

E 20577 F

97. Band Heft 3

ausgegeben am 25. 10. 1995

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil



B. G. Teubner Stuttgart 1995

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 128,— einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:

B. G. Teubner GmbH, Industriestr. 15, D-70565 Stuttgart

Postfach 801069, D-70510 Stuttgart, Tel. (07 11) 78901-0, Telefax 78901-10

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-8000 München 2, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 \$ 01.00 + .20.

© B. G. Teubner GmbH, Stuttgart 1995 – Verlagsnummer 2910/3

Printed in Germany – ISSN 0012-0456

Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-68723 Oftersheim

Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

Inhalt Band 97, Heft 3

1. Abteilung

M. Aigner, J. J. Seidel: Knoten, Spin Modelle und Graphen	75
W. Dahmen: Multiskalen-Methoden und Wavelets – Konzepte und Anwendungen ..	97

2. Abteilung

Straughan, B., The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection (<i>V. Reitmann</i>)	55
Neutsch, W., Scherer, K., Celestial Mechanics (<i>M. Schneider</i>)	56
Deschauer, S., Das zweite Rechenbuch von Adam Ries (<i>H. Lüneburg</i>)	58
Ablowitz, M. J., Clarkson, P. A., Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering (<i>B. Fuchssteiner</i>)	59
Pilyugin, Sergei Yu., Introduction to Structurally Stable Systems of Differential Equations (<i>Th. Bröcker</i>)	61
Saad, Y., Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems (<i>V. Mehrmann</i>)	62
Berline, N., Getzler, E., Vergne, M., Heat Kernels and Dirac Operators (<i>B. Ørsted</i>) .	63
Orlik, P., Terao, H., Arrangements of Hyperplanes (<i>M. Ziegler</i>)	66
Shparlinski, I. E., Computational and Algorithmic Problems in Finite Fields (<i>H. Niederreiter</i>)	68
Wegge-Olson, N. E., K -Theory and C^* -Algebras (<i>J. Cuntz</i>)	69
Weil, A., The Apprenticeship of Mathematician (<i>W. Fischer</i>)	70
Neumann, K., Morlock, M., Operation Research (<i>K.-W. Gaede</i>)	71
Meirmanov, Anvarbek M., The Stefan Problem (<i>P. Knabner</i>)	73
Klein, F., Vorlesungen über das Ikosaeder (<i>W. Barth</i>)	74
Laine, I., Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations (<i>F. Gackstatter</i>) .	75
Hemions, G., The Classifications Of Knots And 3-Dimensional Spaces (<i>G. Burde</i>) ..	77

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

A. Böttcher: Toeplitz operators with piecewise continuous symbols – a neverending story?

L. Bröcker: Semialgebraische Geometrie

G. Bruhn: Wolfgang Haack zum Gedächtnis

M. Denker, S. Heinemann: Dynamik analytischer Endomorphismen auf der Sphäre

H. Neunzert: Vom Nutzen der Mathematik

K. Rubin: Euler systems and exact formulas in number theory

P. Schneider: Gebäude in der Darstellungstheorie über lokalen Zahlkörpern

G. Schumacher: Über die Entwicklung der Komplexen Analysis in Deutschland vom
Ausgang des 19. Jahrhunderts bis zum Anfang der siebziger Jahre

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 52062 Aachen

Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen

Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Arcisstraße 21, 80333 München 2

Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Knoten, Spin Modelle und Graphen

M. Aigner, Berlin, J. J. Seidel, Eindhoven

1 Einleitung

Die Theorie der Knoten und Verschlingungen war über die letzten 100 Jahre eine Inspiration für die algebraische Topologie und Geometrie, und umgekehrt haben die Methoden der Topologie bedeutende Fortschritte zum Verständnis der Knoten erbracht. Das Hauptproblem war und ist, Bedingungen zu finden, wann zwei Knoten äquivalent oder nichtäquivalent sind, und insbesondere, wann ein Knoten „entknotet“ werden kann. Die algebraische Topologie hat dazu mehrere Invarianten geliefert, aber in den letzten 10 Jahren wurden, beginnend mit den Arbeiten von Jones, völlig neue Methoden entdeckt, welche nicht nur außerordentlich effektiv sind, sondern auch unerwartete Verbindungen zu ganz anderen Gebieten aufgezeigt haben. Die ursprüngliche Definition des Jones Polynoms erfolgte mit Hilfe von Operator Algebren und ihren Spurfunktionen. Später wurde von Kauffman eine induktive Definition gegeben, welche einen ungewöhnlich einfachen Zugang zum Jones Polynom erlaubt. Parallel dazu wurde in mehreren Arbeiten auf die Verbindung zu Modellen der Statistischen Mechanik hingewiesen – und dies ist unser Ausgangspunkt. Ziel dieser Arbeit ist es, dem Leser aufzuzeigen, wie das Knotenproblem via Spin Modelle in natürlicher, wenn auch vielleicht unerwarteter Weise zu einigen der berühmtesten (offenen) Problemen der Kombinatorik führt.

2 Knoten

Eine *Verschlingung* L mit $c(L)$ Komponenten besteht aus $c(L)$ disjunkten einfachen geschlossenen Kurven in $\mathbb{R}^3$. Ein *Knoten* ist eine Verschlingung mit einer Komponente. Zwei Verschlingungen L und L' sind *äquivalent*, in Zeichen $L \cong L'$, falls L durch eine bijektive stetige Deformation in L' übergeführt werden kann. Die natürlichste Art, eine Verschlingung darzustellen, erfolgt mit Hilfe eines *Diagrammes* $D(L)$, das durch Parallelprojektion von L auf eine Ebene erhalten wird. Dabei nehmen wir an, daß sich in einem beliebigen Punkt der Bildebene höchstens zwei Bildkurven kreuzen. In jedem Kreuzungspunkt von $D(L)$ wird spezifiziert, welche Kurve oben und welche unten verläuft (Figur 1).

Wir beschränken uns, ohne dies noch weiter zu erwähnen, auf *zahme* Verschlingungen (siehe [6, 11]).

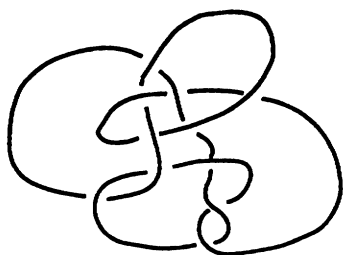


Fig. 1

Das klassische Ergebnis der kombinatorischen Knotentheorie (und unser Ausgangspunkt) ist der Satz von Reidemeister, der die Äquivalenz von Verschlingungen auf drei lokale Operationen, die sogenannten *Reidemeister Bewegungen* zurückführt.

Theorem A [42]. *Zwei Diagramme D und D' repräsentieren genau dann äquivalente Verschlingungen, wenn D durch eine endliche Folge von lokalen Bewegungen der folgenden Typen in D' übergeführt werden kann:*

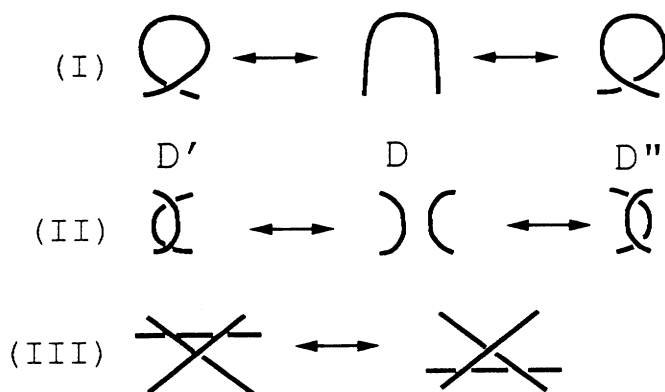


Fig. 2

Ein Knoten, der ein Diagramm $\bigcirc$ besitzt, heißt die *Schleife* L_0 . Das Hauptproblem der Knotentheorie lautet nun: Gegeben zwei Verschlingungen L und L' , entscheide, ob L und L' äquivalent sind oder nicht. Als Spezialfall ergibt sich: Wann gilt $L \approx L_0$?, das heißt, wann kann L „entknotet“ werden? [6, 11].

Eine *Invariante* I ist eine Abbildung $I: L \rightarrow I(L)$, so daß $L \approx L'$ impliziert $I(L) = I(L')$. Eine Reihe von Invarianten sind aus der algebraischen Topologie bekannt (Fundamentalgruppe, Zopfgruppe, Alexander Polynom [6, 11]), mit deren Hilfe als erstes Beispiel gezeigt wurde, daß das Kleeblatt nicht entknotet werden kann (Tietze 1910) (Fig. 3).

Aus dem Satz von Reidemeister folgt, daß I eine Invariante ist, falls I invariant in bezug auf die Reidemeister Bewegungen bleibt.

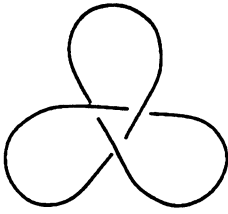


Fig. 3

3 Spin Modelle

Betrachten wir wieder das Diagramm D einer Verschlingung. Wir fassen D als ebenen Graph auf mit den Überkreuzungspunkten als Ecken und färben die Länder der so entstehenden ebenen Landkarte mit den Farben schwarz und weiß, so daß Länder mit einer gemeinsamen Kante verschiedene Farben erhalten. Das äußere Gebiet soll dabei weiß gefärbt werden. Ein bekannter Satz der Graphentheorie besagt, daß solch eine 2-Färbung der Länder genau dann möglich ist, wenn alle Ecken geraden Grad haben (siehe z. B. [1]). In unserem Fall haben alle Ecken Grad 4, also ist eine 2-Färbung möglich. Die Färbungen der Diagramme aus Figur 1 und 3 sehen beispielsweise folgendermaßen aus:



Fig. 4

Mittels des gefärbten Diagrammes D konstruieren wir nun einen *signierten* (Multi-) *Graphen* G auf folgende Weise: Die Ecken von G sind die schwarzen Länder, und zwei Ecken sind genau dann benachbart, wenn sie einen Überkreuzungspunkt gemeinsam haben. Schließlich erteilen wir den Kanten ein Vorzeichen nach folgender Regel:



Fig. 5

Für unsere Beispiele aus Figur 4 erhalten wir somit folgende Graphen:

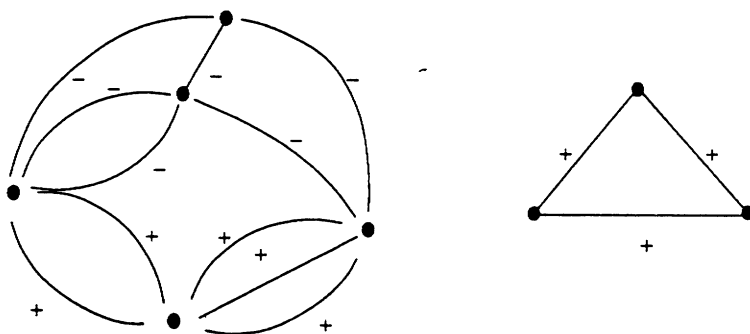


Fig. 6

Der signierte Graph des Kleeblattes weist also nur das Vorzeichen + auf. Ist G zusammenhängend, so sieht man leicht, daß G genau dann konstantes Vorzeichen hat, wenn das Diagramm *alternierend* ist, das heißt die Überkreuzungen wechseln zwischen oben und unten, wenn wir die Verschlingung durchlaufen. Eine Verschlingung L heißt *alternierend*, falls L ein alternierendes Diagramm besitzt. Einige der berühmtesten Vermutungen der Knotentheorie betreffen alternierende Verschlingungen, die zum Teil durch die Polynomvarianten, die wir besprechen werden, verifiziert werden konnten [30, 36, 40, 46, 49].

Der letzte Schritt zu einer Invariante besteht in der Zuordnung von sogenannten Boltzmann Gewichten zu den Kanten, welche die Reidemeister Bewegungen widerspiegeln. Eine Reihe solcher Modelle, inspiriert aus der Statistischen Mechanik, wurden als Invarianten ausgewiesen [3, 28, 31, 37, 47]. Wir behandeln im folgenden das von Jones [28] eingeführte Spin Modell.

Definition. Sei $X = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ eine n -Menge, $n \geq 2$. Ein *Spin Modell* (über X) besteht aus einem Paar kommutativer Abbildungen $W_+, W_- : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$, welche die folgenden Gleichungen (A), (B), (C) erfüllen. Wir fassen $W_+ = [w_+(\alpha, \beta)]$, $W_- = [w_-(\alpha, \beta)]$ als $n \times n$ -Matrizen indiziert durch X auf. Dann existiert $d \in \mathbb{C}$, so daß für alle $\alpha, \beta, \gamma \in X$ gilt:

- (A) $w_+(\alpha, \beta)w_-(\alpha, \beta) = 1$
- (B) $\sum_{\xi \in X} w_+(\alpha, \xi)w_-(\xi, \beta) = \begin{cases} d^2 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$
- (C) $\sum_{\xi \in X} w_+(\alpha, \xi)w_+(\beta, \xi)w_-(\gamma, \xi) = dw_+(\alpha, \beta)w_-(\alpha, \gamma)w_-(\beta, \gamma).$

Aus (A), (B), (C) folgt unmittelbar für alle $\alpha, \beta, \gamma \in X$:

- (D) Es existiert $a \in \mathbb{C}$ mit $w_+(\alpha, \alpha) = a$, $w_-(\alpha, \alpha) = a^{-1}$
- (E) $\sum_{\xi \in X} w_+(\alpha, \xi) = da^{-1}$, $\sum_{\xi \in X} w_-(\alpha, \xi) = da$

$$(F) \quad n = d^2$$

$$(C') \quad \sum_{\xi \in X} w_-(\alpha, \xi) w_-(\beta, \xi) w_+(\gamma, \xi) = d w_-(\alpha, \beta) w_+(\alpha, \gamma) w_+(\beta, \gamma).$$

Die Matrizen W_+ , W_- haben also konstante Hauptdiagonale und konstante Zeilen- und Spaltensummen. Die Zahlen $d \in \{\sqrt{n}, -\sqrt{n}\}$ und a heißen die *Loop-Variable* bzw. der *Modulus* des Spin Modelles. Aus (A) – (C') folgt, daß die Bedingungen völlig symmetrisch für W_+ und W_- sind.

Sei nun ein signierter Graph G mit Eckenmenge V und Kantenmenge E , und ein Spin Modell $M = (W_+, W_-)$ auf X gegeben. Ein *Status* von G ist eine Zuordnung $\sigma: V \rightarrow X$, wobei alle Abbildungen X^V zugelassen sind. Wir schreiben kurz $\Sigma = X^V$ für die Statusmenge.

Definition. Sei der signierte Graph G und das Spin Modell $M = (W_+, W_-)$ gegeben, dann ist die *Partitionsfunktion* Z_G^M erklärt durch

$$Z_G^M = d^{-|V|} \sum_{\sigma \in \Sigma} \prod_{uv \in E} w_{\pm}(\sigma u, \sigma v),$$

wobei $w_+(\sigma u, \sigma v)$ bzw. $w_-(\sigma u, \sigma v)$ je nach dem Vorzeichen der Kante uv genommen wird. Ist $|V| = 1$ (Schleife), so setzen wir $\prod = 1$. Besteht G aus mehreren Komponenten $G_1, \dots, G_m$, so gilt $Z_G^M = \prod_{i=1}^m Z_{G_i}^M$.

Theorem B [28]. Die Partitionsfunktion Z_G^M ist invariant unter den Reidemeister Bewegungen (II) und (III), und für die Bewegung (I) gilt: $Z_{G'}^M = a^{-1} Z_G^M$, $Z_{G''}^M = a Z_G^M$, wobei G' , G , G'' zu den Diagrammen D' , D , D'' in Theorem A korrespondieren.

Betrachten wir als Beispiel Bewegung (II), wobei es aus Symmetriegründen genügt, die Behauptung für die linke Äquivalenz in (II) zu zeigen. Je nach der Färbung der Länder ergeben sich zwei Möglichkeiten:

Falla.

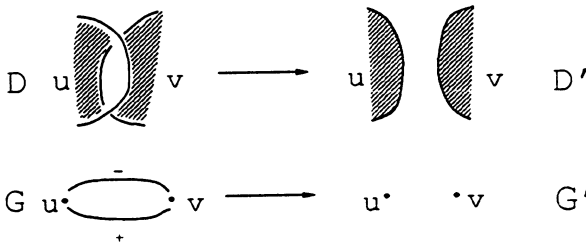


Fig. 7

Sei $E' = E$ minus die beiden Kanten uv . Dann gilt nach (A)

$$\begin{aligned} Z_G^M &= d^{-|V|} \sum_{\sigma \in \Sigma} w_+(\sigma u, \sigma v) w_-(\sigma u, \sigma v) \prod_{E'} w_{\pm}(\sigma x, \sigma y) \\ &= d^{-|V|} \sum_{\sigma \in \Sigma} \prod_{E'} w_{\pm}(\sigma x, \sigma y) = Z_{G'}^M \end{aligned}$$

Fall b.

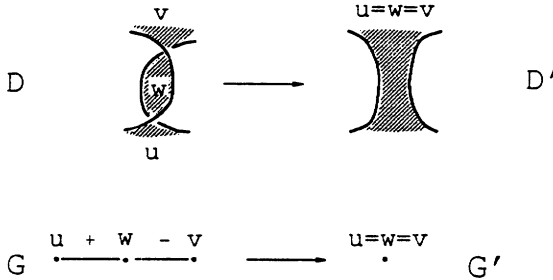


Fig. 8

Sei $E' = E \setminus \{uw, vw\}$, dann gilt

$$Z_G^M = d^{-|V|} \sum_{\sigma \in \Sigma} w_+(\sigma u, \sigma w) w_-(\sigma w, \sigma v) \prod_{E'} w_{\pm}(\sigma x, \sigma y)$$

Betrachten wir eine feste Zuordnung $\bar{\sigma}: V \setminus \{w\} \rightarrow X$ mit $\bar{\sigma}u = \alpha$, $\bar{\sigma}v = \beta$, so folgt aus (B)

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} w_+(\alpha, \sigma w) w(\sigma w, \beta) = \begin{cases} d^2 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases},$$

also
$$Z_G^M = d^{-|V|+2} \sum_{\sigma \in \Sigma} \prod_{E'} w_{\pm}(\sigma x, \sigma y) = Z_{G'}^M$$

da G' zwei Ecken weniger als G hat.

Ganz analog verifiziert man die anderen Fälle.

Bemerkung. Für die Schleife haben wir $|V| = 1$, und es folgt aus (F)

$$Z_G^M = d^{-1} \sum_{\sigma \in \Sigma} 1 = d.$$

Durch Übergang zu orientierten Verschlingungen und geeignete Normalisierung kann der Faktor a bzw. a^{-1} entfernt werden (siehe dazu Abschnitt 5). Wir sehen also, daß jedes Spin Modell eine Invariante liefert, so daß sich das folgende Problem ergibt: Klassifiziere die Spin Modelle oder finde zumindest Beispiele.

4 Matrix Gleichungen und die Yang-Baxter Relationen

Sei (W_+, W_-) ein Spin Modell über X . Im folgenden bezeichne I die Einheitsmatrix und J die Matrix bestehend aus lauter Einsen. Mit AB bezeichnen wir das übliche Matrizenprodukt und mit $A \circ B$ das elementweise Produkt. Die Bedingungen (A), (B), (D), (E) und (F) lauten in Matrizenschreibweise:

- (1) $W_+ \circ W_- = J$
- (2) $W_+ W_- = nI$
- (3) $W_+ \circ I = aI, \quad W_- \circ I = a^{-1}I$
- (4) $W_+ J = JW_+ = da^{-1}J, \quad W_- J = JW_- = daJ.$

Studieren wir nun die Gleichung (C). Es sei $Y_{\beta\gamma}(\xi) = w_+(\beta, \xi)w_-(\gamma, \xi)$ und $Y_{\beta\gamma} = Y_{\beta\gamma}(\xi) \in \mathbb{C}^n$. Gleichung (C) besagt

$$\sum_{\xi} w_+(\alpha, \xi) Y_{\beta\gamma}(\xi) = dw_-(\beta, \gamma) Y_{\beta\gamma}(\alpha) \quad (\alpha \in X)$$

oder in Matrixform

$$(5) \quad W_+ Y_{\beta\gamma} = dw_-(\beta, \gamma) Y_{\beta\gamma} \quad \text{für alle } \beta, \gamma \in X.$$

Wir schließen also (aus Symmetriegründen analog für W_-):

Lemma 1. *Seien $\text{Spec } W_+, \text{Spec } W_-$ die Spektra (ohne Vielfachheiten), dann gilt*

$$(6) \quad \begin{aligned} \text{Spec } W_+ &\supseteq \{dw_-(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in X\} \\ \text{Spec } W_- &\supseteq \{dw_+(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in X\} \end{aligned}$$

Insbesondere können W_+ und W_- höchstens n verschiedene Einträge haben.

Es sei $T = \mathbb{C}(X \otimes X)$ der Tensorraum erzeugt von den Paaren $(\alpha, \beta) \in X^2$. Wir betrachten die beiden linearen Abbildungen $R_+, R_- : T \rightarrow T$ definiert durch

$$R_+ : \alpha \otimes \beta \rightarrow \sum_{\xi} w_+(\alpha, \xi)(\xi \otimes \beta)$$

$$R_- : \alpha \otimes \beta \rightarrow dw_-(\alpha, \beta)(\alpha \otimes \beta).$$

Aus (C) folgt unmittelbar, daß R_+, R_- die sogenannte Yang-Baxter Relation erfüllen [28, 47].

Satz 1. *Es gilt $R_+ R_- R_+ = R_- R_+ R_-$; R_+ und R_- sind ähnlich und haben daher gleiches Spektrum $\{dw_-(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in X\}$ mit Vielfachheiten.*

Aus (6) und der Definition von R_+, R_- folgt daraus:

Folgerung 1. *Es gilt $\text{Spec } W_+ = \{dw_-(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in X\}$, $\text{Spec } W_- = \{dw_+(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in X\}$. Ein Eigenwert $\lambda \in \text{Spec } R_+$ hat genau die n -fache Vielfachheit wie in W_+ , analog für W_- . Insbesondere ist die Anzahl der Stellen in W_+ oder W_- , in denen eine feste Zahl erscheint, stets ein Vielfaches von n .*

Fassen wir zusammen: Sei (W_+, W_-) ein Spin Modell. Angenommen, W_+ hat außer a noch m verschiedene Einträge $t_1, \dots, t_m$. Wir definieren A_i als $n \times n$ -Matrix mit 1 an den Stellen, wo t_i in W_+ erscheint, und 0 sonst. Die A_i 's sind also symmetrische 0,1-Matrizen, für die gilt:

$$(7) \quad J = I + A_1 + \dots + A_m$$

$$(8) \quad W_+ = aI + t_1 A_1 + \dots + t_m A_m$$

$$(9) \quad W_- = a^{-1}I + t_1^{-1} A_1 + \dots + t_m^{-1} A_m$$

$$(10) \quad \text{Spec } W_+ = \{da^{-1}, dt_1^{-1}, \dots, dt_m^{-1}\}, \quad \text{Spec } W_- = \{da, dt_1, \dots, dt_m\}.$$

Wir fassen nun die A_i 's als Adjazenzmatrizen von Graphen G_i mit Eckenmenge X auf. Sei K_n der vollständige Graph auf X , dann nennen wir eine kantendisjunkte Zerlegung $K_n = G_1 + \dots + G_m$ wieder ein *Spin Modell*, falls die Matrizen W_+, W_- definiert gemäß (8), (9) die Gleichungen (A), (B), (C) für gewisse $a, t_1, \dots, t_m, d \in \{\sqrt{n}, -\sqrt{n}\}$, alle t_i verschieden, erfüllen.

Es stellen sich also die beiden Fragen:

I. Welche Zerlegungen $K_n = G_1 + \dots + G_m$ sind Spin Modelle?

II. Wie sieht die Lösungsmenge $(a, t_1, \dots, t_m)$ aus?

Wir werden dies anschließend für $m=1$ beantworten und dann in den folgenden Abschnitten für $m=2$. Dabei wird sich herausstellen, daß die Spin Modelle für $m=1$ genau dem Jones Polynom entsprechen, und für $m=2$ dem Kauffman Polynom. Für beliebiges m ist das Problem eng mit der Bose-Mesner Algebra eines formal selbstdualen Assoziationsschemas verknüpft (siehe dazu [2, 7, 22, 26, 41]).

5 Spin Modelle für $m=1$ und das Jones Polynom

Für $m=1$ sind alle Elemente von W_+ abseits der Hauptdiagonale gleich einem festen Element t , und daher der Graph $G = K_n$. Der folgende Satz, der sofort aus (7), (8), (9) und den Gleichungen (A), (B), (C) gewonnen werden kann, löst die Probleme I und II.

Satz 2. K_n ist Spin Modell, und die Matrizen $W_+ = aI + t(J - I)$, $W_- = a^{-1}I + t^{-1}(J - I)$ erfüllen die Gleichungen (A), (B), (C) für $d \in \{\sqrt{n}, -\sqrt{n}\}$ genau dann, wenn

$$a) \quad t^2 + t^{-2} = -d$$

$$b) \quad a = -t^{-3}$$

gilt.

Beispiel. Betrachten wir $n=4$, $d=-2$, dann ist $a=-1$, $t=1$ Lösung, und daher

$$W_+ = W_- = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Spin Modell.

Sei $M=(W_+, W_-)$ ein Spin Modell mit Parametern a, t gemäß Satz 2. Wir wollen uns überlegen, daß die zugeordnete Partitionsfunktion Z^M (bis auf einen Faktor d^{-1}) genau das Kauffmansche Klammerpolynom ergibt (siehe z. B. [31, 32, 36]).

Das *Klammerpolynom* $\langle L \rangle$ einer Verschlingung L ist ein Laurent Polynom in der Variablen A , induktiv definiert durch die folgenden Regeln:

- (a) $\langle \bigcirc \rangle = 1$
- (b) $\langle L \cup \bigcirc \rangle = -(A^2 + A^{-2}) \langle L \rangle$
- (c) $\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle = A \langle \begin{array}{c} \diagup \diagup \\ \diagdown \diagdown \end{array} \rangle + A^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \rangle$.

Dabei bedeutet $L \cup \bigcirc$ die Verschlingung bestehend aus L und einer dazu disjunkten Schleife. Regel (c) besagt, daß wir eine Überkreuzung auflösen, indem wir entlang der unteren Kurve einmal nach rechts gehen (Faktor A) und einmal nach links (Faktor A^{-1}). Man beachte, daß die Orientierung keine Rolle spielt.

Wir zeigen nun, daß die Partitionsfunktion Z^M genau dieselben Rekursionen (b) und (c) für $t=A^{-1}$ erfüllt. Für (b) ist dies wegen $Z^M(\bigcirc)=d=-(t^2+t^{-2})$ klar. Betrachten wir (c). Wir haben zwei (symmetrische) Fälle je nach der Färbung. Sei



Fig. 9

Es sei $E'=E \setminus \{uv\}$ und Σ_0 bzw. Σ_1 die Menge der $\sigma: V \rightarrow X$ mit $\sigma u = \sigma v$ bzw. $\sigma u \neq \sigma v$. Mit der Kurzschreibweise $\Pi_\sigma = \prod_{E'} w_+(\sigma x, \sigma y)$ erhalten wir

$$Z_G^M = d^{-|V|} \left[a \sum_{\sigma \in \Sigma_0} \Pi_\sigma + t \sum_{\sigma \in \Sigma_1} \Pi_\sigma \right]$$

$$Z_{G'}^M = d^{-|V|+1} \sum_{\sigma \in \Sigma_0} \Pi_\sigma$$

$$Z_{G''}^M = d^{-|V|} \left[\sum_{\sigma \in \Sigma_0} \Pi_\sigma + \sum_{\sigma \in \Sigma_1} \Pi_\sigma \right].$$

Nun gilt laut Satz 2

$$t^{-1}d + t = -t^{-1}(t^2 + t^{-2}) + t = -t^{-3} = a,$$

und es folgt $Z_G^M = t^{-1}Z_{G'}^M + tZ_{G''}^M$, also $\langle L \rangle = d^{-1}Z_G^M$.

Die Partitionsfunktion für $m = 1$ ergibt daher (bis auf den Faktor d^{-1}) für jedes t eine Auswertung des Klammerpolynoms. Geben wir nun L eine Orientierung. Wir bezeichnen die Überkreuzungen als positiv bzw. negativ wie in Figur 10.

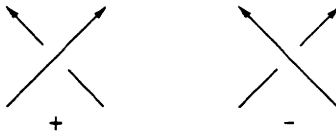


Fig. 10

Die *Verwindungszahl* $w(L)$ ist die algebraische Summe der Überkreuzungen, indem wir $+1$ für eine positive Überkreuzung zählen, und -1 für eine negative. Das Polynom $(-A)^{-3w(L)}\langle L \rangle$ ist nun auch invariant bezüglich der Reidemeister Bewegung (I). Durch die Substitution $A = t^{-1/4}$ erhält man das ursprüngliche Jones Polynom $V(L)$ (siehe z. B. [8, 15, 27, 29, 34, 35]). Zum Beispiel erhalten wir für das Kleeblatt L die Partitionsfunktion $Z_G^M(t) = -t^9 + t + t^{-3} + t^{-7}$ und daraus $\langle L \rangle = -A^5 - A^{-3} + A^{-7}$ bzw. das Jones Polynom $V(t) = t + t^3 - t^4$.

Übersetzen wir die Rekursion (c) in Graphen, so haben wir

$$\langle \begin{array}{c} \bullet \\ u \end{array} \begin{array}{c} + \\ \text{---} \\ v \end{array} \rangle = A \langle \begin{array}{c} \bullet \\ uv \end{array} \rangle + A^{-1} \langle \begin{array}{c} \bullet \\ u \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ v \end{array} \rangle,$$

und (c) ist ein Spezialfall der contraction/deletion Definition des *Tutte Polynoms* eines Graphen. Partitionsfunktion, Klammerpolynom und Jones Polynom können also durch das Tutte Polynom ausgedrückt werden [10, 24, 25, 46, 48, 49].

6 Spin Modelle für $m = 2$, stark reguläre Graphen und das Kauffman Polynom

Nehmen wir nun an, $\mathcal{W}_+$ hat außer a zwei verschiedene Einträge t_1, t_2 . Mit $A_1 = A, A_2 = B$ haben wir dann

$$(11) \quad J = I + A + B$$

$$(12) \quad \mathcal{W}_+ = aI + t_1 A + t_2 B$$

$$(13) \quad \mathcal{W}_- = a^{-1}I + t_1^{-1}A + t_2^{-1}B.$$

A und B sind also die Adjazenzmatrizen von zwei komplementären Graphen G und $\bar{G}$, wobei wegen $t_1 \neq t_2$, G weder der vollständige Graph K_n noch der leere Graph $\bar{K}_n$ ist.

Wir wollen nun die Struktur von G studieren. Aus Bedingung (E) und $t_1 \neq t_2$ folgt sofort

Lemma 2. G und $\bar{G}$ sind reguläre Graphen auf X .

Sei G k -regulär, und somit $\bar{G}$ l -regulär mit $l = n - 1 - k$. Für die Matrizen A, B heißt dies

$$AJ = JA = kJ, \quad BJ = JB = lJ.$$

A und B sind also jeweils mit J vertauschbar, und daher auch A mit $B = J - I - A$. Alle Matrizen besitzen daher eine gemeinsame Eigenbasis, und es folgt

$$(14) \quad \text{Spec } W_+ = aI + t_1 \text{ Spec } A + t_2 \text{ Spec } B$$

$$(15) \quad \text{Spec } W_- = a^{-1}I + t_1^{-1} \text{ Spec } A + t_2^{-1} \text{ Spec } B.$$

Da $|\text{Spec } W_+| \leq 3$ ist nach Folgerung 1, erhalten wir $|\text{Spec } A| \leq 3$, $|\text{Spec } B| \leq 3$, und somit

Lemma 3. G und $\bar{G}$ sind regulär mit höchstens drei verschiedenen Eigenwerten.

Die Klasse der Graphen aus Lemma 3 ist wohlbekannt – es sind die stark regulären Graphen (siehe z. B. [9, 12, 16, 44]).

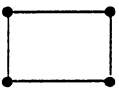
Definition. Ein Graph G heißt *stark regulär* mit Parametern (k, λ, μ) , falls

- G k -regulär ist,
- jedes Paar benachbarter Ecken genau λ gemeinsame Nachbarn hat,
- jedes Paar nichtbenachbarter Ecken genau μ gemeinsame Nachbarn hat.

Satz 3. Ein regulärer Graph G ist genau dann stark regulär, wenn G höchstens drei verschiedene Eigenwerte besitzt.

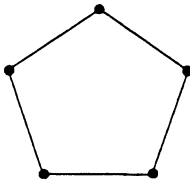
Es sei von nun an G ein stark regulärer Graph auf n Ecken mit Adjazenzmatrix A und Parametern (k, λ, μ) . Da $A\mathbf{1} = k\mathbf{1}$ ist ($\mathbf{1}$ = Vektor aus Einsen), so ist k Eigenwert, und die beiden anderen Eigenwerte werden üblicherweise mit r und s bezeichnet. Man sieht sofort, daß der komplementäre Graph $\bar{G}$ ebenfalls stark regulär ist mit Parametern $l = n - 1 - k$, $\bar{\lambda} = n - 2 - 2k + \mu$, $\bar{\mu} = n - 2k + \lambda$ und Eigenwerten l , $-r - 1$, $-s - 1$.

Beispiele. In den Spektren der Graphen sind bei den Eigenwerten im Exponenten die jeweiligen Vielfachheiten angegeben.



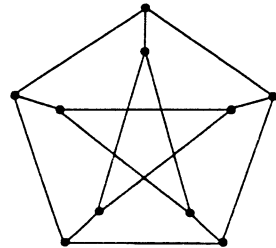
C_4

$k = 2, \lambda = 0, \mu = 2$
 $\text{Spec} = \{2^1, 0^2, (-2)^1\}$



C_5

$k = 2, \lambda = 0, \mu = 1$
 $\text{Spec} = \{2^1, (-\tau)^2, (\tau - 1)^2\}$
 mit $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$



Petersen Graph

$k = 3, \lambda = 0, \mu = 1$
 $\text{Spec} = \{3^1, 1^5, (-2)^4\}$

Fig. 11

Von zwei komplementären Graphen ist stets einer zusammenhängend, wir können also G als zusammenhängend voraussetzen. In diesem Fall ist k einfacher Eigenwert mit $|r|, |s| \leq k$ nach dem Satz von Perron-Frobenius [9]. Für die Vielfachheiten f, g der Eigenwerte r und s gilt demnach $f+g=n-1$ wegen $\text{Spur } A=0$. Der folgende Satz faßt die wichtigsten Eigenschaften stark regulärer Graphen zusammen (siehe [5, 9, 12, 13, 44]).

Satz 4. *Sei G ein zusammenhängender stark regulärer Graph $\neq K_n$ mit Parametern (k, λ, μ) und $\text{Spec } A = \{k^1, r^f, s^g\}$, das heißt f, g sind die Vielfachheiten von r, s . Dann gilt:*

$$(15) \quad \text{Die Eigenwerte } r, s \text{ sind verschieden und } r, s \text{ sind die Nullstellen der Gleichung } x^2 - (\lambda - \mu)x + (\mu - k) = 0,$$

$$(16) \quad \lambda = k + r + s + rs, \mu = k + rs = \frac{(k-r)(k-s)}{n},$$

$$(17) \quad f = \frac{-s(n-1)-k}{r-s}, g = \frac{r(n-1)+k}{r-s},$$

$$(18) \quad rs \leq 0 \text{ und } rs = 0 \text{ genau für die multipartiten Graphen } K_{m, \dots, m}, n = mt, m \geq 2, t \geq 2, \text{ mit } \text{Spec } A = \{m(t-1)^1, 0^{n-t}, (-m)^{t-1}\},$$

$$(19) \quad (r-s)^2 fg = nkl.$$

$$(20) \quad \text{Die Eigenwerte } r, s \text{ sind in } \mathbb{Z}, \text{ außer wenn } f=g=\frac{n-1}{2} \text{ ist. In diesem Fall gilt } n=4\mu+1, k=2\mu, \lambda=\mu-1, r, s=\frac{-1 \pm \sqrt{n}}{2}. \text{ Ist umgekehrt } n=4\mu+1, k=2\mu, \text{ so folgt } f=g=\frac{n-1}{2}.$$

$$(21) \quad \text{Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:}$$

- i) $n = (r-s)^2$
- ii) $\mu = s(s+1)$ oder $\mu = r(r+1)$
- iii) $f = k, g = l$ oder $f = l, g = k$.

Beispiel. Die Ausnahmegrphen G mit $n=4\mu+1, k=l=f=g=\frac{n-1}{2}, \lambda=\mu-1, r, s=\frac{-1 \pm \sqrt{n}}{2}$ heißen *Konferenzgraphen* (so genannt wegen ihrer An-

wendung für Konferenzschaltungen). Sie sind zusammenhängend, und auch das Komplement ist Konferenzgraph mit denselben Parametern. Das kleinste Beispiel ist C_5 mit $\mu=1$. Für $\mu=2$ erhalten wir einen eindeutigen Konferenzgraphen mit $n=9, k=4, \lambda=1, \mu=2, \{r, s\}=\{1, -2\}$. Dieser Graph kann als *Gittergraph* $L_2(3)$ realisiert werden (Fig. 12).

Die Ecken sind die 9 Felder des Gitters, und zwei Felder sind benachbart, wenn sie in derselben Zeile oder Spalte liegen. Man beachte, daß die Eigenwerte von $L_2(3)$ ganzzahlig sind. Auf die analog definierten Gittergraphen $L_2(n)$ im $n \times n$ -Gitter werden wir in Abschnitt 8 zurückkommen. Eine notwendige Bedingung für

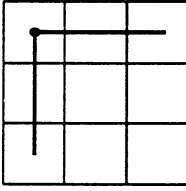


Fig. 12

Konferenzgraphen ist, daß n Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen ist [13, 16, 17, 44].

Kehren wir zu unserem Hauptproblem zurück: Welche Graphen G ergeben ein Spin Modell für $m = 2$? Unsere Analyse hat bis jetzt ergeben, daß G stark regulär sein muß. Wegen $J = I + A + B$ und $\text{Spec } J = \{n^1, 0^{n-1}\}$ wissen wir

$$\text{Spec } A = \{k^1, r^f, s^g\}, \quad \text{Spec } B = \{l^1, (-r-1)^f, (-s-1)^g\},$$

und es folgt aus (14)

$$\text{Spec } W_+ = \{(a + t_1 k + t_2 l)^1, (a + t_1 r - t_2(r+1))^f, (a + t_1 s - t_2(s+1))^g\}.$$

Nach Satz 1 und Folgerung 1 gilt

$$\text{Spec } R_+ = \{(a + t_1 k + t_2 l)^n, (a + t_1 r - t_2(r+1))^f, (a + t_1 s - t_2(s+1))^g\}.$$

$$\text{Spec } R_+ = \{(da^{-1})^n, (dt_1^{-1})^{kn}, (dt_2^{-1})^{ln}\},$$

und es folgt ohne Beschränkung der Allgemeinheit (Vertauschung von r und s) mit (21)

$$(22) \quad a + t_1 r - t_2(r+1) = dt_1^{-1}$$

$$(23) \quad a + t_1 s - t_2(s+1) = dt_2^{-1}$$

$$(24) \quad n = (r-s)^2, \mu = s(s+1), f = k, g = l.$$

Durch die Symmetrie von $+$ und $-$ ergibt sich analog

$$(25) \quad a^{-1} + t_1^{-1} r - t_2^{-1}(r+1) = dt_1$$

$$(26) \quad a^{-1} + t_1^{-1} s - t_2^{-1}(s+1) = dt_2.$$

In Zusammenfassung erhalten wir aus (16):

Folgerung 2. Ist G Spin Modell, so gilt:

$$(27) \quad n = (r-s)^2, k = s^2 + s - rs, \lambda = s^2 + 2s + r, \mu = s^2 + s.$$

Beispielsweise scheidet der Petersen Graph als Spin Modell aus, da die Bedingung $n = (r-s)^2$ verletzt ist (Figur 11). Ferner kann $K_{m, \dots, m}$ nur Spin Modell sein für $n = m^2$.

Aus (22)–(26) wollen wir nun Bedingungen für die möglichen Lösungen (t_1, t_2, a) ableiten. Wegen $d^2 = n = (r-s)^2$ ist $d = \varepsilon(r-s)$ mit $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Subtrahieren wir (23) von (22), so ergibt sich $t_1 t_2 = -\varepsilon$. Wir setzen nun $t_1 = t, t_2 = -\varepsilon t^{-1}$. Die

Gleichungen (22), (25) nehmen dann die Form an:

$$(28) \quad a = -tr - \varepsilon t^{-1}(s+1), \quad a^{-1} = -t^{-1}r - \varepsilon t(s+1),$$

und Multiplikation ergibt

$$(29) \quad r^2 + (s+1)^2 + \varepsilon(t^2 + t^{-2})r(s+1) = 1.$$

Ist $r(s+1)=0$, so haben wir $r=0, s=-2$ oder $r=1, s=-1$. Im ersten Fall erhalten wir $G=C_4$ aus (27). Im zweiten Fall ist G nicht zusammenhängend. Insbesondere folgt aus (18), daß $K_{m,\dots,m}, n=m^2$, kein Spin Modell ist für $m>2$.

Sei also $r(s+1) \neq 0$, dann erhalten wir im allgemeinen vier Lösungen für t und daraus korrespondierende Lösungen für a aus (28). Mit t ist offenbar $\pm t, \pm t^{-1}$ Lösung von (29), und mit a ist $\pm a, \pm a^{-1}$ Lösung. Dabei entspricht $t \leftrightarrow t^{-1}$ ersichtlich der Vertauschung $W_+ \leftrightarrow W_-$. Ist schließlich (t, a) Lösung für d , so ist (it, ia) Lösung für $-d$ ($i = \sqrt{-1}$). Wir haben also mit einer Lösung (t, a) alle Lösungen für $\pm d$ bestimmt, und können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varepsilon = -1$, also $d = s - r$ annehmen. Unsere Gleichungen lauten nun:

$$(30) \quad r^2 + (s+1)^2 - (t^2 + t^{-2})r(s+1) = 1$$

$$(31) \quad a = -tr + t^{-1}(s+1), \quad a^{-1} = -t^{-1}r + t(s+1)$$

mit $d = s - r, t_1 = t, t_2 = t^{-1}$.

Insbesondere folgt

$$(32) \quad a + a^{-1} = (t + t^{-1})(d+1).$$

Durch Betrachtung der Spektralzerlegung von A hat Jaeger aus (30), (31) die Spin Modelle unter den stark regulären Graphen auf elegante Weise charakterisiert.

Definition. Sei G ein Graph auf X . $N(\alpha) = \{\beta \in X : \alpha\beta \in E\}$ heißt die Nachbarschaft von α . Die Residuen $G(\alpha)$ bzw. $G'(\alpha)$ sind die beiden Untergraphen, induziert auf $N(\alpha)$ bzw. $N'(\alpha) = X \setminus (N(\alpha) \cup \alpha)$. G heißt lokal stark regulär, falls $G(\alpha)$ und $G'(\alpha)$ stark regulär sind für alle $\alpha \in X$.

Satz 5 [26]. Ein Graph $G \neq K_n, \bar{K}_n$ ist genau dann Spin Modell für $m=2$, wenn

- a) G stark regulär ist
- b) G lokal stark regulär ist
- c) $n = (r-s)^2$ gilt.

Bemerkung. Ein lokal stark regulärer Graph braucht nicht stark regulär zu sein, z. B. $G = K_{m,n}$ für $m \neq n$. Ein stark regulärer, lokal stark regulärer Graph muß nicht $n = (r-s)^2$ erfüllen. Ein Beispiel ist der Schläfli Graph mit Parametern $n=27, k=16, \lambda=10, \mu=8$ und Eigenwerten $\{r, s\} = \{4, -2\}$. Der Schläfli Graph kann im Wurzelgitter E_8 realisiert werden. Betrachten wir den Graph auf den 240 Wurzeln mit Wurzeln u, v benachbart, wenn das innere Produkt $u \cdot v = 1$ ist, so ist der Schläfli Graph der Untergraph induziert von den 27 gemeinsamen Nachbarn zweier benachbarter Wurzeln [9].

Analog zum vorigen Abschnitt zeigen wir nun, daß die Partitionsfunktion Z^M eines Spin Modells mit $m=2$ zum Kauffman Polynom in zwei Variablen korrespondiert [32, 33, 35]:

Das *Kauffman Polynom* $A(L)$ ist ein Laurent Polynom in zwei Variablen a und x , induktiv definiert durch die folgenden Regeln:

- (a) $A(\bigcirc) = 1$
- (b) $A(\bigcirclearrowright) = a^{-1}A(\bigcap), A(\bigcirclearrowleft) = aA(\bigcap)$
- (c) $A(\times) + A(\times) = x[A(\cap) + A(\cup)]$.

Die Regeln (b) und (c) beziehen sich also wieder auf die lokale Struktur in einem Überkreuzungspunkt. Betrachten wir nun die Partitionsfunktion Z^M , wobei M ein Spin Modell ist für $m=2$. Regel (b) gilt nach Theorem B auch für Z^M , und aus (32) folgt ohne weiteres, daß Z^M auch (c) erfüllt mit $x=t+t^{-1}$. Wir haben also $A=d^{-1}Z^M$, das heißt (bis auf den Faktor d^{-1}) ist die Partitionsfunktion eine Auswertung des Kauffman Polynoms für jedes Spin Modell. Übergang zu orientierten Verschlingungen wie im Fall $m=1$ liefert dann eine Polynom-invariante, die auch invariant bezüglich der Reidemeister Bewegung (I) ist.

7 Klassifikation der Spin Modelle für $m=2$

Wir wollen nun die Graphen G beschreiben, welche den Bedingungen von Satz 5 genügen. Wir wissen, daß alle Kandidatengraphen die Parameter (27) haben. Aus dem Beweis von Satz 5 schließt man, daß unter den Konferenzgraphen nur C_5 und $L_2(3)$ auftreten können. Abgesehen von C_5 sind also die Eigenwerte ganzzahlig. Ferner berechnet man für die Residuen $G(\alpha)$ und $G'(\alpha)$:

$$(33) \quad G(\alpha) = \bar{K}_k \text{ (d. h. } \lambda = 0) \text{ oder } G(\alpha) \text{ hat die Eigenwerte } \lambda, r, \frac{s^2 + 2s + r}{s - r + 2}.$$

$$(34) \quad G'(\alpha) = K_l \text{ (d. h. } \bar{\lambda} = 0) \text{ oder } G'(\alpha) \text{ hat die Eigenwerte } k - \mu, s, \frac{-r^2 + r}{s - r + 2}.$$

Da die Eigenwerte der Residuen wieder ganzzahlig sind, erhalten wir daraus die Teilerbedingung

$$(35) \quad s - r + 2 \mid r(s + 1).$$

Wir klassifizieren nun die möglichen Graphen nach den Werten von λ und $\bar{\lambda}$, wobei wir in jede Klasse auch das Komplement geben.

(A) $\lambda = \bar{\lambda} = 0$. Aus (27) folgt $s = -2$ oder -1 , oder s ist Nullstelle der Gleichung $s^2 + s - 1 = 0$. Für $s = -2$ erhalten wir C_4 , für $s = -1$ das Komplement $\bar{C}_4 = K_2 + K_2$, und im letzten Fall $C_5 = \bar{C}_5$. Alle diese Graphen sind Spin Modelle.

(B) $\lambda = 0, \bar{\lambda} > 0$. Hier gilt

$$(36) \quad n = (s(s+3))^2, k = s^3 + 3s^2 + s, \lambda = 0, \mu = s^2 + s \quad (s \geq 1).$$

Die Graphen aus dieser Klasse heißen *Smith Graphen* [13, 45]. Wir wollen nun zeigen, daß *alle* diese Graphen Spin Modelle sind und eng mit der Existenz von 3-Designs zusammenhängen. Wegen $\lambda = 0$ sind alle Residuen $G(\alpha)$ leer und damit trivialerweise stark regulär. Es interessieren also nur die Residuen $G'(\alpha)$.

Sei $\alpha \in X$, $N(\alpha)$ die Nachbarn von α in G , und $N'(\alpha) = X \setminus (N(\alpha) \cup \alpha)$. Wir betrachten das Design $D(\alpha)$, indem wir als Punkte u die Menge $N(\alpha)$ nehmen und als Blöcke B die Menge $N'(\alpha)$ mit $u \in B$ genau dann, wenn u, B in G benachbart sind. Aus der Definition der Parameter von G folgt unmittelbar, daß $D(\alpha)$ ein $2 - (k, \mu, \mu - 1)$ Design ist, das heißt, $|N(\alpha)| = k$, $|B| = \mu$ und jedes Paar von Punkten ist in genau $\mu - 1$ Blöcken. Aber es gilt mehr. Aus Standardmethoden der Designtheorie schließt man das folgende bemerkenswerte Resultat (siehe z. B. [12]).

Satz 6. *Sei G ein stark regulärer Graph mit Parametern $k > \mu \geq 2, \lambda = 0$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- a) $k = s^3 + 3s^2 + s, \mu = s^2 + s$ für ein $s \geq 1$
- b) $G'(\alpha)$ ist stark regulär für alle $\alpha \in X$
- c) $G'(\alpha)$ ist stark regulär für ein $\alpha \in X$.

Jede Bedingung impliziert $n = (r - s)^2$ und

- d) $D(\alpha)$ ist ein $3 - (k, \mu, s - 1)$ Design, das heißt jedes Tripel von Punkten ist in genau $s - 1$ Blöcken. Ferner sind zwei Blöcke in $D(\alpha)$ genau dann disjunkt, wenn sie als Ecken in G benachbart sind.

Ist umgekehrt D ein $3 - (k, \mu, s - 1)$ Design mit $k = s^3 + 3s^2 + s, \mu = s^2 + s$ auf der Punktmenge N und Blockmenge N' , so ist der Graph G auf der Eckenmenge $\alpha \cup N \cup N'$ definiert wie oben ein stark regulärer Graph.

Folgerung 3. *Alle Graphen aus Klasse (B) und ihre Komplemente sind Spin Modelle.*

(C) $\lambda > 0, \bar{\lambda} > 0, s < -1$ (wegen $r(s + 1) \neq 0$). Setzen wir $q = r - s$, so erhalten wir die Parameter

$$(37) \quad n = q^2, k = -s(q - 1), \lambda = s^2 + 3s + q, \mu = s^2 + s.$$

Graphen mit diesen Parametern heißen *Pseudo-Latin-Square Graphen* $PLS_{-s}(q)$ (warum, wird im nächsten Abschnitt klar werden). Man sieht sofort, daß das Komplement eines $PLS_{-s}(q)$ ein Graph $PLS_{r+1}(q)$ ist. Ferner folgt aus (35)

$$(38) \quad 1 < -s < q, q - 2 \mid (s + 1)(s + 2).$$

(D) $\lambda > 0, \bar{\lambda} > 0, r < -1, s > 0$. Setzen wir $q = s - r$, so erhalten wir die Parameter

$$(39) \quad n = q^2, k = s(q + 1), \lambda = s^2 + 3s - q, \mu = s^2 + s.$$

Graphen mit diesen Parametern heißen *Negativ-Latin-Square Graphen* $NLS_s(q)$. Das Komplement von $NLS_s(q)$ ist ein Graph $NLS_{-r-1}(q)$, und es gilt ferner

$$(40) \quad 0 < s < q - 1, q + 2 \mid (s + 1)(s + 2).$$

8 Beispiele von Spin Modellen für $m = 2$

Wir betrachten nun die Klassen aus dem letzten Abschnitt und versuchen, konkrete Beispiele zu konstruieren, und für jedes Beispiel eine Lösung (t, a) gemäß (30), (31) zu bestimmen.

(A) Das Quadrat C_4 und das Pentagon C_5

Für C_4 ist jedes Paar $(t, a = -t^{-1})$ Lösung für $d = -2$. Für C_5 haben wir die Eigenwerte $r = -\tau, s = \tau - 1$ mit $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, dem goldenen Schnitt. Als Lösung ergibt sich $t = e^{2\pi i/5}, a = 1$.

(B) Die Smith Graphen

Die Existenz dieser Graphen läuft nach Satz 6 auf die Existenz von $3 - (k, \mu, s - 1)$ Designs hinaus. Wenn ein solches Design existiert, so ist der Graph G nach Satz 6 vollkommen festgelegt und ergibt ein Spin Modell. Betrachten wir $s = 1$, dann erhalten wir die Parameter $n = 16, k = 5, \lambda = 0, \mu = 2$. Wir wissen aus Satz 6, daß G folgendermaßen aussieht. Sei $\omega \in X, N(\omega) = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$. Dann besteht $N'(\omega)$ aus allen 10 Paaren aus $N(\omega)$, und zwei Paare sind genau dann benachbart, wenn sie disjunkt sind. $G'(\omega)$ ist somit der Petersen Graph (Figur 13).

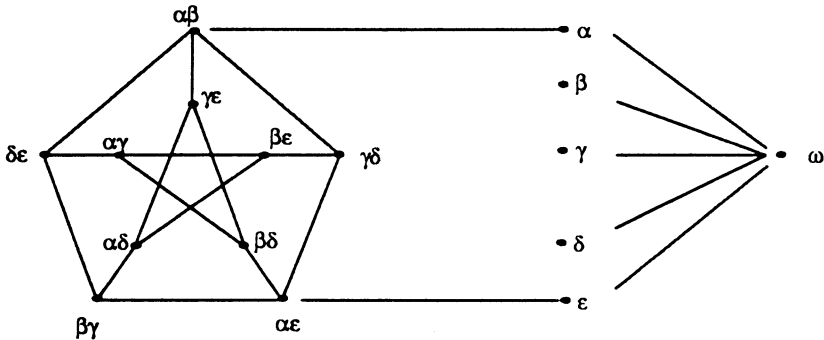


Fig. 13

G heißt der *Clebsch Graph* und ist durch seine Parameter eindeutig bestimmt. Die Eigenwerte sind $r = -3, s = 1$, und wir erhalten als Lösung $t = a = i$ für $d = 4$. Der Clebsch Graph G kann wiederum im Wurzelgitter E_8 realisiert werden. Das Komplement $\bar{G}$ ist der Graph, induziert von den Nachbarn einer festen Ecke des Schläfli Graphen (siehe Abschnitt 6).

Betrachten wir nun $s = 2$. Wir erhalten die Parameter $n = 100, k = 22, \lambda = 0, \mu = 6$. Nach Satz 6 benötigen wir ein Steiner System $3 - (22, 6, 1)$ – und so ein Design gibt es, das *Witt Design* W_{22} [4, 9, 50]. W_{22} durch seine Parameter eindeutig bestimmt, und die Automorphismengruppe ist die Mathieu Gruppe M_{22} [12, 38]. Die zugehörige Smith Graph G heißt der *Higman Sims Graph*. Die Automorphis-

mengruppe von G ist eine sporadische einfache Gruppe, die Higman Sims Gruppe [23]. Daß der Higman Sims Graph Spin Modell ist, wurde von Jaeger entdeckt [20, 26]. Die Eigenwerte sind $r = -8$, $s = 2$, und wir erhalten die Lösung $t = i\tau$, $a = i\tau^5$ für $d = 10$.

Außer dem Clebsch Graph, Higman Sims Graph und ihren Komplementen sind keine weiteren Spin Modelle in Klasse (B) bekannt. Wie Satz 6 zeigt, führt die Frage nach weiteren Modellen auf ein erstes großes Problem der Kombinatorik, die *Existenz von Designs*, und insbesondere 3-Designs.

(C) Die Pseudo-Latin-Square Graphen

Wir konstruieren eine Klasse von Graphen, die sogenannten *Latin Square Graphen*, welche die Parameter aus (37) aufweisen. Aus diesem Grund heißt ein beliebiger stark regulärer Graph mit den Parametern (37) ein Pseudo-Latin-Square Graph.

Es seien $p - 2$ paarweise orthogonale Lateinische Quadrate L_i der Ordnung q gegeben [4, 12, 38]. Eine *Transversale* T eines Lateinischen Quadrates L ist jede Menge von q Feldern, in denen ein festes Element vorkommt. Jedes Quadrat L_i ergibt somit eine Transversalzerlegung $\mathcal{T}_i$ der q^2 Felder. Nehmen wir die Zeilen- und Spaltenzerlegung $\mathcal{T}_z, \mathcal{T}_s$ hinzu, so erhalten wir insgesamt p Zerlegungen. Der Latin Square Graph $LS_p(q)$ hat als Ecken die q^2 Felder, wobei zwei Felder genau dann benachbart sind, wenn sie in einer gemeinsamen Transversale irgendeiner Zerlegung erscheinen. Aufgrund der Orthogonalität folgt daraus sofort:

Satz 7. *Die Latin Square Graphen $LS_p(q)$ sind Graphen $PLS_{-s}(q)$, das heißt $-s = p$.*

Damit ergeben sich die beiden folgenden Fragen:

1. Für welche q und p existieren $p - 2$ orthogonale Lateinische Quadrate der Ordnung q ?
2. Welche Graphen $LS_p(q)$ oder allgemein $PLS_{-s}(q)$ sind lokal stark regulär und damit Spin Modelle?

Für $p = 2$, das heißt $s = -2$, sind die Graphen $LS_2(q)$ genau die *Gittergraphen* $L_2(q)$ mit den Parametern

$$n = q^2, k = 2(q - 1), \lambda = q - 2, \mu = 2.$$

Für die Residuen gilt $G(\alpha) = K_{q-1} + K_{q-1}$, $G'(\alpha) = L_2(q - 1)$. Die Residuen sind somit stark regulär, und daher alle Gittergraphen $L_2(q)$ Spin Modelle. Als Lösung ergibt sich beispielsweise für $q = 3: t = e^{\pi i/3}$, $a = -1$ für $d = -3$ bzw. für $q = 4: t = i$, $a = -i$ für $d = -4$.

Bemerkung. Für $q = 4$, $s = -2$ gibt es einen stark regulären Graph, den Shrikhande Graph, mit denselben Parametern wie $L_2(4)$, der aber nicht Spin Modell ist [9]. Übrigens kann es durchaus vorkommen, daß *ein* Lateinisches Quadrat ein Spin Modell ergibt, ein anderes aber nicht.

Betrachten wir noch die Teilerbedingung (38). Die Bedingung ist für $q = -2s$, s gerade, erfüllt. Auf diesen Fall werden wir in Satz 8 eingehen.

Aus der Designtheorie [4] weiß man, daß orthogonale Lateinische Quadrate sogenannten *Netzen* entsprechen, und daß insbesondere die Existenz von $q-1$ orthogonalen Quadraten äquivalent ist zur Existenz einer projektiven Ebene der Ordnung q . Die Spin Modelle aus Klasse (C) führen also zu einem weiteren klassischen Thema der Kombinatorik – *orthogonale Lateinische Quadrate* und *projektive Ebenen*.

(D) Die Negativ-Latin-Square Graphen

Über die Graphen $NLS_s(q)$ ist wenig bekannt. Einige Konstruktionen sind in [18, 39] angegeben. Ist ein Graph $NLS_s(q)$ ein Spin Modell, so müssen laut (40) die Bedingungen $0 < s < q-1$ und $q+2 \mid (s+1)(s+2)$ erfüllt sein, also ist insbesondere $q \leq s(s+3)$. (In [19] wurde gezeigt, daß dies für alle Graphen $NLS_s(q)$ zutrifft.) Insbesondere ist die Teilerbedingung für $q=s(s+3)$ erfüllt, und wir erhalten die Smith Graphen aus Klasse (B). Ebenso gilt die Teilerbedingung wie in Klasse (C) für $q=2s$, s gerade. Wir behandeln nun die Graphen $PLS_{-s}(-2s)$ und $NLS_s(2s)$ gemeinsam.

Eine *Hadamard Matrix* H der Ordnung n ist eine $n \times n$ -Matrix mit Einträgen ± 1 , für die $HH^T = nI$ gilt. Daraus folgt unmittelbar $n = 1, 2$ oder $n \equiv 0 \pmod{4}$, und es ist eine bekannte offene Vermutung, ob Hadamard Matrizen für alle $n \equiv 0 \pmod{4}$ existieren [4, 18, 38]. Wir betrachten nun symmetrische Hadamard Matrizen H mit konstanter Hauptdiagonale. Da mit H auch $-H$ die Bedingung erfüllt, können wir annehmen, daß die Hauptdiagonale aus 1 besteht. Es gilt dann $H^2 = nI$, also hat H die Eigenwerte $\pm \sqrt{n}$. Sind f, g die jeweiligen Vielfachheiten, so folgt

$$f\sqrt{n} - g\sqrt{n} = \text{Spur } H = n,$$

also $f - g = \sqrt{n} \in \mathbb{Z}$. Es folgt $n = t^2$ und somit $n = (2s)^2$ wegen $n \equiv 0 \pmod{2}$. Eine symmetrische Hadamard Matrix H mit konstanter Hauptdiagonale heißt *regulär*, falls $HJ = -2sJ$ gilt, daß heißt, falls alle Zeilen- und Spaltensummen gleich $-2s$ sind. Das kleinste Beispiel ($s = 1$) ist

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Der folgende Satz zeigt nun den Zusammenhang zwischen regulären Hadamard Matrizen und den Graphen $PLS_{-s}(-2s)$ bzw. $NLS_s(2s)$ auf (siehe z. B. [18]).

Satz 8. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

- Es existiert eine reguläre Hadamard Matrix H der Ordnung $4s^2$, $HJ = -2sJ$, $s < -1$.*
- Es existiert ein Graph $PLS_{-s}(-2s)$.*

bzw.

- a') *Es existiert eine reguläre Hadamard Matrix H der Ordnung $4s^2$, $HJ = -2sJ$, $s > 0$.*
 b') *Es existiert ein Graph $NLS_s(2s)$.*

Für $q = 2^{2m}$ ist eine Konstruktion regulärer Hadamard Matrizen bekannt, welche Spin Modelle ergeben [43]. Sei $Q: [GF(2)]^{2m} \rightarrow GF(2)$ eine quadratische Form, deren zugeordnete (symplektische) Form $B(x, y) = Q(x) + Q(y) + Q(x+y)$ nicht ausgeartet ist. Die $(2^{2m} \times 2^{2m})$ -Matrix H indiziert durch $[GF(2)]^{2m}$ mit $H(x, y) = (-1)^{Q(x+y)}$ ist eine Hadamard Matrix, deren zugeordneter Graph wie in Satz 8 lokal stark regulär, also Spin Modell ist. Wegen $r = -s$ lautet die Gleichung (30)

$$s^2 + (s+1)^2 + (t^2 + t^{-2})s(s+1) = 1,$$

und wir erhalten die Lösung $t = i$, $a = -i$.

Abgesehen von diesen Beispielen sind keine weiteren Spin Modelle in den Klassen (C) und (D) bekannt, und einige Autoren halten die folgende Vermutung für plausibel:

Vermutung. Abgesehen von den Gittergraphen und ihren Komplementen existieren Spin Modelle in den Klassen (C) und (D) nur für $q = -2s$ bzw. $q = 2s$, s gerade.

Mit dieser Vermutung sind wir also bei einem dritten großen Problem der Kombinatorik angelangt: *Existenz von Hadamard Matrizen* und insbesondere regulären Hadamard Matrizen.

Literatur

- [1] Aigner, M.: Combinatorial Theory. Springer-Verlag 1977
- [2] Bannai, E.; Bannai, E.: Generalized spin models and association schemes. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A47 No. 2 (1993) 397–409
- [3] Baxter, R.: Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. Academic Press 1982
- [4] Beth, T.; Jungnickel, D.; Lenz, H.: Design Theory. Bibliographisches Institut 1985
- [5] Biggs, N. L.: Algebraic Graph Theory. Cambridge Tracts in Mathematics 67. Cambridge Univ. Press 1974
- [6] Birman, J. S.: Braids, Links and Mapping Class Groups. Princeton Univ. Press 1974
- [7] Bose, R. C.; Mesner, D. M.: On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs. Ann. Math. Stat. 30 (1959) 21–38
- [8] Brandt, R. D.; Lickorish, W. B. R.; Millett, K. C.: A polynomial invariant for unoriented knots and links. Invent. Math. 84 (1986) 563–573
- [9] Brouwer, A.; Cohen, A. E.; Neumaier, A.: Distance-Regular Graphs. Springer-Verlag 1989
- [10] Brylawski, T. H.; Oxley, J. G.: The Tutte polynomial and its applications. In: Matroid Theory Vol. 3 (N. White, ed.). Cambridge Univ. Press 1991, 123–225
- [11] Burde, G.; Zieschang, H.: Knots. De Gruyter 1985
- [12] Cameron, P. J.; Van Lint, J. H.: Designs, Graph, Codes and their Links. London Math. Soc. Student Texts 22. Cambridge Univ. Press 1991
- [13] Cameron, P. J.; Goethals, J. M.; Seidel, J. J.: Strongly regular graphs having strongly regular subconstituents. J. Algebra 55 (1978) 257–280

- [14] Conway, J. H.: An enumeration of knots and links. Computational Problems in Abstract Algebra (J. Leech, ed.). Pergamon Press 1969, 329–358
- [15] Freyd, P.; Yetter, D.; Hoste, J.; Lickorish, W. B. R.; Millett, K. C.; Ocneanu, A.: A new polynomial invariant of knots and links, *Bull. Amer. Math. Soc.* **12** (1985) 239–246
- [16] Godsil, C. D.: Algebraic Combinatorics. Chapman and Hall 1993
- [17] Goethals, J. M.; Seidel, J. J.: Orthogonal matrices with zero diagonal. *Can. J. Math.* **19** (1967) 1001–1010
- [18] Goethals, J. M.; Seidel, J. J.: Strongly regular graphs derived from combinatorial designs. *Canad. J. Math.* **22** (1970) 597–614
- [19] Goethals, J. M.; Seidel, J. J.: The regular two-graph on 276 vertices. *Discrete Math.* **12** (1975) 143–158
- [20] de la Harpe, P.: Spin models for link polynomials, strongly regular graphs and Jaeger's HS-model. *Pacific J. Math.* **162** (1994) 57–96
- [21] de la Harpe, P.; Kervaire, P.; Weber, C.: On the Jones Polynomial. *Enseign. Math.* **32** (1986) 271–335
- [22] de la Harpe, P.; Jones, V. F. R.: Paires des sous-algèbres semi-simples et graphes fortement réguliers. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **311** (1990) 147–150
- [23] Higman, D. G.; Sims, C. C.: A simple group of order 44352000. *Math. Z.* **105** (1968) 110–113
- [24] Jaeger, F.: On Tutte polynomials and link polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.* **103** (1988) 647–654
- [25] Jaeger, F.: Graph colourings and link invariants. In: Graph Colourings (R. Nelson, R. J. Wilson, eds.) 1990, 97–114
- [26] Jaeger, F.: Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial. *Geom. Dedicata* **44** (1992) 23–52
- [27] Jones, V. F. R.: A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.* **12** (1985) 103–111
- [28] Jones, V. F. R.: On knot invariants related to some statistical models. *Pac. J. Math.* **137** (1989) 311–334
- [29] Jones, V. F. R.: Subfactors and knots. CBMS Regional Conference Series Math. 80. Amer. Math. Soc. 1991
- [30] Kauffman, L. H.: State models and the Jones polynomial. *Topology* **26** (1987) 395–407
- [31] Kauffman, L. H.: Statistical mechanics and the Jones polynomial. *Contemp. Math.* **78** (1988) 263–297
- [32] Kauffman, L. H.: New invariants in the theory of knots. *Amer. Math. Monthly* **95** (1988) 195–242
- [33] Kauffman, L. H.: An invariant of regular isotopy. *Trans. Amer. Math. Soc.* **318** (1990) 417–471
- [34] Lickorish, W. B. R.; Millett, K. C.: A polynomial invariant of oriented links. *Topology* **26** (1987) 107–141
- [35] Lickorish, W. B. R.: Polynomials for links. *Bull. London Math. Soc.* **208** (1988) 558–588
- [36] Lickorish, W. B. R.; Millett, K. C.: The new polynomial invariants of knots and links. *Math. Magazine* **61** (1988) 3–23
- [37] Lipson, A. S.: Some more state models for link invariants. *Pac. J. Math.* **152** (1992) 337–346
- [38] MacWilliams, F. J.; Sloane, N. J. A.: The Theory of Error Correcting Codes. North-Holland 1977
- [39] Mesner, D. M.: A new family of partially balanced incomplete block designs with some Latin square properties. *Ann. Math. Stat.* **38** (1967) 571–581
- [40] Murasugi, K.: Jones polynomials and classical conjectures in knot theory. *Topology* **26** (1987) 187–194
- [41] Neumaier, A.: Duality in coherent configurations. *Combinatorica* **9** (1989) 59–67
- [42] Reidemeister, K.: Knotentheorie. Nachdruck. Springer-Verlag 1974
- [43] Seidel, J. J.: A survey of two-graphs. In: Proc. Intern. Coll. Theorie Combinatorie. Acad. Nat. Lincei Roma 1976, 481–511
- [44] Seidel, J. J.: Strongly regular graphs. In: Survey of Combinatorics (Bollobás ed.). Cambridge Univ. Press 1979, 157–180
- [45] Smith, M. S.: On rank 3 permutation groups. *J. Algebra* **33** (1975) 22–42

- [46] Thistlethwaite, M. B.: A spanning tree expansion of the Jones polynomial. *Topology* **26** (1987) 296–309
- [47] Turaev, V.: The Yang-Baxter equations and invariants of links. *Invent. Math.* **92** (1988) 527–553
- [48] Tutte, W. T.: On dichromatic polynomials. *J. Combinatorial Theory* **2** (1967) 301–320
- [49] Welsh, D. J. A.: The computational complexity of knot and matroid polynomials. *Discrete Math.* **124** (1994) 251–269
- [50] Witt, E.: Über Steinersche Systeme. *Abh. Math. Sem. Hamburg Univ.* **12** (1938) 265–275

Prof. Dr. Martin Aigner
Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik II
Arnimallee 3
14195 Berlin

Prof. Dr. J. J. Seidel
Technical University Eindhoven
Dept. of Mathematics and Computer Science
P.O. Box 513
N-5600 MB Eindhoven

(Eingegangen 4. 11. 1994)

Multiskalen-Methoden und Wavelets – Konzepte und Anwendungen

W. Dahmen, Aachen

1 Einleitung

Mit der enorm gesteigerten Leistung digitaler Rechenanlagen ist der Anwendungsgrad und damit einher die Bedeutung der numerischen Simulation in technischen Anwendungsbereichen drastisch gewachsen. Die zugrundeliegende mathematische Modellierung beruht häufig auf der Formulierung von Differential- oder Integralgleichungen, deren Diskretisierung (gegebenenfalls nach Linearisierung) auf *große* lineare Gleichungssysteme führt. Bei komplexen realistischen Prozessen bedeutet „groß“ möglicherweise mehrere Millionen Unbekannte, so daß man auch beim derzeitigen Stand der Rechnertechnologie auf ernsthafte Herausforderungen in Hinsicht auf akzeptable Durchführbarkeit derartiger Simulationen trifft. Ein Kernanliegen des *Wissenschaftlichen Rechnens* ist somit, die Bereiche der Berechenbarkeit im Hinblick auf Komplexität zu erweitern. Hierzu bieten sich verschiedene Ansatzebenen. Selbstverständlich ist in einer enorm schnelllebigen Wechselwirkung zwischen Rechnerarchitekturentwicklung und der Handhabung ständig wachsender Datenmengen die Informatik in natürlicher Weise gefordert. Eine wichtige Antwort ist sicherlich mit dem Stichwort *Paralleles Rechnen* angesprochen.

Allerdings wird man in einer solchen rein datenorientierten Sichtweise keinen befriedigenden Lösungsweg finden. Vielmehr scheint es nach derzeitigem Stand der Dinge unumgänglich zu sein, die numerischen Verfahren selbst schon im Vorfeld bezüglich Stabilität und Komplexität zu optimieren. Grob gesprochen heißt hier (asymptotisch) *optimal* (a.o.), daß ein Verfahren die Lösung innerhalb einer gewünschten Genauigkeit mit einem Speicher- und Rechenaufwand liefert, der *proportional* zur Problemgröße also zur Anzahl der Unbekannten bleibt. Bei den obengenannten Größenordnungen ist der Effekt dieser Bedingung oft weitaus stärker als etwa die Parallelisierung eines nicht-optimalen Verfahrens. Nun ist die Forderung nach Optimalität im obigen Sinne offensichtlich eine sehr starke Bedingung, die für beliebige Gleichungssysteme sicherlich nicht erfüllbar ist. Entsprechend stoßen die Methoden der klassischen Numerischen Linearen Algebra hier auf Grenzen. Man sieht vielmehr leicht ein, daß sich asymptotische Optimalität nur realisieren läßt, wenn man Information über das zugrundeliegende analytische Modell benutzt und

letztlich auch grundlegende Operationen wie Matrix-Vektor-Multiplikation approximativ interpretiert.

Bekannte Beispiele solcher *analysisbasierter Methoden* lassen sich zum Beispiel unter den Stichworten Multigrid-, Multilevel-Methoden, Wavelets oder Multipolentwicklungen ansprechen. Auf die eine oder andere Art ziehen alle diese Ansätze essentiellen Nutzen aus der Interaktion verschiedener (*Diskretisierungs-Skalen*). Dies wiederum bildet die Grundlage zur Einbeziehung *adaptiver* Techniken, mit denen sich höhere Diskretisierungstiefe dort lokalisieren läßt, wo sie erforderlich ist, eine insgesamt balancierte Genauigkeit bei minimalem Aufwand zu gewährleisten.

Das Mehrgitterkonzept hat sich als flexible Methodologie erwiesen, die für eine große Klasse von Problemen a.o. Verfahren liefert [H]. In den letzten Jahren haben *Multilevel-Verfahren* großes Interesse erregt. Sie haben sich bei symmetrischen elliptischen Problemen in der Gestalt vorkonditionierter Konjugierte-Gradienten-Verfahren ebenfalls als a.o. erwiesen [BPX, DK, O1, O2]. Beide Verfahrenstypen lassen sich als multiplikative bzw. additive Korrekturverfahren interpretieren [GO, Y], bei denen Feinstruktur sukzessive mit steigender Diskretisierungstiefe aufdatiert wird. Letzteres ist ebenfalls ein Kerngedanke des *Wavelet*-Konzepts, das völlig unabhängig während der letzten Jahre vornehmlich im Hinblick auf Anwendungen im Bereich Signalanalyse und Datenkompression entwickelt wurde [Dau, Ma, M1]. Nichtsdestoweniger legen die strukturellen Parallelen nahe, die Verwendbarkeit von Waveletkonzepten als mögliche Diskretisierungshilfsmittel auch im Bereich numerische Behandlung von Operatorgleichungen zu untersuchen. Eine angemessene Einstufung des Erfolgs solcher Bemühungen braucht sicherlich noch mehr Zeit und praktische Erfahrung. Unabhängig davon hat dies aber schon zu einer beträchtlichen Fokussierung relevanter Analysehilfsmittel geführt. Derzeit läßt sich eine Palette von Hilfsmitteln aus der Approximationstheorie, der Theorie der Funktionenräume oder der Harmonischen Analyse ausmachen, die bereits zu Fortschritten bei der Verfahrensentwicklung geführt haben und von der man weiteren Aufschluß über geeignete Kombinationen von Ingredienzien der verschiedenen Konzepte erwarten kann.

Die folgenden Ausführungen sollen einige Grundkonzepte und ihre Anwendungen vor einem zwar modellartigen aber doch möglichst weitgespannten Problemhintergrund skizzieren. Dabei werden sich häufig Gelegenheiten bieten, Bezug auf gemeinsame Arbeiten mit B. Kleemann, A. Kunoth, S. Prössdorf und R. Schneider zu nehmen. Die hier notwendigerweise teils sehr vereinfachende Darstellung soll allerdings nicht verbergen, daß in konkreten Spezifizierungen der Modellprobleme eine befriedigende praxisgerechte Umsetzung noch erhebliche Schwierigkeiten aufwerfen kann.

In Abschnitt 2 wird ein allgemeiner Problemrahmen abgesteckt, in dem eine Klasse von Multiskalen-Methoden prinzipiell a.o. ist. Als klassische Beispiele passen sich sowohl elliptische Randwertaufgaben für partielle Differentialgleichungen als auch eine weite Klasse elliptischer Pseudo-Differentialgleichungen ein, die zum Beispiel auch bei Randelementmethoden auftreten. Die dem Experten vertrauten zentralen Fragestellungen werden hier zugunsten eines breiteren weniger spezialisierten Leserkreises nochmals umrissen.

In Abschnitt 3 wird ein allgemeiner Rahmen für Multiskalenzerlegungen beschrieben und insbesondere die Rolle verschiedener Stabilitätsbegriffe und deren Interpretation als Normäquivalenzen hervorgehoben. Als erste wichtige Konsequenz dieser Fakten wird in Abschnitt 4 die *Vorkonditionierung* zur effizienten iterativen Lösung gewisser dünnbesetzter Gleichungssysteme diskutiert. Ferner wird die *Matrixkompression* bei der Behandlung von vollbesetzten Matrizen angesprochen. Abschnitt 5 bietet einen Ausblick auf weitere Entwicklungen.

Obwohl die Frage der Konstanten für praktische Belange von entscheidender Bedeutung sein kann, wird zur Vereinfachung der Darstellung stets $a \leq b$ geschrieben, um anzudeuten, daß die Größe a sich durch ein nicht explizit spezifiziertes konstantes Vielfaches von b beschränken läßt, wobei die Konstante unabhängig von jedweden Parametern sein soll, von denen a und b abhängen. Ferner wird $a \leq b \wedge b \leq a$ durch $a \sim b$ abgekürzt.

2 Problemklasse

Im folgenden sei mit $H^s, s \in \mathbb{R}$, eine Skala von Hilberträumen bezeichnet, deren Spezifikation vorerst irrelevant ist. Man nehme an, daß $H^s \hookrightarrow H^t$ für $t < s$, und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne das Skalarprodukt in H^0 . Typische Beispiele sind Sobolevräume auf hinreichend glatten Mannigfaltigkeiten (mit oder ohne Rand) oder auch spezieller auf beschränkten Gebieten, gegebenenfalls mit Spezifikation homogener Randbedingungen auf Teilen des Randes. Als Aufgabe sei die approximative Lösung einer Gleichung

$$(2.1) \quad Au = f$$

gestellt, wobei

$$A : H^s \rightarrow H^{s-r}$$

ein linearer beschränkter Operator mit beschränkter Inverser ist, das heißt

$$(2.2) \quad \|Au\|_{H^{s-r}} \sim \|u\|_{H^s}.$$

2.1 Galerkin-Verfahren

Eine Möglichkeit, (2.1) numerisch zu lösen, bietet das Galerkin-Verfahren. Für geeignete endlichdimensionale Teilräume $S_{h_j} = S_j$ von H^s finde man $u_j \in S_j$, das

$$(2.3) \quad \langle Au_j, v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad v \in S_j,$$

erfüllt. Die Indizierung mit $j \in \mathbb{N}$ deutet an, daß es später von Belang sein wird, statt eines einzelnen Raumes eine ganze Folge in Betracht zu ziehen. Die h_j seien Parameter, die die Diskretisierungsfeinheit reflektieren. Der Einfachheit halber sei im folgenden stets $h_j = 2^{-j}$. Seien Q_j gleichmäßig H^0 -beschränkte lineare Projektoren auf S_j . Für manche Belange ist es bequemer, (2.3) als *Projektions-Verfahren* in der Form

$$(2.4) \quad Q_j^* A u_j = Q_j^* f$$

zu schreiben, wobei Q^* die Adjungierte von Q_j (bezügl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$) ist. Das Verfahren heißt (s, r) -stabil, falls

$$(2.5) \quad \|Q_j^* A v_j\|_{H^{s-r}} \gtrsim \|v_j\|_{H^s}, \quad v_j \in S_j.$$

Gelten für die Räume S_j gewisse *direkte Ungleichungen* für die Approximationsgüte sowie *inverse Ungleichungen*, wie später zu präzisieren ist, so kann man für eine große Klasse von Problemen zeigen, daß unter der Voraussetzung (2.2) das Verfahren (2.4) (s, r) -stabil in einem Bereich für s ist, der von der Ordnung r des Operators A und von obigem Ungleichungspaar abhängt. Insbesondere erhält man Fehlerabschätzungen des Typs

$$(2.6) \quad \|u - u_j\|_{H^r} \leq 2^{j(\tau-v)} \|u\|_{H^v}$$

die wiederum für einen gewissen Bereich $\tau \leq v, r/2 \leq v$ gelten, wobei u und u_j die Lösungen von (2.1) bzw. (2.4) sind [DPS].

Insofern ist unter derartigen Bedingungen gesichert, daß sich für obige allgemeine Problemklasse prinzipiell Näherungslösungen mit beliebiger Genauigkeit bestimmen lassen. Es stellt sich somit die Aufgabe, diese Näherungen mit einem vertretbaren Aufwand zu gewinnen. Welche wesentlichen Probleme in diesem Zusammenhang auftreten, soll an zwei Beispielklassen im folgenden etwas genauer gekennzeichnet werden.

2.2 Elliptische Randwertprobleme

Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^d$ mit hinreichend glattem Rand. Für $s = r/2 \in \mathbb{N}$ sei A ein Differentialoperator der Ordnung r und $H^{r/2} = H_0^{r/2}(\Omega)$ der Abschluß der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω bezüglich der üblichen Sobolevnorm der Ordnung $r/2$. Ferner definiere

$$a(u, v) := \int_{\Omega} Au(x)v(x)dx =: \langle Au, v \rangle$$

eine stetige, *symmetrische*, $H^{r/2}$ -elliptische Bilinearform, d. h.

$$(2.7) \quad a(\cdot, \cdot) \sim \|\cdot\|_{H^{r/2}}^2.$$

Ein typisches Beispiel ist $A := -\nabla \cdot (C(x)\nabla)$, wobei $C(x)$ eine auf Ω positiv definite Matrix ist.

Wählt man Basen für S_j von Funktionen mit kompaktem Träger, führt (2.3) auf lineare Gleichungssysteme

$$(2.8) \quad A_j u_j = f_j$$

mit *dünnbesetzten* und symmetrisch positiv definiten Systemmatrizen A_j . Bei drei Ortsvariablen $d = 3$ und hinreichend kleiner Gitterweite h_j verbietet die Größe der Matrizen im allgemeinen den Einsatz *direkter* Lösungsverfahren. Zum einen würde die Anzahl der erforderlichen Rechenoperationen unakzeptabel groß, zum anderen füllen sich im Laufe der Elimination die ursprünglich dünnbesetzten Matrizen allmählich auf, so daß sich auch der Speicherbedarf überproportional erhöht.

Als Alternative kommen *iterative* Verfahren in Frage, bei denen sich der Speicherbedarf nicht wesentlich erhöht. Da jeder Iterationsschritt aufgrund der Dünnbesetztheit größenordnungsmäßig so viele Operationen wie Unbekannte erfordert, müßte jede Iteration, um Optimalität im obigen Sinne zu gewährleisten, den Fehler um einen Faktor reduzieren, der unabhängig von der Größe der Matrix (bzw. vom Diskretisierungsparameter $h_j = 2^{-j}$) ist. Nun hängt die Konvergenzgeschwindigkeit von der spektralen Kondition $\kappa_2(A_j)$ von A_j ab, die hier als Quotient des größten und kleinsten Eigenwerts von A_j definiert ist. Optimalität würde eine in j gleichmäßige Beschränktheit der Konditionszahlen erfordern. Man sieht aber auch leicht ein, daß für A_j aus (2.8) die Kondition mit zunehmender Diskretisierungsfeinheit wächst, nämlich

$$(2.9) \quad \kappa_2(A_j) \sim 2^{jr}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Um dennoch die gewünschte Effizienz zu gewährleisten, ist es von zentralem Interesse, das System (2.8) *vorzukonditionieren*. Dies heißt, man muß geeignete symmetrisch positiv definite Matrizen C_j bestimmen, für die sich $C_j A_j u_j = C_j f_j$ effizient iterativ lösen läßt, bzw. $\kappa(C_j^{1/2} A_j C_j^{1/2}) = \mathcal{O}(1)$, $j \rightarrow \infty$, gilt.

2.3 Integral/Pseudo-Differentialgleichungen

Die zweite Beispielklasse umfaßt eine große Klasse von Pseudo-Differentialoperatoren. Mehr Details zu den folgenden Ausführungen und weitere Literaturhinweise findet man in [DPS]. Über $\mathbb{R}^d$ lassen sich solche Operatoren bekanntlich am bequemsten über ihr *Symbol* gemäß

$$Au(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \langle \xi, x-y \rangle} \sigma(x, \xi) u(y) dy \right) d\xi$$

spezifizieren [Ku]. Eine typische Forderung an das Symbol ist

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x, \xi)| \leq c_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{r - |\alpha|}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

r bezeichnet die Ordnung des Operators A . Man kann nun zeigen, daß A (2.2) unter den Voraussetzungen

$$\text{Kern}(A) = \{0\}, \quad \text{Re } \sigma_0(x, \xi) \geq c |\xi|^r \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

erfüllt, wobei σ_0 den Hauptteil des Symbols bezeichnet [HW]. Auf einer gegebenen hinreichend glatten Riemannschen Mannigfaltigkeit Ω läßt sich aus obiger Klasse eine entsprechende Klasse auf Ω in kanonischer Weise mit Hilfe von Zerlegungen der Eins erzeugen, für die ebenfalls (2.2) gilt. Eine weitere wichtige Eigenschaft läßt sich über die Darstellung

$$Au(x) = \int_{\Omega} K_A(x, y) u(y) dy$$

in der Form

$$(2.10) \quad |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K_A(x, y)| \leq c_{\alpha, \beta} \text{dist}(x, y)^{-(d+r+|\alpha|+|\beta|)}, \quad d+r+|\alpha|+|\beta| > 0,$$

angeben. Diese Bedingung wird sich als essentiell für die Matrixkompression erweisen. Sie kann auch noch gelten, wenn der Operator kein Pseudo-Differentialoperator mehr ist.

Es gibt eine Vielzahl von Anwendungsbeispielen, die in den obigen Rahmen fallen. Etwa das als *Radiosity* bezeichnete Illuminationsmodell, das man zur photorealistischen Computervisualisierung vor allem diffuser Effekte verwenden kann, beruht auf der Lösung einer Integralgleichung über Ω , wobei der Integralkern obige Eigenschaften hat, und Ω die durch die Szenengegenstände definierte Oberfläche ist [GSCH, Ka]. Andere Beispiele treten bei Streuproblemen oder in der Verformungstechnik auf. Hierbei wird ein Randwertproblem für eine lineare partielle Differentialgleichung auf eine Integralgleichung auf dem Rand des Gebiets transformiert [CS, CW]. Letztere läßt sich numerisch wieder mit Hilfe von Galerkin- oder Kollokationsverfahren lösen. Soll insbesondere die ursprüngliche Randwertaufgabe auf dem *Außenraum* eines Kompaktums gelöst werden, hat diese *Randelementmethode* folgende Vorteile.

Statt eines Problems auf einem dreidimensionalen unbeschränkten Gebiet ist nur noch ein Problem auf einem zweidimensionalen Kompaktum zu lösen.

Dem steht allerdings als Nachteil der Umstand gegenüber, daß entsprechende Matrizen im allgemeinen *vollbesetzt* sind, auch wenn man Ansatzfunktionen mit kleinen Trägern benutzt. Bei zweidimensionalen Oberflächen mit komplexer Struktur kann dies für die Durchführbarkeit des Verfahrens entscheidend sein. Abgesehen von dem für $r \neq 0$ auch hier auftretenden Konditionsproblem stellt sich als möglicher Ausweg die Aufgabe, eine zumindest *approximativ dünnbesetzte* Diskretisierung des Operators A zu finden.

Ein einfaches Beispiel läßt sich folgendermaßen beschreiben [DKPS]. Für ein gegebenes beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ betrachte man die Randwertaufgabe

$$(2.11) \quad \Delta U = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \quad U|_{\partial\Omega} = f.$$

Die Lösung von (2.11) ist durch

$$(2.12) \quad U(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{n_y \cdot (x-y)}{|x-y|^3} u(y) dy, \quad x \in \Omega,$$

gegeben, falls u die Operatorgleichung

$$Au = f \quad A = I + 2W$$

löst. Ist insbesondere Ω ein polyhedrales Gebiet und bezeichnet $\theta_\Omega(x)$ den Innenwinkel an der Stelle x , ist der Operator W durch das Doppelschichtpotential

$$(2.13) \quad Wu(x) := [1/2 - \theta_\Omega(x)]u(x) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{n_y \cdot (x-y)}{|y-x|^3} u(y) dy,$$

gegeben (vgl. [Maz]). Hier ist n_y die innere Normale zur Gebietsoberfläche am Punkte y . Die Tatsache, daß das Gebiet nicht glatt ist, bedingt, daß W nicht kompakt ist. Die Kernfunktion hat starke Singularitäten entlang der Kanten des

Polyhedrons. Er ist zwar kein Pseudo-Differentialoperator mehr, jedoch ein Calderón-Zygmund-Operator (der Ordnung $r=0$) (vgl. [M2]) und erfüllt somit immer noch eine Bedingung des Typs (2.10).

3 Multiskalen-Zerlegungen

Man kann nicht erwarten, aus der Restriktion des Operators A auf einen einzelnen endlichdimensionalen Raum (noch so großer Dimension) hinreichend genaue Information über die Lösung von (2.1) zu gewinnen. Man kann hingegen hoffen, aus der Wirkung von A auf eine Folge von Räumen asymptotische Eigenschaften extrahieren zu können.

3.1 Ein allgemeiner Rahmen

Allgemein betrachte man eine aufsteigende dichte Folge $\mathcal{S}$ von abgeschlossenen, geschachtelten Teilräumen S_j eines Hilbertraumes H

$$\dots \subset S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \dots H, \quad \overline{\bigcup_j S_j} = H.$$

Im Hinblick auf praktische Anwendungen ist es sinnvoll zu fordern, daß

$$S_j = \text{span } \Phi_j, \quad \Phi_j = \{\varphi_{j,k} : k \in I_j\},$$

wobei die Φ_j stabile Basen sind, d. h.

$$(3.1) \quad \|c\|_{l_2(I_j)} \sim \left\| \sum_{k \in I_j} c_k \varphi_{j,k} \right\|_H.$$

Man kann nun nach Möglichkeiten suchen, eine gegebene Approximation $v_n \in S_n$ durch einen Term w_n in einem geeigneten Komplement W_n von S_n in S_{n+1} zu verbessern. Ist $\Psi^n = \{\psi_{n,k} : k \in J_n\}$ nun eine im Sinne von (3.1) stabile Basis von W_n , läßt sich jedes $v_n \in S_n$ einerseits in der *Einzelskalendarstellung*

$$(3.2) \quad v_n = \sum_{k \in I_n} c_k \varphi_{n,k}$$

als auch andererseits als *Multiskalendarstellung*

$$(3.3) \quad v_n = \sum_{j=-1}^{n-1} \sum_{k \in J_j} d_{j,k} \psi_{j,k}$$

schreiben, wobei $\Psi_{-1} := \Phi_0, J_{-1} := I_0$.

Hierarchische Basen sind ein einfaches Beispiel im Finite-Elemente-Kontext [Y]. Die systematischsten Konstruktionsprinzipien stehen für den Fall $H = L_2(\mathbb{R}^d)$ und $\varphi_{j,k} = 2^{dj/2} \varphi(2^j \cdot - k), k \in \mathbb{Z}^d$, zur Verfügung. In diesem Fall gilt $v \in S_j$, genau dann wenn $v(2^{-j} \cdot) \in S_0$. Entsprechend reicht es, das Komplement W_0 zu definieren. Man sieht leicht ein, daß W_0 durch die ganzzahligen Translate von $2^d - 1$ Funktionen

$$(3.4) \quad \psi_e = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k^e \varphi(2 \cdot - k), \quad e \in \{0, 1\}^d \setminus \{0\},$$

erzeugt ist. Die Konstruktion geeigneter zusätzlicher Masken $\{a_k^e\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$, $e \in \{0, 1\}^d \setminus \{0\}$, verlangt, den gegebenen Zeilenvektor mit Einträgen $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_{2k+e} z^k$, $e \in \{0, 1\}$, zu einer quadratischen Matrix zu ergänzen, deren Einträge Laurent-Polynome sind und deren Determinante zumindest auf dem Torus nicht verschwindet. Falls obige Ausgangspolynome auf $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^d$ keine gemeinsamen Nullstellen haben, sichert der Satz von Quillen-Suslin, daß man Matrixergänzungen mit konstanter Determinante finden kann (vgl. [JM]). Wählt man speziell das Komplement W_0 als orthogonales Komplement von S_0 in S_1 , nennt man die ψ_e meist (Prä-)Wavelets (vgl. [C]). Der Nachteil dieses Konstruktionsrahmens ist, daß er sich nicht leicht für beschränkte Gebiete oder geschlossene Oberflächen nutzen läßt. In solchen Fällen ist es meist schwierig, orthogonale Zerlegungen mit vertretbarem Aufwand zu konstruieren. Entsprechende Konstruktionen haben daher stets spezielleren Charakter.

Hat man nun solche Komplementbasen zur Verfügung und möchte explizit mit der Multiskalendarstellung arbeiten, hat man letztlich Transformationen des Typs

$$(3.5) \quad T_n : \mathbf{d} \mapsto \mathbf{c}$$

auszuführen, wobei $\mathbf{c}$ bzw. $\mathbf{d}$ die Koeffizientenvektoren aus den Darstellungen (3.2) bzw. (3.3) sind. Als wesentliche Forderungen an die *Multiskalen-Transformationen* T_n ergeben sich dabei

Komplexität: Die Ausführung von T_n sollte nur $\mathcal{O}(\dim S_n)$ Operationen beanspruchen.

Stabilität: T_n soll gleichmäßig beschränkte Kondition haben, d. h.

$$\|T_n\| \|T_n^{-1}\| = \mathcal{O}(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Erste Forderung betrifft die Lokalität der Funktionen $\varphi_{j,k}, \psi_{j,k}$. Zum Beispiel sollten in (3.4) nur endlich viele Koeffizienten von Null verschieden sein. T_n hat die Struktur eines *Pyramiden-Schemas* wie die schnelle Wavelettransformation (vgl. z. B. [D2]).

Die zweite Forderung hat eine Reihe von Konsequenzen, die im folgenden zentrale Bedeutung haben. Arbeitet man mit orthogonalen Komplementen, genügt offensichtlich die Stabilität der einzelnen Komplementbasen Ψ^j . Muß man auf Orthogonalität verzichten, wirft die Sicherung der Stabilität *über alle* Skalen ein ernsteres Problem auf. Der dabei zur Verfügung stehende Spielraum ist folgendermaßen gekennzeichnet [D1].

Bemerkung 3.1. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (i) *Die T_n sind im obigen Sinne stabil.*
- (ii) *Die Familie von Funktionen*

$$\Psi := \{\psi_{j,k} : k \in J_j, j \in \mathbb{N}_0\}$$

bildet eine Riesz-Basis von H , d. h. jedes $v \in H$ hat eine eindeutige Darstellung

$$(3.6) \quad v = \sum_{j=-1}^{\infty} \sum_{k \in J_j} d_{j,k}(v) \psi_{j,k},$$

wobei

$$(3.7) \quad \|v\|_H \sim \left(\sum_{j=-1}^{\infty} \sum_{k \in J_j} |d_{j,k}(v)|^2 \right)^{1/2}.$$

(iii) Es existiert eine biorthogonale Riesz-Basis $\tilde{\Psi}$, d. h. $\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j',k'} \rangle = \delta_{(j,j'), (k,k')}$, und $d_{j,k}(v) = \langle v, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle$.

Eigenschaft (iii) in Bemerkung 3.1 besagt gerade, daß die Abbildungen

$$(3.8) \quad Q_{n+1}f := \sum_{j=-1}^n \sum_{k \in J_j} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad Q_n^*f := \sum_{j=-1}^n \sum_{k \in J_j} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k}$$

dann offenbar zueinander adjungierte Projektoren mit Bildern S_{n+1} bzw. $\tilde{S}_{n+1}$ sind. Wegen (3.7) sind die Q_n, Q_n^* gleichmäßig beschränkt. Ferner erfüllen sie

$$(3.9) \quad Q_j Q_n = Q_j, \quad \text{für alle } j \leq n.$$

Bemerkung 3.2. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\mathcal{Q}$ erfüllt (3.9).
- (ii) Die Bilder $\mathcal{S}$ der adjungierten Projektoren sind auch geschachtelt.
- (iii) Die Abbildungen $Q_{j+1} - Q_j$ sind auch Projektoren.

Für eine Folge $\mathcal{Q}$ von linearen gleichmäßig beschränkten Projektoren, die (3.9) erfüllen, stellt somit die in der Norm konvergierende Entwicklung

$$(3.10) \quad v = \sum_{j=0}^{\infty} (Q_j - Q_{j-1})v \quad (Q_{-1} = 0),$$

eine Zerlegung von v in direkte Summanden dar, die typischerweise zunehmendes Detail von v repräsentieren. Das Problem, stabile Multiskalenbasen Ψ und somit gutkonditionierte Transformationen T_n zu konstruieren, läßt sich nun in folgende Teilaufgaben zerlegen:

(I) Zu gegebenem $\mathcal{S}$ finde $\mathcal{Q}$, das (3.9) erfüllt. Wegen Bemerkung 3.2 (ii) bedeutet dies, zu den Φ_j biorthogonale Basen $\tilde{\Phi}_j$ zu konstruieren, die wieder geschachtelte Räume erzeugen.

(II) Bestimme stabile Basen Ψ^j für die Komplementräume $W_j := (Q_{j+1} - Q_j)S_{j+1}$, so daß man über explizite Darstellungen der Details

$$(3.11) \quad (Q_j - Q_{j-1})v = \sum_{k \in J_j} d_{j,k}(v) \psi_{j,k}$$

verfügen kann.

(III) Die Relation (3.7) ist dann äquivalent zu

$$(3.12) \quad \|v\|_H \sim \left(\sum_{j=0}^{\infty} \|(Q_j - Q_{j-1})v\|_H^2 \right)^{1/2},$$

so daß zu klären ist, unter welchen gegebenenfalls über (3.9) hinausgehenden Bedingungen (3.12) gilt.

Prinzipiell kann man (I) über Grenzwerte von sogenannten *Unterteilungs-algorithmen* angehen [D2]. Für den speziellen *stationären* Rahmen (3.4) sind eine

Reihe praktikabler Kriterien bekannt, die wesentlichen Gebrauch von Fouriertransformations-Techniken machen [CDM, CD]. Falls etwa aufgrund beschränkter Gebiete derartige Hilfsmittel nicht zur Verfügung stehen, sind diese Konvergenzfragen im allgemeinen recht schwierig. Falls jedoch die Φ_j über Modifikationen des stationären Falls gewonnen werden, etwa um Gebietsränder zu berücksichtigen, lassen sich die Grenzwertbetrachtungen zur Konstruktion der $\tilde{\Phi}_j$ vermeiden [CDD].

(II) hängt stark von der konkreten Situation ab. Verschiedene Möglichkeiten werden in [CDP] diskutiert.

Sobald man den Rahmen orthogonaler Komplemente verläßt, ist (III) meist das schwierigere Problem. Im Falle (3.4) und $H=L_2(\mathbb{R}^d)$ läßt sich die Stabilität im Sinne von (3.12) mit Hilfe von Fouriertransformationstechniken charakterisieren [CD]. Im Hinblick auf obige Anwendungen ist es jedoch wichtig, auf das Hilfsmittel der Fouriertransformation verzichten zu können. Es zeigt sich, daß (3.9) alleine nicht hinreicht, (3.12) zu sichern [D2, M1]. Man benötigt zusätzliche Information über $\mathcal{S}$ und $\tilde{\mathcal{S}}$. Ein Beispiel derartiger Zusatzinformation läßt sich wie folgt formulieren. Sei $\{\omega(\cdot, t): t > 0\}$ eine Familie gleichmäßig beschränkter, subadditiver, nichtnegativer Funktionale auf H , für die $\omega(v, 0^+) = 0$ für alle $v \in H$ gilt. Da klassische Stetigkeitsmodule gerade diese Eigenschaften besitzen, sei $\omega(\cdot, t)$ kurz als *Modul* bezeichnet. Mit den Ungleichungen

$$(3.13) \quad \inf_{v_j \in S_j} \|v - v_j\|_H \leq \omega(v, 2^{-j}), \quad v \in H,$$

$$\omega(v_j, t) \leq (\min\{1, t2^j\})^\gamma \|v_j\|_H, \quad v_j \in S_j,$$

für ein $\gamma > 0$, ist dann eine Analogie zu klassischen *Jackson-* und *Bernstein-Ungleichungen* gegeben, wobei hier wieder $h_j = 2^{-j}$ angenommen wird.

Satz 3.1. *Sei $\mathcal{S}$ eine dichte geschachtelte Folge abgeschlossener Teilräume eines Hilbertraumes H . $\mathcal{Q}$ sei eine gleichmäßig beschränkte Folge linearer Projektoren mit Bildern $\mathcal{S}$, die (3.9) erfüllt. Wie oben bezeichne $\tilde{\mathcal{S}}$ die Bilder der adjungierten Operatoren $\mathcal{Q}^*$. Falls ein Modul w und $\gamma, \tilde{\gamma} > 0$ existieren, so daß $\mathcal{S}$ und $\tilde{\mathcal{S}}$ jeweils (3.13) erfüllen, dann gilt die Normäquivalenz (3.12).*

Der in [D1] gegebene Beweis verwendet Hilfsmittel aus der Theorie der Funktionenräume und der Approximationstheorie.

Es wird sich zeigen, daß sich die Umformulierung der Stabilitätsfrage für die Transformationen T_j auf Normäquivalenzen des Typs (3.12) in mehrfacher Hinsicht als nützlich erweisen wird. Einerseits werden sich daraus bequem weitere Normäquivalenzen folgern lassen, die unabhängig von der speziellen Basiswahl sind und grundlegende Bedeutung für Vorkonditionierung bei Operatoren positiver und negativer Ordnung haben. Es ist ferner bekannt, daß sich bei gewissen Anwendungen die explizite Darstellung (3.11) der Komplementräume umgehen läßt. Andererseits liefern die Normäquivalenzen (3.12) immer noch *frame bounds*, wenn die Bestimmung der Komplementbasen zu aufwendig ist.

3.2 Sobolev-Normen

Speziell ist natürlich der Fall $H = H^s(\Omega)$ oder $H = H_0^s(\Omega)$ und insbesondere $H = L_2(\Omega)$ von Interesse. Die Rolle des Moduls ω kann dann zum Beispiel von den klassischen L_2 -Glattheitsmodulen (bzw. geeigneten Modifikationen) übernommen werden, deren Ordnung die Regularitäts- und Approximationseigenschaften der Räume $\mathcal{S}$ widerspiegelt. Es zeigt sich, daß (3.13) unter gewissen Voraussetzungen an den Rand des Gebiets Ω zu folgendem Paar von Ungleichungen äquivalent ist:

$$(3.14) \quad \inf_{v_n \in S_n} \|v - v_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 2^{-nt} \|v\|_{H^t(\Omega)}, \quad v \in H^t(\Omega), t \leq m,$$

falls in (3.13) ω ein auf Differenzen m -ter Ordnung beruhender L_2 -Glattheitsmodul ist, und

$$(3.15) \quad \|v_n\|_{H^t(\Omega)} \leq 2^{nt} \|v_n\|_{L_2(\Omega)}, \quad v_n \in S_n, t < \gamma.$$

Man kann dann aus Satz 3.1 ableiten, daß sich die Normäquivalenz (3.12) im folgenden Sinne auf eine ganze Skala von Räumen ausdehnen läßt. Hierzu definiere

$$A_s: v \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} 2^{sj} (Q_j - Q_{j-1})v.$$

Satz 3.2. *Sei $\mathcal{Q}$ eine auf $L_2(\Omega)$ gleichmäßig beschränkte Folge von linearen Projektoren mit geschachtelten Bildern $\mathcal{S}$, die (3.9) erfüllt. Gelten (3.14), (3.15) für $\mathcal{S}$ und $\tilde{\mathcal{S}}$ bezüglich $m, \tilde{m} \in \mathbb{N}$ und $\gamma, \tilde{\gamma} > 0$ ($\gamma \leq m, \tilde{\gamma} \leq \tilde{m}$), so gilt*

$$(3.16) \quad \|A_s v\|_{H^r(\Omega)} \sim \|v\|_{H^{s+r}(\Omega)}, \quad s + r \in (-\tilde{\gamma}, \gamma),$$

so daß für $s \in (-\tilde{\gamma}, \gamma)$

$$(3.17) \quad \|v\|_{H^s(\Omega)} \sim \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{2sj} \|(Q_j - Q_{j-1})v\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \sim \left(\sum_{j=0}^{\infty} \|(Q_j - Q_{j-1})v\|_{H^s(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

4 Anwendungen

Im folgenden werden einige Konsequenzen obiger Beobachtungen für die in Kapitel 2 geschilderten Problemtypen diskutiert.

4.1 Vorkonditionierung

Wir betrachten zunächst die in Abschnitt 2.2 geschilderte Situation, d. h. $r/2 \in \mathbb{N}$ und $a(\cdot, \cdot) := \langle A\cdot, \cdot \rangle$ sei eine symmetrische, $H^{r/2}$ -elliptische Bilinearform. Falls wie oben $h_j \sim 2^{-j}$, ergibt sich für

$$A_j := Q_j^* A Q_j,$$

daß $\kappa(A_j) \sim 2^{rj}$. Die Realisierung einer a.o. iterativen Methode verlangt die Bestimmung symmetrisch positiv definiter Operatoren C_j , so daß

$$(4.1) \quad \kappa_2(C_j A_j) = \kappa_2(C_j^{1/2} A_j C_j^{1/2}) = \mathcal{O}(1), \quad j \rightarrow \infty.$$

Aufgrund der Min-Max-Charakterisierung der größten und kleinsten Eigenwerte *symmetrisch* positiv definiter Operatoren ist dies äquivalent zu $\langle u, u \rangle \sim \langle C_j^{1/2} A_j C_j^{1/2} u, u \rangle$ und somit zu

$$(4.2) \quad \langle C_j^{-1} v, v \rangle \sim \langle A_j v, v \rangle = a(v, v) \sim \|v\|_{H^{r/2}},$$

wobei im letzten Schritt die $H^{r/2}$ -Elliptizität (2.7) benutzt wurde. Erfülle nun $\mathcal{S}$ die Bedingungen (3.14), (3.15) für $t > r/2$. Wählt man $\mathcal{Q}$ als orthogonale Projektoren auf $\mathcal{S}$, so gilt (3.9) und $\mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}}$. Definiert man nun

$$(4.3) \quad C_j^{-1} : \sum_{l=0}^j 2^{rl} (Q_l - Q_{l-1}),$$

folgt aus Satz 3.2

$$\langle C_j^{-1} v, v \rangle = \left\langle \sum_{l=0}^j 2^{rl/2} (Q_l - Q_{l-1}) v, \sum_{l=0}^j 2^{rl/2} (Q_l - Q_{l-1}) v \right\rangle \sim \|v\|_{H^{r/2}}^2.$$

Wegen (4.2) und der vorhergehenden Bemerkungen bedeutet dies aber gerade

$$(4.4) \quad \kappa_2(C_j^{1/2} A_j C_j^{1/2}) = \mathcal{O}(1), \quad j \rightarrow \infty,$$

(vgl. [BPX, DK, O1]).

Die entscheidende Frage ist, wie man C_j effizient auswerten kann. Wegen

$$C_j = \sum_{l=0}^j 2^{-rl} (Q_l - Q_{l-1})$$

scheint dies zunächst die Kenntnis expliziter Darstellungen (3.11) für die Elemente der orthogonalen Komplemente zu erfordern. Bereits für stückweis lineare finite Elemente kann die Bereitstellung solcher Basen mit unvertretbarem Aufwand verbunden sein. Tatsächlich läßt sich dies aber über folgende wichtige Beobachtung vermeiden [X]. Man sieht zunächst leicht ein, daß C_j spektral äquivalent zu $\sum_{l=0}^j 2^{-rl} Q_l$ ist. Da aber Q_l wiederum zu $\sum_{k \in I_l} \langle v, \varphi_{l,k} \rangle \varphi_{l,k}$ spektral äquivalent ist, genau dann wenn Φ_j stabil ist, verfügt man mit

$$(4.5) \quad \hat{C}_j v := \sum_{l=0}^j 2^{-lr} \sum_{k \in I_l} \langle v, \varphi_{l,k} \rangle \varphi_{l,k}$$

über einen zu C_j spektral äquivalenten Operator, dessen Anwendung, wie sich zeigt, nur $\mathcal{O}(\dim S_j)$ Operationen erfordert und der asymptotisch optimal ist [O2, X, Y].

In dieser Form wurde zunächst die Gültigkeit der direkten Abschätzung (3.14) vorausgesetzt, was typischerweise auf uniforme Verfeinerungen eines Ausgangsnetzes zugeschnitten ist. Tatsächlich läßt sich dieses Ergebnis aber auf adaptiv lokal verfeinerte Netze übertragen, indem man zum Beispiel geeignete Besovnormen verwendet und die Terme $\|(Q_j - Q_{j-1})v_m\|_{L_2(\Omega)}$ für $j \leq m$ direkt abschätzt [DK].

Zunächst scheint also nur die Normäquivalenz in Satz 3.2 wichtig zu sein, während sich die Transformationen T_j vermeiden lassen. Es stellt sich die Frage,

inwieweit sich der Aufwand zur Bestimmung expliziter Basen überhaupt lohnen wird.

Im folgenden werden einige Gesichtspunkte angesprochen, unter denen stabile Multiskalen-Basen dennoch Vorteile versprechen.

Im Hinblick auf das Problem der Vorkonditionierung mögen $\mathcal{S}$ und $\mathcal{Q}$ die Voraussetzungen von Satz 3.2 für $\gamma, \tilde{\gamma} > r/2$ erfüllen, wobei hier die Q_j nicht notwendig orthogonale Projektoren sind. Für $w_j = A_{r/2} v_j$ erhält man wegen (2.5)

$$\|w_j\|_{L_2(\Omega)} \sim \|v_j\|_{H^{r/2}} \sim \|Q_j^* A v_j\|_{H^{-r/2}} \sim \|A_{r/2}^* Q_j^* A Q_j A_{-r/2} w_j\|_{L_2(\Omega)}.$$

Bezeichnet man mit A_{Ψ_j} die Steifigkeitsmatrix von A bezüglich der Basis $\Psi_j := \bigcup_{l=-1}^{j-1} \Psi^l$, so ist die Matrixdarstellung des Operators $A_{r/2}^* Q_j^* A Q_j A_{-r/2}$ gerade

$$(4.6) \quad B_j := D_j^{-r/2} A_{\Psi_j} D_j^{-r/2},$$

wobei D_j^f eine Diagonalmatrix der Form $(D_j^f)_{(l,k),(l',k')} = 2^{sl} \delta_{l,l'} \delta_{k,k'}$, $l, l' < j$, $k \in J_l$, $k' \in J_{l'}$ ist. Aus Satz 3.2 folgt wiederum sofort

Satz 4.1. *Unter obigen Annahmen gilt*

$$\|B_j\|_2 \|B_j^{-1}\|_2 = \kappa_2(B_j) = \mathcal{O}(1), \quad j \rightarrow \infty.$$

Hierbei ist allerdings zu beachten, daß im Gegensatz zum vorher beschriebenen Zugang *schwächere* Voraussetzungen an A reichen:

A muß *nicht* notwendig symmetrisch sein. A kann *negative* Ordnung haben.

Man kann dann allerdings nicht mehr auf eine Realisierung des Typs (4.5) zurückgreifen. Alternativ kann man folgendermaßen vorgehen. Falls A ein Operator mit globalem Schwarzkern ist, so daß Steifigkeitsmatrizen im allgemeinen voll besetzt sind, wird man diese sofort bezüglich der Multiskalenbasis Ψ_n bilden. Wie sich später zeigen wird, hat dies noch besondere Vorteile für eine große Klasse von Operatoren. Die Vorkonditionierung beschränkt sich wegen (4.6) auf eine symmetrische Diagonalskalierung. Ist A ein Differentialoperator, ist die Steifigkeitsmatrix A_{Φ_n} bezüglich der Basen Φ_n dünn besetzt. Beachtet man, daß für T_n gemäß (3.5) offensichtlich

$$(4.7) \quad T_n^T A_{\Phi_n} T_n = A_{\Psi_n},$$

ist mit $\mathbf{c}^n = T_n \mathbf{d}^{(n)}$ das System $A_{\Phi_n} \mathbf{c}^n = \mathbf{f}_n$ äquivalent zu $A_{\Psi_n} \mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{f}_{\Psi_n}$. Für effizientes T_n im Sinne von Abschnitt 3 reicht es somit aus, A_{Φ_n} zu speichern und T_n auszuführen. Der Vorkonditionierer C_j läßt sich geschlossen als

$$C_j = (D_j^{-r/2} T_j^T) (D_j^{-r/2} T_j^T)^T$$

angegeben. Man sieht, daß sich bei einem etwas größeren Anwendungsradius durch Basiswechsel verbunden mit symmetrischer Diagonalskalierung ebenfalls ein a.o. Verfahren ergibt. Bei nichtsymmetrischen Problemen kann man zwar nicht mehr das Verfahren der konjugierten Gradienten verwenden, sondern muß auf entsprechende Varianten ausweichen oder *nach* Vorkonditionierung quadrieren.

4.2 Matrix-Kompression

Wir betrachten jetzt eine Anwendung, bei der die explizite Verfügbarkeit von stabilen Multiskalen-Basen wesentliche Vorteile bietet. Zum Beispiel bei Randelementmethoden ergeben sich vollbesetzte Matrizen und damit bei höherer Raumdimension ein wesentliches Hindernis für eine effiziente numerische Behandlung. Insbesondere geht es darum, die für jedes iterative Verfahren zentrale Operation der Matrix-Vektor-Multiplikation zu beschleunigen, das heißt, die in der Anzahl der Unbekannten quadratische Komplexität durch (gegebenenfalls bis auf logarithmische Faktoren) lineare Ordnung zu reduzieren. Bei guter Kenntnis des Integralkerns wird dies durch *Panel Clustering* bzw. *Multipolentwicklungen* geleistet [HN, R], wobei die Matrix-Vektor-Multiplikation nur *approximativ* innerhalb einer vorgegebenen Genauigkeit realisiert wird. Betrachtet man auch Kollokationsverfahren oder Petrov-Galerkin-Verfahren, stellt sich allerdings die Frage der Stabilität, das heißt, man muß klären, wie sich die Fehlertoleranzen bei der approximativen Matrix-Vektor-Operation auf die Genauigkeit der am Ende erhaltenen Lösung des diskreten Problems auswirken. Über eine etwas andere Sichtweise kann man ein alternatives Konzept verfolgen, das ein etwas weiteres Anwendungsspektrum zu eröffnen scheint und auch einen analytischen Rahmen für Stabilitäts- und Konvergenzbetrachtungen bereitstellt. Für ein eindimensionales symmetrisches Problem und einen Operator nullter Ordnung wird das wesentliche Prinzip in [BCR] vorgeschlagen. Eng damit verwandt ist das Vorgehen in [BL]. Die Grundidee liegt darin, eine derartige Matrix-Darstellung für den endlichdimensionalen Operator

$$(4.8) \quad A_j = Q_j^* A Q_j$$

zu finden, die sich ihrerseits durch eine dünnbesetzte Matrix gut approximieren läßt. Dabei soll die Lösung des gestörten bzw. *komprimierten* Systems nur innerhalb einer zulässigen Toleranz von der Lösung des ungestörten diskreten Problems abweichen, wobei man insbesondere den Fall untersuchen kann, daß diese Toleranz proportional zur Konvergenzordnung der ungestörten Lösungen bleibt. Es zeigt sich, daß derart geeignete Darstellungen für A_j aus (4.8) gerade Steifigkeitsmatrizen A_{ψ_j} bezüglich stabiler Multiskalen-Basen Ψ_j sind. Hierzu nehme man an, daß die dualen Räume $\tilde{\mathcal{S}}$ exakt vom Grade $n-1$ sind, das heißt, alle Polynome vom Grade höchstens $n-1$ lassen sich (lokal) als Linearkombinationen der Basisfunktionen in $\tilde{\Phi}_j$ darstellen. Dies ist in vielen Fällen dazu äquivalent, daß (3.14) für $\tilde{\mathcal{S}}$ mit $t \leq n$ gilt. Man sieht aber leicht, daß aufgrund der Biorthogonalität von Ψ und $\tilde{\Psi}$ dies gerade

$$(4.9) \quad \int_{\Omega} \psi_{j,k}(x) x^\alpha dx = 0, \quad |\alpha| < n,$$

impliziert. Wie in [BCR] für den Fall orthogonaler Wavelets ergibt dies für beliebige Polynome $p(x, y)$ vom Grade höchstens n in x und y

$$\begin{aligned}
\langle A \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} K(x,y) \psi_{j',k'}(x) \psi_{j,k}(y) dx dy \\
&= \int_{\Omega} \int_{\Omega} (K(x,y) - p(x,y)) \psi_{j',k'}(x) \psi_{j,k}(y) dx dy.
\end{aligned}$$

Wenn immer der Kern K in einer Umgebung von x, y hinreichend glatt ist, kann man p als Taylor-Polynom um $(x_{j',k'}, y_{j,k}) \in \text{supp } \psi_{j',k'} \times \text{supp } \psi_{j,k}$ wählen und erhält

$$K(x,y) - p(x,y) \sim \sum_{|\alpha|, |\beta| = n} (x - x_{j',k'})^\alpha (y - y_{j,k})^\beta \partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x_{j',k'}, y_{j,k}).$$

Elementare Abschätzungen unter Ausnutzung von (2.10) ergeben schließlich Abschätzungen des Typ [DPS, PS]

$$|\langle A \psi_{l,k}, \psi_{l',k'} \rangle| \lesssim 2^{-(l+l')d/2 - 2n} \text{dist}(\Omega_{l,k}, \Omega_{l',k'})^{-(d+r+2n)}.$$

Darauf aufbauend kann man folgender groben Vorgehensskizze folgen, um schließlich zu Stabilitäts- und Konvergenzaussagen zu kommen.

- An obige A-priori-Abschätzungen für die Einträge werden Abschneideregeln angepaßt, die vom Verfeinerungsgrad abhängen können.
- Schur-Lemma-Argumente in Verbindung mit der Vorkonditionierung gemäß Satz 4.1 liefern schließlich Normabschätzungen für die Differenz von A_{ψ_n} und der komprimierten Matrix.
- Approximationseigenschaften führen zu Konsistenzabschätzungen.
- Über Störungsargumente kommt man damit zu Stabilitäts- und Konvergenzbeweisen.

Für Galerkin-Verfahren bei Randintegralgleichungen auf Kurven und glatten Mannigfaltigkeiten Ω sei hierzu auf [DPS, PS] verwiesen. Die Analyse in [DPS1, DPS2] liefert Stabilitäts- und Konvergenzaussagen sogar für verallgemeinerte Petrov-Galerkin-Verfahren, speziell auch für Kollokation für eine große Klasse von Pseudo-Differentialgleichungen auf dem Torus.

In [DKPS] wird eine Implementation eines derartigen Verfahrens für die Doppelschichtpotentialgleichung (2.13) auf geschlossenen zweidimensionalen polyhedralen Oberflächen vorgestellt. Obgleich diese Gebiete nicht glatt sind, bestätigen sich erstaunlich gut die für den Torus gemachten Aussagen bezüglich Kompression, Konvergenz und Effizienz der Lösung der komprimierten Systeme. Dennoch bleibt als Engpaß die Berechnung der Steifigkeitsmatrix. Zunächst etwa in Anlehnung an (4.7) die volle Matrix A_{ϕ_j} zu berechnen erzeugt letztlich nicht vertretbare Kosten. Mit Hilfe der A-Priori-Abschätzungen nur die signifikanten Einträge von A_{ψ_j} zu berechnen, wirft Genauigkeitsprobleme bei der Quadratur auf. Mögliche Verbesserungen werden zur Zeit noch untersucht.

4.3 Weitere Perspektiven

Es haben sich inzwischen eine Reihe weiterer Fälle herausgeschält, in denen stabile Multiskalen-Basen erfolgreich eingesetzt werden können.

Dünne Gitter führen bei relativ geringen Genauigkeitsverlusten zu einer erheblichen Komplexitätsreduktion bei Diskretisierungen zu elliptischen Rand-

wertaufgaben [Z]. Das dahinterstehende Prinzip ist unabhängig in der Approximationstheorie an mehreren Stellen untersucht worden. In [GO2] wird gezeigt, daß Wavelets sich zur Konstruktion von robusten Vorkonditionierern bei anisotropen Problemen auch bei Dünngitterdiskretisierungen mit $d \geq 3$ eignen.

Stokes-Gleichungen stellen wichtige Modellprobleme zur Modellierung inkompressibler Flüssigkeiten dar. Klassische Finite-Elemente-Schemata für das Stokes-Problem und gemischte Formulierungen für elliptische Probleme führen auf Sattelpunktsprobleme. Die zugehörigen Matrizen sind indefinit. Die zentrale Voraussetzung für die stabile Lösbarkeit der diskreten Probleme ist, daß die Ansatzräume die sogenannte Babuška-Brezzi-Bedingung erfüllen. Unter Verwendung von Konstruktionsprinzipien für biorthogonale Wavelets (vgl. (3.4)) kann man Multiskalen-Basen konstruieren, die die Babuška-Brezzi-Bedingung erfüllen [DKU] oder sogar divergenzfrei sind [L, U]. Insbesondere im letzteren Fall reduziert sich die Aufgabe auf die Behandlung eines elliptischen Problems nach oben erwähnten Mustern, wobei Randbedingungen, die bei Ansatzfunktionen des Typs (3.4) oft Schwierigkeiten bereiten, mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren angehängt werden können [K]. Ferner erhält man stabile Zerlegungen des Raumes $H(\text{div})$ der Vektorfelder in L_2^d , deren Divergenz in L_2 liegt [U]. Schließlich bleibt zu erwähnen, daß bei Verwendung solcher Basen effiziente und im Prinzip dimensionsunabhängige Verfahren zur Berechnung der Steifigkeitsmatrizen zum Einsatz kommen können [DM].

Durch derartige Konzepte läßt sich natürlich nur dann die gewünschte Effizienz erzielen, wenn das Problem eine Vergrößerung über hinreichend viele Skalen zuläßt. Falls dem etwa durch komplizierte Gebietsgeometrien Grenzen gesetzt sind, wird man Gebietszerlegungsmethoden hinzuziehen müssen.

Literatur

- [BCR] Beylkin, G.; Coifman, R.; Rokhlin, V.: Fast wavelet transforms and numerical algorithms I. *Comm. Pure and Appl. Math.* **44** (1991) 141–183
- [BL] Brandt, A.; Lubrecht, A. A.: Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations. *J. Comp. Phys.* **90** (1991) 348–370
- [BPX] Bramble, J. H.; Pasciak, J. E.; Xu, J.: Parallel multilevel preconditioners. *Math. Comp.* **55** (1990) 1–22
- [CDP] Carnicer, J. M.; Dahmen, W.; Peña, J. M.: Local decomposition of refinable spaces. *RWTH Aachen, IGPM Report No 112*, 1994
- [CS] Carstensen, C.; Stephan, E. P.: A posteriori error estimates for boundary element methods. Preprint 1994
- [CDM] Cavaretta, A. S.; Dahmen, W.; Micchelli, C. A.: Stationary Subdivision. *Memoirs of the American Math. Soc.* **91**, No. 453 (1991)
- [C] Chui, C. K.: *An Introduction to Wavelets*. Academic Press 1992
- [CDD] Cohen, A.; Dahmen, W.; DeVore, R. A.: Multiscale Decompositions on bounded domains. *RWTH Aachen, IGPM Report No 113*, 1995
- [CD] Cohen, A.; Daubechies, I.: Non-Separable Bidimensional Wavelet Bases. *Revista Mat. Iberoamericana* **9** (1993) 51–137
- [CW] Costabel, M.; Wendland, W.: Strong ellipticity of boundary integral operators. *J. Reine Angew. Math.* **372** (1986) 39–63

- [D1] Dahmen, W.: Some remarks on multiscale transformations, stability and biorthogonality. In: Laurent, P. J.; Le Méhauté, A.; Schumaker, L. L. (eds.): *Wavelets, Images and Surface Fitting*. A. K. Peters, Wellesley 1994, 157–188
- [D2] Dahmen, W.: Stability of multiscale transformation. RWTH Aachen, IGPM Report No. 109, 1994
- [DK] Dahmen, W.; Kunoth, A.: Multilevel preconditioning. *Numer. Math.* **63** (1992) 315–344
- [DKPS] Dahmen, W.; Kleemann, B.; Prössdorf, S.; Schneider, R.: A multiscale method for the double layer potential equation on a polyhedron. In: Dikshit, H. P.; Micchelli, C. A. (eds.): *Advances in Computational Mathematics*. World Scientific 1994, 15–57
- [DKU] Dahmen, W.; Kunoth, A.; Urban, K.: Wavelet-Galerkin methods for the Stokes equations. RWTH Aachen, IGPM Report No 111, 1995, erscheint in *Computing*
- [DM] Dahmen, W.; Micchelli, C. A.: Using the refinement equation for evaluating integrals of wavelets. *Siam J. Numer. Anal.* **30** (1993) 507–537
- [DPS1] Dahmen, W.; Prössdorf, S.; Schneider, R.: Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations I: Stability and convergence. *Math. Z.* **215** (1994) 583–620
- [DPS2] Dahmen, W.; Prössdorf, S.; Schneider, R.: Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations II: Matrix compression and fast solution. *Advances in Computational Mathematics* **1** (1993) 259–335
- [DPS] Dahmen, W.; Prössdorf, S.; Schneider, R.: Multiscale methods for pseudo-differential equations on smooth manifolds. In: Chui, C. K.; Montefusco, L.; Puccio, L. (eds.): *Wavelets Theory, Algorithms, and Applications*. Academic Press 1994, 385–424
- [Dau] Daubechies, I.: Ten Lectures on Wavelets. CBMS-NFS Regional Conference Series in Applied Mathematics **61** (1992)
- [GSCH] Görtler, S. J.; Schröder, P.; Cohen, M. F.; Hanrahan, P.: Wavelet radiosity. *Proceedings of SIGGRAPH 93*, Aug. 1–5, Anaheim, California
- [GO] Griebel, M.; Oswald, P.: On the abstract theory of additive and multiplicative Schwarz Schwarz algorithms, erscheint in *Numer. Math.*
- [GO2] Griebel, M.; Oswald, P.: Tensor product type subspace splittings and multilevel iterative methods for anisotropic problems. *Advances in Computational Mathematics* **4** (1995) 171–206
- [H] Hackbusch, W.: *Multi-Grid Methods and Applications*. Springer Series on Computational Mathematics 4. Springer-Verlag, 1985
- [HN] Hackbusch, W.; Nowak, Z. P.: On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering. *Numer. Math.* **54** (1989) 463–491
- [HW] Hildebrandt, S.; Wienholtz, E.: Constructive proofs of representation theorems in separable Hilbert spaces. *Comm. and Pure Appl. Math.* **17** (1964) 369–373
- [JM] Jia, R. Q.; Micchelli, C. A.: Using the refinement equation for the construction of prewavelets II: Powers of two. In: Laurent, P. J.; Le Méhauté, A.; Schumaker, L. L. (eds.): *Curves and Surfaces*. Academic Press, New York 1991, 209–246
- [Ka] Kajiya, J. T.: The rendering equation. *Computer Graphics* **20** (1986) 143–150
- [Ku] Kumano-go, H.: *Pseudodifferential Operators*. MIT Press, Boston 1981
- [K] Kunoth, A.: Multilevel preconditioning – appending boundary conditions by Lagrange Multipliers. *Advances in Computational Mathematics* **4** (1995) 145–170
- [L] Lemarié-Rieusset, P. G.: Analyses multi-résolutions non orthogonales, Commutation entre Projecteurs et Derivation et Ondelettes Vecteurs à divergence nulle. *Revista Mat. Iberoamericana* **8** (1992) 221–236
- [Ma] Mallat, S.: Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.* **315** (1) (1989) 69–87
- [Maz] Mazya, V. G.: Boundary integral equations. In: Mazya, V. G.; Nikol'skiĭ, S. M. (Hrsg.): *Encyclopaedia of Math. Sciences*, vol. 27, Analysis IV, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1991
- [M1] Meyer, Y.: *Ondelettes et Opérateurs 1: Ondelettes*. Hermann, Paris 1990
- [M2] Meyer, Y.: *Ondelettes et Opérateurs 2: Opérateur de Caldéron-Zygmund*. Hermann, Paris 1990
- [M3] Meyer, Y.: private communication
- [O1] Oswald, P.: On discrete norm estimates related to multilevel preconditioners in the finite element method. In: Ivanov, K. G.; Petrushev, P.; Sendov, B. (eds.): *Constructive Theory of Functions*. Proc. Int. Conf. Varna 1991. Bulg. Acad. Sci., Sofia 1992, 203–214

- [O2] Oswald, P.: Multilevel Finite Element Approximation. Theory & Applications. Teubner Skripten zur Numerik, Teubner Verlag, Stuttgart 1994
- [PS] von Petersdorf, T.; Schwab, C.: Wavelet Approximation for first kind boundary integral equations on polygons. Techn. Note BN-1157, Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland at College Park, February 1994
- [R] Rokhlin, V: Rapid solution of integral equations of classical potential theory. J. Comp. Phys. **60** (1985) 187–207
- [U] Urban, K.: On divergence-free wavelets. Advances in Computational Mathematics **4** (1995) 51–81
- [X] Xu, J.: Theory of multilevel methods. Report AM48, Department of Mathematics, Pennsylvania State University 1989
- [Y] Yserentant, H.: Old and new convergence proofs for multigrid methods. Acta Numerica 1993, 285–326
- [Z] Zenger, C.: Sparse grids. In: Hackbusch, W. (Hrsg.): Parallel Algorithms for PDE. Proc. 6th GAMM Seminar Kiel, Notes on Numerical Fluid Mechanics **31**. Vieweg, Braunschweig 1991, 285–613

Wolfgang Dahmen
 Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
 RWTH Aachen
 Templergraben 55
 52056 Aachen
 Germany
 e-mail: dahmen@igpm.rwth-aachen.de

(Eingegangen 3. 2. 1995)

Buchbesprechungen

Straughan, B., The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection, Berlin u. a.: Springer Verlag 1991, 250 S., DM 98,-

In der vorliegenden Monographie werden Ergebnisse zur globalen Stabilität hydrodynamischer Konvektionsprobleme, die unter Verwendung von Ljapunow-Funktionalen und damit verbundenen Differentialungleichungen gewonnen wurden, dargestellt.

Da in der Regel eine der kinetischen Energie der Abweichungen verwandte Größe Ausgangspunkt für ein Ljapunow-Funktional mit variierbaren Parametern ist, heißt diese Technik auch Energie-Methode.

Schon D.D. Joseph hat 1976 in seiner bekannten Monographie eine ausführliche Darstellung der Energie-Methode gegeben. Im Unterschied zu Joseph, der fast alle Strömungsarten betrachtet, bezieht sich Straughan nur auf Konvektionsprobleme und verwendet in wesentlichen hier nicht lokale Methoden. Lokale Bifurkationen, die etwa über Störungsansätze beschreibbar sind, wurden nicht untersucht.

Im groben läßt sich der Inhalt des Buches von Straughan etwa so charakterisieren. In einem Einführungskapitel (2) werden die Grundideen der Energie-Methode am Beispiel von Diffusionsgleichungen diskutiert. Neben linearen werden auch solche mit quadratischer Nichtlinearität und gekoppelte Diffusionsgleichungen einbezogen.

Eine zentrale Stellung im Buch nimmt Kapitel 3 ein, wo die Energie-Methode auf das Bénard-Problem angewandt wird.

In den Kapiteln 4 bis 10 wird die Energie-Methode auch auf andere für die Anwendungen interessante Aufgabenstellungen übertragen, so für Halbraum-Probleme, geophysikalische Sachverhalte, auf durch Oberflächenspannungskräfte bedingte Konvektion (Marangoni-Instabilität) und zeitabhängige konvektive Stabilitätsfragen.

Besonderes Interesse rufen die Kapitel 11 bis 13 hervor, in denen u. a. Konvektionsprobleme der Magnetohydrodynamik und von Gemischen chemisch reagierender zäher Flüssigkeiten untersucht werden.

Die im Anhang aufgelisteten Ungleichungen (Poincaré, Wirtinger, Sobolev) gestatten dem Leser, die wesentlichen Abschätzungen der Ableitung der Energie-Funktionale aufgrund der betrachteten Differentialgleichungen nachzuvollziehen.

Außerdem sind im Anhang Fragen der numerischen Behandlung von Eigenwertproblemen exemplarisch abgehandelt.

Die Vorgehensweise der im Buch an vielen Beispielen praktizierten Energiemethode besteht zunächst in der Auswahl eines geeigneten Ljapunow-Funktional, das in der Regel als Energiedifferenz zwischen konvektiven und stationären Lösungen interpretiert werden kann. Um für die zeitabhängigen Funktionale gewöhnliche Differentialungleichungen zu erhalten, die ein exponentielles Abklingen implizieren, müssen in der Regel Variationsprobleme gelöst werden, die über die Euler-Lagrange-Gleichungen zu Eigenwertaufgaben führen.

Eine übergreifende Theorie für die verschiedenen angesprochenen Konvektionsprobleme wird dabei nicht entwickelt, was sicherlich vom Standpunkt der jedesmal problematischen Auswahl des Ljapunow-Funktional auch nicht sinnvoll ist.

Obwohl die Kapitel in sich abgeschlossen sind, braucht der Leser vor allem die Einführung des Kapitels 2 und das Kapitel 3 über die Navier-Stokes-Gleichungen, um über die Begriffe und Grundideen der Vorgehensweise zu verfügen. Solche Begriffe wie das auf Poincaré zurückgehende exchange of stabilities werden exemplarisch erläutert. Manches wirkt auf einen Leser, der die Begriffswelt der Stabilitätstheorie bei gewöhnlichen (oder

abstrakten) Differentialgleichungen vor Augen hat, noch nicht genügend an vorhandene Konzepte angepaßt. So charakterisiert der Autor mit nonlinear conditional stability die Tatsache, daß die nichtlinearen Terme der Differentialgleichung einbezogen wurden und sich die Stabilität nur auf kleine Abweichungen bezieht. Gemeint ist offenbar die (lokale) Stabilität einer Lösung im Sinne von Ljapunow.

Funktionalanalytische Hilfsmittel werden im Buch sehr sparsam eingesetzt. Eine Ausnahme bilden die Symmetriebetrachtungen in Kapitel 4. Dort wird über die Untersuchung von quasilinearen Evolutionsgleichungen in einem abstrakten Raum die Rolle der Symmetrie des linearen Anteils diskutiert. Die als Aisermansches Problem bekannte Frage kann für eine quasilineare Gleichung mit symmetrischem linearen Operator und monotonem nichtlinearen Teil positiv beantwortet werden: Aus der Stabilität der Linearisierung bezüglich der Ruhelage folgt die globale Stabilität dieser Ruhelage. Ist der lineare Teil des Problems nicht symmetrisch, wird der symmetrische Anteil betrachtet. Wie auch schon Joseph bemerkt, wird allerdings durch diesen Symmetrisierungsvorgang der lokale Bifurkationsmechanismus verschleiert und die Abschätzungen für Bifurkationsparameter sind grob.

Eine Arbeit von Homsy (1974) zur globalen Stabilität der periodischen Lösung eines zeitlich periodisch angeregten Bénard-Problems, die in der Monographie von Joseph nur kurz erwähnt wird, findet in Kapitel 10 des vorliegenden Buches gebührende Aufmerksamkeit. Grob gesagt geht es darum, daß für das betrachtete Energie-Funktional der Abweichungen von der periodischen Basislösung nur „über viele Zyklen hinweg“ gezeigt werden kann, daß sich die Energie verringert. Interessant ist, daß diese Technik auch eingesetzt wurde, um die globale Stabilisierbarkeit des von Boussinesq-Gleichungen abgeleiteten Lorenz-Systems der konvektiven Turbulenz durch eine periodische Erregung zu zeigen. Leider geht der Autor mit keinem Wort auf das Lorenz-System ein.

Abschließend soll bemerkt werden, daß das Buch von Straughan für einen breiten Leserkreis empfohlen werden kann: Für Biologen, Chemiker, Geophysiker, Mathematiker und Physiker. Der Leser möchte über Grundkenntnisse der Hydrodynamik (etwa entsprechender Kapitel aus Band VI von Landau/Lifschitz) und Vektoranalysis, insbesondere Integralsätze, verfügen, um die wichtigsten Abschätzungen der Energie-Methode nachvollziehen zu können. Der im Buch nur kurz angesprochene funktionalanalytische Hintergrund erfordert dagegen den auf diesem Gebiet spezialisierten Leser.

Dresden

V. Reitmann

Neutsch, W., Scherer, K., Celestial Mechanics, An Introduction To Classical And Contemporary Methods, Mannheim u. a.: B. I. Wissenschaftsverlag 1992, 784 S., DM 98,-

Das Buch beginnt mit astronomiegeschichtlichen Bemerkungen, von den Zeugnissen der Archäoastronomie bis zu Copernicus und Kepler. Die weiteren Abschnitte des den Grundlagen gewidmeten ersten Teils des Buches machen mit den wichtigsten Tatsachen aus sphärischer Astronomie, den Keplerschen Gesetzen und der Newtonschen Mechanik einschließlich dem Gravitationsgesetz bekannt. Besonders reizvoll ist hier der Ausflug in die projektive Geometrie und die in Lehrbüchern meist zu kurz behandelten Kegelschnitte, den möglichen Bahnkurven des Kepler-Problems. Der Versuch einer analytischen Lösung der Kepler-Gleichung, aus mathematischer Sicht zweifellos eine Herausforderung, ist im Hinblick auf die Anwendung enttäuschend. Vielleicht führt hier der Einsatz elliptischer Funktionen und Integrale, wie er etwa von V. A. Brumberg aufgezeigt worden ist, deutlich weiter. Die Begründung von Aberration und Doppler-Effekt bricht etwas unvermittelt über den Leser herein, sie wäre besser im letzten Teil im Kontext der Relativitätstheorie plazierte.

Der zweite Teil des Buches stellt unverzichtbare Themen der klassischen Himmelsmechanik vor, beginnend mit einem gelungenen Exkurs in die Potentialtheorie, in dem das Potential des homogenen Ellipsoids, die Wechselwirkung zweier homogener Ellipsoide sowie das dreiaxige Ellipsoid behandelt werden. Es schließt sich ein längerer Abschnitt über Bahnbestimmung an. Aus der verwirrenden Fülle bekannter Verfahren haben die Autoren eine dem einführenden Charakter des Buches angemessene Auswahl getroffen. Die Darstellung hätte die Rollen der vorläufigen und definitiven Bahnbestimmung sowie der Bahnverbesserung durch differentielle Korrektur noch deutlicher machen sollen. Bei der Behandlung des Gauss-Verfahrens wäre die Bedeutung der von Bucerius entwickelten Konvergenztheorie und damit der Rolle der Enckeschen Näherung zur Einleitung der Iteration vorteilhaft gewesen. Bei der Darlegung des Verfahrens von Neusch gewinnt man etwas den Eindruck, ältere Verfahren wie etwa das Gauss-Verfahren wären auf $N=3$ Richtungsbeobachtungen beschränkt. Bucerius hat gezeigt, daß man mehrere Beobachtungen zwanglos verarbeiten kann.

Der folgende Abschnitt setzt sich mit der Formulierung von Bewegungsproblemen in beliebig bewegten Bezugssystemen, der Cavendishschen Drehwaage und dem Foucaultschen Pendelversuch auseinander. Daran schließt sich eine Einführung in das Mehrkörperproblem gravitierender Massenpunkte sowie in die Störungsrechnung nach Gauss an.

Daß die Analysis auf Mannigfaltigkeiten, der der dritte Teil des Buches gewidmet ist, das adäquate Darstellungsmittel zahlreicher physikalischer Sachverhalte ist, steht außer Zweifel. Viele Einsichten wie etwa in die Integrabilität dynamischer Systeme wären ohne diesen Zugang kaum gewonnen worden. Wie man sie in einer Einführung in die Himmelsmechanik unter didaktischen Gesichtspunkten darlegt, ist eine schwierige Frage. Die Autoren haben eine kommentierte, summarische Darlegung der wichtigsten Begriffe und Sachverhalte gewählt, unter Verzicht auf Beweise und jedwede veranschaulichende Abbildung. Damit wird mancher Nichtmathematiker wohl seine Not haben. Diesen Lesern wäre eine Entwicklung des mathematischen Bildes aus den himmelmechanischen Sachverhalten heraus, die relativistische Himmelsmechanik eingeschlossen, eher zugänglich. Das bekannte Lehrbuch von Arnol'd über klassische Mechanik setzt hier Maßstäbe. Für einen Dozenten der Mathematik mag der Teil des Buches durchaus ein reizvoller Entwurf für eine Vorlesung sein.

Der folgende Teil behandelt fortgeschrittene Methoden, genauer eigentlich die Darstellung der alternativen Fassungen von Bewegungsproblemen nach Lagrange, Hamilton und Jacobi in der Sprache der Analysis auf Mannigfaltigkeiten. Darüber hinaus werden Linearisation und Regularisierung sowie Lie-Gruppen und Algebra und das Noethersche Theorem dargestellt. Hier gilt das bereits Gesagte, das Darstellungsmittel gerät etwas zu sehr zum Selbstzweck; ein Student der Astronomie oder Physik, der eine traditionelle Kursvorlesung zur theoretischen Mechanik gehört hat, wird nach der Notwendigkeit des hohen mathematischen Aufwandes fragen. Das wird noch deutlicher, wenn im folgenden Teil über Anwendungen nur mehr andeutungsweise die Analysis auf Mannigfaltigkeiten eingesetzt wird.

Dieser letzte Teil geht ein auf die Theorie der Gleichgewichtsoberflächen rotierender Himmelskörper, die Theorie der Mond- und Planetenbewegung und gibt einen Exkurs in die Einsteinsche Gravitationstheorie. Wenn manches auch nur skizziert ist, so gelingt es den Autoren doch, eine Fülle wissenswerter Details mitzuteilen und an eine Reihe von Fragestellungen heranzuführen, die Forschungsgegenstand sind.

Das Buch führt thematisch breit und doch geschickt in der Auswahl in die Himmelsmechanik ein. Es ist flüssig geschrieben und sorgfältig Korrektur gelesen. Mit moderner Textverarbeitung sollte in einer zweiten Auflage das an einen Manuskriptdruck erinnernde Erscheinungsbild beseitigt werden, gerade auch der Lesbarkeit wegen. Vor allem

aber sollte eine engere Verbindung der mathematischen und astronomischen Aspekte angestrebt werden.

Insgesamt ist das Buch eine lesenswerte und anregende Einführung in das sich lebhaft entwickelnde Gebiet der Himmelsmechanik, in der viele Fragen der nichtlinearen Dynamik lange gestellt sind und die heute auf ein breites Spektrum effizienter Methoden der symbolischen Formelmanipulation, der Störungsrechnung und des wissenschaftlichen Hochleistungsrechnens zurückgreifen kann.

Studierende der Astronomie, Physik und Mathematik werden das Buch etwa am Ende des Grundstudiums mit Gewinn lesen.

München

M. Schneider

Deschauer, S., Das zweite Rechenbuch von Adam Ries (Eine moderne Textfassung mit Kommentar und metrologischem Anhang und einer Einführung in Leben und Werk des Rechenmeisters), Braunschweig u. a.: Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft 1992, 237 S., DM 54,-

Titel und Untertitel sagen präzise, worauf der potentielle Leser des vorliegenden Buches sich freuen kann. Sein Herz ist der von Deschauer ins heutige Deutsch übertragene Text des zweiten Rechenbuches von Adam Ries. Es ist das Buch, das Adam Ries zum sprichwörtlichen Rechenmeister machte. Um dieses Herzstück sind gruppiert:

Eine Beschreibung des Lebens und Werkes von Adam Ries, sowie eine Würdigung seines didaktischen Geschicks, der Grundlage für die in Raum und Zeit weite Verbreitung seines Rechenbuches. Dabei bemängelt Deschauer, daß seines Wissens eine Würdigung von Riesens Beitrag zur deutschen Sprachentwicklung seitens der Germanisten noch fehlt, daß seine Bücher in deutschen Literaturgeschichten nicht einmal erwähnt werden.

Eine Beschreibung von vier Seiten Länge des formalen und inhaltlichen Aufbaus des Buches, die einen schnellen Überblick gestattet. Dabei hilft die von Deschauer vorgenommene Numerierung der Aufgaben, die es im Original nicht gibt.

Ein ausführlicher Kommentar, der nicht nur dem zufälligen Leser eines Buches zur Geschichte der Mathematik zu einem besseren Verständnis des Riesschen Buches verhilft. Hier werden auch Verbindungen zum heutigen Schulunterricht aufgezeigt.

Ein metrologischer Anhang. Dies ist das Glanzstück des Buches, wenn man von Riesens Text absieht. In ihm werden alle Währungseinheiten, Maße, Gewichte, Zeitmaße, Waren und ihre Preise, etc., die in Riesens Buch vorkommen, aufgelistet, zueinander in Beziehung gesetzt, und die Stellen angegeben, wo sie vorkommen, wobei die von Deschauer vorgenommene Numerierung der Aufgaben sich wieder als sehr nützlich erweist.

Es gibt ferner noch Listen von Personen- und Berufsgruppen, von Eigennamen und von Städten, wobei jeweils wieder die Stellen angegeben sind, wo die entsprechenden Einträge vorkommen.

Die Anhänge sind eine große Hilfe bei der Erschließung des Riesschen Textes.

Das Buch endet mit einem ausführlichen Literaturverzeichnis.

Zu erwähnen sind ferner die vielen schönen Abbildungen, die der Auflage 1578 des Riesschen sowie der dritten Auflage des Widmanschen Rechenbuches (1508) entnommen sind.

Kaiserslautern

H. Lüneburg

Ablowitz, M. J., Clarkson, P. A., Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering (London Mathematical Society Lecture Note Series, 149), Cambridge: University Press 1991, 516 S., pb., £ 27.95

Seit in der Mitte der 60er Jahre Rekurrenzphänomene bei nichtlinearen Gleichungen der Plasmaphysik und der Flachwasserwellentheorie entdeckt wurden, hat man eine Vielzahl von Lösungsmethoden für diese sogenannten Solitongleichungen gefunden.

Statt von Solitongleichungen spricht man etwas allgemeiner von „*integrablen Systemen*“. Unter geometrischer Betrachtungsweise kann man solche Systeme auch als Kompatibilitätsbedingung zwischen höherdimensionalen linearen Gleichungen verstehen. Wenn man die Orbits bezüglich der unabhängigen Variablen als geodätische Linien auffaßt, so bedeutet diese Kompatibilität das Verschwinden der Krümmung, daher spricht man hier auch von der „*zero curvature*“ Bedingung. Weiterhin wurden die gruppentheoretischen Aspekte dieser *integrablen* Systeme aufgeklärt, was zur Konstruktion spezieller Lösungen führte, darunter insbesondere den Solitonlösungen, welche sich als Orbits auf invarianten Mannigfaltigkeiten, die durch gruppentheoretische Reduktion erhalten werden, herausstellen.

Heute ist eine große Anzahl vollständig integrierbarer partieller Differentialgleichungen in einer Raum- und einer Zeitdimension bekannt. Darüberhinaus gibt es Verallgemeinerungen auf $n+1$ Dimensionen, sowie ähnliche Phänomene im Bereich der Differenzengleichungen, der Spinketten und neuerdings auch unter den zellularen Automaten.

Das vorliegende Buch behandelt als zentrales Thema die klassische Inverse Streumethode. Dabei geht es darum, die Kompatibilität, die durch die *zero curvature* Bedingung gegeben ist, auszunutzen und das betrachtete nichtlineare System als isospektralen Fluß eines Differential- oder auch eines anderen geeigneten Operators aufzufassen. Dadurch wird die zugrunde liegende nichtlineare Gleichung formal linearisiert, denn die Streudaten unterliegen wegen der Isospektralität einer linearen Evolution. Die Rückberechnung von den zeitabhängigen Streudaten auf die zugrunde liegende Feldfunktion der nichtlinearen Gleichung bezeichnet man als *Inverse Transformation*. Das bekannteste Beispiel der Lösung einer nichtlinearen Gleichung durch diese Methode ist der Fall der Korteweg-de Vries-Gleichung, die als isospektraler Fluß des klassischen eindimensionalen Schrödinger-Operators verstanden werden kann. Für die Konstruktion expliziter Lösungen stellt die Inverse Streumethode auch heute noch eines der mächtigsten Werkzeuge dar.

Das vorliegende Buch beginnt mit einer sehr schönen Einführung, in welcher, neben einem kurzen geschichtlichen Abriß, die Entwicklung des Gebiets und die grundlegenden Ideen diskutiert werden. Daneben findet man schon hier eine Vielzahl von Beispielen für vollständig integrable Systeme nebst den assoziierten Streuproblemen. Auch die physikalischen Aspekte, welche viele dieser Gleichungen aufweisen, werden nicht vernachlässigt. So findet man in der Einführung eine Ableitung der Kadomtsev-Petviashvili-Gleichung, die für die mehrdimensionale Beschreibung nichtlinearer Wellen in flachem Wasser Bedeutung hat. Unter dem angegebenen Katalog integrierbarer Gleichungen befindet sich eine Fülle von Information von der Korteweg-de Vries-Gleichung bis zu den selbst dualen Yang-Mills-Feldern. Schon dieses Kapitel wird dem Leser, der einen schnellen Überblick über das Gebiet wünscht, eine unschätzbare Quelle sein.

Im zweiten Kapitel wird dann am klassischen Beispiel der Korteweg-de Vries-Gleichung die Inverse Streumethode für Wellen auf der unendlichen Linie im Detail durchgerechnet. Weitere Informationen über Hamiltonische Struktur, über erste Integrale, sowie die Darstellung in Wirkungs- und Winkelvariablen werden abgeleitet, außerdem werden Bäcklundtransformationen und Painlevétest kurz gestreift.

Im dritten Kapitel werden dann die bisher eher beispielhaft präsentierten Methoden zu einer allgemeinen Theorie der Inversen Streumethode für zwei unabhängige Variablen ausgebaut. Im Detail wird insbesondere das Riemann-Hilbert-Problem für $n \times n$ -Systeme

behandelt. Außerdem werden jene beiden Gleichungen aus der nichtlinearen Flachwellentheorie, die es notwendig machten, die relativ einfache Formulierung der Inversen Streumethode im Fall der Korteweg-de Vries-Gleichung zugunsten der etwas komplizierteren Riemann-Hilbert-Methode zu verlassen, behandelt, nämlich die *Benjamin-Ono*-Gleichung und die *Intermediate-Long-Wave*-Gleichung; beide beschreiben die Ausbreitung nichtlinearer Wellen bei größerer Wassertiefe.

Im darauf folgenden Kapitel wird dann die Übertragung der Inversen Streumethode auf $2 + 1$ -dimensionale Probleme behandelt. Hier werden insbesondere die Kadomtsev-Petviashvili-Gleichung, die Davey-Stewartson-Gleichung und die damit zusammenhängenden anderen Systeme in der unendlich ausgedehnten Ebene behandelt. Konsequenterweise wird dann im darauffolgenden Kapitel die Erweiterung der Riemann-Hilbert-Methode zur sogenannten *D-bar*-Methode, welche auch als Verallgemeinerung der Inversen Streumethode aufgefaßt werden kann, vorgestellt. Diese erschließt einem dann die Behandlung von Gleichungen mit mehr als $2 + 1$ unabhängigen Variablen.

Das siebte Kapitel weicht etwas vom bisherigen Schwerpunkt ab. Darin wird in die sogenannte Painlevé-Analyse nichtlinearer Gleichungen eingeführt. Zuerst wird der klassische Ursprung dieses heuristischen Tests auf Integrabilität behandelt, sowie ein Rückblick auf den Zusammenhang zwischen Painlevé-Transzendenten und der Unterscheidung zwischen fixierten und bewegbaren Singularitäten bei gewöhnlichen Differentialgleichungen gegeben. Auch dieser Teil kann wieder als leicht lesbare und gründliche Einführung in dieses Spezialgebiet angesehen werden. Danach wird die von Ablowitz, Ramani und Segur formulierte Painlevé-Vermutung behandelt. Diese Vermutung besagt, daß jede gewöhnliche Differentialgleichung die sich, modulo der Transformation von Variablen, als Ähnlichkeitsreduktion einer vollständig integrablen partiellen Differentialgleichung ergibt, vom Painlevé-Typ ist, also nur bewegliche Singularitäten hat. Diese Vermutung wird dann als heuristische Bedingung für die vollständige Integrabilität von partiellen Differentialgleichungen verstanden, und es werden eine Reihe von nichtlinearen Gleichungen behandelt, die diesen Test erfüllen und in der Tat auch vollständig integrabel sind. So zum Beispiel die zylindrische Korteweg-de Vries-Gleichung, die Double-sine-Gordon-Gleichung, die modifizierte BBM-Gleichung und andere mehr. Die Methode wird dann zur heute üblichen heuristischen Methode des sogenannten *Painlevé-Tests* erweitert.

Das Buch schließt mit einer Liste offener Probleme, einem beeindruckenden Literaturverzeichnis, sowie Anhängen, in denen mathematische Grundlagen zur Verfügung gestellt werden.

Natürlich behandelt das Buch nur einen Aspekt der vollständigen Integrabilität und muß notgedrungen eine Reihe wichtiger Perspektiven und Methoden auslassen. So werden zum Beispiel Randwertprobleme, Symmetriegruppenstruktur oder auch spezielle Lösungen in periodischen Fällen nur ganz kurz gestreift. Auch die Lie-Algebra-Methoden zum Verständnis der vollständigen Integrabilität werden nur am Rande erwähnt. Natürlich hätte eine ähnlich gründliche Behandlung dieser Aspekte auch weit über den Rahmen dieses doch immerhin schon 500seitigen Buches hinausgeführt.

Insgesamt handelt es sich um ein gründlich geschriebenes, außerordentlich kenntnisreiches Buch, kein Wunder, denn einer der Autoren, Mark Ablowitz, hat die Entwicklung der Inversen Streumethode ja entscheidend vorangetrieben, beeinflußt und mitformuliert.

Das Material, welches dieses Buch erschließt, ist in seiner Fülle überwältigend und gibt gerade demjenigen, der sich ein modernes Gebiet durch Methoden der klassischen Analysis erschließen möchte, einen tiefen Einblick. Das Buch ist gleichermaßen als Informationsquelle für aktive Forscher geeignet, wie auch als Einführungslektüre für diejenigen, denen das Gebiet neu ist.

Pilyugin, Sergei Yu., Introduction to Structurally Stable Systems of Differential Equations, Basel u. a.: Birkhäuser 1992, 188 S., DM 98,-

Die neue Technik läßt uns nachgerade zu einem Volk von Setzern werden. Das Flurgespräch bei Tagungen ist nicht der neue Satz, sondern das neue schnelle Satzprogramm. Die Verlage lassen sich die Verschiebung der Pflichten gerne gefallen: Das reproduktionsfähig gelieferte Manuskript wird vervielfältigt, fest gebunden, wie ein Markenprodukt glanzkaschiert verpackt und vermarktet. Es kostet nicht weniger als früher ein Buch – jedenfalls für den Käufer, der es lesen will. Den Verlag kostet es natürlich viel weniger, und weil dadurch das Risiko für das einzelne Buch geringer ist als früher, hat beim Verlag vor Erscheinen auch niemand das Manuskript gelesen, denn das rentiert sich nicht. Kurzum, zwischen einem Buch und einem vervielfältigten Vorlesungsmanuskript ist nach dem Äußeren nicht mehr zu unterscheiden. Es wäre wohl angebracht, wenn wenigstens bei Besprechung der Verlagsprodukte deutlich unterscheidende Rubriken eingeführt würden: Bücher, Skripten für Anfänger, Lecture Notes, Kongreßberichte, ...

Hier handelt es sich um Lecture Notes. Man erkennt das schon auf Seite 0, wo die „List of Symbols“ nicht etwa die Symbole im Buche zur Hilfe und Orientierung aufführt, sondern vielmehr nur die Bezeichnungen einführt, mit denen es losgeht. Die Form der Liste erspart dabei sorgfältigere Erklärungen, wie es zum Beispiel gemeint sei, wenn es heißt: „For a map f of variables $\xi_1, \dots, \xi_m$ we write $f \in C_{\xi_1, \dots, \xi_m}^{k_1, \dots, k_m}$ if f is of class C^{k_j} with respect to ξ_j “. Der Index am Ende hat zwei Spalten, ist also so gut wie nicht vorhanden. Das Literaturverzeichnis von 40 Einträgen wird im allgemeinen ziemlich pauschal zitiert, ohne Angabe von Satz oder Seite. Aber wo es sich gelegentlich nur um die genauere Ausführung einer einfachen Überlegung handelt, wie daß ein Vektorfeld, das am Rande eines Rechtecks überall nach außen zeigt, im Innern eine Nullstelle haben muß, da sieht sich der Student, durch dessen Brille wir das Buch auch einmal ansehen wollen, auf eine Veröffentlichung in russischer Sprache, und da auf die Begründung durch drei verschiedene Sätze verwiesen (S. 104/105). Es gibt viele Druckfehler und manche kleinere Ungenauigkeit. So behauptet der Autor zu Beginn von Ch. 2, daß sich bei topologisch äquivalenten Flüssen φ, ψ eine Zeittransformation $\tau(t, x)$ finden lasse, so daß für die Äquivalenz h gilt

$$(2.3) \quad h(\varphi(t, x)) = \psi(\tau(t, x), h(x)),$$

und versichert: „It follows from the continuity of φ, ψ and from (2.3), that the function τ is continuous.“ Das folgt aber keineswegs, wie man z. B. an Differentialgleichungen sieht, die auf $\mathbb{R}$ lokal um 0 mit $\dot{x} = x$ bzw. $\dot{x} = x^3$ übereinstimmen. Die Schwierigkeit entsteht aber tatsächlich nur an Fixpunkten, und die sollte man im folgenden gelegentlich vorweg betrachten.

Bewiesenes und Unbewiesenes oder nur teilweise und skizzenhaft Bewiesenes hält sich in dem Buch die Waage, etwa 20 zusätzliche Figuren und etwa 200 Seiten zusätzlicher Erläuterungen, Erklärungen und Motivationen wären für ein Lehrbuch für Studenten angemessen, und auch ein paar mehr als die drei expliziten Beispiele wären willkommen. Das Englisch, das der Autor selbst hergestellt hat, ist im allgemeinen mathematisch hinreichend verständlich, jedenfalls beheben sich Zweifel über das Gemeinte im Fortgang der Lektüre. Lecture Notes also.

Und zwar wertvolle und willkommene Lecture Notes, denn der Autor steuert ohne Umschweife und ohne Scheu vor harter Arbeit auf sehr zentrale Ergebnisse los. Nach vorbereitenden Erklärungen wird in Ch. 3 der Satz über die stabile und instabile Mannigfaltigkeit im C^1 -Fall (lokal und global) vollständig bewiesen. In Ch. 6 werden Transversalitätsbedingungen für diese Mannigfaltigkeiten eingeführt (Kupka-Smale-Systeme) und wichtige Ergebnisse wie das λ -Lemma hergeleitet, was ungefähr besagt, daß eine zur stabilen Mannigfaltigkeit transverse Scheibe für $t \rightarrow \infty$ gegen die instabile Mannigfaltigkeit geht. In Ch. 7 wird gezeigt, daß Kupka-Smale-Systeme generisch sind. Hier wird ein bißchen

zitiert, aber eigentlich nur, weil den Autor offenbar die Geduld verlassen hat, gewisse einfache Bastelarbeiten durchzuführen (S. 85). In Ch. 8 geht es um das berühmte Closing-Lemma von Pugh, das besagt, daß man einen nicht wandernden Punkt durch beliebig kleine Störung des Vektorfeldes zu einem Punkt auf einem geschlossenen Orbit machen kann. Bewiesen wird der Satz allerdings nur für C^0 -kleine Störungen, was sehr elementar ist. In Ch. 9 wird (unter etwas verstärkten Differenzierbarkeitsannahmen) gezeigt, daß strukturell stabile Systeme Kupka-Smale-Systeme sind. In Ch. 10 ist von transversen homoklinischen Punkten die Rede, allerdings werden nur Systeme auf der Ebene unter zusätzlich technisch erleichternden Annahmen (Linearität um den Fixpunkt) diskutiert, und es wird nur gezeigt, daß es beliebig nahe an dem homoklinischen Punkt Orbits beliebig hoher Periode gibt. In Ch. 11 folgt eine Einführung in die Geometrie der Morse-Smale-Systeme. Das 12. Kapitel ist das eigentliche Ziel, der Hauptteil des Buches. Es wird bewiesen, daß Anosov-Systeme strukturell stabil sind. Hier ist der Autor in seinem Element, in seinem eigenen Arbeits- und Fachgebiet, was sich allerdings auch daran zeigt, daß die Darlegungen immer skizzenhafter werden, und alle Hinweise und Erklärungen gänzlich wegbleiben, wo sie am dringendsten nötig wären. Dieses Kapitel ist sicher besonders interessant für den Experten, und es im Einzelnen auszuführen wäre schon eine tüchtige Diplomarbeit. In einem Appendix wird ein Beweis des Satzes von Hartman und Grobman über die topologische lokale Linearisierung eines Flusses um einen hyperbolischen Punkt mit geometrischen Methoden geführt.

Viel Inhalt und Substanz also, auf engem Raum von weniger als 200 Seiten, ein Leitfaden für den Fachmann, der imstande ist, in einer Vorlesung vieles im Einzelnen auszuführen, zu erklären und mit Beispielen oder gar Aufgaben anzureichern.

Regensburg

Th. Bröcker

Saad, Y, Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems, Manchester: Manchester University Press 1992, 346 S., \$ 69.-

Die numerische Lösung von Eigenwertproblemen ist ein wichtiger Bestandteil der Lösung vieler Anwendungsprobleme, z. B. in der Strukturmechanik, Quantenchemie, bei der Modellierung elektrischer Netzwerke, in der Regelungstechnik und in vielen anderen Anwendungen. Während die numerischen Methoden für kleine Eigenwertprobleme (Dimension $n < 500$) heute ausgereift und in numerischen Softwarepaketen enthalten sind, ist die Lösung von sehr großen Eigenwertproblemen, insbesondere mit unsymmetrischen Matrizen, ein weit offenes Gebiet und Gegenstand aktueller Forschung. Da die Anwendungsprobleme vielfach auf Probleme der Dimensionen $n > 10^6$ führen, spielen für die numerische Lösung sowohl Überlegungen zur effektiven Speicherung durch spezielle Datenstrukturen als auch die Anpassung der Algorithmen an die vorhandene Rechnerarchitektur eine wichtige Rolle. Die mathematische Literatur zur Behandlung insbesondere sehr großer Eigenwertprobleme ist noch sehr beschränkt. Neben Abschnitten über Eigenwertprobleme in Lehrbüchern der Numerischen Linearen Algebra wie etwa die Bücher von Bunse/Bunse-Gerstner [1], Zurmühl/Falk [8], Golub/Van Loan [4] und Watkins [6] sind als Spezialliteratur zur numerischen Lösung von Eigenwertproblemen eigentlich nur die Klassiker von Wilkinson [7] und Parlett [5], sowie die Bücher von Chatelin [2] und Cullum/Willoughby [3] verbreitet.

Das hier vorgestellte Buch schließt hier eine Lücke und dokumentiert insbesondere die Entwicklungen in den letzten 10 Jahren.

Nach einer Einführung in die benötigten Grundkonzepte der Linearen Algebra und Kapiteln über dünn besetzte Matrizen, sowie einer ausführlichen Betrachtung der Störungstheorie und Fehleranalyse für das Standardeigenwertproblem werden dann die verschiede-

nen Methoden für große Eigenwertprobleme beschrieben. Dabei sind von der Potenzmethode und inversen Iteration, über Unterraumiteration bis zu den Krylovraummethoden alle wichtigen Methoden diskutiert. Dazu kommen Teilabschnitte über Beschleunigungs- und Präkonditionierungstechniken. Am Schluß folgen noch ein Kapitel über verallgemeinerte Eigenwertprobleme und ein motivierendes Kapitel über Anwendungen von Eigenwertproblemen.

Das Buch dokumentiert im wesentlichen vollständig den aktuellen Stand der Forschung im Jahre 1991. Neueste Entwicklung mit look-ahead Lanczos Algorithmen sind allerdings nur andeutungsweise vorgestellt.

Das Buch ist sehr übersichtlich aufgebaut und liefert neben vielen Details zur praktischen Nutzung der Verfahren auch kurze und leicht nachvollziehbare Beweise für die wichtigen theoretischen Resultate in diesem Bereich. Dazu kommen zahlreiche Beispiele und eine Fülle von im großen und ganzen sehr schönen Übungsaufgaben, die das Buch auch als Lehrbuch für eine Spezialvorlesung geeignet erscheinen lassen.

Einige Kritikpunkte seien jedoch angebracht. Das Kapitel II über dünn besetzte Matrizen fällt etwas aus dem Zusammenhangsrahmen des Buches und hätte durchaus, vielleicht kombiniert mit einer Übersicht über vorhandene Software, am Ende des Buches stehen können. Dagegen wäre das sehr motivierende Kapitel X meiner Ansicht nach besser am Anfang des Buches plaziert.

Die meisten der angesprochenen Algorithmen bauen in irgendeiner Phase auf der Lösung eines kleinen Eigenwertproblems auf. Leider ist die Lösung von kleinen Eigenwertproblemen überhaupt nicht diskutiert. Ein kurzer Abschnitt über den QR-Algorithmus wäre meines Erachtens zur Vollständigkeit des Buches angebracht.

Dazu wäre bei der Fülle der Verfahren eine Orientierungs- oder Entscheidungshilfe für die Auswahl eines bestimmten Verfahrens für eine gegebene Problemklasse sehr sinnvoll gewesen, da so der Leser und insbesondere der Praktiker eher verwirrt als informiert sind.

Vor der Drucklegung hätte eine etwas ausführliche Korrektur viele unnötige und offensichtliche Tippfehler und insbesondere Fehler beim Layout vermeiden können.

Insgesamt ist das Buch eine Bereicherung der Spezialliteratur der Numerischen Linearen Algebra.

- [1] Bunse, W.; Bunse-Gerstner, A.: Numerische Lineare Algebra, Stuttgart: Teubner 1984
- [2] Chatelin, F.: Valeurs Propres de Matrices, Paris: Masson 1988
- [3] Cullum, J.; Willoughby, R.: Lanczos Algorithms for Large Symmetric Eigenvalue Computations, Basel: Birkhäuser 1985
- [4] Golub, G. H.; Van Loan, C. F.: Matrix Computations, 2nd ed., Baltimore: Johns Hopkins Univ. Press 1989
- [5] Parlett, B. N.: The Symmetric Eigenvalue Problem, Englewood Cliffs: Prentice Hall 1980
- [6] Watkins, D. S.: Foundations of Matrix Computations, New York: John Wiley 1991
- [7] Wilkinson, J. H.: The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford: Clarendon Press 1965
- [8] Zurmühl, R.; Falk, S.: Matrizen Teil 2, 5. Aufl., Berlin: Springer 1986

Chemnitz

V. Mehrmann

Berline, N., Getzler, E., Vergne M., Heat Kernels and Dirac Operators (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 298), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1992, 369 S., DM 118,-

The mathematical definition of Dirac operators on Riemannian manifolds was given in 1963 by Atiyah, Singer and Lichnerowicz. Combining ideas from quantum physics, differential geometry and Lie groups, these operators soon played a fundamental role in

large areas of mathematics: index theory for elliptic operators, gauge theory, characteristic classes and geometric quantization in a broad sense for Lie groups. One can hardly overestimate the importance and depth of this circle of ideas, for which the Atiyah-Singer Index Theorem remains a cornerstone.

In recent years we have witnessed a remarkable maturing and clarification of index theorems for Dirac operators. First, elementary and direct geometrical-analytical proofs are available, primarily due to Bismut and the authors of the present book; here the approach is via the heat equation, pioneered by Gilkey and Patodi. Second, the framework and philosophy (attributed to Quillen by the authors) emerges as one of quantization: Dirac operators are a quantization of the theory of connections, and the Chern character quantizes as the supertrace of the heat kernel of the square of the Dirac operator. In the same way, the equivariant index may be expressed in terms of equivariant differential forms corresponding to what happens in Weyl's character formula and in Kirillov's formula. Let us consider the basic setup: M is an oriented $2l$ -dimensional Riemannian manifold with cotangent bundle T^*M and corresponding exterior algebra bundle $\mathcal{A}T^*M$. $C_x(M)$ denotes the Clifford algebra generated by T_x^*M and relations

$$\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 = -2(\alpha_1, \alpha_2).$$

We have the canonical symbol map

$$\sigma_x(\alpha_1 \dots \alpha_j) = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_j \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_j \text{ orthogonal})$$

giving a linear isomorphism from $C_x(M)$ to $\mathcal{A}T^*M$. A Clifford module is a $\mathbb{Z}_2$ -graded bundle $E = E^+ \oplus E^-$ with a bundle map

$$c : T^*M \rightarrow \text{End}(E)$$

satisfying the conditions

$$\begin{aligned} c(\alpha_1)c(\alpha_2) + c(\alpha_2)c(\alpha_1) &= -2(\alpha_1, \alpha_2), & \text{and} \\ c(\alpha) &\text{exchanges the bundles } E^+ \text{ and } E^-. \end{aligned}$$

It is a crucial remark, that a section k of the bundle $\text{End}(E)$ via the symbol map becomes a differential form $\sigma(k)$ with values in $\text{End}_{C(M)}(E)$. (if M is spin and E the spinor bundle, $\sigma(k)$ is an ordinary differential form.) Assume that on E there is given a connection ∇^E satisfying

$$[\nabla_X^E, c(\alpha)] = c(\nabla_X \alpha)$$

where X is a vector field, α an one-form, and ∇ the Levi-Civita connection on M .

Now we can write down the Dirac operator D associated to ∇^E :

$$D = c \circ \nabla^E$$

where ∇^E maps sections of E to sections of $T^*M \otimes E$, and $c : T^*M \otimes E \rightarrow E$ is the Clifford multiplication. D is an elliptic first-order differential operator acting on sections of E . Examples of kernels of such Dirac operators are: the de Rham cohomology of M , sheaf cohomology with coefficients in a holomorphic vector bundle (M Kähler), and harmonic spinors on M (M spin).

The heat equation method studies the semigroup e^{-tD^2} ($t > 0$) which is a smoothing operator given by an integral kernel $H(t, x, y)$. The central object is the symbol of its diagonal values:

$$\sigma(H(t, x, x))$$

which is a differential form with values in $\text{End}_{C(M)}(E)$.

This is exactly where the book under review devotes its first major effort: to study the asymptotics locally of $H(t, x, x)$ for $t \rightarrow 0$, thus deriving the Atiyah-Singer index theorem for D :

$$(1) \quad \text{ind}(D) = (2\pi i)^{-l} \int_M \hat{A}(M) ch(E/S).$$

Here $\text{ind}(D) = \dim(\ker(D^+)) - \dim(\ker(D^-))$

where D^+ resp. D^- is the restriction of D to sections of E^+ resp. E^- . The integrand is built from two differential forms: the relative Chern character $ch(E/S)$ (coming from the so-called twisting curvature of E) and the $\hat{A}$ -genus of M defined by

$$(2) \quad \hat{A}(M) = \det^{1/2} \left(\frac{R/2}{\sinh(R/2)} \right).$$

Here R is the Riemannian curvature of M viewed as a skew-symmetric matrix with 2-form coefficients. The proof goes via exact calculations of supertraces: $Str(A)$ for A an endomorphism of E_x is defined as the trace of ΓZ , where Γ is $+1$ on E_x^+ and -1 on E_x^- . In fact

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow 0} Str H(t, x, x) = (2\pi i)^{-l} \hat{A}(M) ch(E/S)$$

in the sense that the left-hand side multiplied by the Riemannian volume element has as limit the $2l$ -form piece of the right-hand side. Furthermore, this form is obtained explicitly from the small-time asymptotics of $\sigma(H(t, x, x))$.

Thus we have arrived in a little more technical way at the main themes of this book: Calculate limits of heat kernels as in (3) to establish local formulas for the index (1) and explain why characteristic classes such as (2) make a universal appearance both here and in the Kirillov character formula from representation theory of Lie groups.

It may seem that a classical topic as index theory with a 30 year history and a vast literature does not today warrant a textbook. However, as Berline, Getzler and Vergne so amply demonstrate in their admirable book, the last 5–10 years have given us completely new proofs, simpler calculations and better insights into the theory. This book is not only a timely roundup of recent ideas, it is itself contributing a fresh look at many details and giving the quantization principle a guiding role in the modern approach.

The book starts by a short background on differential geometry (also remarkably clear) including some supergeometry; the basic constructions of heat kernels are done following the tradition of Berger-Gauduchon-Mazet (rather than pseudodifferential operators). The calculation of the index (3) is done via a rescaling trick, which approximates D^2 by a harmonic oscillator operator for which one knows explicitly the heat kernel.

In the second half of the book the authors turn to the equivariant case, i.e. there is a compact group of isometries leaving D invariant and one wants local formulas for the difference of group characters on $\ker(D^+)$ and $\ker(D^-)$ respectively.

The equivariant version of (1), (2) and (3) are proved giving the relevant (and of independent interest) definitions and properties of equivariant differential forms and characteristic classes. Using this and a localization principle, Kirillov's character formula for representations of a compact Lie group is established. The final topics are index bundles for families of Dirac operators and the family index theorem with such recent tools as superconnections and corresponding transgression formulas.

My impression of this book is primarily that it is a pleasure to read. Every important point receives a clear proof (of course not wasting time discussing really well-known things like how to prove that the second Stiefel-Whitney class is the obstruction to spin-structure), and nothing is swept under the rug. Through all the technicalities one feels the author's

affection for the material and enthusiasm for the beauties of the subject. One hardly notices the lack of exercises, because the text is so rich.

Of course, even this book is not the final word on index theory. It is written from the point of view of analysis and Lie group theory and not from say a topological point of view. There is no K -theory and no general elliptic operators; but for the analytical and explicit geometrical side (presumably also important for applications in string theory) it is outstanding, both as a text for advanced graduate students and for mathematicians interested in learning this fascinating idea of finding local formulas for objects in global analysis. Berline, Getzler and Vergne have paved the way for the next 30 years of index theory: character formulas, analytical torsion, eta-invariants, string theory, topological quantum field theory?

Odense

B. Ørsted

Orlik, P., Terao, H., Arrangements of Hyperplanes (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 300), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1992, 325 S., DM 118,-

Daß Hyperebenen-Arrangements eine hochinteressante Sache sind, ist das bekannt? Sie sind es, auch deshalb, weil sie einen Schnittpunkt von so vielen Entwicklungslinien der Mathematik bilden, so viele Fragen, Methoden, Resultate und Theorien (Geometrie, algebraische Topologie, Kombinatorik, Algebra und Gruppentheorie) zusammenführen, die sich nahekomen, ohne sich alle im selben Punkt zu schneiden: so daß man die Struktur der Theorie selbst als Arrangement auffassen könnte. Daß dabei nicht alle Entwicklungen völlig geradlinig verlaufen, daß es sich mehr um ein „Pseudoarrangement“ handelt, macht all dies nur interessanter.

Der Grundlehren-Band von Orlik und Terao erzählt davon schon in seiner wunderbaren Einleitung, erzählt von den einfachen Ursprüngen der Theorie: dem Zählen der Regionen, in die der $\mathbb{R}^3$ durch n Schnitte geteilt wird, die Konstruktion von simplizialen Geradenkonfigurationen in der Ebene, der Berechnung der Kohomologie des Raums aller Punkte des $\mathbb{C}^n$ mit n verschiedenen Koordinaten (dem klassifizierenden Raum der gefärbten Zopfgruppe), und anderen. Er skizziert die verschiedenen Entwicklungslinien, die neuen Methoden, die allgemeineren Fragestellungen, die im Laufe der Zeit dazugekommen sind. Und er nennt Höhepunkte, darunter

- die allgemeine Zähltheorie für reelle Arrangements von Zaslavsky [14],
- die Klassifikation der reellen und der unitären Spiegelungs-Arrangements [10] (siehe auch [4, 3, 9]!).
- die kombinatorische Konstruktion der Kohomologie-Algebra des Komplements für komplexe Hyperebenen-Arrangements, von Orlik & Solomon [7],
- der Satz von Deligne [5], daß für reelle, simpliziale Hyperebenen-Arrangements das komplexifizierte Komplement ein $K(\pi, 1)$ -Raum ist,
- und der Faktorisierungssatz von Terao [12] für „freie“ Hyperebenen-Arrangements.

Der Hauptteil des Bandes konzentriert sich dann auf drei große Teilbereiche:

- die Theorie der freien Hyperebenen-Arrangements,
- die Topologie von komplexen Hyperebenen-Arrangements und
- die Struktur der Arrangements von unitären Spiegelungsgruppen.

In diesen Gebieten wird die Theorie gründlich und umfassend erklärt. Das Buch ist eine verlässliche Grundlage für verschiedene Vorlesungen, wobei man sich bei der Fülle des dargebotenen Stoffes auf Teile beschränken muß – der Band ist aus Vorlesungen von Solomon, Orlik und Terao sowie aus CBMS-Lectures von Orlik [6] entstanden und enthält

genug Material für mehrere Vorlesungen. „Arrangements of Hyperplanes“ ist aber auch eine Einladung zum Selberlesen, zum Schmökern und zum Weiterarbeiten. Auch die ausführliche und verlässliche Biographie hilft dann weiter.

Fortschritt der Theorie zeigt sich nicht nur in „großen neuen Sätzen“, sondern auch darin, daß im Lauf der Zeit Resultate viel greifbarer werden, sich neue Zusammenhänge auf tun, elementarere Beweise stärkere Schlußfolgerungen zulassen, und auch die schwierigen Höhepunkte der Theorie „lehrbuchfähig“ werden. So wird der Faktorisierungssatz von Terao hier mit einem neuen Beweis dargestellt, der von Solomon & Terao [10] stammt. In der Theorie der komplexen Spiegelungsgruppen wird jetzt systematisch bewiesen, was früher von der Shephard-Todd-Klassifikation abhing.

Leider macht der vorliegende Band nicht immer von den neuen Möglichkeiten Gebrauch. So werden insbesondere die kombinatorischen Methoden zur topologischen Analyse sowohl des Durchschnitts-Verbandes [1] (besonders im affinen Fall [13]) wie des Komplements eines Arrangements [2] nicht ausgereizt. Ich hätte mir auch mehr über reelle Arrangements und die Zaslavsky-Theorie gewünscht. Auch den Satz von Deligne hätte man, in der Version von Paris [8], beweisen können.

Zuletzt sei noch erwähnt, daß in der Theorie der Hyperebenen-Arrangements grundlegende Probleme offen sind, und das vorliegende Buch auch zur Beschäftigung mit ihnen einladen sollte. So ist in der reell-kombinatorischen Theorie die Klassifikation von simplizialen Arrangements völlig ungelöst. In der algebraischen Theorie reizt Teraos Vermutung: ob ein Arrangement „frei“ ist, hängt danach in fester Charakteristik nur von der Kombinatorik des Durchschnitts-Verbandes ab. Im topologischen Bereich ist die Frage offen, ob der Homotopietyp des Komplements aus dem Durchschnitts-Verband rekonstruiert werden kann. Und schließlich ist zu klären, ob das Komplement eines freien Arrangements immer ein $K(\pi, 1)$ -Raum ist – sogar für den Spezialfall von unitären Spiegelungs-Arrangements ist dies noch für einige exzeptionelle Gruppen offen.

Literatur

- [1] Björner, A.: Homology and shellability of matroids and geometric lattices, in: *Matroid Applications* (ed. N. White). Cambridge University Press 1992, pp. 226–283
- [2] Björner, A.; Ziegler, G. M.: Combinatorial stratification of complex arrangements. *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1991) 105–149
- [3] Cohen, A. M.: Finite complex reflection groups. *Annales Scientifiques École Normale Supérieure* **9** (1976) 379–436
- [4] Coxeter, H. S. M.: Finite groups generated by unitary reflections. *Abh. aus dem Math. Seminar der Universität Hamburg* **31** (1967) 125–135
- [5] Deligne, P.: Les immeubles des groupes de tresses généralisés. *Inventiones math.* **17** (1972) 273–302
- [6] Orlik, P.: *Introduction to Arrangements*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics **72**. Providence RI: Amer. Math. Soc. 1989
- [7] Orlik, P.; Solomon, L.: Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. *Inventiones math.* **56** (1980) 167–189
- [8] Paris, L.: Universal cover of Salvetti’s complex and topology of simplicial arrangements of hyperplanes. Preprint 1991; *Transactions Amer. Math. Soc.*, to appear
- [9] Popov, V. L.: Discrete complex reflection groups. *Communications Math. Inst., Rijksuniversiteit Utrecht* 15–1982 (1982), 89 pages
- [10] Shephard, G. C.; Todd, J. A.: Finite unitary reflection groups. *Canadian J. Math.* **6** (1954) 274–304
- [11] Solomon, L.; Terao, H.: A formula for the characteristic polynomial of an arrangement. *Advances in Mathematics* **64**, 305–325
- [12] Terao, H.: Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shephard-Todd-Brieskorn formula. *Inventiones math.* **63** (1981) 159–179
- [13] Wachs, M. L.; Walker, J. W.: On geometric semilattices. *Order* **2** (1986) 367–385

- [14] Zaslavsky, T.: Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes. *Memoirs Amer. Math. Soc.* No. 154, 1 (1975)

Nachsatz. Seit der Fertigstellung dieser Besprechung gab es zu den beiden zuletzt-
genannten topologischen Fragen entscheidenden Fortschritt:

- G. L. Rybnikov (Moskau) konnte die Komplemente von zwei Arrangements mit demselben Durchschnitts-Verband durch subtile Analyse der Fundamentalgruppen unterscheiden.
- P. Edelman und V. Reiner (Minneapolis) konstruierten ein (überraschend einfaches!) 3-dimensionales Arrangement das „frei“ ist, aber nicht $K(\pi, 1)$. Die Frage für unitäre Spiegelungsgruppen bleibt aber offen.

Berlin

G. M. Ziegler

Shparlinski I. E., Computational and Algorithmic Problems in Finite Fields, Dordrecht: Kluwer 1993, 225 S., Dfl. 175.00

In den letzten zehn Jahren hat die Theorie der endlichen Körper einen enormen Aufschwung erlebt. Das ist einerseits auf die vielen neuen Anwendungen endlicher Körper in der algebraischen Informationstheorie, insbesondere in der Kryptologie und der Codierungstheorie, zurückzuführen, und andererseits auf die vermehrten Anforderungen algorithmischer Natur, die aus dem rapid wachsenden Gebiet der Computeralgebra gestellt werden. Daher ist es gewiß nicht verwunderlich, daß gerade die rechnerischen und konstruktiven Aspekte der endlichen Körper in letzter Zeit mit besonderer Intensität studiert wurden. Die dabei meist auch unter Einbeziehung des komplexitätstheoretischen Standpunktes erzielten Fortschritte waren spektakulär.

Das vorliegende Buch ist sicher das erste, das ganz den algorithmischen Problemen im Bereich der endlichen Körper gewidmet ist. Dabei sind die Grenzen sehr weit gesteckt, denn es kommen auch verwandte Fragen in Restklassenringen ganzer Zahlen, in algebraischen Zahlkörpern und in algebraischen Funktionenkörpern zur Sprache, und es wird auch immer wieder ein breites Spektrum von Anwendungen aufgefächert. Die Fülle von Informationen, die der Autor sowohl bei den theoretischen als auch bei den angewandten Aspekten bietet, ist beeindruckend.

Es wäre wohl unfair, dieses Buch mit den Maßstäben zu messen, die üblicherweise an Lehrbücher angelegt werden, denn ein solches will es offensichtlich nicht sein. Das merkt man schon auf den ersten Seiten, auf denen der Verfasser gleich ohne viel Federlesens *in medias res* geht. Vielmehr sollte man dieses Werk als Ergebnisbericht betrachten, der sich an Forscher und Studenten höherer Semester richtet, die bereits über ein solides Grundwissen verfügen. Dieser Eindruck eines Ergebnisberichtes wird auch durch die Art der Aufbereitung des Stoffes verstärkt, die mehr an den Stil eines umfassenden Übersichtsartikels erinnert. So werden Resultate meist ohne Beweis angeführt, und in den Ausnahmefällen werden nur die wichtigsten Beweisideen skizziert. Ordnet man aber diese Monographie in die Kategorie der Ergebnisberichte ein, so muß man sie als hervorragende Repräsentantin dieser Sparte klassifizieren. Diese Einschätzung ist nicht nur durch die erstaunliche Materialfülle, sondern auch durch die Gestaltungskraft des Autors und die gewährten Einblicke in tiefere Zusammenhänge begründet.

Das erste Kapitel ist sinnvollerweise dem klassischen Problem der algorithmischen Theorie endlicher Körper, nämlich dem der effizienten Polynomfaktorisierung über endlichen Körpern, gewidmet. Ausgehend vom Algorithmus von Berlekamp aus dem Jahr 1967 werden sowohl deterministische als auch probabilistische Faktorisierungsalgorithmen

für Polynome in einer oder mehreren Variablen behandelt, wobei die Betonung auf neueren Resultaten liegt. Dem verwandten Problem der Konstruktion irreduzibler und primitiver Polynome über endlichen Körpern, das für die explizite Konstruktion von Körpererweiterungen eine wesentliche Bedeutung hat, ist das zweite Kapitel gewidmet. Im nächsten Kapitel wird über Verteilungseigenschaften von irreduziblen und primitiven Polynomen bezüglich spezifischer Teilmengen des Polynomrings berichtet.

Das praktische Erfordernis der Kryptologie, auch in endlichen Körpern sehr großer Ordnung schnell rechnen zu können, hat zu einem starken Interesse an Algorithmen zur Beschleunigung der Arithmetik in endlichen Körpern geführt. Für das effiziente Rechnen in Körpererweiterungen sind vor allem spezielle Basen wie etwa Normalbasen und selbstduale Basen von Nutzen. Kapitel 4 behandelt die Frage der Konstruktion solcher spezieller Basen, sowie unter anderem noch das Problem der Berechnung diskreter Logarithmen und die Komplexität der Polynommultiplikation.

Ein weiteres sehr aktuelles Thema, über das im Kapitel 5 referiert wird, sind die algebraisch-geometrischen Codes von Goppa, die aus geeigneten algebraischen Kurven über endlichen Körpern abgeleitet werden. Trotz des ansehnlichen Ausmaßes des erreichten Wissensstandes sind hier in der Zukunft noch viele tiefliegende Entwicklungen zu erwarten. Algebraische Kurven vom Geschlecht 1, also elliptische Kurven, werden gesondert im Kapitel 6 behandelt. Diese Kurven gestatten bekanntlich vielfältige Anwendungen, etwa auf Faktorisierungsalgorithmen für ganze Zahlen und in der Kryptographie. Ein Zusammenhang mit der Codierungstheorie ist wieder im Kapitel 7 gegeben, wo linear rekursive Folgen besprochen werden.

Die Reichhaltigkeit der Anwendungen endlicher Körper wird im Kapitel 8 unterstrichen, wo das Spektrum von der Kryptologie über die Graphentheorie bis zu kombinatorischen Problemen in Vektorräumen reicht. Im Kapitel 9 werden Restklassenringe ganzer Zahlen zugrundegelegt und Anwendungen auf Quasi-Monte-Carlo-Methoden, auf die Erzeugung von Pseudozufallszahlen und auf die Arithmetik ganzer Zahlen mittels modularer Techniken besprochen. Kapitel 10 gibt einen Abriss algorithmischer Probleme in anderen Bereichen, die mit den Hauptthemen des Buches zusammenhängen, etwa Primzahltests, Faktorisierung ganzer Zahlen, Fragen der algorithmischen algebraischen Zahlentheorie und der algebraischen Komplexitätstheorie.

Der Anhang enthält einen Leitfaden, eine Liste einschlägiger Tagungen und Zeitschriften, sowie ein sich über 25 Seiten erstreckendes Addendum, in dem über neueste Entwicklungen (zumeist aus den Jahren 1991 und 1992) berichtet wird, die nicht mehr im Hauptteil berücksichtigt werden konnten. Allein der Umfang dieses Addendums beweist die Dynamik und die Aktualität des Gebietes. Das Literaturverzeichnis mit über 1300 Zitaten legt ein berektes Zeugnis ab von der Ambition des Verfassers, den Stoff enzyklopädisch zu erfassen. Das definitive Lehrbuch über die algorithmische Theorie der endlichen Körper bleibt aber noch zu schreiben.

Wien

H. Niederreiter

Wegge-Olson, N., E., *K-Theory and C^* -Algebras* (a friendly approach), Oxford: Oxford University Press 1993, 370 S., £ 25,-

Die topologische K -Theorie wurde ausgehend von Ideen Grothendiecks und unter Einbeziehung des Periodizitätssatzes von Bott von Atiyah-Hirzebruch eingeführt. Schon bald stellte es sich heraus, daß für ein Verständnis des Mechanismus der Theorie eine algebraische Formulierung mit Vorteil verwendet werden kann (Swan, Wood, Karoubi). Die hierbei relevanten Algebren sind ihrer Natur nach nichtkommutativ (Matrixalgebren

über Funktionenalgebren). Durch den engen Zusammenhang mit verschiedenen Indexsätzen kommen darüber hinaus auch noch ganz andere nichtkommutative Algebren in natürlicher Weise ins Spiel (etwa Algebren von Pseudodifferentialoperatoren). Weitere Entwicklungen der Indextheorie in immer weniger „kommutativen“ Situationen sind stichwortartig z. B. mit den Namen Brown-Douglas-Fillmore, Miscenko und Fomenko, Kasparov, Connes und Skandalis verbunden.

Auf der anderen Seite hat die K -Theorie aber auch weniger bekannte Wurzeln in den klassischen Arbeiten von Murray-von Neumann über Operatoralgebren und Faktoren. In diesen Arbeiten aus den 30er Jahren wird in der Tat die K_0 -Gruppe für endliche Faktoren unter dem Namen „Dimension“ eingeführt und bestimmt. Diese Gruppe kann für Faktoren nur die Werte $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ oder $\{0\}$ annehmen und hat eine grundlegende Bedeutung in der Klassifikationstheorie von von Neumann Algebren (die K_1 -Gruppe hingegen ist für von Neumann Algebren immer trivial). Im Lauf der 70er Jahre stellte es sich dann in verschiedenen Zusammenhängen heraus, daß die K -Theorie auch ganz hervorragend als fundamentales Hilfsmittel zur Klassifikation von C^* -Algebren („nichtkommutativen lokalkompakten Räumen“) geeignet ist. Insbesondere wurden in dieser Zeit eine Reihe von Methoden entwickelt, die es erlaubten, die K -theoretischen Invarianten für C^* -Algebren ganz erstaunlich gut zu berechnen. Der krönende Abschluß dieser Methoden ist die KK -Theorie von Kasparov.

Das Ziel des vorliegenden Buches ist nach eigenen Worten ein „pedestrian approach“ zur K -Theorie für C^* -Algebren. Es gibt eine unterhaltsame und witzige Einführung in die grundlegenden Definitionen und einfachsten Eigenschaften (lange exakte Folgen, Bott-Periodizität, verallgemeinerter Fredholm-Index, verallgemeinerter Satz von Kuiper, Beispiele) der K -Theorie im Rahmen der C^* -Algebren. Darüberhinaus enthält es aber auch eine gute Einführung in wichtige Aspekte der Theorie der C^* -Algebren und in die Denkweise der nichtkommutativen Operatoralgebren, sowie eine Anleitung in „nichtkommutativer Intuition“, deren Fehlen oft ein Haupthindernis für das Eindringen in die Theorie ist. Die tieferliegenden und weiterführenden Ergebnisse der K - und KK -Theorie werden allerdings nicht behandelt.

Das Buch stellt eine attraktive Ergänzung für Studenten zu einer Vorlesung dar. Es enthält viele Übungsaufgaben und Anregungen. In mancher Hinsicht ist es vergleichbar mit dem „Hilbert space problem book“ von Halmos. Für eine Vorlesung dagegen enthält es zu viele Details und ist auch oft zu umständlich. Etwas schade ist, daß die exakte Folge von Pimsner-Voiculescu nur ohne Beweis angegeben wird (obwohl einfache Beweise existieren). Diese Folge gehört zu den grundlegenden Methoden der K -Theorie und erlaubt es, die K -Theorie von vielen wichtigen Beispielen von C^* -Algebren zu berechnen.

Meiner Meinung nach ist das Buch, vor allem für Studenten, sehr zu empfehlen, wenn auch einige Zusammenhänge etwas schief dargestellt sind und manche Aussagen, insbesondere solche zu allgemeineren Gesichtspunkten, manchmal mit Vorsicht zu genießen sind.

Heidelberg

J. Cuntz

Weil, A., *The Apprenticeship of Mathematician*, Basel, u. a.: Birkhäuser-Verlag 1992, 197 S., SFR 58,-

Einer der großen Mathematiker dieses Jahrhunderts blickt aus der Distanz etlicher Jahrzehnte auf seine „Lehr- und Wanderjahre“ zurück. Er berichtet in sieben Kapiteln:

(I; 1906–22) Von Elternhaus und Gymnasialzeit, die er mit 16 Jahren beendet. In der kulturellen Metropole Paris hat der ausgezeichnete Schüler A. W. nicht nur bemerkens-

werte Lehrer, er kann sich auch schon als 15jähriger des persönlichen Rats des Mathematikers J. Hadamard und des Indologen S. Lévy erfreuen. – (II; 1922–25) Über die Studienzeit an der Ecole Normale Supérieure, während der er durch die Lektüre der Meister und das „einzigartige“ Seminar von Hadamard zum Mathematiker wird. – (III; 1925–29) Von Reisejahren, in denen er, von eher bescheidenen Stipendien lebend, die Städte Rom, Göttingen, Frankfurt, Stockholm (und viele andere), die Mathematiker Volterra, Dehn, Siegel, Zariski (u. v. a.) kennen und schätzen lernt. In diese Zeit fällt auch die Vollendung seiner Thèse über Diophantische Gleichungen (1928). – (IV; 1930–32) Mit besonderer Wärme über seine Jahre in Indien, die in die Zeit fielen, in der sich moderne mathematische Kultur in den indischen Universitäten durchsetzte. Er begegnet vielen Hauptbeteiligten der Befreiungsbewegung und gewinnt Freunde unter ihnen. – (V; 1933–39) Von den Jahren als Professor in Strasbourg und von der Zeugung Bourbakis aus der Frage (von H. Cartan), in welcher Allgemeinheit man die Stokessche Formel unterrichten solle. Der Bericht von den Kinderjahren Bourbakis bestätigt manche Sage; allmählich ist der Nebel von dieser Kunstfigur gewichen. – (VI; 1939–41) Über die „komische Oper“ seiner Kriegserlebnisse – eine nicht ungefährliche Odyssee durch Finnland (mit Verhaftung als sowjetischer Spion), Schweden, Frankreich (wo er im Gefängnis die „Riemannsche“ Vermutung für algebraische Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper beweist), England, Vichy-Frankreich, die im März 41 in New York endet. – (VII; 1941–47) Von den Schwierigkeiten, eine halbwegs angemessene Stellung in den USA zu finden, die zu einem Zwischenspiel in São Paulo führen, bis sie glücklich mit einer Professur in Chicago enden.

Das Buch wendet sich nicht nur an Mathematiker; wohl deswegen werden die A. W. jeweils beschäftigenden mathematischen Themen nur summarisch mitgeteilt. Über seine wissenschaftliche Entwicklung erfährt man Eingehenderes aus seinen Kommentaren in den Gesammelten Werken. Hingegen zeigt sich auch in diesen Erinnerungen die ungewöhnliche Bildung ihres Autors. Sein scharfer Witz (Hellinger zu Weil: Sie haben die spitzeste Zunge, die ich kenne (p. 50)) scheint jedoch durch Abstand und Altersweisheit zu Ironie gemildert. Etliche Fotos – vom kindlichen Geschwisterpaar André und Simone bis zum Bourbaki-Gruppenbild – schmücken das Buch.

Die hier zu besprechende Ausgabe ist eine bis auf Kleinigkeiten korrekte Übersetzung des französischen Originals – Sprachkundige werden das letztere mit größerem Genuß lesen.

Die englische Ausgabe enthält zusätzlich ein etwas lieblos zusammengestelltes Namenregister (Vornamen erscheinen teils ausgeschrieben, teils als Initialen, teils gar nicht; Szolem Mandelbrojt wird zeitgeistgemäß in Benoît M. umbenannt; der englische Schriftsteller E. M. Forster und der italienische Sozialist G. Matteotti fehlen; dafür erfreut uns Nils Holgersson). Nützlicher als ein nacktes Register wären gelegentliche biographische Anmerkungen, da nicht jedem Leser alle erwähnten Personen des Pariser Geisteslebens oder der indischen Politik vertraut sein werden.

Bremen

W. Fischer

Neumann, K., Morlock, M., Operation Research, München u. a.: Carl-Hanser-Verlag 1993, 798 S., DM 128,-

Die Verfasser charakterisieren Operations Research (OR) als „die Suche nach einer bestmöglichen (optimalen) Entscheidung unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen“. Dabei gehen sie davon aus, daß es sich um quantifizierbare Probleme handelt, für die alle Entscheidungsmöglichkeiten (Alternativen) schon erfaßt und so bewertet sind, daß eindeutig festliegt, was unter einer optimalen Entscheidung zu verstehen ist. Dann bleibt die

Aufgabe, die Menge der Alternativen durch geeignete Nebenbedingungen und die Bewertung durch eine Zielfunktion mathematisch zu beschreiben und für das erhaltene Optimierungsproblem einen Lösungsalgorithmus zu entwickeln. Diese mathematische Aufgabenstellung wird für die wichtigsten OR-Anwendungen im vorliegenden Buch behandelt. Es entstand durch Neubearbeitung der bekannten und bewährten dreibändigen „Operations-Research-Verfahren“ von K. Neumann.

Dabei wurde insbesondere das verstärkte Interesse der OR-Anwender an der Lösung von Optimierungsproblemen mit einer endlichen (aber sehr umfangreichen) Menge von Alternativen berücksichtigt. Dieser Problemklasse, zu der die Optimierung auf Graphen, die ganzzahlige und kombinatorische Optimierung und letztlich auch die lineare Optimierung gehören, sind die ersten drei der insgesamt fünf verfahrensorientierten Kapitel und damit rund 500 von 700 Seiten gewidmet:

Kapitel 1: Lineare Optimierung (Beispiele und Grundbegriffe, Simplexverfahren mit Sonderformen, Dualität, Sensitivitätsanalyse und parametrische Optimierung, Vektroptimierung und Goalprogramming, Zwei-Personen-Nullsummenspiele; rund 140 Seiten, 6 Algorithmen).

Kapitel 2: Graphen und Netzwerke, (Grundbegriffe, Graphen und Digraphen auf Rechnern, Minimalgerüste, Kürzeste Wege, Netzplantechnik, Flüsse, Matchings und Zuordnungen, Umladeproblem und Netzwerksimplexmethode, Briefträgerproblem; rund 200 Seiten, 20 Algorithmen).

Kapitel 3: Ganzzahlige und kombinatorische Optimierung (Ganzzahlige Optimierung, Lösungsmethoden für kombinatorische Optimierungsprobleme, Rucksackproblem, Verschnittproblem, Handlungsreisendenproblem und Tourenplanung, Maschinenbelegungsplanung, Ressourcenplanung; rund 160 Seiten, 20 Algorithmen).

Kapitel 4: Nichtlineare Optimierung (Grundbegriffe, Optimalitätsbedingungen, Lösungsverfahren, Quotenoptimierung; rund 50 Seiten, 3 Algorithmen).

Kapitel 5: Dynamische und stochastische Modelle und Methoden (Diskrete dynamische Optimierung, Lagerhaltung, Warteschlangen, Simulation, Entscheidungstheorie; rund 160 Seiten, 7 Algorithmen).

Abgesehen vom Kapitel 0 Einführung (Was ist OR?, typische OR-Anwendungen) enthält jedes Kapitel einen Abschnitt „Ergänzungen“, in denen neben weiteren OR-Modellen insbesondere neuere Entwicklungen vorgestellt werden.

Worin unterscheidet sich das vorliegende Buch vom alten dreibändigen Werk? Vor allem durch die Einarbeitung und ausführliche Berücksichtigung der neueren Ergebnisse auf dem Gebiet der diskreten Optimierung. So wird in der Regel die Effizienz der angegebenen Algorithmen diskutiert und durch Abschätzungen des Rechenaufwands charakterisiert. Da nach heutiger Überzeugung gewisse diskrete Optimierungsprobleme, z. B. das Rucksackproblem, wirklich „schwer“ sind, d. h., sich nicht wie die in den Kapitel 1 und 2 vorgestellten Probleme mit polynomialen Aufwand lösen lassen, haben die heuristischen Verfahren zur Lösung von schweren Problemen grundsätzlich an Bedeutung gewonnen. Deshalb werden für die im Kapitel 3 betrachteten schweren Probleme neben exakten Verfahren auch in großem Umfang Heuristiken behandelt.

Zum Ausgleich für die umfangreichere Behandlung der diskreten Optimierung werden gegenüber dem alten Werk u. a. langwierigere Beweise (z. B. vom Dualitätstheorem) und einige Stoffgebiete (z. B. die kontinuierliche dynamische Optimierung) weggelassen.

Die vorgestellten Verfahren wurden so ausgewählt, daß sie zwar effizient doch nicht zu spezialisiert und kompliziert sind. Die zum Verständnis der Verfahren nötige Theorie wird knapp aber sorgfältig dargestellt und durch Beispiele und Abbildungen veranschaulicht. Viele der Verfahren werden in einer an Pascal angelehnten Sprache als Algorithmus beschrieben. Dazu werden in Kapitel 2 einige elementare Datenstrukturen behandelt, die für

ständig wiederkehrende Grundaufgaben, z. B. dem Sortieren von n reellen Zahlen nach wachsender Größe, günstige Lösungsverfahren ermöglichen.

In den algorithmischen Verfahrensbeschreibungen können die Autoren nun verbal auf diese Grundaufgaben zurückgreifen.

Die oben ersichtliche Reihenfolge der Kapitel gibt dem Buch jetzt ein geschlossenes didaktisches Bild: Vom Leichterem zum Schwereren. Für Kapitel 1 werden vom Leser nur die üblichen Grundkenntnisse über lineare Gleichungssysteme, Vektoren und Matrizen vorausgesetzt. Alles für die übrigen Kapitel aus der Graphentheorie erforderliche wird im Kapitel 2 gebracht. Kenntnisse aus der Analysis braucht man erst für die beiden letzten Kapitel.

Zweifelloos ist das Buch ein sicherer und anregender Führer durch die Ideenwelt der OR-Verfahren und eine ausgezeichnete Grundlage für Vorlesungen. Aber auch das Selbststudium wird dem Leser leicht gemacht. Denn die Aufgabenstellung und Verfahren werden gut motiviert und anschaulich erklärt. Wenn weiter vorn eingeführte Begriffe oder Fakten erneut auftreten, wird gesagt, wo sie zu finden sind, oder mehr noch: Es werden sogar Definitionen oder Teile von Verfahrensbeschreibungen in geeigneter Form erneut in den laufenden Text aufgenommen, ganz so wie man es in einer guten Vorlesung macht.

München

K.-W. Gaede

Meirmanov, Anvarbek M., The Stefan Problem, Berlin u. a.: de Gruyter 1992, 244 S., DM 148,-

In den sechziger Jahren entstand in der westlichen Angewandten Analysis und Numerischen Mathematik ein starkes Interesse an freien Randwertproblemen und hier besonders am Stefan-Problem. Es handelt sich dabei in seiner klassischen Form um ein Modell für den Phasenübergang fest-flüssig, nur beschrieben aufgrund der thermischen Effekte, d. h. als Energiebilanz. Genauer wird als klassische Lösung gesucht der freie Rand, d. h. eine Hyperfläche in Raum und Zeit, der Ort der Phasenänderung, auf der die Temperatur konstant (gleich Null) und deren Normalengeschwindigkeit proportional zum Sprung des Wärmeflusses, gegeben durch das Fouriersche Gesetz, über die Hyperfläche ist. Die Temperaturen erfüllen im einfachsten Fall die Wärmeleitungsgleichung in den durch die Hyperfläche separierten Teilgebieten des Raum-Zeitzyinders. Sind die Anfangs- und Randbedingungen so, daß eines der Temperaturfelder konstant ist, spricht man vom Ein-Phasen-Problem im Gegensatz zum allgemeinen Zwei-Phasen-Problem. Im räumlich eindimensionalen Fall wurde die Theorie klassischer Lösungen schließlich zu einem weitgehenden Abschluß gebracht. Wurden hier weitgehend Wärmepotentialtechniken angewandt, erwiesen sich beim räumlich mehrdimensionalen Problem zuerst verallgemeinerte Lösungen als natürlich, die sich als Distributionslösungen der Energiebilanzgleichung zusammen mit der unstetigen Temperatur-Energie-Beziehung ergeben. Die Frage nach klassischen Lösungen konnte schließlich erst Ende der siebziger Jahre für das Ein-Phasen-Problem geklärt werden. Um so aufseherregender war schließlich der Beweis des Autors der vorliegenden Monographie [M], daß auch das Zwei-Phasen-Problem eine klassische Lösung, allerdings lokal in der Zeit besitzt. Eine weitere Überraschung ergab sich beim Vorliegen von verteilten Wärmequellen. Auch im eindimensionalen Fall können im Gegensatz zur klassischen Beschreibung mit einem freien Rand „mushy regions“ entstehen, Gebiete zwischen den Phasen, in denen die Temperatur konstant auf Schmelztemperatur ist und die innere Energie beliebig im Sprungintervall.

Diese Entwicklung hat bisher nur unzureichend Niederschlag in Monographien gefunden, so daß das hier vorliegende Buch um so mehr zu begrüßen ist. Die letzte auf

Englisch erschienene dem Stefan-Problem gewidmete Monographie von 1971 [R] konzentrierte sich auf das eindimensionale Problem und hier auf Ergebnisse und Techniken der russischen Literatur ohne die oben skizzierte westliche „Renaissance“ schon berücksichtigen zu können. Deren Darstellung für das eindimensionale Problem findet sich z. Teil in [C], allerdings eingeschränkt auf die Arbeiten des betreffenden Autors. In dem monumentalen Werk [F] schließlich spielte das Stefan-Problem nur eine untergeordnete Rolle. Zu nennen ist noch [EO], eine allerdings auch schon etwas in die Jahre gekommene integrierte Darstellung von Modellierung, Analysis und Numerik.

Bei genauerem Hinsehen zeigt es sich jedoch, daß das hier vorliegende Buch diese Lücke einer allgemeinen Monographie nicht schließen will. Es enthält zwar eine umfangreiche Bibliographie (wie auch [C]), auf diese wird aber im wesentlichen nur in der Einleitung Bezug genommen, die kurz die angesprochene Entwicklung skizziert. Das eigentliche Buch ist, nach einer informellen Einführung und einigen Hilfsergebnissen, eine geschlossene Darstellung der Ergebnisse des Autors. Da dies in einheitlicher Notation, mit vollständigen Beweisen und konsistent aufeinander aufgebaut erfolgt, stellt auch unter diesem Aspekt die Monographie einen deutlichen Gewinn dar, zumal viele der Originalarbeiten nur auf russisch vorliegen.

Im einzelnen enthält Kapitel II eine Darstellung der Ergebnisse aus [M], Kapitel III die Globalität der Lösung unter einschränkenden Bedingungen, Kapitel IV einen alternativen Zugang zum Ein-Phasen-Problem. Auf diese Ergebnisse für den mehrdimensionalen Fall aufbauend wird in Kapitel V der eindimensionale Fall untersucht. Gerade hier sind Argumentation und Aussagen so dicht an den Inhalten vieler in der Bibliographie aufgenommenen Arbeiten, so daß ein entsprechender Hinweis wohl angemessen gewesen wäre. In Kapitel VI werden Auftreten und Gestalt von „mushy regions“ im Eindimensionalen untersucht, Kapitel VII studiert zeitperiodische Lösungen und schließlich Kapitel VIII einen singulären Grenzwert, entstehend durch eine spezielle dreidimensionale Situation. Der Anhang behandelt binäre Legierungen und geht somit über das Stefan-Problem hinaus.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß das Buch für jeden an Differentialgleichungen interessierten Analytiker einen konsistenten Zugang zu einigen der wichtigsten Ergebnisse auf dem Gebiet der Stefan-Probleme liefert. Das umfassende Lehrbuch, das eine integrierte Darstellung von Modellierung, Analysis und Numerik leistet, steht allerdings noch aus.

- [C] Canon, J. R.: The one-dimensional heat equation. Cambridge: Addison-Wesley 1984
- [EO] Elliott, C. M.; Ockendon, J. R.: Weak and variational methods for moving boundary problems. Pitman Res. Notes Math. Vol 59. London: Pitman 1982
- [F] Friedman, A.: Variational principles and free boundary problems. New York: Wiley 1982
- [M] Meirmanov, A. M.: On the classical solution of the multidimensional Stefan Problem for quasilinear parabolic equations. Math. USSR – Sb. **40** (1981) 157–178
- [R] Rubinstein, L. I.: The Stefan Problem. Transl. Math. Monographs Vol 27. Providence: AMS 1971

Erlangen

P. Knabner

Felix Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, Neue Auflage mit einer Einführung und Kommentaren von Peter Slodowy, Basel u. a.: Birkhäuser-Verlag, Stuttgart; Leipzig: Teubner Verlagsgesellschaft 1993, 343 S., DM 88,-

Felix Kleins Ikosaederbuch erschien 1884 im Verlag Teubner, Leipzig. Diese Neuauflage ist eine Gemeinschaftsausgabe des Birkhäuser Verlags und der B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart – Leipzig. Herausgeber ist Peter Slodowy. Er hat dem Werk ein Vorwort und eine Einführung vorangestellt. Im Vorwort schreibt er:

„Die Wiederveröffentlichung von Felix Kleins ‚Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade‘ entspricht der ständig wachsenden Nachfrage nach diesem Werk, das vor mehr als hundert Jahren in Leipzig erschien. Ein Gutteil des Interesses an Kleins Buch dürfte sicher auf die ungebrochene Aktualität von ‚Ikosaedermathematik‘ zurückzuführen sein, d. h. von Mathematik, in der Geometrie und Symmetrie des Ikosaeders, wie auch die der anderen Platonischen Körper und der regulären Polygone, eine wesentliche Rolle spielen. ... In jedem Fall hat Kleins ‚Ikosaederbuch‘ als beliebte Referenz für ‚Ikosaedermathematik‘ gedient und es wird diese Rolle auch weiterhin spielen.“

„Wie bedeutend dieser Aspekt des Buches auch sein mag, so präsentiert er es doch nur als einen Steinbruch, in dem man bei Gelegenheit mathematische Schätze finden kann. Will man ein vollständiges Bild des Buches haben, so hat man auch den zweiten Teil seines Titels zu beachten. Kleins Hauptziel war es nämlich, eine originelle Synthese der Theorien über die Gleichung fünften Grades zu geben, die im Jahre 1858 auf unabhängigem Weg von Hermite, Brioschi und Kronecker mit der Konstruktion transzendentaler Lösungen geschaffen worden waren. Für Klein sollten dabei das Ikosaeder und seine Geometrie im Vordergrund stehen. ...“

„Für einen normalerweise nicht historisch arbeitenden Mathematiker ist der Versuch, einen historischen Text wie das Ikosaederbuch verstehen zu wollen, ein durchaus ungewöhnliches Unterfangen. Gewiß gibt es einen mathematischen Kern, der sich klar herausarbeiten läßt. Aber es gibt auch mannigfaltige Verzweigungen und Schattierungen, deren Bedeutung man nur im historischen Kontext erschließen kann. Wir haben hier von einer einheitlichen Darstellung dieses Umfelds Abstand genommen, da sie zu umfangreich geworden wäre. Es stehen hier auch andere Quellen zur Verfügung, ...“

Mit diesen Worten umreißt der Herausgeber die Bedeutung, die er Kleins Buch beimißt, und das Ziel, das er mit der Neuherausgabe verfolgte. Er ist selbst ein Mathematiker, dessen Arbeiten mit zur fortdauernden Aktualität des Ikosaederbuches beigetragen haben. In diese Neuauflage hat er sehr viel Mühe und Wissen investiert, sehr viel Verständnis für Inhalt und Form des Ikosaederbuches bewiesen. Wir haben allen Grund, ihm für seine Arbeit und für das gelungene Ergebnis dankbar zu sein.

In der Einleitung beschreibt Slodowy den Inhalt des Kleinschen Buches in moderner mathematischer Sprache. Dieser Inhalt ist in der Neuauflage unverändert als Originaltext abgedruckt. Nur am Rand des Textes finden sich an denjenigen Stellen Sternchen, zu denen Slodowy später Anmerkungen macht. Diese Anmerkungen zum Text erstrecken sich über ca. 50 Seiten. Sie reichen von Korrekturen (der bei Klein häufigen) Druck- und Rechenfehler bis zu mathematischen Erläuterungen und historischen Bemerkungen. Das Buch schließt Slodowy mit einer Skizze der weiteren Entwicklungen auf diesem Gebiet (ca. 20 Seiten) und einer umfangreichen Literaturliste.

Ich glaube, dem Herausgeber ist das fast Unmögliche gelungen, einerseits den Charme und die Unbefangenheit des Originalwerkes zu erhalten, aber andererseits durch seine Ergänzungen ein Buch daraus zu machen, das den heutigen Anforderungen mathematischer Strenge Rechnung trägt.

Erlangen

W. Barth

Laine, I., *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations* (de Gruyters Studies in Mathematics, 15), Berlin u. a.: de Gruyter 1992, 341 S., Leinen DM 154,-

Ludwig Bieberbachs klassisches Werk zur „Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, auf funktionentheoretischer Grundlage dargestellt“ gibt uns einen Überblick

über das fruchtbare Zusammenwirken der beiden genannten Gebiete. In den letzten Jahren hat insbesondere die Nevanlinnasche Theorie der meromorphen Funktionen viele neue Anwendungen gefunden. Ilpo Laine stellt diese Ergebnisse zusammen, das vorliegende Buch ist somit eine aktuelle Ergänzung zu Bieberbachs Werk.

Der Inhalt kann in drei Teile gegliedert werden. In den ersten drei Kapiteln finden wir die funktionentheoretischen Grundlagen mit den beiden Hauptsätzen von Nevanlinna, dann folgen fünf Kapitel über lineare gewöhnliche DGLn im Komplexen, in den restlichen sechs Kapiteln werden nichtlineare Probleme behandelt. Einige der Themen sollen nun vorgestellt werden.

1. *Der Satz von Malmquist.* Dieses in der Differentialgleichungstheorie ungewöhnliche Ergebnis von Malmquist aus dem Jahre 1913 lautet: Gegeben sei DGL

$$(1) \quad w' = R(z, w)$$

mit einer rationalen Funktion R . Dann ist jede im Großen eindeutige Lösung entweder eine rationale Funktion oder es ist (1) eine Riccatische DGL.

Viele wichtige transzendente Funktionen treten als Lösungen von DGLn auf. Die DGL (1) kann nur dann eine transzendente Lösung besitzen, wenn R ein Polynom in w vom Grade ≤ 2 ist.

Im Jahre 1932 hat K. Yosida einen auf Nevanlinnas Theorie basierenden Beweis für den Malmquistschen Satz gefunden. Yosida hat damit die Anwendbarkeit der Nevanlinna-Theorie auf globale Fragen der Differentialgleichungstheorie erkannt, seine Idee steht am Anfang einer großen Entwicklung. Den gegenwärtigen Stand hat Ilpo Laine in seinem Buch festgehalten.

Die Einordnung des Malmquistschen Satzes in die Wertverteilungslehre ermöglicht eine Reihe von Verallgemeinerungen.

2. *Verallgemeinerungen zum Malmquistschen Satz.* Es bieten sich drei Erweiterungen an. Erstens kann die Lösungsklasse größer angesetzt werden. Neben den eindeutigen meromorphen Funktionen können auch endlich vieldeutige algebraische und algebroiden Lösungen zugelassen werden. Der von I. Laine und A. und V. Mohon'ko eingeführte Begriffe der „zulässigen Lösung“ ist dabei am geeignetsten. Die Zulässigkeit wird mit dem Maßstab der Nevanlinna-Theorie, der charakteristischen Funktion, gemessen.

Zweitens ist es naheliegend, auf der linken Seite in (1) allgemeinere Differentialpolynome anzusetzen,

$$(2) \quad P(z, w, w', \dots, w^{(r)}) = R(z, w).$$

Man ordnet so beispielsweise die Painlevéschen DGLn

$$(3) \quad w'' = 2w^3 + zw + d,$$

$$(4) \quad ww'' - \frac{1}{2}(w')^2 = \frac{3}{2}w^4 + 4zw^3 + 2(z^2 - a)w^2 + b, \dots$$

in den Malmquistschen Fragenkreis ein. Schließlich kann die Rationalitätsforderung an R aufgegeben werden.

In den Jahren 1932 bis 34 hat K. Yosida die binomische DGL mit $P = (w')^n$ im meromorphen und algebroiden Lösungsbereich untersucht. Ilpo Laine und der Referent haben 1976 in einer gemeinsamen Arbeit die DGL (2) in beiden Bereichen behandelt und den Malmquistschen Satz verallgemeinert: Die DGL (2) kann nur dann eine zulässige meromorphe Lösung besitzen, wenn R ein Polynom in w vom Grade $\leq \Delta$ ist. Δ ist das reduzierte Gewicht von P . Bei (3) und (4) ist $\Delta = 3$ bzw. 4. Im algebroiden Fall kann der Nennergrad von R bzgl. w positiv sein. Bieberbach erwähnt, daß der ursprüngliche Malmquistsche Satz für

algebroiden Integrale bestehen bleibt. Dies ist nicht richtig. Die Konstruktion eines Gegenbeispiels mit positivem Nennergrad bei R war der Ausgangspunkt unserer Zusammenarbeit. Gleichzeitig und unabhängig hat S. Strelitz die verallgemeinerte Aussage für die DGI (2) im meromorphen Lösungsbereich gefunden. Im Jahre 1978 konnte N. Steinmetz den Beweis im meromorphen Bereich ohne die Rationalitätsvoraussetzung auf der rechten Seite in (2) führen.

In Kapitel 10 des vorliegenden Buches wird die binomische DGI behandelt. Die von N. Steinmetz gefundenen zulässigen Gleichungstypen werden angegeben. In Kapitel 13 wird die DGI (2) untersucht und der verallgemeinerte Malmquistsche Satz bewiesen. Der endlich vieldeutige algebroiden Fall wird leider nicht mitbehandelt.

3. *Die Painlevéschen DGI.* Viele Spezialisten glauben, daß die Painlevéschen Transzendenten im 21. Jahrhundert neue Mitglieder in der Familie der speziellen Funktionen sein werden (nach K. Iwasaki et al.). Die Painlevéschen Funktionen werden in Kapitel 9 im Sinne der Wertverteilungslehre untersucht. Ilpo Laine und der Referent haben

gezeigt, daß bei einer Lösung w der DGI $P = \sum_{n=0}^A a_n(z)w^n$ für die Schmiegefunktion

$$(5) \quad m\left(r, \frac{1}{w-c}\right) = S(r, w)$$

gilt, falls $\sum_{n=0}^A a_n(z)c^n \neq 0$ ist. Aus (4) folgt offensichtlich, daß bei der vierten Painlevéschen Transzendenten im Falle $b \neq 0$ alle Werte c die Eigenschaft (5) haben, im Falle $b = 0$ kann höchstens $c = 0$ Ausnahmewert sein, siehe Theorem 9.2.4. Der Experte wird bemerken,

daß bei unserem Beweis das Lemma von Clunie eingeht, während im Beweis von Steinmetz aus dem Jahre 1982 das Lemma von Mohon'ko benutzt wird – und daß die Zitierlichkeit noch gefördert werden kann. Interessante Bemerkungen über die Bedeutung der beiden Lemmata findet man auf den Seiten 41 und 182 des vorliegenden Buches.

4. *Der Höldersche Satz über die Γ -Funktion.* Otto Hölder hat seinen berühmten Satz, daß die Γ -Funktion keiner algebraischen DGI genügt, im Jahre 1886 veröffentlicht. L. Bieberbach und I. Laine gehen jeweils im letzten Abschnitt auf dieses Ergebnis ein. Es ist interessant, die in den letzten Jahren vor allem von Bank und Kaufman erzielten Fortschritte zu sehen. Ein entsprechendes Resultat für die Riemannsche ζ -Funktion könnte das Ziel sein.

Abschließende Bemerkungen: Im vorliegenden Buch werden die vielfältigen neuen Ergebnisse übersichtlich zusammengestellt. Studenten, die dieses Gebiet erlernen wollen, kann das Buch empfohlen werden. Aber auch Fachleute auf dem Gebiet und Dozenten, die eine Vorlesung über Funktionentheorie und/oder Differentialgleichungen vorbereiten, können manche Anregung daraus entnehmen.

Berlin

F. Gackstatter

Hemions, G., *The Classifications Of Knots And 3-Dimensional Spaces* (Oxford Sciences Publication), Oxford University Press 1992, 162 S., £ 25

Das Buch widmet sich verdienstvoll einem wichtigen und grundsätzlichen Aspekt der Theorie der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, das insbesondere im englischen Sprachbereich eine empfindliche Lücke schließt. Kernpunkt ist eine ausführliche Diskus-

sion der Normalflächentheorie von Wolfgang Haken. Diese, ergänzt durch den im Appendix angefügten eigenen Beitrag des Autors über die Klassifikation von Flächenhomöomorphismen, gestattet eine wichtige Klasse von 3-Mannigfaltigkeiten – die Hakenmannigfaltigkeiten – durch einen Algorithmus zu klassifizieren. Allerdings ist darüberhinaus sowohl die Normalflächentheorie als auch die Klassifikation von Flächenhomöomorphismen in verschiedenen Zusammenhängen von eigenem Interesse. Die inkompressiblen Flächen in 3-Mannigfaltigkeiten hatten einen entscheidenden Einfluß auf die Weiterentwicklung der Theorie, wie sie von F. Waldhausen erreicht wurde. Was den Beitrag des Autors zu den Flächenhomöomorphismen angeht, so ist er vielleicht durch die stürmische Entwicklung auf diesem Gebiet durch W. Thurston etwas an den Rand gedrängt worden. Seine Überlegungen sind allerdings auf einem wesentlich einfacheren Niveau zugänglich als die Thurstons. Zum Inhalt: Im ersten Teil werden – mehr im Erzählton – Grundbegriffe der Polyedertopologie erläutert, es werden das Knotenproblem und die Klassifikation kompakter Flächen beschrieben. Der zweite Teil enthält eine recht vollständige Darstellung und Analyse des Hakenschen Normalflächenverfahrens mit den einschlägigen Überlegungen über Lösungen von Systemen Diophantischer Gleichungen. Dieser Abschnitt erscheint gut geeignet, in einem entsprechenden Seminar als eine Quelle zu dienen. Der dritte Abschnitt ist der Klassifikation der Flächenhomöomorphismen gewidmet. Das Problem stellt sich im Rahmen der Klassifikation von Hakenmannigfaltigkeiten bei den „Stücken“, die eine Stallingsche Faserung besitzen. Der Gedankengang wird unter Verwendung der hyperbolischen Struktur der Flächen in klarer Weise durchgeführt. Für vollständige Beweise bedarf es allerdings des Rückgriffs auf die im Appendix angefügte Originalarbeit des Autors. Das Buch ist Studenten und Dozenten wärmstens zu empfehlen, die Interessen auf dem Gebiet der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten haben.

Frankfurt/M

G. Burde

Zur Besprechung von: Fomenko, A., Visual Geometry and Topology, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1994, im Heft 97,2 Seite 52.

Dazu teilt der Springer-Verlag mit, daß er den Verkauf des Buches bereits im September 1994 eingestellt hat.

Spannende Mathematik im Trend zur Praxisnähe



A. Bachem, M. Jünger, R. Schrader,
Universität Köln

Mathematik in der Praxis Fallstudien aus Industrie, Wirtschaft, Naturwissenschaften und Medizin

1995. XIV, 570 S. 112 Abb.

Geb. DM 48,-; öS 350,40; sFr 48,-

ISBN 3-540-59294-6

Mathematiker haben in den letzten Jahren
grundlegende Beiträge zu Fragestellungen

- in der Industrie,
 - in Transport und Kommunikation,
 - in Versicherungen und Banken,
 - in Medizin und Biologie
- geleistet.

Dieses Buch will solche Beiträge in Form von Fallstudien einer größeren Öffentlichkeit zugänglich machen. Es behandelt auch außergewöhnliche und akute Themen wie die Ausbreitung von Aids.

Die von Experten geschriebenen Artikel belegen, wie vielfältig Mathematik im Spannungsfeld zwischen Theorie und Anwendung sein kann. Die Problematik wird in der jeweiligen „Anwendersprache“ eingeführt und mathematisch modelliert, dann werden Lösungsverfahren skizziert und schließlich praktische Ergebnisse diskutiert.



Springer

Preisänderungen vorbehalten.

Algebraic Geometry from Springer

E. Viehweg

Quasi-projective Moduli for Polarized Manifolds

1995. Approx. 320 pp. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, Vol. 30) Hardcover \$ 125.00 ISBN 0-387-59255-5

The author discusses two subjects of quite different nature: Construction methods for quotients of quasi-projective schemes by group actions or by equivalence relations and properties of direct images of certain sheaves under smooth morphisms.

Starting with A. Grothendieck's construction of Hilbert schemes, including the basics of D. Mumford's geometric invariant theory and an introduction to M. Artin's theory of algebraic spaces, the reader finds the tools for the construction of moduli, usually not contained in textbooks on algebraic geometry.

D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan

Geometric Invariant Theory

3rd, enlarged ed. 1994. XIV, 294 pp. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge A Series of Modern Surveys in Mathematics, Bd. 34) Hardcover \$ 98.00 ISBN 0-387-56963-4

The Mumford/Fogarty is the standard reference on applications of invariant theory to the construction of moduli spaces.

The third edition has an additional chapter on the moment map by F. Kirwan.

The book deals firstly with actions of algebraic groups on algebraic varieties, separating orbits by invariants and construction quotient spaces and secondly with applications of this theory to the construction of moduli spaces.

It is a systematic exposition of the geometric aspects of the classical theory of polynomial invariants.



Springer

Preisänderungen vorbehalten.

Abelian Varieties

Proceedings of the International Conference held in Egloffstein, Germany, October 3 - 8, 1993

Editors: W. Barth / K. Hulek / H. Lange
1995. 17 x 24 cm. VIII, 344 pages.
With 11 figures.
Cloth DM 238,- / öS 1.857,- / sFr 227,-
ISBN 3-11-014411-5

Asymptotic Methods for Elastic Structures

Proceedings of the International Conference held in Lisbon, Portugal, October 4 - 8, 1993

Editors: P. G. Ciarlet / L. Trabucho / J. M. Viana
1995. 17 x 24 cm. VIII, 297 pages.
With 29 figures and 4 tables.
Cloth DM 248,- / öS 1.935,- / sFr 237,-
ISBN 3-11-014731-9

Dirichlet Forms and Stochastic Processes

Proceedings of the International Conference held in Beijing, China, October 25 - 31, 1993

Editors: Z. M. Ma / M. Röckner / J.A. Yan
1995. 17 x 24 cm. XII, 444 pages.
Cloth DM 268,- / öS 2.091,- / sFr 255,-
ISBN 3-11-014284-8

Groups-Korea '94

Proceedings of the International Conference held at Pusan National University, Pusan, Korea, August 18 - 25, 1994

Editors: A. C. Kim / D. L. Johnson
1995. 17 x 24 cm. IX, 344 pages.
With 18 figures.
Cloth DM 198,- / öS 1.545,- / sFr 190,-
ISBN 3-11-014793-9

Symposia Gaussiana Conference A: Mathematics and Theoretical Physics

Proceedings of the 2nd Gauss Symposium, Munich, Germany, August 2 - 7, 1993

Editors: M. Behara / R. Fritsch / R. G. Lintz
1995. 17 x 24 cm. XX, 745 pages.
With 76 figures.
Cloth DM 328,- / öS 2.559,- / sFr 312,-
ISBN 3-11-014476-X

Symposia Gaussiana Conference B: Statistical Sciences

Proceedings of the 2nd Gauss Symposium, Munich, Germany, August 2 - 7, 1993

Editors: V. Mammitzsch / H. Schneeweiß
1995. 17 x 24 cm. X, 342 pages.
With 15 figures.
Cloth DM 268,- / öS 2.091,- / sFr 255,-
ISBN 3-11-014412-3

Infinite Groups 1994

Proceedings of the International Conference held in Ravello, Italy, May 23 - 27, 1994

Editors: F. de Giovanni / M. L. Newell
1995. 17 x 24 cm. XVI, 336 pages.
With 7 figures.
Cloth DM 198,- / öS 1.545,- / sFr 190,-
ISBN 3-11-014332-1

Schuster

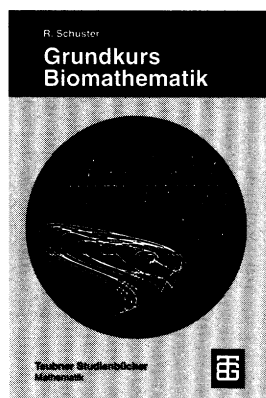
Grundkurs Biomathematik

**Mathematische Modelle in
Biologie, Biochemie, Medizin und
Pharmazie mit Computerlösungen
in Mathematica**

An konkreten Beispielen aus der Biologie, Biochemie, Medizin und Pharmazie werden die verschiedenen mathematischen Methoden entwickelt und erläutert, wobei graphische Darstellungen und anschauliche Interpretationen der tragenden Ideen das Herangehen prägen. Die Verwendung von Mathematica ermöglicht hierbei einen schnellen Aufstieg von grundlegenden Beispielen und Modellierungsfragen zu den komplexen Fragestellungen moderner interdisziplinärer Forschung.

Aus dem Inhalt

Differential- und Integralrechnung, Kurvendiskussion, Einführung in Mathematica – Wachstumsmodelle mit Differentialgleichungen, dynamische Krankheiten in der Physiologie – Lineare Algebra mit Anwendung in der Populationsgenetik – Räuber-Beute-Modelle, oszillierende chemische und biochemische Systeme mit Grenzzyklen – Dynamik von Infektionskrankheiten – Michaelis-Menten-Theorie in der Enzymkinetik, Hodgkin-Huxley-Theorie der Nervenmembranen, „Schwarze Löcher“ in der Biologie – Partielle Differentialgleichungen: räumlich-zeitliche Wirkungsausbreitung – Fraktale – Statistik: Diskrete und stetige Zufallsgrößen, Normalverteilung, Testtheorie, Regressionsrechnung und Kurvenanpassung



Von Dr.
Reinhard Schuster
Lübeck

1995. II, 333 Seiten mit 143 Bildern, zahlreichen Programmen und Beispielen.
13,7 x 20,5 cm.
Kart. DM 42,80
ÖS 317,- / SFr 42,80
ISBN 3-519-02092-0

(Teubner Studienbücher)



B. G. Teubner Stuttgart

Postfach 80 10 69 70510 Stuttgart