, dessen verzweigte Primdivisoren in einer fixierten endlichen Menge von Primdivisoren liegen (Analogon zum Satz von Hermite). Parschin erkannte später den Zusammenhang dieser Vermutung (die in der vorliegenden schriftlichen Fassung als Satz ausgesprochen ist) mit der Mordellschen Vermutung. Beide Vermutungen wurden später von Faltings bewiesen.

Eine weitere Frage von Shafarevich, ob es einen Funktionenkörper in einer Veränderlichen über dem Körper Q gibt, der keine verzweigten Primdivisoren hat und vom rationalen Funktionenkörper $Q(x)$ verschieden ist, konnte 1985 negativ in allgemeinerer Form von Fontaine und Abraschkin beantwortet werden (Analogon zum Satz von Minkowski).

In der folgenden Arbeit „Extensions with given ramification points", auf die wir bereits hingewiesen haben, wird gezeigt, daß die Galoissche Gruppe G_S der maximalen p-Erweiterung eines algebraischen Zahlkörpers mit vorgegebener Verzweigungsstellenmenge S nicht „sehr viele" Relationen hat. Es seien mir einige persönliche Worte zur Entstehung dieser Arbeit erlaubt:

Es muß wohl im Frühjahr 1962 gewesen sein, daß Shafarevich Berlin besuchte. Die Idee zur Abschätzung des Relationenranges von G_S kam ihm während einer Aufführung des Rosenkavaliers von Richard Strauß in der Deutschen Staatsoper. Am nächsten Tag holte er sich aus unserer Institutsbibliothek die Arbeit von Faddejew und Skopin, in der ein neuer Beweis für den Satz von Kawada gegeben wird, daß die Galoissche Gruppe der maximalen p-Erweiterung eines p-adischen Zahlkörpers k Relationenrang 1 hat, wenn k die p-ten

Einheitswurzeln enthält. Ausgehend von dieser Arbeit fand Shafarevich die Abschätzung des Relationenranges im globalen Fall. Indem ich diesen Entstehungsprozeß miterlebte, erhielt ich die Anregung, die globalen Relationen (teilweise) als von lokalen Relationen herkommend zu verstehen, und so zu einer erweiterten Strukturaussage über die Gruppen G_S zu gelangen.

Dieser Bericht über die erste Periode der Werke von Shafarevich ist bereits zu umfangreich für eine Besprechung im Jahresbericht der DMW geworden.

Ich fasse mich daher und aus Nichtkompetenzgründen betreffs der zweiten Periode kurz.

Die Beschäftigung mit der Theorie der komplexen algebraischen Flächen, die in der Schule von Shafarevich mit der Aufarbeitung der Ergebnisse der Italienischen Schule begann („Algebraic surfaces“ (with Averbukh e. a.)) konzentrierte sich für Shafarevich bald hauptsächlich auf das intensive Studium von K-3-Flächen bei beliebiger Charakteristik. Hierzu gibt es in seinen Werken 10 Arbeiten mit unterschiedlichen Koautoren.
Die vorliegende Sammlung enthält drei nichtfachliche Arbeiten:

1. Impressions from the International Mathematical Congress in Edinburgh,
2. Über einige Tendenzen in der Entwicklung der Mathematik.
3. Zum 150. Geburtstag von Alfred Clebsch.

Die zweite Arbeit gehört schon zum geschichtsphilosophischen Werk des Verfassers, dessen vollständige Herausgabe gegenwärtig in der Sowjetunion zur Diskussion steht. Die dritte Arbeit gilt der Würdigung eines Mathematikers, der vorher in der mathematischen Geschichtsschreibung stiefmütterlich behandelt wurde.

Berlin H. Koch

Kani, E. J., Smith, R. A. (Eds.), The Collected Papers of Hans Arnold Heilbronn (Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts), New York: John Wiley & Sons 1988, xvi + 608 S., $55

In diesem schön ausgestatteten Band sind alle 41 mathematischen Abhandlungen von Hans Heilbronn, beginnend mit seiner ersten Arbeit, die Primzahlen in Polynomwerten behandelt, in geschichtlicher Reihenfolge abgedruckt. Die meisten behandeln zahlentheoretische Fragen (u. a. das Gaußsche Klassenzahlproblem und das Waringsche Problem), aber es gibt auch funktionentheoretische Arbeiten und eine gruppentheoretische. Dazu kommen noch zwei Nachrufe (auf Landau und Hadamard), Kommentare zu Hardys zahlentheoretischen Abhandlungen aus dem I. Band von dessen *Collected Papers* und eine Besprechung von Heckes *Mathematischen Werken.* Das Buch beginnt mit einem kurzem *curriculum vitae* aus Heilbronns Dissertation und mit einem von J. W. S. Cassels und A. Fröhlich verfaßten Nachruf. Darauf folgen drei längere (von Olga Taussky, J. C. Shepherdson und J. H. H. Chalk verfaßte) und sechs kürzere Erinnerungen an Heilbronn, die viel zu dem Verständnis seiner Persönlichkeit beitragen.

Von großem Wert sind die ausführlichen mathematischen Kommentare, die am Ende des Bandes zu finden sind. Zu dem Kommentar zu der Arbeit Nr. 28 könnte man noch zufügen, daß in der Familie (b) nur endlich viele Körper mit der Klassenzahl 1 vorkommen. Das hat Heilbronn selbst bemerkt. In einem Brief vom 12. Juli 1971 schrieb er nämlich:

“I have known for some time that my old statement was wrong, by the following argument. Let $k_2 = Q(\sqrt{-p})$, $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, k_{2h} the Hilbert classfield of k_2, $k_6 = k_2(\xi_9 + \xi_9^{-1})$, k_{6h} the union of k_6 and k_{2h}. k_6 is ramified over k_2, k_{2h} is not; hence $\deg(k_{6h}/Q) = 6h$, and k_{6h} is not ramified over k_6. Hence the class number of $k_6 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ h)$, h denoting the class-number of k_2.”

Jeder Zahlentheoretiker, der sich an der Entwicklung dieser Wissenschaft interessiert, wird mit Freude dieses Buch in die Hand nehmen.

Wrocław W. Narkiewicz

tom Dieck, T., Transformation Groups (de Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 8), Berlin – New York: Walter de Gruyter 1987, X, 312 pp., Cloth, DM 128,–

Dieses Buch ist die zweite Monographie über kompakte Transformationsgruppen; die erste ist G. E. Bredon: *Introduction to compact transformation groups.* Academic Press: New York 1972. Obgleich derselbe Untersuchungsgegenstand Gemeinsamkeiten in wichtigen Sätzen und Grundtendenzen erzwingt (was bei Monographien schon dadurch gegeben ist, daß sie unabhängig von anderen Quellen lesbar sein sollen), ist es in erster Linie die Verschiedenheit der beiden Monographien, die ins Auge springt. Während das Bredonsche Buch darauf aus ist, mit möglichst spartanischen Mitteln zu den wichtigsten Ergebnissen (über glatte Wirkungen, Wirkungen mit wenigen Bahnentypen und über die Kohomologiestruktur von Fixpunkten bei Wirkungen auf Räumen, die zu Sphären verwandt sind) zu kommen und diese für den Anwender aus anderen Zweigen der Mathematik übersichtlich zusammenzustellen, steht bei tom Dieck die Darlegung der ideenreichen, tiefen Methoden im Vordergrund, mit denen man heutzutage den kompakten Transformationsgruppen zu Leibe rückt. Der tom Diecksche Standpunkt ist somit allgemeiner, kategorieller; es wird aber vom Anwender mehr Engagement, mehr Vertiefung bei der Lektüre verlangt, ja man wird aufgefordert, durch Adaptierung der präsentierten Methoden die benötigten speziellen Einsichten selbst zu gewinnen. Da der Verfasser wichtige, seit dem Erscheinen des Bredonschen Buches erzielte Fortschritte in seinem Text eingearbeitet hat und sie in der 362 Titel umfassenden Bibliographie dokumentiert, ist das tom Diecksche Buch für jeden unentbehrlich, dem in seiner Forschung Liesche Transformationsgruppen begegnen.

Das Buch ist in vier Kapitel gegliedert. Im ersten („Foundations"), werden die Begriffe, Hilfsmittel und Beispiele bereitgestellt, die jeder benötigt, der über Transformationsgruppen arbeiten will. Bei den meisten Dingen wird die Kompaktheit nicht vorausgesetzt, sie gelten für jede Liesche Transformationsgruppe. Natürlich kommen Hauptfaserbündel und ihre klassifizierenden Räume, klassifizierende Räume für Familien von Untergruppen und Beziehungen zur Differentialgeometrie durch glatte Wirkungen zur Sprache. Die Äquivarianz als tragendes Prinzip wird vorgestellt und der kategorielle Gesichtspunkt in den Vordergrund gerückt (zum Beispiel universelle Überlagerung einer Transformationsgruppe als Funktor). Verallgemeinerung der klassischen Darstellungstheorie von Moduln über Gruppenringen zur Algebra in Funktorkategorien wird besprochen und beim Studium projektiver Moduln und algebraischer K-Theorie angewandt.

Im zweiten Kapitel („Algebraic Topology") wird für kompakte Liegruppen die klassische Hindernistheorie auf die äquivariante Situation übertragen, und es werden (ausgehend von naiven Spektren) äquivariante Homologie- und Kohomologietheorien definiert; als konkretes Beispiel wird die Bredonsche (Ko-)Homologie eingeführt. Andere wichtige Themen: Natürliche Spaltung äquivarianter Homotopiegruppen; der Burnside-Ring als stabile Homotopiegruppe; Begriff einer Homotopiedarstellung und der Homotopiedarstellungsgruppe.

Im dritten Kapitel („Localizations") stehen die äquivariante Borelsche Bündelkohomologie, Methoden ihrer Berechnung, sowie insbesondere verschiedene Formen des Lokalisationssatzes dieser Kohomologie samt Anwendungen im Vordergrund.

Das letzte Kapitel („The Burnside Ring") ist, wie schon sein Titel andeutet, dem Studium des Burnsideringes einer kompakten Lieschen Transformationsgruppe G im

Rahmen universeller additiver Invarianten gewidmet. Der Burnsidering von G wird durch Kongruenzen zwischen Eulercharakteristiken von Fixpunktmengen charakterisiert, das Spektrum seiner Primideale wird bestimmt, und seine idempotenten Elemente werden mittels der Untergruppenstruktur von G beschrieben. Außerdem werden Endlichkeitssätze für Isomorphietypen von Untergruppen kompakter Liegruppen bewiesen und Lokalisierungen von Homologietheorien, die Moduln über dem Burnsidering B sind, bezüglich Komplemente der Primideale von B erörtert. Am Ende des Kapitels wird die Induktionstheorie als ein (auf die Theorie induzierter Darstellungen zurückgehender) Teil der axiomatischen Darstellungstheorie vorgestellt.

Erlangen K. Strambach

Wähling, H., Theorie der Fastkörper, Essen: Thales Verlag 1987, pp. 393, hard cover, DM 190,–

Dieses Buch ist wohl als eine Monographie über Fastkörper gedacht; (das wird äußerlich auch dadurch nahegelegt, daß es als erster Band von „Thales Monographs" erschienen ist). Die Theorie der Fastkörper ist ein reizvolles, wohl abgegrenztes Gebiet, welches eng mit der Theorie scharf zweifach und scharf dreifach transitiver Gruppen zusammenhängt; sobald eine scharf zweifach bzw. scharf dreifach transitive Permutationsgruppe G einer vernünftigen Klasse angehört (sei sie etwa lokal endlich oder lokal kompakt mit nichttrivialer Zusammenhangskomponente der Eins), so läßt sich G als eine „eindimensionale affine Gruppe" über einem Fastkörper bzw. eine Gruppe „gebrochen linearer Transformationen" über einem Karzel-Tits-Feld (einem speziellen Fastkörper) ansehen.

Die Fastkörper sind Strukturen mit zwei Operationen, für die, abgesehen von einem Distributivgesetz, alle Körperaxiome gelten. Ihre algebraische Theorie (und diese nimmt sich der Verfasser vor; die geometrischen Anwendungen als Koordinatenbereiche projektiver Ebenen bleiben zurecht draußen) ist trotz ihrer achtzigjährigen Geschichte so übersichtlich geblieben, daß nach meiner Meinung eine Monographie alle bis heute gewonnenen wesentlichen Ergebnisse enthalten müßte.

Das Buch ist in fünf Kapitel und einen Anhang gegliedert. Im ersten Kapitel (Grundlagen) werden zunächst axiomatische Fragen erörtert, lineare Räume über Fastkörpern eingeführt, die Eigenschaften der multiplikativen Gruppen studiert und Erweiterungen sowie Planearität von Fastkörpern angesprochen. Das zweite Kapitel (Der allgemeine Dickson-Prozeß) ist der ausführlichen Besprechung des in der Theorie der Fastkörper dominierenden Konstruktionsprinzips in seiner allgemeinsten Form gewidmet. Ist der dieser Konstruktion zugrundeliegende Fastring ein Körper F und die dort vorkommende Abbildung, Kopplung, ein Homomorphismus der multiplikativen Gruppe von F in die Automorphismengruppe von F, so heißen die so gewonnenen Fastkörper Dicksonsch; ihre Theorie wird im dritten Kapitel behandelt. Das vierte Kapitel dient der Klassifikation endlicher, ja lokal endlicher Fastkörper. Das abschließende Kapitel (Scharf mehrfach transitive Permutationsgruppen) stellt die bereits eingangs erwähnten Zusammenhänge zwischen scharf zweifach bzw. scharf dreifach transitiven Transformationsgruppen und den Fastbereichen bzw. Karzel-Tits-Feldern her; im endlichen, ja im lokal endlichen Fall wird damit eine Klassifikation scharf zweifach bzw. scharf dreifach transitiver Permutationsgruppen geliefert.

Der Anhang umfaßt hundert Seiten. In ihm werden alle für die Lektüre notwendigen algebraischen Begriffe so behandelt, daß das Buch bereits von Studenten ab drittem Semester ohne größere Mühe gelesen werden kann. Dies ist übrigens nach meiner Meinung der vorstechendste Vorzug der Wählingschen Darstellung; sie ist so ausführlich und zuverlässig, daß man mit dem Buch in der Hand ohne jede Vorbereitung eine Vorlesung über Fastkörper halten kann, ohne sich je in der Argumentationskette verlassen zu fühlen. Ich kenne kaum Monographien, von denen ich ebenfalls behaupten könnte, von der ersten bis zur letzten Zeile unmittelbar durchsichtige Beweise zu liefern. Das liebevolle Ausbreiten der Beweiseinzelheiten hat allerdings den Verfasser daran gehindert, in seiner Monographie Klassifikationssätze lokal kompakter Fastkörper zu behandeln, deren Wichtigkeit denen der endlichen wohl gleichrangig ist. Auf S. 96 wird immerhin zitiert, daß jeder nichtdiskrete lokal kompakte Fastkörper der Charakteristik 0 Dicksonsch ist. Es muß zwar berücksichtigt werden, daß für total unzusammenhängende nichtdiskrete lokal kompakte Fastkörper dieser Klassifikationssatz erst 1987 (also im Erscheinungsjahr der Monographie) in der Habilitationsschrift von Th. Grundhöfer bewiesen wurde (vgl. auch Th. Grundhöfer, Forum Math. **1,** 81–101 (1989)), doch für zusammenhängende lokal kompakte Fastkörper existieren seit langem Beweisvarianten (J. Tits, Comment. Math. Helv. **30** (1956) 234–240 und H. Salzmann, Adv. Math. **2** (1987) 1–60, § 7, insbesondere S. 55–56), die nach meiner Meinung eine Integration in den Text erlaubten, ohne den Rahmen des In-sich-selbst-Ruhenden und leicht Verständlichen zu sprengen, um so mehr als der Verfasser die Kalscheuerschen Fastkörper vorstellt (S. 139). Ein anderes, in die Darstellung allerdings nicht leicht aufzunehmendes Ergebnis, welches man vermißt, ist die Existenz unendlicher Nicht-Dicksonscher Fastkörper. Die in dieser Hinsicht wegweisende Arbeit von H. Zassenhaus (Resultate Math. **11** (1987) 317–358) scheint im Detail Mängel zu haben; doch diese wurden zum Teil von Th. Grundhöfer und H. Zassenhaus inzwischen beseitigt.

Insgesamt aber möchte ich dem Wählingschen Buch bescheinigen, daß es für jeden, der sich im Umkreis der Grundlagen der Geometrie und der nichtassoziativen Algebra tummelt, sehr nützlich ist. Auch jedem, der unbeschwerte, nicht kräfteraubende Stunden mathematischer Lektüre genießen und ein interessantes Teilgebiet der Mathematik kennenlernen will, sei dieses Buch herzlich empfohlen! Ich wünsche mir, daß der Thales Verlag die durch die Veröffentlichung der Wählingschen Monographie an den Tag gelegte Politik fortsetzt, originellen, gut bearbeiteten, aber nicht in aller Munde geführten mathematischen Themen, die von den großen Häusern gemieden werden, eine publizistische Plattform zu bieten.

Erlangen K. Strambach

Fischer, W., Lieb, I., Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie (Vieweg Studium, 48, Aufbaukurs Mathematik), Braunschweig: Friedr. Vieweg und Sohn 1988, 329 S., pb, DM 64,–

Das vorliegende Buch ist eine interessante Ergänzung zu dem im selben Verlag erschienenen Band *„Funktionentheorie“* (5., neubearbeitete Auflage 1988) der beiden Autoren. Obschon der geometrischen Funktionentheorie gewidmet, unterscheidet es sich wesentlich von den diesbezüglichen klassischen Büchern, wie etwa demjenigen von G. M. Golusin (Geometrische Funktionentheorie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957). Dem Zeitgeist entsprechend wird die konforme Invarianz bzw. Struktur der zu betrachtenden Objekte stärker hervorgehoben als dies früher der Fall war. So beginnt denn Kapitel I mit den Hermiteschen Metriken und der Ahlforsschen Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas. Anschließend werden damit die Sätze von Bloch, Landau und Picard bewiesen. Kapitel II ist der analytischen Fortsetzung und den Riemannschen Flächen gewidmet, während Kapitel III eine kurze Einführung in die Potentialtheorie dieser Flächen enthält. In Kapitel IV wird mit diesen Hilfsmitteln der Uniformisierungssatz bewiesen. Hauptgegenstand von Kapitel V sind die Hardy-Räume; allerdings wird auch das Corona-

Theorem hergeleitet. Kapitel VI beinhaltet die stetige Fortsetzung konformer Abbildungen, die Schwarz-Christoffelsche Formel, sowie eine Einführung in die Modul- bzw. in die elliptischen Funktionen. Im letzten Kapitel wird zunächst die Bergmansche Kernfunktion studiert und als Anwendung der Satz von Painlevé und Warschawski bewiesen. Mit Hilfe dieses Satzes wird sodann der Hardy-Raum $H^2(G)$ näher untersucht. Abschließend werden noch die Formeln von Kerzman-Stein, die Szegö-Projektion betreffend, hergeleitet.

Wie schon das den Grundlagen gewidmete Buch „Funktionentheorie" ist auch das vorliegende sehr sorgfältig geschrieben und äußerst gut lesbar. Es kann jedem funktionentheoretisch interessierten Leser wärmstens empfohlen werden.

Erlangen H. Leutwiler

Torchinsky, A., Real-Variable Methods in Harmonic Analysis (Volume 123 in Pure and Applied Mathematics), New York etc.: Academic Press Inc. 1986, 462 pp., hb £ 59.00, pb £ 33.00

Das zu besprechende Buch gibt einen guten Einblick in das, was sich seit dem Erscheinen des klassischen Buches von E. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions* (Princeton University Press, 1970) auf diesem Gebiete der harmonischen Analysis getan hat. Ausdrücklich erwähnt seien die folgenden *Themenkreise:* Hilbert-Transformation und Multiplikatoren (Kap. V), Beschränkte mittlere Oszillation (Kap. VIII), A_p -Gewichte (Kap. IX), Singuläre Integraloperatoren (Kap. XI), Littlewood-Paley-Theorie (Kap. XII), Gutes λ-Prinzip (Kap. XIII), Hardy-Räume von Funktionen mehrerer reeller Veränderlichen (Kap. XIV) und Carleson-Maße (Kap. XV). Besonders hervorgehoben sei ferner das Kapitel XVI, Cauchy-Integrale längs Lipschitz-Kurven, in welchem der Autor unter anderem das T1-Theorem von David-Journé behandelt. Auch das letzte, potentialtheoretische Kapitel, betitelt „Randwertprobleme für C^1-Gebiete" verdient erwähnt zu werden. Die übrigen Kapitel haben eher vorbereitenden Charakter und brauchen nicht aufgeführt zu werden.

Das vorliegende Buch ist so hervorragend verfaßt, daß es auch von Studenten mittleren Semesters mit Erfolg gelesen werden kann. Zusammen mit dem eher funktionentheoretisch orientierten Buch von J. B. Garnett, *Boundet Analytic Functions* (Academic Press, 1981) läßt sich bestimmt ein schönes BMO-Seminar durchführen.

Erlangen H. Leutwiler

Krupnik, N. Y., Banach Algebras with a Symbol and Singular Integral Operators (Operator Theory, vol. 26), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser-Verlag 1987, 205 pp., hard cover, DM 106,–

Vor mehr als 50 Jahren hat S. G. Michlin bei der Regularisierung zweidimensionaler singulärer Integraloperatoren den Symbolbegriff eingeführt und ihn dann später systematisch auf solche Operatoren auch in höheren Raumdimensionen ausgedehnt. Die Symbole von Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten, ihre charakteristischen Polynome, wurden dann allgemein in die Symbole für singuläre Integrodifferentialoperatoren oder, allgemeiner, für Pseudodifferentialoperatoren ab Mitte der sechziger Jahre einbezogen. Bekannt ist seit langem bei Integralgleichungen vom Faltungstyp mit absolut integrablen Kernfunktionen K, daß ihre Fouriertransformierten $\hat{K}$ als Symbole wirkten, daß nämlich die Faltungsintegralgleichung vermöge der Fouriertransformation $\mathcal{F}$ in eine lineare algebraische Gleichung für die Transformierte $\hat{u}$ der gesuchten (absolut integrierbaren) Funktion u überging. L. Hörmander widmete sich 1960 in seiner berühmten Arbeit dem Problem der Darstellung von translationsinvarianten Operatoren durch Fouriermultiplikationsoperatoren.

Die Theorie singulärer Integralgleichungen auf Ljapunovkurvensystemen Γ in der komplexen Ebene wurde nach Vorliegen vieler klassischer Ergebnisse ihrer Fredholm-Noether-Theorie, die auf funktionentheoretischem Wege insbesondere von den sowjetischen Schulen um Gachov, Muschelischvili, Vekua, u. a. aufgebaut wurde, auf eine systematische funktionalanalytische Grundlage zunächst auf L_p- und C^α-Räumen gestellt. Dabei hat wiederum S. G. Michlin entscheidende Impulse schon 1948 gegeben. Systematisch ist eine Banachalgebraische und Symboltheorie singulärer Integraloperatoren, der Wiener-Hopf- und Toeplitz-Operatoren und ihrer Systeme von der Kischinjowschen Schule um I. Gohberg aufgebaut worden. Der vorliegende Autor besitzt daran einen gebührenden Anteil und hat auch in den letzten 15 Jahren weitere bedeutende Beiträge zum Ausbau der Theorie geliefert. Von besonderer Bedeutung sind in den letzten Jahren die Fragen nach der Beschreibung von Operatoralgebren durch einen Symbolkalkül geworden, der die Gelfand-Neumark-Theorie auf den nichtkommutativen Fall zu verallgemeinem gestattet. Es ist lange bekannt, daß eindimensionale singuläre Integraloperatoren auf Ljapunov-Kurven Γ mit stetigen Koeffizienten a, b vor dem Einheitsoperator I bzw. dem Operator S_Γ der singulären Integration in den sog. Chwedelidse-Räumen $L_p(\Gamma, \varrho)$ mit geeigneten Potenzgewichten ϱ eine kommutative Banachalgebra modulo den kompakten Operatoren bilden, dies aber bei stückweise stetigen Koeffizienten nicht mehr zutrifft. Ähnlich ist es mit den Kommutatoren von Wiener-Hopf-Operatoren, deren S'-Fouriertransformierte Kernfunktionen $\hat{K}$ nicht mehr zur Wiener-Algebra auf $\mathbb{R}$ gehören. Hier wurden vom Autor zusammen mit den anderen in den letzten zwanzig Jahren aus den sog. Präsymbolen, Symbolmatrizen für stückweise stetige Koeffizienten a, b konstruiert, die es dann wie im klassischen Fall erlaubten, aus dem Nichtverschwinden dieser sog. p, ϱ-Symbole auf die Fredholmeigenschaft des Operators zu schließen und seinen Index aus der Windungszahl des skalaren p, ϱ-Symbols oder – im Systemfall – der Determinante der Symbolmatrix zu berechnen. Es ist m. E. das große Verdienst dieses Buchautors, die vielen – besonders in sowjetischen Zeitschriften publizierten – Einzelresultate systematisch gesammelt, aufgearbeitet, erweitert und hier dargestellt zu haben. Viele Einzelergebnisse, die oft verwendet werden, wie z. B. genaue Normabschätzungen von S_Γ in bewichteten L_p-Räumen und ihre Quotientennormen, sind hier zu finden. Auch das sehr schlagkräftige „lokale Prinzip", das auf I. B. Simonenko in den Anfängen der sechziger Jahre zurückgeht, wird hier klar beschrieben und systematisch angewendet.

Im einzelnen beschäftigt sich der Autor in einem einleitenden Kapitel mit der Invertierbarkeit und damit der Fredholmeigenschaft von Matrizen von Operatoren auf n-tupeln von Banachräumen E und den Bedingungen dafür, wann der Index eines Fredholm-Systems mit dem Index der Determinante dieses Systems übereinstimmt. Dann behandelt er die exakten Normkonstanten für den Operator S_Γ der singulären Integration längs Γ. Von besonderem Interesse sind dabei wohl die L_p-Räume mit Gewichten der Form

$$\varrho(t) := (t^2+1)^{\alpha/2} \sum_{k=1}^{n} |t-t_k|^{\alpha_k} \quad \text{mit} \quad t_k \in \mathbb{R};$$

$$-1 < \alpha_k < p-1 \quad \text{bei} \quad 1 < p < \infty \quad \text{und} \quad -1 < \alpha + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k < p-1$$

auf der reellen Achse $\mathbb{R}_t$ sowie der Quotientennormen für Operatoren vom Lokaltyp. Die Frage der Abhängigkeit der Normen von den Kurven $\Gamma \subset \mathbb{C}$ und der Lage der Punkte $t_k \in \Gamma$ tritt dabei auf.

Das Kapitel III ist den Systemen von singulären Integraloperatoren A insbesondere mit stückweise stetigen Matrixkoeffizienten a, b gewidmet. Im Abschnitt 10 sind dazu die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Fredholmeigenschaft von $A = aI + b \cdot S$ und die Berechnung des Index A im Raum $L_p^n(\Gamma; \varrho)$ angegeben. Hinreichende Bedingungen für die Fredholmeigenschaft bei $L_\infty(\Gamma)$-Koeffizienten verallgemeinern im Abschnitt 11 den von I. B. Simonenko betrachteten skalaren Fall. In diesem Kapitel ist auch die Gleichwertigkeit zwischen der Fredholmeigenschaft von A und der p, ϱ-Faktorisierbarkeit eines (skalaren) $L_\infty(\Gamma)$-Symbols a bewiesen.

Das Kapitel IV ist von abstrakterem Inhalt: Es behandelt allgemein B-algebren mit Symbol und führt den Begriff von „hinreichenden Familien von multiplikativen Funktionalen" über B-algebren ein. Einige interessante Beispiele für „algebraische Operatoren" werden ausführlich diskutiert. Hier wird auch gezeigt, daß eine symmetrische Operator-Algebra $\mathscr{K}$ ein skalares Symbol besitzt, wenn die Quotientenalgebra $\mathscr{K}/\mathscr{T}$ nach dem Ideal der kompakten Operatoren kommutativ ist. Es werden explizit die Symbole konstruiert auf Algebren, die von singulären Integraloperatoren mit stetigen Koeffizienten auf offenen Bögen oder von Toeplitz-Operatoren erzeugt werden, deren Fourierkoeffizienten zu stückweise stetigen Funktionen auf dem Kreis gehören.

Im Kapitel V werden Matrizensymbole der Ordnung $2n$ für n-Systeme singulärer Integraloperatoren auf Ljapunov-Kurven Γ mit stückweise stetigen Koeffizientenmatrizen a, $b \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eingeführt. Dabei werden die in natürlicher Weise gegebenen Präsymbole, die auch für $t \to t_k \pm 0$, t_k die Sprungstelle der a, b auf Γ, sinnvoll erklärt sind, durch „μ-Bögen" in $\mathbb{C}$ geeignet interpoliert, so daß die $2n \times 2n$-Matrizensymbole für das Fredholmkriterium und die Indexberechnung herangezogen werden können. Zu Algebren singulärer Integraloperatoren auf Ljapunovkonturen Γ, die eine Carleman-Verschiebung α: $\Gamma \to \Gamma$ mit $\alpha^2 = \mathrm{id}$ zulassen, wird die Fredholmeigenschaft eines 2×2-Systems im Banachraumpaar E^2 betrachtet.

Das Kapitel VI befaßt sich mit Familien von n-dimensionalen Darstellungen von Banachalgebren. Zunächst beweist der Autor den grundlegenden Satz von Amitsur-Levitzki, der besagt, daß die Matrizenalgebra $\mathbb{C}^{n \times n}$ einer „Standard-Identität" der Ordnung $2n$ genügt, d. h. für je $2n$ beliebige komplexe $n \times n$-Matrizen a_k ist

$$F_{2n}(a_1, \ldots, a_{2n}) := \sum_{\sigma \in S_{2n}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(2n)} = 0,$$

wenn σ eine beliebige Permutation der $2n$ Elemente $\{1, \ldots, 2n\}$ bedeutet. Genügt eine B-algebra $\mathscr{K}$ einer solchen $2n$-Standard-Identität, dann ist für jedes maximale zweiseitige Ideal M die Quotientenalgebra $\mathscr{K}_M := \mathscr{K}/M$ isomorph zu $\mathbb{C}^{l \times l}$ mit einem $l = l\,(\mathrm{M}) \leqslant n$. Sind η_M bzw. ξ_M die natürlichen Homomorphismen $\mathscr{K} \to \mathscr{K}_M$ bzw. $\mathscr{K}_M \to \mathbb{C}^{l \times l}$, dann ist ein Algebraelement x genau dann invertierbar (in $\mathscr{K}$), wenn $\det \nu_M(x) \neq 0$ ist für alle maximalen Ideale M mit $\nu_M := \xi_M \circ \eta_M$. Das Radikal $\mathscr{R}(\mathscr{K})$ stimmt mit dem Durchschnitt aller maximalen Ideale M überein. Für $n = 1$ bedeutet das die Kommutativität der Algebra $\mathscr{K}$! Der Begriff einer „hinreichenden Familie α von n-dimensionalen Darstellungen", der die Invertierbarkeit von $x \in \mathscr{K}$ genau dann garantiert, wenn $\det \nu_M(x) \neq 0$ ist für alle M aus dieser Familie α, wird eingeführt und eine Methode zur Konstruktion beschrieben. Mit diesem Begriff läßt sich dann eine matrixwertige Gelfand-Darstellungstheorie global und schließlich auch lokal formulieren.

Im Kapitel VII sind hinreichende Bedingungen für ein Matrixsymbol auf gewissen Klassen von B-algebren angegeben. Als ein interessantes Resultat sei hier das folgende erwähnt: Ist E ein Hilbertraum und $\mathscr{K}$ eine selbstadjungierte Teilalgebra aller beschränkten linearen Operatoren auf E, dann hat $\mathscr{K}$ genau dann ein n-Symbol, wenn jeder Operator $T := F_{2n}(A_1, \ldots, A_{2n})$ kompakt ist für eine beliebige Wahl der $A_\nu \in \mathscr{K}$ mit dem Standardpolynom F_{2n} für $\mathscr{K}$. Man fragt sich unwillkürlich, ob es überhaupt „sinnvolle" Operatoralgebren gibt, die kein n-Symbol besitzen. Der Autor zeigt, daß die mehrdimensionalen Wiener-Hopf-Operatoren über Oktanten $\mathbb{R}_{++}^{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, in den Räumen $L_p(\mathbb{R}_{++}^{m+1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, mit absolut integrablen Kernfunktionen k solche Beispiele liefern.

Das Buch endet im Abschnitt 29 mit fünfzehn offenen Problemen, einigen Bemerkungen zur Historie der angegebenen Sätze und einem Literaturverzeichnis mit 89 Titeln, das noch durch 7 weitere – offenbar in der englischen Ausgabe – ergänzt wurde, wohl aber nicht alle neueren Arbeiten in der westlichen Literatur bis 1986/87 berücksichtigt hat.

Das Werk stellt, insgesamt gesehen, eine wertvolle Ergänzung zu den Lehrbüchern über singuläre und Wiener-Hopf-Integraloperatoren von Gochberg-Feldman, Gochberg-Krupnik, Prössdorf, Michlin, Michlin-Prößdorf, Duduchava, Clancey-Gochberg u. a. dar und erschließt insbesondere dem Leser der westsprachlichen Literatur viele Originalbeiträge der östlichen Autoren und ist daher dem Fachmann, aber auch denen, die sich mit guten funktionalanalytischen Grundkenntnissen tiefer in dieses interessante Gebiet einarbeiten wollen, zur Lektüre wärmstens zu empfehlen.

Darmstadt E. Meister

Samarskii, A. A., Nikolaev, E. S., Numerical Methods for Grid Equations (Vol. I: Direct Methods, Vol. II: Iterative Methods), Basel – Boston – Berlin: Birkhäuser Verlag 1989, 736pp., Hardcover, DM 398,–

1978 erschien die einbändige, russische Originalausgabe von Samarkij und Nikolaev (Universität Moskau), deren englische Übersetzung der Birkhäuser-Verlag jetzt in zwei Bänden anbietet. Die etwas ungleiche Teilung der insgesamt 15 Kapitel ist naheliegend: Ab Kapitel 5 (Beginn von Band II) werden die iterativen Methoden behandelt. Obwohl Band II die genaue Übersetzung darstellt und nicht etwa durch zusätzliche Wiederholungen angereichert ist, kann dieser zweite Teil unabhängig vom ersten gelesen werden. Um dies vorwegzunehmen: Meine Beurteilung wird für beide Bände unterschiedlich ausfallen. Wer einen ersten Eindruck von diesem Werk gewinnen möchte, sollte mit dem zweiten Band beginnen.

Der Name Alexander A. Samarkij steht für eine weitbekannte numerische Schule, die insbesondere die Analyse der Differenzenverfahren und der Iterationsmethoden vorangetrieben hat. Vor diesem Buch hat Samarkij in den 70er Jahren weitere 5 Monographien veröffentlicht. Wer schon einmal Gelegenheit hatte, numerische Arbeiten aus den Ländern des Ostblocks zu lesen, wird im Vergleich zu westlichen Veröffentlichungen charakteristische Unterschiede im Stil der Darstellung festgestellt haben. Der Übersetzer (S. G. Nash) macht in seinem Anhang darauf aufmerksam, daß die Übertragung der Terminologie prinzipielle Schwierigkeiten bereitet. Wenn er auch häufig versucht hat, Begriffe nicht wörtlich, sondern mit dem aus der westlichen Literatur bekannten Namen zu übersetzen, vermißt der Leser einerseits die uns geläufigen Begriffe, andererseits wird er nicht darauf hingewiesen, daß bekannte Verfahren unter völlig neuen Namen vorgestellt werden. Hier hätten Fußnoten eines kompetenten Übersetzers geholfen. Von Beispielen wird noch die Rede sein.

Der *erste Band* hat den Untertitel „Direkte Verfahren". Die gestellte Aufgabe ist die Lösung der Gleichungssysteme, die bei der Diskretisierung elliptischer oder parabolischer Differentialgleichungen durch Differenzenmethoden entstehen. Das Kapitel 1 führt in die Notation der Differenzengleichungen ein und zeigt Anwendungen des partiellen Summierens. Es folgen Ausführungen über linear unabhängige Lösungen von eindimensionalen Differenzengleichungen, die man eher in einem Lehrbuch über Mehrschrittverfahren für gewöhnliche Anfangswertaufgaben vermutet hätte und die hier etwas deplaciert wirken. Es fördert auch eher die Allgemeinbildung, wenn die Technik der Variation der Konstanten eingeübt wird. Dagegen ist das Unterkapitel über Eigenwertaufgaben sinnvoller, da hier die Fourier-Analyse vorbereitet werden kann.

Im Laufe des Kapitels 1 verläßt man schnell wieder den mehrdimensionalen Fall und beschränkt sich in der ersten Hälfte des Bandes auf eindimensionale Aufgaben. Das Kapitel 2 langweilt mit langen Erklärungen zur Gauß-Elimination und seinen Varianten. In § 2.3 wird die Elimination einer 5-Punkt-Gleichung angekündigt, und man hofft auf interessante zweidimensionale Aufgaben; bei der 5-Punkt-Gleichung handelt es sich aber um ein pentadiagonales Gleichungssystem, dessen Elimination noch einmal vorgeführt wird. Lichtblicke sind Stabilitätsbetrachtungen und Vorschläge zur stabilen Berechnung der Differenzen $x_{i+1} - x_i$. § 2.4 mit der Variante der Blockelimination schafft langsam den Durchbruch zu zweidimensionalen Randwertaufgaben.

Das Kapitel 3 ist der Methode der zyklischen Reduktion gewidmet. Es ist dem Übersetzer zugutezurechnen, daß er den russischen Begriff der „vollen Reduktion" in den uns bekannten Terminus übertragen hat. Unter der Überschrift „Separation der Variablen" des Kapitels 4 verbergen sich Anwendungen der schnellen Fourier-Transformation (FFT). In jeweils der gleichen Breite werden die Transformationsformeln und die FFT-Algorithmen für Sinus-Entwicklungen, für Entwicklungen mit ungeraden Sinus-Termen, Cosinus-Entwicklungen, für reelle periodische Funktionen und schließlich komplexe periodische Funktionen beschrieben. Das Unterkapitel 4.4, das in der russischen Originalausgabe noch nicht vorhanden ist, erklärt einen „staircase algorithm", der mir neu erscheint. Er ist aber auch von der gleichen Bauart wie die anderen direkten Verfahren. Sie alle haben ein relativ eng eingrenztes Anwendungsfeld, so daß sie heute nicht mehr im Mittelpunkt des Interesses stehen. Fazit zu Band I: Für einen Experten wenig Neues; für jemanden, der sich über direkte Verfahren kundig machen will, fehlen Hinweise auf konkurrierende Verfahren (Buneman, volle Reduktion).

Band II (Iterationsverfahren) beginnt im Kapitel 5 mit einer Wiederholung der Differenzennotation und später benötiger Ergebnisse (z. B. der diskreten Green-Formel). Die in der Überschrift angekündigten Grundlagen der Iterationsmethoden erschöpfen sich in Erläuterungen zum Konzept. Man hätte hier z. B. den Konvergenzsatz „Konvergenz genau dann, wenn Spektralradius <1" erwartet. Überraschenderweise findet sich dieser Satz nirgends. Der Grund ist ein völlig anderes Konzept der Autoren, das wert ist, näher erläutert zu werden. Ziel aller weiteren Analysis ist stets eine Normabschätzung: Die Norm des n-ten Iterationsfehlers relativ zum Startfehler soll unter eine gegebene Schranke ε fallen. Wie groß ist n zu wählen? Diese Frage wird für die jeweilige Methode aufgrund von gewissem a-priori-Wissen gegeben. Letzteres besteht z. B. in der Positivdefinitheit der Matrix und beidseitigen Schranken oder im Fall einer nichtsymmetrischen Matrix in einer Normabschätzung des schiefsymmetrischen Anteils. Die Wahl der (Hilbert-Raum-)Norm kann vom Verfahren abhängen.

Ungewöhnlich ist auch der Einstieg in die Iterationsverfahren. Das Kapitel 6 beginnt mit der Čebyšev-Methode. Der Leser erhält vom Übersetzer leider keinen Hinweis, daß diese Verfahren unter der Bezeichnung *semiiterative Methoden* bei uns bekannt sind. Erst nach ihrer Analyse wird die „einfache Iterationsmethode" vorgestellt. Hierzu gehört als Beispiel auch die Jacobi-Iteration. Dieser Name wird jedoch nie erwähnt. Da das 6. Kapitel den Titel „2-level iterative methods" trägt, ist das Kapitel 7 „3-level iterative methods" folgerichtig. Es bringt die entsprechende Darstellung der Čebyšev-Methode und Stabilitätsbetrachtungen.

Unter dem Titel „Iterative Methoden vom Variationstyp" werden in Kapitel 8 das Gradientenverfahren und die Methode der konjugierten Gradienten (cg) präsentiert. Die Darstellung ist gleich so allgemein angelegt, daß das präkonditionierte cg-Verfahren resultiert. Dieses Vorgehen halte ich für sachgemäßer als die in westlichen Publikationen gewohnte Darstellung. Ich überlasse es aber dem Leser, zu beurteilen, ob die ganz ungewohnte Darstellung des cg-Verfahrens als Dreitermrekursion vorteilhaft ist.

Im Kapitel 9 hört man unter dem schönen Titel „Dreiecksiterationsmethoden" zum ersten Mal vom Gauß-Seidel- und SOR-Verfahren. Die Resultate von Young finden sich hier (ohne Namensnennung) wieder. Dies ist die einzige Stelle, wo der Autor notgedrungen auf den Spektralradius der Iterationsmatrix eingeht. Das Unterkapitel 9.3 stellt die Sichtweise der Autoren dann wieder her: Für das dort „Dreiecksmethode" genannte Verfahren, das in Wirklichkeit das Gauß-Seidel-Verfahren ist, werden Normabschätzungen und bezüglich der Norm optimale Relaxationsparameter aus den a-priori-Daten bestimmt.

Das Herzstück des Buches ist Kapitel 10 mit der Präsentation des 1964 von Samarskij vorgeschlagenen Verfahrens ATM (alternate-triangular method), dessen gute Konvergenz- und Robustheitseigenschaften herausgestellt werden. Der interessierte Leser wird verwundert sein, daß dieses dem SOR-Verfahren überlegene Verfahren in der westlichen Literatur völlig unerwähnt bleibt. Dem Übersetzer ist es wohl ähnlich ergangen, denn er gibt keinen hilfreichen Kommentar. Bei ATM handelt es sich um das (semiiterative) symmetrische SOR-Verfahren in einer etwas anderen, aber äquivalenten Darstellung. Nichtsdestoweniger ist die Bestimmung des optimalen Parameters lesenswert.

Die Methode der alternierenden Richtungen (ADI) wird ohne Namensnennung der Urheber in Kapitel 11 analysiert. Ohne Beweis werden für beliebiges *n* die optimalen ADI-Parameter angegeben. Interessant ist auch die Analyse des nichtkommutativen Falles.

Das Buch klingt mit ergänzenden Kapiteln aus: In § 12 werden Methoden für indefinite und komplexe Iterationsmatrizen (letzteres wird übersetzt als *transformation operator)* und singuläre Gleichungen diskutiert. Das Kapitel 13 behandelt nichtlineare Gleichungen. Unter der Voraussetzung von monotonen Operatoren werden quantitative Abschätzungen hergeleitet. Wichtig ist Kapitel 14 mit Beispiellösungen: Für skalare elliptische Differentialgleichungen, aber auch das System der Lamé-Gleichungen werden die Differenzengleichungen analysiert und die für die quantitativen Iterationsfehlerabschätzungen wichtigen a-priori-Daten gewonnen. Auch Gebietszerlegungsmethoden werden angesprochen. Von anderem Charakter ist das abschließende Kapitel 15 mit Informationen über krummlinige orthogonale Koordinaten (Zylinder-, Polarkoordinaten) und die darauf beruhenden Differenzenverfahren.

Bei der Lektüre habe ich nur sehr selten Druckfehler gefunden; meist waren sie durch falsche Übertragung aus dem Original entstanden. Auf Seite 98 unterlief dem Übersetzer ein sehr störender Fehler. Wo er *spectral radius* schreibt, muß es *numerical radius* (deutsch: Wertebereich einer Matrix) heißen. Die im Original mit den Namen Cauchy und Bunjakovskij bezeichnete Ungleichung hat der Übersetzer in Angleichung an die westliche Literatur als Cauchy-Schwarz-Bunjakovskij-Ungleichung übertragen. Leider schreibt er den Namen Schwarz durchgehend mit *tz.*

Die offensichtlichen Mankos des Bandes II sind: i) Keine Literaturangaben, die es dem Leser ermöglichen, weiter in den Stoff einzudringen. Die vom Übersetzer ergänzend angebotene Liste von 7 Quellen ist höchst willkürlich. ii) Wer dieses Buch als Einstieg in die Iterationsverfahren wählt, hat Schwierigkeiten, die entsprechenden Termini der westlichen Literatur zuzuordnen. iii) Obwohl im Klappentext von *recently developed techniques* die Rede ist, möchte ich die Verfahren durchweg als klassisch bezeichnen. Moderne Entwicklungen sehe ich nicht. Obwohl das Mehrgitterverfahren 1961 in Moskau seinen Ursprung gehabt hat, wird es von den Autoren ignoriert. Es gibt auch keine Hinweise auf die heute üblichen Präkonditionierungstechniken für cg-Verfahren.

Trotzdem empfehle ich diesen Band wegen der überzeugend durchgehaltenen Analysetechnik. Diese Exaktheit sollte Schule machen. Die als a-priori-Wissen für die Iterationsfehlerabschätzung benötigten quantitativen Daten werden durch die Diskussion der Differenzenverfahren auch bereitgestellt. Dies rechtfertigt die starke Betonung der Differenzenverfahren. In kaum einer anderen Monographie habe ich für mein in Arbeit befindliches Buchprojekt über Iterationsverfahren so viele hilfreiche Anregungen gefunden.

Kiel W. Hackbusch

Taira, K., Diffusion Processes and Partial Differential Equations, New York – London – Tokyo: Academic Press 1988, 425 + xvi pp., hard cover, 48 £

Die frühe Beobachtung, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten eines stochastischen Prozesses, etwa die einer Brownschen Bewegung, einer partiellen Differentialgleichung, nämlich der Diffusionsgleichung im Falle der Brownschen Bewegung, genügen, führte auf die Frage, welche Differentialoperatoren können stochastische Prozesse erzeugen. Ein zentraler Begriff bei der Behandlung dieser Frage ist der der Halbgruppe, genauer, der der Markovschen Halbgruppe. Von Interesse sind also die Differentialoperatoren, die Markovsche Halbgruppen erzeugen. Die Fragestellung ist aber ungenau, falls man nicht die Funktionenräume, in denen man zu arbeiten wünscht, angibt. Es bieten sich zunächst zwei Funktionenräume in natürlicher Weise an: der Hilbert-Raum L^2 und der Raum L^∞. Entscheidet man sich für den Raum L^2, so wird man auf die Theorie der Dirichlet-Formen und den zu ihr in enger Beziehung stehenden Hunt-Prozessen geführt; hierzu vergleiche man etwa das Buch von M. Fukushima, [4]. Möchte man hingegen im Raum L^∞ arbeiten, so ist der wesentliche Begriff der der Fellerschen Halbgruppe und damit der des Fellerschen Prozesses. Zur Erinnerung: Eine stark stetige, nicht-negative Halbgruppe von Kontraktionen auf $C_0(K)$ heißt Fellersch.

Im vorliegenden Buch stellt sich der Autor die Aufgabe, eine in sich geschlossene Darstellung der Klassifikation der Erzeuger von Fellerschen Halbgruppen, soweit sie bis heute bekannt ist, zu geben. Zunächst wird gezeigt, daß die Erzeuger Operatoren sind, die Randwertprobleme für gewisse Integro-Differentialoperatoren realisieren. Genauer, es gelten die folgenden Sätze:

Satz 1 (Taira, Satz 9.4.1). *Es sei $D \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet, $(T_t)_{t\geqslant 0}$ eine Fellersche Halbgruppe auf $C_0(\overline{D})$ und A der Erzeuger von $(T_t)_{t\geqslant 0}$. Ferner existiere zu jedem Punkt $x^0 \in D$ ein lokales Koordinatensystem $(x_1,\ldots,x_N)$ um x^0 und stetige Funktionen $\chi_1,\ldots,\chi_N$ auf $\overline{D}$ mit $\chi_j = x_j$ in einer Umgebung von x^0 mit der Eigenschaft, daß $1,\chi_1,\ldots,\chi_N$ und $\Sigma_{j=1}^N \chi_j^2$ im Definitionsbereich $D(A)$ von A liegen. Dann gilt für $u \in D(A) \cap C^2(\overline{D})$*

$$Au(x^0) = \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x^0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) + \sum_{i=1}^{N} b^i(x^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0) + c(x^0)u(x^0)$$
$$+ \int_{\overline{D}} e(x^0, \mathrm{d}y)\{u(y) - u(x^0) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)(\chi_i(y) - \chi_j(x^0))\}.$$

Hierbei ist $(a^{ij}(x^0))$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix, $b^i(x^0) = A(\chi_i - \chi_i(x^0))(x^0)$, $c(x^0) = A1(x^0)$, sowie $e(x_i^0,.)$ ein nicht-negatives Borel-Maß auf $\overline{D}$ mit der Eigenschaft, daß für jede Umgebung U von x_0 $e(x^0, \overline{D}\setminus U) < \infty$ und

$$\int_U e(x^0, \mathrm{d}y)\left\{\sum_{i=1}^{N} (\chi_i(y) - \chi_i(x^0))^2\right\} < \infty$$

gilt.

Satz 2 (Taira, Satz 9.5.1). *Es seien D, $(T_t)_{t\geqslant 0}$ und A wie in Satz 1. Darüber hinaus sei ∂D eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Für jede Funktion $u \in D(A) \cap C^2(\overline{D})$ gilt dann mit $x' \in \partial D$*

$$0 = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x')\frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \gamma(x')u(x')$$
$$+ \mu(x')\frac{\partial u}{\partial x_N}(x') - \delta(x')Au(x')$$
$$+ \int_{\overline{D}} \nu(x', \mathrm{d}y)\{u(y) - u(x') - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x')(\chi_i(y) - \chi_i(x'))\},$$

wobei $(\alpha^{ij}(x'))$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix ist, $\gamma(x') \leqslant 0$, $\mu(x') \geqslant 0$, $\delta(x') \geqslant 0$, und $\nu(x'_i, .)$ ist ein nicht-negatives Borel-Maß auf $\overline{D}$ mit der Eigenschaft, daß für jede Umgebung W von x' in $\mathbb{R}^N$ $\nu(x', \overline{D} \setminus W) < \infty$ und

$$\int_{W \cap \overline{D}} \nu(x', \mathrm{d}y)\{\chi_N(y) + \sum_{j=1}^{N-1} (\chi_j(y) - \chi_j(x'))^2\} < \infty$$

gilt.

Beide Sätze geben also notwendige Bedingungen an die Erzeuger von Fellerschen Halbgruppen. Sie sind in Spezialfällen von A. D. Venctel [8] gezeigt worden, der allgemeine Fall geht auf die Arbeit [2] von J.-M. Bony, P. Courrège und P. Priouret zurück. Man beachte, daß der Operator in Satz 1 (wie auch der in Satz 2) die Summe eines lokalen Operators, also eines Differentialoperators, und eines nicht-lokalen Operators ist. Der nicht-lokale Anteil bewirkt, daß die Pfade des zugeordneten Prozesses i. allg. nicht stetig sind. Möchte man also Diffusionen, d. h. Prozesse mit stetigen Pfaden, untersuchen, so muß der nicht-lokale Anteil verschwinden.

K. Taira beschränkt sich nun auf Diffusionen, also auf Prozesse mit lokalen Erzeugern. Zusätzlich wird auch die gleichmäßig starke Elliptizität des Differentialoperators gefordert. Es werden nun die obigen notwendigen Bedingungen für diesen Spezialfall untersucht und der folgende Satz bewiesen.

Satz 3 (Taira, Satz 9.6.22). *Es sei D ein glattberandetes, beschränktes Gebiet und*

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$$

ein gleichmäßig stark elliptischer Differentialoperator mit C^∞-Koeffizienten $a^{ij} = a^{ji}$, b^i und $c \leqslant 0$, die auf $\mathbb{R}^N$ definiert sind. Ferner sei auf ∂D der Operator

$$L = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial}{\partial x_i} + \gamma + \mu \frac{\partial}{\partial n} - \delta A$$

gegeben, wobei (α^{ij}) ein symmetrischer kontravarianter Tensor zweiter Stufe auf ∂D ist, für den

$$\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\eta_i\eta_j \geqslant 0 \qquad \text{für} \qquad x' \in \partial D, \eta = \sum_{j=1}^{N-1} \eta_j dx_j \in T^*_{x'}\partial D,$$

gilt. Weiterhin gelte $\beta^i \in C^\infty(\partial D)$, $\gamma \in C^\infty(\partial D)$, $\gamma \leqslant 0$, $\mu \in C^\infty(\partial D)$, $\mu \geqslant 0$, und $\delta \in C^\infty(\partial D)$, $\delta \geqslant 0$. Falls $\delta + \mu > 0$ und für Konstanten $\alpha \geqslant 0$ und $\lambda \geqslant 0$ das Randwertproblem $(\alpha - A)u = 0$ in D und $(\lambda - L)u = \varphi$ auf ∂D stets für eine in $C(\partial D)$ dichte Menge von Daten *φ lösbar ist und falls das Randwertproblem $(\alpha - A)u = 0$ in D und $Lu = 0$ auf ∂D für ein $\alpha > 0$ nur trivial lösbar ist, so existiert eine Fellersche Halbgruppe $(T_t)_{t \geqslant 0}$ mit Erzeuger $\mathscr{A}$, für den gilt*

(i) $D(\mathscr{A}) = \{u \in C(\overline{D}), Au \in C(\overline{D}), Lu = 0\}$

und (ii) $\mathscr{A}u = Au$ *für alle* $u \in D(\mathscr{A})$.

Dieser Satz ist also eine Art Umkehrung der Sätze 1 und 2 in gewissen Spezialfällen. Der Satz 3 benötigt die (eindeutige) Lösbarkeit gewisser Randwertprobleme, um auf die Existenz von Fellerschen Halbgruppen zu schließen. Im abschließenden Kapitel gibt der Autor hinreichende Kriterien hierfür an. Es wurden die von C. Fefferman und D. Phong in [3] eingeführten nicht-euklidischen Metriken, die dem Differentialoperator zugeordnet sind, benutzt um den folgenden Satz zu zeigen.

Satz 4 (Taira, Satz 10.1.1). *Die Operatoren A und L erfüllen die Voraussetzungen von* Satz 3 *und es gelte wieder $\mu + \delta > 0$. Ferner gebe es Konstanten* $0 < \varepsilon < 1$ *und* $c > 0$ *derart, daß* *für alle hinreichend kleinen* $\varrho > 0$ *die Relation*

$$B_E(x', \varrho) \subset B_{L^0}(x', \varrho^\varepsilon)$$

für $x \in \{x' \in \partial D, \mu(x') = 0\}$ *gilt. Dann gelten die Aussagen von* Satz 3.

Hierbei bezeichnet $B_E(x', \varrho)$ *die euklidische Kugel um* x' *mit Radius* ϱ *und* $B_{L^0}(x', \varrho^\varepsilon)$ *die Kugel um* x' *mit Radius* ϱ^ε *bezüglich der oben erwähnten Metrik.*

Dieser Satz geht auf den Autor selbst zurück ([5] - [7]). Ob die benutzten Techniken ausreichen, um dieses Resultat (und einige weitere im Buch behandelte) auch im Falle nicht-elliptischer, aber subelliptischer Operatoren zweiter Ordnung zu zeigen, ist noch nicht geklärt, erste Resultate des Verfassers liegen aber vor.

Nicht von ungefähr stehen die letzten beiden von zehn Kapiteln am Anfang der Besprechung – diese Kapitel bilden den Kern des Buches, die anderen acht Kapitel liefern Hilfsmittel. Allerdings sind diese Hilfsmittel von sehr unterschiedlichem Kaliber. Kapitel 1 bringt allgemein bekannte Resultate aus klassischen Gebieten der höheren Analysis, Kapitel 2 führt in die Analysis auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ein, Kapitel 3 ist der (Standard-)Funktionanalysis gewidmet, es folgt ein Kapitel über Distributionen. In diesen vier Kapiteln werden Begriffe eingeführt und erläutert sowie wichtige Sätze zitiert, aber nicht bewiesen! Dies gilt im wesentlichen auch für das 5. Kapitel über Sobolev-Räume und Kapitel 6 über Pseudodifferentialoperatoren. (M. E. ist ein Beweis, der viele nicht gezeigte Resultate benutzt, doch kein den Leser zufriedenstellender Beweis.)

Die weiter oben angeführten Sätze werden mit recht subtilen Methoden aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen hergeleitet. Diese werden in den Kapiteln 7 und 8 bereitgestellt. Kapitel 7 behandelt Maximumprinzipien für subelliptische Operatoren 2. Ordnung. Insbesondere werden hier die Resultate von J.-M. Bony [1] über die Ausbreitung des Maximums diskutiert und bewiesen, wobei die oben schon erwähnten Ideen aus der Arbeit [3] mit berücksichtigt werden. In Kapitel 8 werden elliptische Randwertprobleme, die später (s. o.) benötigt werden, behandelt.

Obwohl die Hälfte des Buches aus Präliminarien besteht (Kapitel 1–6), dem Autor also bewußt war, daß der Gegenstand seiner Betrachtungen Techniken und Resultate benötigt, die einem breiten Interessentenkreis nicht geläufig sind, bleibt das Buch schwer lesbar. Dies liegt aber nicht an der Darstellung, sondern tatsächlich am Gegenstand und den benutzten Hilfsmitteln. Viele Resultate werden hier erstmalig in Buchform veröffentlicht. Dem „nur" W-Theoretiker werden moderne analytische Methoden ans Herz gelegt, dem „nur" Analytiker werden weitere Anwendungen seiner Resultate aufgezeigt. – Ein gelungenes Buch, dem ich eine weite Verbreitung wünsche.

[1] Bony, J. -M: Principe du maximum inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **19** (1969) 277–304

[2] Bony, J. -M; Courrège, P.; Pricouret, P.: Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégro-diffèrentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **18** (1968) 369–521

[3] Fefferman, C.; Phong, d. H.: Subelliptic eigenvalue problems. In: Conference on harmonic Analysis 1981, Chicago, Wadsworth, Belmont (1983) 590–606

[4] Fukushima, M.: Dirichlet forms and Markov processes. Amsterdam: North Holland Publ. Comp., 1980

[5] Taira, K.: Sur l'existence de processus de diffusion. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **29** (1979) 99–126

[6] Taira, K.: Semigroups and boundary value problems. Duke Math. J. **49** (1982) 287–320

[7] Taira, K.: Semigroups and boundary value problems II. Proc. Japan Acad. **58** (1982) 277–280

[8] Ventcel, A. D.: On boundary conditions for multidimensional processes. Teoriya Veroyat. i ee Primen **4** (1959) 172–185 (Russisch)

Erlangen N. Jacob