

E 20577 F

97. Band Heft 4

ausgegeben am 28. 11. 1995

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer

unter Mitwirkung von

P. L. Butzer, U. Felgner,

K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil



B. G. Teubner Stuttgart 1995

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 128, – einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:

B. G. Teubner GmbH, Industriestr. 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 80 10 69, D-70510 Stuttgart, Tel. (07 11) 789 01-0, Telefax (07 11) 789 01-10
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, 80336 München, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 \$ 01.00 + .20.

© B. G. Teubner GmbH, Stuttgart 1995 – Verlagsnummer 2910/4

Printed in Germany – ISSN 0012-0456

Satz: Elsner & Behrens GdB, D-68723 Oftersheim

Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

97. Band



B. G. Teubner Stuttgart 1995

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-80336 München, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970.0012-0456/83 \$01.00+.20.

© B. G. Teubner Stuttgart 1995 – Verlagsnummern 2910/1, 2910/2, 2910/3, 2910/4

Printed in Germany – ISSN 0012-0456

Satz: Elsner & Behrens GdB, Oftersheim

Druck: pagina media gmbH, Hemsbach

Inhalt

1. Abteilung

M. Aigner, J. J. Seidel: Knoten, Spin Modelle und Graphen	75
R. Berndt: On Automorphic Forms for the Jacobi Group	1
A. Böttcher: Toeplitz operators with piecewise continuous symbols – a neverending story	115
L. Bröcker: Semialgebraische Geometrie	130
W. Dahmen: Multiskalen-Methoden und Wavelets – Konzepte und Anwendungen . .	97
B. Green, F. Pop, P. Roquette: On Rumely’s Local-Global Principle	43
H. Neunzert: Vom Nutzen der Mathematik	157
L. Volkmann: Regular graphs, regular factors, and the impact of Petersen’s Theorems	19

2. Abteilung

Buchbesprechungen

Ablowitz, M. J., Clarkson, P. A., Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering (<i>B. Fuchssteiner</i>)	59
Akivis, M. A., Shelckov, A. M., Geometry and Algebra of Multidimensional Three-Webs (<i>P. T. Nagy</i>)	51
Assmus, E. F., Key, J. D., Designs and their Codes (<i>A. Pott</i>)	28
Bachem, A., Kern, W., Linear Programming Duality (<i>W. Wenzel</i>)	32
Becker, T., Weispfenning, V., Gröbner Bases (<i>F. Winkler</i>)	29
Berenstein, O., Gay, R., Complex Variables (<i>I. Lieb</i>)	11
Berline, N., Getzler, E., Vergne, M., Heat Kernels and Dirac Operators (<i>B. Ørsted</i>)	63
Brudnyi, A. Yu., Krugljak, N. Ya., Interpolation Functors and Interpolation Spaces (<i>H.-J. Schmeißer</i>)	16
Cantor, G., Briefe (<i>W. Purkert</i>)	23
Chapman, J., Rowbottom, F., Relative Category Theory and Geometric Morphisms (<i>S. Mac Lane</i>)	25
Cohn, P. M., Algebra (<i>F. Lorenz</i>)	27
Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra (<i>F. Winkler</i>)	37
Dale, A. I., History of Inverse Probability, From Thomas Bayes to Karl Pearson (<i>K. Jacobs</i>)	84
Deschauer, S., Das zweite Rechenbuch von Adam Ries (<i>H. Lüneburg</i>)	58
Doerk, K., Hawkes, T., Finite soluble groups (<i>B. Hartley</i>)	7
Figotin, A., Pastur, L., Spectra of Random and Almost Periodic Operators (<i>W. Kirsch</i>)	84
Fleming, H. W., Soner, H., Controlled Marcov Processes and Viscosity Solutions (<i>M. Kohlmann</i>)	79
Fomenko, A., Visual Geometry and Topology (<i>Th. Bröcker</i>)	52
Friedman, R., Morgan, J., Smooth Four-Manifolds and Complex Surfaces (<i>Ch. Okonek</i>)	40
Grindrod, P., Patterns and Waves (<i>R. Gorenflo</i>)	17
Hemions, G., The Classifications Of Knots And 3-Dimensional Spaces (<i>G. Burde</i>) . .	77
Karatsuba, A. A., Voronin, S. M., The Riemannian Zeta-Function (<i>J. Brüderl</i>) . .	39
Kay, R., Models of Peano Arithmetic (<i>U. Felgner</i>)	24

Klein, F., Vorlesungen über das Ikosaeder (<i>W. Barth</i>)	74
Knight, F., Foundations of the prediction process (<i>G. Winkler</i>)	1
Kolmogorow, A. N., Selected Works (<i>K. Jacobs</i>)	82
Korte, B., Lovász, L., Schrader, R., Greedoids (<i>D. Jungnickel</i>)	10
Kosmol, P., Optimierung und Approximation (<i>F. Lempio</i>)	18
Kruse, R., Schwecke, E., Heinsohn, J., Uncertainty and Vagueness in Knowledge Based Systems (<i>U. Höhle</i>)	19
Laine, I., Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations (<i>F. Gackstatter</i>) .	75
Lang, S., Number Theory III, Diophantine Geometry (<i>G. Wüstholtz</i>)	3
Lawson, H. B., Michelson, M.-L., Spin Geometry (<i>S. Stolz</i>).....	43
Meirmanov, Anvarbek M., The Stefan Problem (<i>P. Knabner</i>)	73
Meise, R., Vogt, D., Einführung in die Funktionalanalysis (<i>S. Graf</i>)	13
Meyer-Nieberg, P., Banach Lattices (<i>H. H. Schaefer</i>)	12
Mumford, D., Tata Lectures on Theta I and II and III (<i>Ch. Birkenhake</i>)	4
Neimark, Yu. I., Landa, P. S., Stochastic and Chaotic Oscillation (<i>L. Arnold</i>)	54
Neukirch, J., Algebraische Zahlentheorie (<i>F. Lorenz</i>)	21
Neumann, K., Morlock, M., Operation Research (<i>K.-W. Gaede</i>)	71
Neutsch, W., Scherer, K., Celestial Mechanics (<i>M. Schneider</i>).....	56
Orlik, P., Terao, H., Arrangements of Hyperplanes (<i>M. Ziegler</i>)	66
Pilyugin, Sergei Yu., Introduction to Structurally Stable Systems of Differential Equations (<i>Th. Bröcker</i>).....	61
Ranicki, A. A., Algebraic L -Theory and Topological Manifolds (<i>W. Lück</i>)	42
Saad, Y., Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems (<i>V. Mehrmann</i>)	62
Schröder, E. M., Vorlesungen über Geometrie (<i>H. Mäurer</i>)	36
Shparlinski, I. E., Computational and Algorithmic Problems in Finite Fields (<i>H. Niederreiter</i>)	68
Simon, K., Effiziente Algorithmen für perfekte Graphen (<i>H. J. Prömel</i>).....	30
Stolfi, J., Oriented Projective Geometry (A Framework for Geometric Computations) (<i>B. Pareigis</i>)	34
Straughan, B., The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection (<i>V. Reitmann</i>)	55
Triebel, H., Theory of Function Spaces II (<i>N. Jacob</i>)	15
Tromba, A. J., Teichmüller Theory in Riemannian Geometry (<i>F. Herrlich</i>)	45
Voss, H.-J., Cycles and Bridges in Graphs (<i>H. Walther</i>)	32
Wallach, N. R., Real Reductive Groups II (<i>M. Olbrich</i>)	47
Wegge-Olson, N. E., K -Theory and C^* -Algebras (<i>J. Cuntz</i>)	69
Weil, A., The Apprenticeship of Mathematician (<i>W. Fischer</i>)	70
Woodhouse, N. M. J., Geometric Quantization (<i>J. Hilgert</i>).....	49
van Lint, J. H., Introduction to Coding Theory (<i>H. Stichtenoth</i>).....	6

Inhalt Band 97, Heft 4

1. Abteilung

Böttcher, A.: Toeplitz operators with piecewise continuous symbols – a neverending story?	115
Bröcker, L.: Semialgebraische Geometrie	130
Neunzert, H.: Vom Nutzen der Mathematik	157

2. Abteilung

Fleming, H. W., Soner, H., Controlled Marcov Processes and Viscosity Solutions (<i>M. Kohlmann</i>)	79
Kolmogorow, A. N., Selected Works (<i>K. Jacobs</i>)	82
Dale, A. I., History of Inverse Probability, From Thomas Bayes to Karl Pearson (<i>K. Jacobs</i>)	84
Figotin, A., Pastur, L., Spectra of Random and Almost Periodic Operators (<i>W. Kirsch</i>)	84

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

G. Bruhn: Wolfgang Haack zum Gedächtnis

M. Denker, S. Heinemann: Dynamik analytischer Endomorphismen auf der Sphäre

K. Rubin: Euler Systems and Exact Formulas in Number Theory

P. Schneider: Gebäude in der Darstellungstheorie über lokalen Zahlkörpern

G. Schumacher: Über die Entwicklung der Komplexen Analysis in Deutschland vom Ausgang des 19. Jahrhunderts bis zum Anfang der siebziger Jahre

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 52062 Aachen

Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen

Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Arcisstraße 21, 80333 München 2

Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Toeplitz operators with piecewise continuous symbols – a neverending story?

A. Böttcher*), Chemnitz

This article is a slightly modified and English version of a plenary talk given at the DMV-Jahrestagung in Duisburg, 1994.

The purpose of the article is to present a few pieces of the fascinating development in the theory of Toeplitz operators with piecewise continuous symbols. We start with Toeplitz’ 1911 paper, review the classical L^2 results obtained until the middle of the sixties, embark on the L^p theory worked out by Gohberg and Krupnik in the seventies, cite the 1990 result by Spitkovsky on operators in spaces with Muckenhoupt weights, and end up with phenomena for operators on Carleson curves which were discovered by Karlovich and the author only in 1994. Although with the consideration of Muckenhoupt weights and Carleson curves the theory has now reached a certain maximal level of generality, an end of the metamorphosis of the spectra of Toeplitz operators with piecewise continuous symbols doesn’t seem to be in sight.

1 Otto Toeplitz: the beginning

Let us start the story with the 1911 paper [14] by Otto Toeplitz. What Toeplitz studied was to consider infinite linear systems of the form

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \dots & \dots \\ \dots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \dots & \dots \\ \hline \dots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & \dots \\ \dots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots & \dots \\ \dots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ f_{-2} \\ f_{-1} \\ \hline f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ g_{-2} \\ g_{-1} \\ \hline g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

*) Research supported by the Alfried Krupp Förderpreis für junge Hochschullehrer of the Krupp Foundation.

on the space $l^2(\mathbf{Z})$, and among other things, he was interested in describing the spectrum of the operator on $l^2(\mathbf{Z})$ that is generated by the matrix on the left-hand side of (1). Here and in the following, the spectrum of a bounded operator A is what it ought to be,

$$\text{sp } A = \{\lambda \in \mathbf{C} : A - \lambda I \text{ has no bounded inverse}\}.$$

The matrix in (1) has a special structure: it is constant along the parallels to the main diagonal. Toeplitz assumed that there is a function a analytic in an annulus containing the complex unit circle \mathbf{T} such that $\{a_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ is the sequence of the Laurent coefficients of a ,

$$a(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n \quad (\varrho < |z| < \sigma \text{ with } 0 < \varrho < 1 < \sigma),$$

and he showed that the spectrum of the operator induced by the matrix of (1) on $l^2(\mathbf{Z})$ is $a(\mathbf{T})$, i.e. the set of values taken by the function a on \mathbf{T} .

We now know that the result by Toeplitz can be essentially generalized. The discrete Fourier transform takes $l^2(\mathbf{Z})$ to $L^2(\mathbf{T})$ and hence, at least formally, the system (1) is equivalent to the equation

$$(2) \quad \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n e^{in\theta} \right) \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} f_n e^{in\theta} \right) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} g_n e^{in\theta} \quad (e^{i\theta} \in \mathbf{T}).$$

In other words, the operator generated by the matrix in (1) on $l^2(\mathbf{Z})$ is unitarily equivalent to the operator of multiplication by the function

$$(3) \quad a(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n e^{in\theta} \quad (e^{i\theta} \in \mathbf{T})$$

on $L^2(\mathbf{T})$. This implies that the matrix in (1) represents a bounded operator on the space $l^2(\mathbf{Z})$ if and only if $\{a_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ is the Fourier coefficients sequence of a function in $L^\infty(\mathbf{T})$, i.e. if and only if (3) holds with some function $a \in L^\infty(\mathbf{T})$. In that case the operator defined by (1) is referred to as the *Laurent operator* with the *symbol* a (notice that Toeplitz himself called his matrices “ L -matrices”).

We infer from (2) that the spectrum of the Laurent operator with the symbol a is the essential range of a , i.e. the set of all $\lambda \in \mathbf{C}$ such that

$$\{t \in \mathbf{T} : |a(t) - \lambda| < \varepsilon\}$$

is of positive measure for each $\varepsilon > 0$. In case a is continuous, $a \in C(\mathbf{T})$, the essential range is simply $a(\mathbf{T})$. A function $a \in L^\infty(\mathbf{T})$ is said to be *piecewise continuous*, in which case we write $a \in PC(\mathbf{T})$, if the one-sided limits $a(t \pm 0)$ exists at each point $t \in \mathbf{T}$. The essential range of a piecewise continuous function a is $\bigcup \{a(t \pm 0) : t \in \mathbf{T}\}$. We remark that functions in $PC(\mathbf{T})$ have at most countably many jumps and that if $a \in PC(\mathbf{T})$, then the set

$$\{t \in \mathbf{T} : |a(t + 0) - a(t - 0)| > \delta\}$$

is finite for each $\delta > 0$.

2 Toeplitz matrices

What is nowadays called *Toeplitz matrices* is the south-east quarters of Laurent matrices. Thus, a Toeplitz matrix has the form

$$(4) \quad \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

In a footnote of [14], Toeplitz proved that the matrix (4) induces a bounded operator on $l^2(\mathbf{Z}_+)$ if and only if the matrix of (1) represents a bounded operator on $l^2(\mathbf{Z})$. It should be emphasized that this result is no triviality. In this connection, we remark that the north-east quarters of Laurent matrices, i.e. matrices given on $l^2(\mathbf{Z}_+)$ by

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

are called *Hankel matrices*. The set of all function (3) which induce a bounded Hankel operator on $l^2(\mathbf{Z}_+)$ is described by Nehari’s theorem, and it turns out that this set contains unbounded functions (see e.g. [2]).

In the same way Laurent matrices are better understood when representing them by multiplication operators on the Lebesgue space $L^2(\mathbf{T})$, the study of Toeplitz matrices may advantageously be based on their representation as operators on the *Hardy space*

$$H^2(\mathbf{T}) := \{\varphi \in L^2(\mathbf{T}) : \varphi_n = 0 \text{ for } n < 0\}.$$

Clearly, $H^2(\mathbf{T})$ is a closed subspace of $L^2(\mathbf{T})$, and the orthogonal projection P of $L^2(\mathbf{T})$ onto $H^2(\mathbf{T})$, also referred to as the *Riesz projection*, acts by the rule

$$(5) \quad P : \sum_{n \in \mathbf{Z}} \varphi_n e^{in\theta} \mapsto \sum_{n \in \mathbf{Z}_+} \varphi_n e^{in\theta}.$$

A little thought reveals that the operator induced by the Toeplitz matrix (4) on $l^2(\mathbf{Z}_+)$ is unitarily equivalent to the operator on $H^2(\mathbf{T})$ which sends φ to $P(a\varphi)$, where a is given by (3). This operator (multiplication by a followed by orthogonal projection back onto the Hardy space) is called the *Toeplitz operator* $T(a)$ with the *symbol* a .

If all we would know about the Riesz projection were that it is given by (5), transition from Toeplitz matrices on $l^2(\mathbf{Z}_+)$ to Toeplitz operators on $H^2(\mathbf{T})$ would not make any sense. The usefulness of employing the Hardy space rests on the representation $P = (I + S)/2$ where $S : L^2(\mathbf{T}) \rightarrow L^2(\mathbf{T})$ is the Cauchy singular integral operator,

$$(6) \quad (S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbf{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau \quad (t \in \mathbf{T}),$$

the integral understood in the principal value sense.

Toeplitz studied boundedness of both Laurent and Toeplitz operators, but he only dealt with the spectrum of Laurent operators. So what about the spectrum of Toeplitz operators? This question turns out to be very difficult and is, in fact, the source of the story I will speak about.

In 1952, Gohberg [5] was able to give the answer in the case where a is continuous. Here is his theorem: *if $a \in C(\mathbf{T})$, then the spectrum of $T(a)$ is the union of $a(\mathbf{T})$ and the points of $\mathbf{C} \setminus a(\mathbf{T})$ whose winding number with respect to the (naturally oriented) curve $a(\mathbf{T})$ is nonzero.*

In the sixties, the question was disposed of for piecewise continuous symbols by Simonenko (1960), Calderón, Spitzer, Widom (1963), Devinatz (1964), and again Gohberg (1967); see [8] and [2] for precise references. The result is as follows. Given $a \in PC(\mathbf{T})$, denote by $a^\#$ the continuous, closed, and naturally oriented curve that is obtained from the essential range of a by filling in the line segments $[a(t-0), a(t+0)]$ between the endpoints of the jumps. *Then $\text{sp } T(a)$ is the union of $a^\#$ and the points of $\mathbf{C} \setminus a^\#$ whose winding number with respect to $a^\#$ is nonzero.*

Consider, for example, the Hilbert-Toeplitz matrix

$$(7) \quad (1/(j-k-1/2))_{j,k=0}^\infty.$$

The symbol of this matrix is given by

$$(8) \quad a(e^{i\theta}) = \pi i e^{i\theta/2} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

and has a jump from $-\pi i$ to πi at $e^{i\theta} = 1$. Consequently, the spectrum of the operator induced by the matrix (7) on $l^2(\mathbf{Z}_+)$ is the closed half-disk $\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq \pi, \text{Re } \lambda \leq 0\}$.

For symbols a in $L^\infty(\mathbf{T}) \setminus PC(\mathbf{T})$ things are more complicated. An overview about what is known for several classes of discontinuous but not piecewise continuous symbols may be found in the book [2].

Despite the beauty of the results cited above, the reader might ask why we should study spectra of Toeplitz operators. In the following three sections, I want to motivate the import of the spectral theory of Toeplitz operators in connection with singular integral equations.

3 Singular integral equations

A simple singular integral equation is an equation of the form

$$(9) \quad a(t)f(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)d\tau}{\tau-t} + \int_{\Gamma} k(t, \tau)f(\tau)d\tau = g(t) \quad (t \in \Gamma),$$

where Γ , the “contour”, is a curve in \mathbf{C} . The coefficients a and b , the kernel k and the right-hand side $g \in L^2(\Gamma)$ are given, while $f \in L^2(\Gamma)$ is sought. The kernel k is

supposed to be sufficiently nice (in comparison with the singular kernel $1/(\tau - t)$), which means that the corresponding integral operator on $L^2(\Gamma)$ is supposed to be compact. To avoid unnecessary complications, let us also assume that Γ is the complex unit circle \mathbf{T} .

We may write equation (9) as $Af = g$ with $A = aI + bS + K$, where aI stands for multiplication by a , S is the operator (6), and K denotes the integral operator generated by the kernel k .

Given an Banach space X , we denote by $\mathcal{L}(X)$ and $\mathcal{K}(X)$ the bounded and compact (linear) operators on X , respectively. In a broader sense, a *singular integral equation* is an equation $Af = g$ in which A is an operator belonging to the smallest closed subalgebra $\text{alg}(S, \mathfrak{A})$ of $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{T}))$ containing the operator S and all multiplications aI with a in some “coefficient algebra” \mathfrak{A} . For example, if a, b, c, d, e, f are functions in \mathfrak{A} , then

$$A = (aI + bS)(cS + dSeS) + SfI$$

is a singular integral operator in $\text{alg}(S, \mathfrak{A})$.

If $\mathfrak{A} = C(\mathbf{T})$, then $\text{alg}(S, C(\mathbf{T}))$ can be shown to coincide with the set

$$(10) \quad \{aI + bS + K : a, b \in C(\mathbf{T}), K \in \mathcal{K}(L^2(\mathbf{T}))\}$$

(see [8]). Thus, every operator in $\text{alg}(S, C(\mathbf{T}))$ gives rise to an integral equation of the form (9).

In case $\mathfrak{A} = PC(\mathbf{T})$, that is, when considering singular integral operators with piecewise continuous coefficients, the algebra $\text{alg}(S, PC(\mathbf{T}))$ is of more intricate structure and such a simple description as (10) is not available. This algebra will play a central role in the following.

4 Fredholm theory

An operator $A \in \mathcal{L}(X)$ is said to be *Fredholm* if it is invertible modulo compact operators, i.e. if the coset $A + \mathcal{K}(X)$ is invertible in the Calkin algebra $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$. One can show (see e.g. [8]) that A is Fredholm if and only if its range $\text{Im } A := A(X)$ is closed and both its kernel $\text{Ker } A := \{f \in X : Af = 0\}$ and its cokernel $\text{Coker } A := X/\text{Im } A$ are finite-dimensional. The *index* of a Fredholm operator A is defined as

$$\text{Ind } A := \dim \text{Ker } A - \dim \text{Coker } A.$$

If A is a Toeplitz operator $T(a)$ or a singular integral operator of the form $aI + bS$, then A is invertible if and only if A is Fredholm of index zero (again see e.g. [8]). Hence, in these cases the problem of deciding whether A is invertible splits into two simpler subproblems: find out whether A is Fredholm and if yes, compute the index $\text{Ind } A$. For more general operators in $\text{alg}(S, C(\mathbf{T}))$ or $\text{alg}(S, PC(\mathbf{T}))$ the invertibility problem cannot be solved in this way, but Fredholm criteria and index formulas are nevertheless of great interest.

The Fredholm counterpart of the spectrum $\text{sp } A$ of an operator $A \in \mathcal{L}(X)$ is its *essential spectrum*:

$$\text{sp}_{\text{ess}} A := \{\lambda \in \mathbf{C} : A - \lambda I \text{ is not Fredholm}\}.$$

The essential spectrum of the Toeplitz operator $T(a)$ is just $a(\mathbf{T})$ if $a \in C(\mathbf{T})$ and the curve $a^\#$ introduced in Section 2 if $a \in PC(\mathbf{T})$. The points λ in $\text{sp } T(a) \setminus \text{sp}_{\text{ess}} T(a)$ are the λ for which $T(a) - \lambda I$ is Fredholm of nonzero index.

In what follows we will consider Toeplitz operators $T(a)$ on spaces different from $H^2(\mathbf{T})$. We will see that $\text{sp}_{\text{ess}} T(a)$, $\text{sp } T(a)$, $\text{Ind } T(a)$ heavily depend on the space the operator acts on. However, once the essential spectrum $\text{sp}_{\text{ess}} T(a)$ is available, index formulas and descriptions of the spectrum $\text{sp } T(a)$ may be derived in a standard way, which is independent of the concrete space. Thus, we will henceforth focus our attention on $\text{sp}_{\text{ess}} T(a)$ and leave aside the index and spectra.

Given a Banach algebra $\mathfrak{B} \subset \mathcal{L}(X)$ and a second Banach algebra \mathfrak{C} with identity element, we say that a map $\text{Sym} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ is a *Fredholm symbol* if Sym is a Banach algebra homomorphism enjoying the following property: an operator $A \in \mathfrak{B}$ is Fredholm if and only if $\text{Sym } A$ is invertible in \mathfrak{C} . In the next section we indicate how Fredholm symbols may be constructed for $\mathfrak{B} = \text{alg}(S, C(\mathbf{T}))$ and $\mathfrak{B} = \text{alg}(S, PC(\mathbf{T}))$.

5 Localization

To obtain a Fredholm criterion for the simple singular integral operator $A = aI + bS$, one starts with “freezing” the coefficients.

Suppose first $a, b \in C(\mathbf{T})$. Freezing the coefficients at a point $t_0 \in \mathbf{T}$ leads to the operator

$$A_{t_0} = a(t_0)I + b(t_0)S = a(t_0)I + b(t_0)(2P - I)$$

(recall that $P = (I + S)/2$). Thus, we arrive at an operator which belongs to the smallest closed subalgebra $\text{alg}\{I, P\}$ of $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{T}))$ containing I and P . The Banach algebra $\text{alg}\{I, P\}$ is commutative and singly generated. Therefore its maximal ideal space M may be identified with the spectrum of the generating element, $M = \text{sp } P = \{0, 1\}$, and the Gelfand map Φ acts by the rule

$$\Phi : \text{alg}\{I, P\} \rightarrow C(M), (\Phi P)(0) = 0, (\Phi P)(1) = 1.$$

It follows that

$$(\Phi A_{t_0})(0) = a(t_0) + b(t_0)(2(\Phi P)(0) - 1) = a(t_0) - b(t_0),$$

$$(\Phi A_{t_0})(1) = a(t_0) + b(t_0)(2(\Phi P)(1) - 1) = a(t_0) + b(t_0).$$

Now so-called *local principles* enter the scene. They tell us how the properties of the original operator A are connected with the family $\{A_t\}_{t \in \mathbf{T}}$ of the “frozen” operators. For lack of space we cannot embark on local principles here and must refer to the literature (e.g. to [8] or [2]). In the situation at hand, local principles give the following.

The operator $aI + bS$ is Fredholm if and only if $a(t) \pm b(t) \neq 0$ for all $t \in \mathbf{T}$. Moreover, the map

$$\text{Sym} : \text{alg}(S, C(\mathbf{T})) \rightarrow C(\mathbf{T} \times \{0, 1\})$$

given for $(t, \mu) \in \mathbf{T} \times \{0, 1\}$ by

$$\begin{aligned} (\text{Sym } S)(t, \mu) &= 2\mu - 1, & (\text{Sym } aI)(t, \mu) &= a(t), \\ (\text{Sym } K)(t, \mu) &= 0 & \text{if } K &\in \mathcal{X}(L^2(\mathbf{T})) \end{aligned}$$

is a Fredholm symbol.

Now consider $A = aI + bS$ with $a, b \in PC(\mathbf{T})$. For $t_0 = e^{i\theta_0} \in \mathbf{T}$, denote by χ the characteristic function of the half-circle $\{e^{i\theta} \in \mathbf{T} : \theta_0 < \theta < \theta_0 + \pi\}$. Freezing the operator A at t_0 gives an operator A_{t_0} of the form

$$A_{t_0} = (\alpha + \beta\chi)I + (\gamma + \delta\chi)(2P - I)$$

$$\begin{aligned} \text{with } \alpha &= a(t_0 - 0), & \beta &= a(t_0 + 0) - a(t_0 - 0), \\ \gamma &= b(t_0 - 0), & \delta &= b(t_0 + 0) - b(t_0 - 0). \end{aligned}$$

The operator A_{t_0} belongs to the smallest closed subalgebra $\text{alg}\{I, \chi I, P\}$ of $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{T}))$ containing $I, \chi I$, and P . The algebra $\text{alg}\{I, \chi I, P\}$ is no longer commutative, but fortunately, it is generated by two projections: $(\chi I)^2 = \chi I$ and $P^2 = P$. And for Banach algebra generated by two projections, there exists some kind of “non-commutative Gelfand theory” (see e.g. [4] and the references contained therein).

Namely, there is a compact Hausdorff space M and a Banach algebra homomorphism

$$\Phi : \text{alg}\{I, \chi I, P\} \rightarrow C^{2 \times 2}(M)$$

of $\text{alg}\{I, \chi I, P\}$ into the continuous 2×2 – matrix functions on M such that A is invertible if and only if so is $\Phi A \in C^{2 \times 2}(M)$. The space M may be identified with a subset of \mathbb{C} , after which Φ may be given by the formulas

$$\begin{aligned} (\Phi I)(\mu) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & (\Phi P)(\mu) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (\Phi \chi I)(\mu) &= \begin{pmatrix} \mu & \sqrt{\mu(1-\mu)} \\ \sqrt{\mu(1-\mu)} & 1-\mu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

The only question we are left with is the following: what is M ? Here is the answer: M is the spectrum of $P\chi I P$ and thus, in principle, the spectrum of the Toeplitz operator $T(\chi)$! Since we know that $\text{sp } T(\chi) = [0, 1]$, we see that $M = [0, 1]$. Now local principles may be employed to derive the following result, which was established by Gohberg and Krupnik in [6].

Let \mathfrak{M} denote the cylinder $\mathbf{T} \times [0, 1]$ (with an exotic topology). The map

$$\text{Sym} : \text{alg}(S, PC(\mathbf{T})) \rightarrow C^{2 \times 2}(\mathfrak{M})$$

given for $(t, \mu) \in \mathfrak{M}$ by

$$(11) \quad (\text{Sym } S)(t, \mu) = \begin{pmatrix} 2\mu - 1 & 2\sqrt{\mu(1-\mu)} \\ 2\sqrt{\mu(1-\mu)} & 1 - 2\mu \end{pmatrix},$$

$$(12) \quad (\text{Sym } aI)(t, \mu) = \begin{pmatrix} a(t+0) & 0 \\ 0 & a(t-0) \end{pmatrix},$$

$$(13) \quad (\text{Sym } K)(t, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{if } K \text{ is compact}$$

is a Fredholm symbol.

Let us summarize what we have done. First, we have constructed Fredholm symbols for $\text{alg}(S, C(\mathbb{T}))$ and $\text{alg}(S, PC(\mathbb{T}))$ whose values are (matrix) functions living on a certain space \mathfrak{M} . In the case of continuous coefficients, \mathfrak{M} is the disjoint union of two circles, $\mathfrak{M} = \mathbb{T} \times \{0, 1\}$. For piecewise continuous symbols, \mathfrak{M} is the cylinder $\mathbb{T} \times [0, 1]$, which results by filling in segments between all the pairs $(t, 0)$ and $(t, 1)$ of $\mathbb{T} \times \{0, 1\}$. Figure 1 shows the essential spectrum of a Toeplitz operator on $H^2(\mathbb{T})$ with a piecewise continuous symbol and the cylinder \mathfrak{M} .

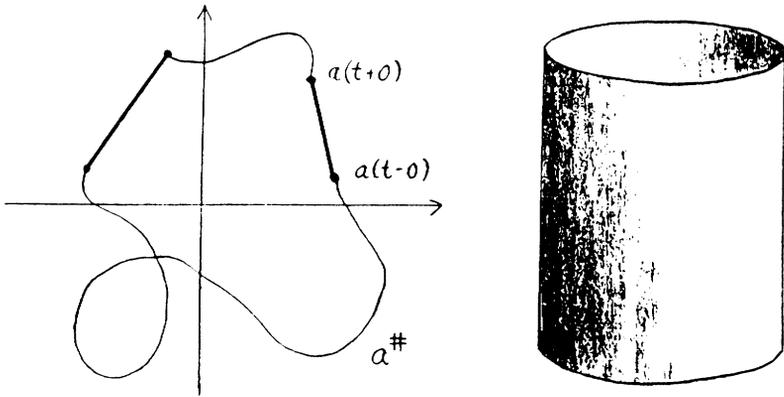


Fig. 1

Secondly, I hope I succeeded in convincing the reader in the philosophy that the Fredholm theory of singular integral operators is based on two pillars: non-commutative Gelfand theory on the one hand and the spectral theory of Toeplitz operators on the other.

6 Metamorphosis I: circular arcs

Let us return to Toeplitz operators. So far we have considered Toeplitz operators on $H^2(\mathbb{T})$. Suppose now that Γ is a piecewise smooth Jordan curve and let $1 < p < \infty$. One can show that the Cauchy singular operator S ,

$$(14) \quad (S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (t \in \Gamma),$$

is bounded on $L^p(\Gamma)$ (see e.g. [8]). The Hardy space $H^p(\Gamma)$ is defined as the range of the Riesz projection $P = (I + S)/2$ on $L^p(\Gamma)$, that is, we put $H^p(\Gamma) := PL^p(\Gamma)$. For $a \in L^\infty(\Gamma)$, the Toeplitz operator $T(a)$ on $H^p(\Gamma)$ is the operator that sends a function $\varphi \in H^p(\Gamma)$ to the function $P(a\varphi) \in H^p(\Gamma)$.

What is the essential spectrum of $T(a)$ on $H^p(\Gamma)$? If $a \in C(\Gamma)$, then $\text{sp}_{\text{ess}} T(a)$ is simply the curve $a(\Gamma)$. The surprise comes with a in $PC(\Gamma)$. If $t \in \Gamma$ and $a(t-0) \neq a(t+0)$, let \mathcal{A}_p denote the circular arc at the points of which the line segment $[a(t-0), a(t+0)]$ is seen at the angle $2\pi/\max\{p, q\}$ (where $1/p + 1/q = 1$) and which lies on the left (resp. right) of the oriented straight line passing first $a(t-0)$ and then $a(t+0)$ if $1 < p < 2$ (resp. $2 < p < \infty$). Then let $a_p^\#$ be the continuous, closed, and naturally oriented curve that results from the essential range of a by filling in the circular arc \mathcal{A}_p between the endpoints of each jump. Notice that if $p=2$, then $a_p^\#$ coincides with the curve $a^\#$ defined in Section 2. Gohberg and Krupnik [7] (but see also Widom [15]) proved that $\text{sp}_{\text{ess}} T(a) = a_p^\#$.

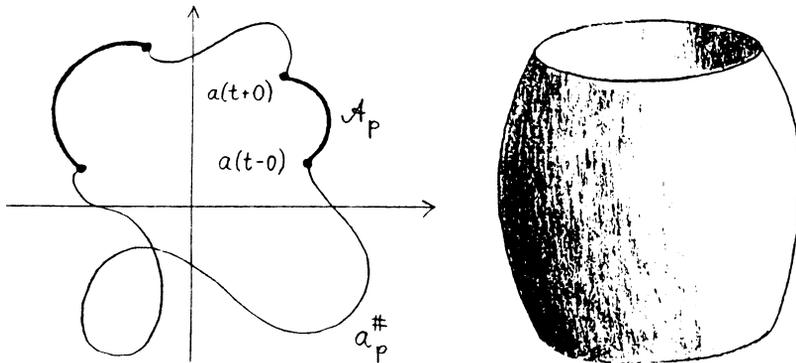


Fig. 2

To have an example, let $\Gamma = \mathbf{T}$ and define $a \in PC(\mathbf{T})$ by (8). It results that $\text{sp}_{\text{ess}} T(a)$ is the union of the essential range of a and a certain circular arc between $-\pi i$ and πi whose shape depends on p . The standard arguments alluded to in Section 4 so yield the following: $T(a)$ is invertible on $H^p(\mathbf{T})$ for $1 < p < 2$, $T(a)$ is not Fredholm on $H^p(\mathbf{T})$ for $p=2$, and $T(a)$ is Fredholm of index -1 on $H^p(\mathbf{T})$ for $2 < p < \infty$.

Let $\text{alg}_p(S, PC(\Gamma))$ stand for the smallest closed subalgebra of $\mathcal{L}(L^p(\Gamma))$ containing all singular integral operators $aI + bS$ with $a, b \in PC(\Gamma)$. The role played in Section 5 by the line segment $[0, 1]$ is now performed by the circular arc \mathcal{A}_p between 0 and 1. Accordingly, join the points $(t, 0)$ and $(t, 1)$ of $\Gamma \times \{0, 1\}$ now not by the segments $[0, 1]$ but by the circular arcs \mathcal{A}_p . What results is the barrel $\mathfrak{M}_p = \Gamma \times \mathcal{A}_p$. Figure 2 shows $a_p^\#$ for a piecewise continuous function a and the barrel \mathfrak{M}_p .

Proceeding as in Section 5, one so arrives at the following result, which was already obtained by Gohberg and Krupnik [7] with the help of other methods: *the map*

$$\text{Sym} : \text{alg}_p(S, PC(\Gamma)) \rightarrow C^{2 \times 2}(\mathfrak{M}_p)$$

given by (11) to (13) for $(t, \mu) \in \mathfrak{M}_p$ is a Fredholm symbol.

7 Metamorphosis II: horns

The boundedness of the Cauchy singular integral operator S defined by (14) on several spaces has been a big business for many decades (see e.g. [11]).

Let Γ be again a piecewise smooth Jordan curve, let $1 < p < \infty$, and suppose we are given a weight w on Γ of the form

$$(15) \quad w(t) = \prod_{j=1}^n |t - t_j|^{\beta_j} \quad (t \in \Gamma),$$

where t_1, \dots, t_n are distinct points on Γ and β_1, \dots, β_n are real numbers. We denote by $L^p(\Gamma, w)$ the Lebesgue space with the norm

$$(16) \quad \|f\| := \left(\int_{\Gamma} |f(t)w(t)|^p |dt| \right)^{1/p}.$$

It turns out (see e.g. [8]) that S is bounded on $L^p(\Gamma, w)$ if and only if

$$(17) \quad -1/p < \beta_j < 1/q \quad \text{for all } j.$$

Here, of course, $1/p + 1/q = 1$. Hence, if (17) is satisfied, we may define $P := (I + S)/2$, we then put $H^p(\Gamma, w) := PL^p(\Gamma, w)$, and for $a \in L^\infty(\Gamma)$, the Toeplitz operator $T(a)$ on $H^p(\Gamma, w)$ is the operator sending φ to $P(a\varphi)$.

It was once more Gohberg and Krupnik who determined the essential spectrum of $T(a)$ on $H^p(\Gamma, w)$. If $a \in C(\Gamma)$, the $\text{sp}_{\text{ess}} T(a) = a(\Gamma)$. However, if $a \in PC(\Gamma)$, then $\text{sp}_{\text{ess}} T(a)$ is a curve $a_{p,w}^\#$ which results from the essential range of a by filling in a certain circular arc $\mathcal{A}_{p,w(t)}$ between the endpoints $a(t-0)$ and $a(t+0)$ of each jump. In contrast to spaces without weight, the shape of the arc $\mathcal{A}_{p,w(t)}$ joining $a(t-0)$ to $a(t+0)$ depends now not only on p but also on the behavior of the weight w at t . The theorem stated in the end of Section 6 possesses an analogue for $H^p(\Gamma, w)$: one has only to replace \mathfrak{M}_p by $\mathfrak{M}_{p,w}$, where $\mathfrak{M}_{p,w}$ arises from the two circles $\mathbb{T} \times \{0, 1\}$ by connecting $(t, 0)$ and $(t, 1)$ by the circular arc $\mathcal{A}_{p,w(t)}$ between 0 and 1. Thus $\mathfrak{M}_{p,w}$ is obtained from the barrel \mathfrak{M}_p by replacing the arcs \mathcal{A}_p between $(t_j, 0)$ and $(t_j, 1)$ with the arcs $\mathcal{A}_{p,w(t_j)}$ ($j = 1, \dots, n$). A typical essential spectrum $a_{p,w}^\#$ and an example of $\mathfrak{M}_{p,w}$ are shown in Figure 3.

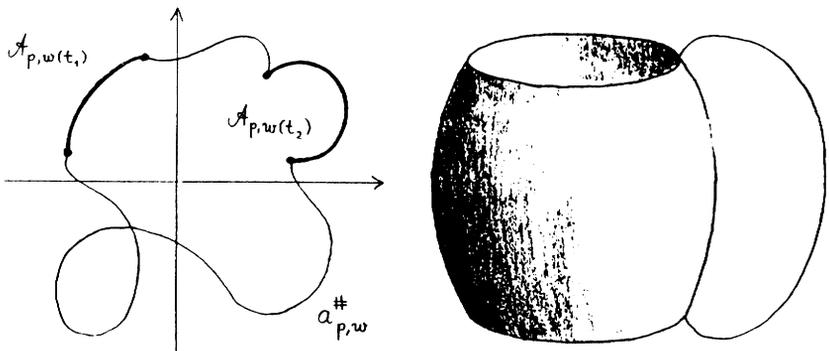


Fig. 3

After the results of the preceding paragraph had been established, the development paused many years. Only in 1990, Spitkovsky [13] surprised us with a spectacular discovery.

The point is that besides the weights (15), (17) there are much more weights w for which S is bounded on $L^p(\Gamma, w)$. In 1973, Hunt, Muckenhoupt, and Wheeden [10] proved that S is bounded on $L^p(\Gamma, w)$ (with the norm (16)) if and only if

$$(18) \quad \sup_{t \in \Gamma} \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Gamma(t, \varepsilon)} w(\tau)^p |d\tau| \right)^{1/p} \left(\int_{\Gamma(t, \varepsilon)} w(\tau)^{-q} |d\tau| \right)^{1/q} < \infty,$$

where $\Gamma(t, \varepsilon) := \{\tau \in \Gamma : |\tau - t| < \varepsilon\}$. The set of all weights w satisfying (18) is commonly denoted by $A_{p, \Gamma}$ and referred to as the set of *Muckenhoupt weights*. For weights of the form (15), conditions (18) and (17) can be shown to be equivalent. If $w \in A_{p, \Gamma}$, the Riesz projection P , the Hardy space $H^p(\Gamma, w) := PL^p(\Gamma, w)$, and the Toeplitz operator $T(a) : \varphi \mapsto P(a\varphi)$ on $H^p(\Gamma, w)$ are defined in the usual way.

Spitkovsky [13] determined the essential spectrum of $T(a)$ on $H^p(\Gamma, w)$ for $a \in PC(\Gamma)$ in case Γ is a piecewise smooth Jordan curve, $1 < p < \infty$, and $w \in A_{p, \Gamma}$. His result says that $\text{sp}_{\text{ess}} T(a)$ arises from the essential range of a by filling in a certain horn $\mathcal{H}_{p, w(t)}$ between the endpoints $a(t-0)$ and $a(t+0)$ of each jump. A horn is the closed set bounded by two circular arcs. The shape of the horn joining $a(t-0)$ and $a(t+0)$ depends on p and the behavior of the weight w at t . If w is given by (15), (17), then w is called a power weight, and in this case the horn $\mathcal{H}_{p, w(t)}$ degenerates to the circular arc $\mathcal{A}_{p, w(t)}$. In the general case one can “measure the powerlikeness” of the weight w at t , and the horn $\mathcal{H}_{p, w(t)}$ deviates the more from the circular $\mathcal{A}_{p, w(t)}$ the less “powerlike” w is at t .

Immediately after Spitkovsky’s result, people started constructing a Fredholm symbol for the smallest closed subalgebra $\text{alg}_{p, w}(S, PC(\Gamma))$ of $\mathcal{L}(L^p(\Gamma, w))$ containing all singular integral operators $aI + bS$ with $a, b \in PC(\Gamma)$. However, this time one was confronted with a serious complication: since horns are “heavy sets” (i.e. sets that might arise from other sets by filling out “holes”), one had to invent new proofs for the inverse closedness of some relevant Banach algebras. These obstacles were overcome by Finck, Roch, Silbermann [4] and

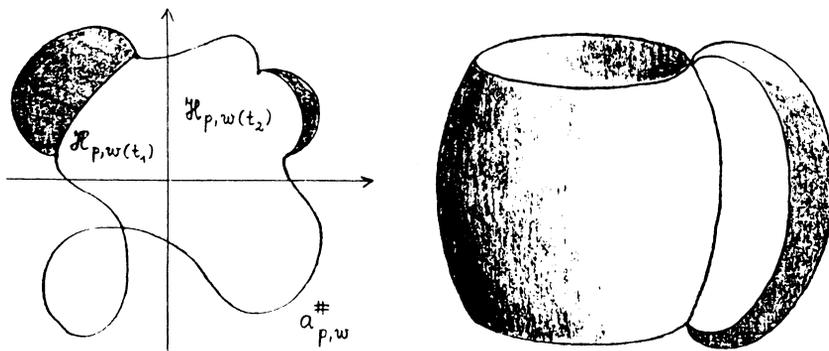


Fig. 4

Gohberg, Krupnik [9] (independently and almost simultaneously). They obtained a Fredholm symbol

$$\text{Sym} : \text{alg}_{p,w}(S, PC(\Gamma)) \rightarrow C^{2 \times 2}(\mathfrak{M}_{p,w}),$$

$\mathfrak{M}_{p,w}$ now being a barrel with horn-shaped handles (see Figure 4).

And again it seemed then that everything was said one could say about Toeplitz operators with piecewise continuous symbols and the corresponding singular integral operators.

8 Metamorphosis III: spiralic horns

However, the story does not end with the result of the preceding section. Notice that until now we have always assumed that Γ be a piecewise smooth Jordan curve. It turns out that this is an unnecessary strong assumption.

So let us simply suppose that Γ is a rectifiable Jordan curve, w is a nonnegative function on Γ , and $1 < p < \infty$. Consider the space $L^p(\Gamma, w)$ with the norm (16). The Hardy space $H^p(\Gamma, w) := PL^p(\Gamma, w)$ makes sense if and only if $S (= 2P - I)$ is bounded on $L^p(\Gamma, w)$, in which case every $a \in L^\infty(\Gamma)$ induces a bounded Toeplitz operator $T(a) : \varphi \mapsto P(a\varphi)$ on $H^p(\Gamma, w)$.

When is S bounded on $L^p(\Gamma, w)$? If Γ is piecewise smooth, we know that this happens if and only if $w \in A_{p,\Gamma}$. Here is the complete answer to the question: *S is bounded on $L^p(\Gamma, w)$ if and only if Γ is a Carleson curve and w is a Muckenhoupt weight*, i.e. a weight satisfying (18). The “if” part of this result was proved by David [3], its “only if” portion is due to Paatashvili and Khuskivadze [12]. The curve Γ is called a *Carleson curve* if

$$\sup_{t \in \Gamma} \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} |\Gamma(t, \varepsilon)| < \infty,$$

where $\Gamma(t, \varepsilon) := \{\tau \in \Gamma : |\tau - t| < \varepsilon\}$ and $|\Gamma(t, \varepsilon)|$ is the length of $\Gamma(t, \varepsilon)$. In other words, Γ is a Carleson curve if and only if the “portion” $\Gamma(t, \varepsilon)$ of Γ in the disk $\{z \in \mathbb{C} : |z - t| < \varepsilon\}$ may be estimated from above by the diameter 2ε of this disk: there exists a constant $C > 0$ such that $|\Gamma(t, \varepsilon)| \leq C\varepsilon$ for all $t \in \Gamma$ and all $\varepsilon > 0$.

Carleson curves may be very complicated, and the nature of the essential spectra of Toeplitz operators with piecewise continuous symbols on Carleson curves is not yet fully understood. Nevertheless, these spectra were recently determined by Yu. I. Karlovich and the author for a sufficiently large class of Carleson curves [1].

One may partition the points of a Carleson curve into nonhelical points and helical points. For example, points at which the tangent exists, corner points, or cusp points are nonhelical. A helical point $t \in \Gamma$ is called a logarithmic whirl point if in a neighborhood of t the curve looks like two logarithmic spirals scrolling up at this point. Suppose Γ is a Carleson curve each point of which is either nonhelical or a logarithmic whirl point. Let $1 < p < \infty$ and $w \in A_{p,\Gamma}$. Our result says that if $a \in PC(\Gamma)$, then the essential spectrum of $T(a)$ on $H^p(\Gamma, w)$ is obtained from the essential range of a by filling in a certain spiralic horn $S_{p,w(t),\Gamma(t)}$ between the

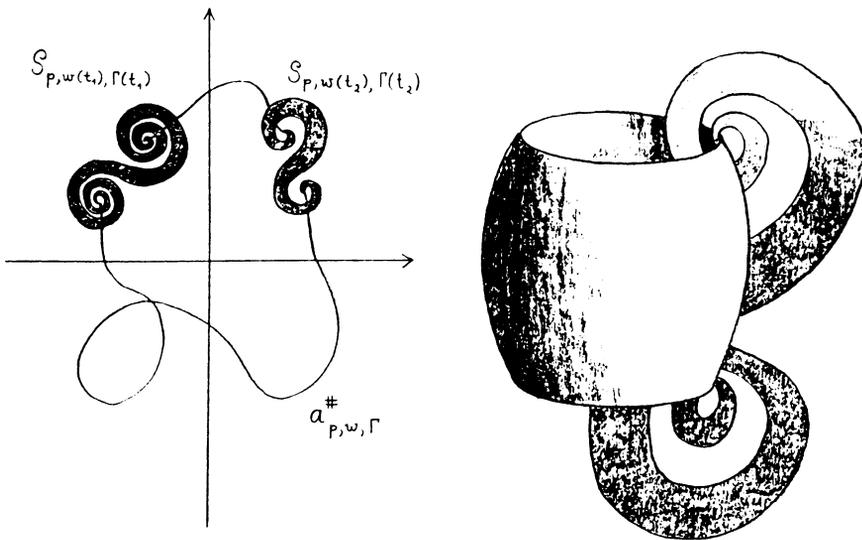


Fig.5

endpoints $a(t-0)$ and $a(t+0)$ of each jump. A spiralic horn is the closed set bounded by two logarithmic double-spirals (see Figure 5). The shape of the spiralic horn $\mathcal{S}_{p,w(t),\Gamma(t)}$ (which may degenerate to a double-spiral) is determined by p , the behavior of the weight w at t , and the behavior of the curve Γ at t . If t is a nonhelical point, $\mathcal{S}_{p,w(t),\Gamma(t)}$ degenerates to a horn or a circular arc, while $\mathcal{S}_{p,w(t),\Gamma(t)}$ is properly spiralic in case t is helical.

Once the result of the previous paragraph is available, one can establish a Fredholm symbol

$$\text{Sym} : \text{alg}_{p,w}(S, PC(\Gamma)) \rightarrow C^{2 \times 2}(\mathfrak{M}_{p,w,\Gamma})$$

by the methods outlined above. The space $\mathfrak{M}_{p,w,\Gamma}$ is now a barrel with handles that look like spiralic horns (see Figure 5).

It is clear that the story has an open end: we do not yet know what happens for general Carleson curves, i.e. for Carleson curves with non-logarithmic whirl points. It should be emphasized that research into the case of general Carleson curves is not motivated by the sole endeavour to completeness, but rather by the circumstance that two important questions have not yet been answered. First, it turns out that the spiralic horns $\mathcal{S}_{p,w(t),\Gamma(t)}$ mimic the shape of the curve near t (see Figure 6), but we cannot yet give a satisfactory explanation of this phenomenon.

Secondly, even if the curve Γ is slightly perturbed, so that the two spirals scrolling up at t are no longer “pure” logarithmic spirals, the boundaries of $\mathcal{S}_{p,w(t),\Gamma(t)}$ remain nevertheless “pure” logarithmic double-spirals. Hence, does for a general Carleson curve the metamorphosis of line segments through circular arcs and horns end up with spiralic horns or will this metamorphosis eventually lead to more complicated sets beyond spiralic horns?

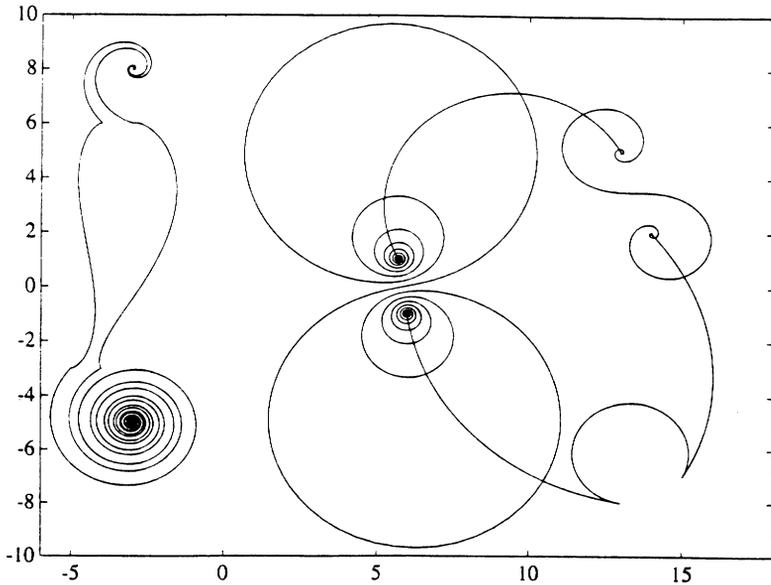


Fig. 6. A Carleson curve (left) and the essential spectrum of a Toeplitz operator on this curve whose symbol has three jumps (right)

I believe that until these two problems have not been solved, we cannot say that we have fully understood the nature of the spectra of Toeplitz operators with piecewise continuous symbols. On the other hand, I am sure that some day these two questions will have found an answer. Will this then be the end of the story? Who knows ...

References

- [1] Böttcher, A.; Karlovich, Yu. I.: Toeplitz and singular integral operators on Carleson curves with logarithmic whirl points. *Integral Equations and Operator Theory* **22** (1995) 127–161
- [2] Böttcher, A.; Silbermann, B.: *Analysis of Toeplitz operators*. Akademie-Verlag, Berlin 1989 and Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1990
- [3] David, G.: Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe. *Ann. Sci. École Norm. Super.* **17** (1984) 157–189
- [4] Finck, T.; Roch, S.; Silbermann, B.: Two projections theorems and symbol calculus for operators with massive local spectra. *Math. Nachr.* **162** (1993) 167–185
- [5] Gohberg, I.: On an application of the theory of normed rings to singular integral equations *Uspehi Matem. Nauk* **7** (1952) 149–156 (Russian)
- [6] Gohberg, I.; Krupnik, N.: On the algebra generated by one-dimensional singular integral operators with piecewise continuous coefficients. *Funct. Anal. Appl.* **4** (1970) 193–201
- [7] Gohberg, I.; Krupnik, N.: Singular integral operators with piecewise continuous coefficients. *Izv. Akad. Nauk SSSR* **35** (1971) 940–964 (Russian)
- [8] Gohberg, I.; Krupnik, N.: *One-dimensional linear singular integral equations*. Vols. I, II. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin 1992
- [9] Gohberg, I.; Krupnik, N.: Extension theorems for Fredholm and invertibility symbols. *Integral Equations and Operator Theory* **16** (1993) 514–529

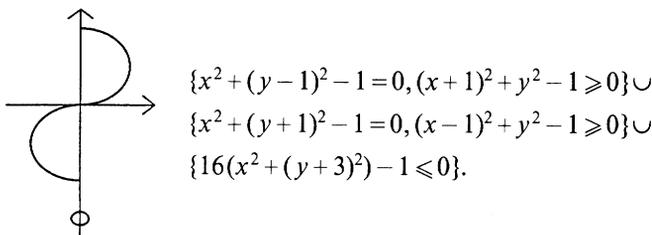
- [10] Hunt, R.; Muckenhoupt, B.; Wheeden, R.: Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform. *Trans. Amer. Math. Soc.* **176** (1973) 227–251
- [11] Maz'ya, V. G.; Prössdorf, S.: Linear and boundary integral equations. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 27 (Analysis IV)*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1991
- [12] Paatashvili, V. A.; Khuskivadze, G. A.: On the boundedness of the Cauchy singular integral on Lebesgue spaces in the case of non-smooth contours. *Trudy Tbilisk. Mat. Inst. AN GSSR* **69** (1982) 93–107 (Russian)
- [13] Spitkovsky, I. M.: Singular integral operators with PC symbols on the spaces with general weights. *J. Funct. Anal.* **105** (1992) 129–143
- [14] Toeplitz, O.: Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen. *Math. Annalen* **70** (1911) 351–376
- [15] Widom, H.: Singular integral equations in L^p . *Trans. Amer. Math. Soc.* **97** (1960) 131–160

Albrecht Böttcher
 Fakultät für Mathematik
 TU Chemnitz-Zwickau
 09107 Chemnitz
 Germany
 e-mail: aboettch@mathematik.tu-chemnitz.de

(Eingegangen 2. 1. 1995)

Semialgebraische Geometrie

Was ist das, wozu macht man das und was weiß man darüber



Ein kleiner Rundgang durch semialgebraisches Gelände mit

L. Bröcker, Münster.

Semialgebraische Mengen sind Mengen $S \subset \mathbb{R}^n$, die durch Polynome $p \in \mathbb{R}[X]$, $X = (X_1, \dots, X_n)$ definiert werden. Genügt S einem System von Polynomgleichungen, so besteht S aus den reellen Punkten einer algebraischen Varietät V über \mathbb{R} , also $S = V(\mathbb{R})$.

Man betrachtet dann natürlich auch $V(\mathbb{C})$ und die Vervollständigung \bar{V} von V im projektiven Raum \mathbb{P}^n und schließlich den Raum $\bar{V}(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, der erst in voller Schönheit zeigt, was in den gegebenen Polynomgleichungen steckt.

Anders wird es, wenn S einer Polynomrelation genügt. Wir betrachten zum Beispiel die Bedingung an die Koeffizienten, die besagt, daß ein Polynom zweiten Grades eine reelle Lösung besitzt.

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists y \in \mathbb{R} : y^2 + 2x_1y + x_2 = 0\}.$$

Wie wir wissen, kann man S auch einfacher beschreiben:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 \geq x_2\}.$$

Wir werden uns erlauben, solche Mengen etwas großzügig in der Form $S = \{x_1^2 \geq x_2\}$ zu notieren. Was heißt nun, daß die Beschreibung einfacher geworden ist? Der entscheidende Punkt ist, daß in der neuen Beschreibung kein Quantor mehr vorkommt: Der Existenzquantor wurde eliminiert. Einen kleinen Preis mußten wir dafür allerdings zahlen. Die quantoren-freie Beschreibung benutzt die Relation „ \geq “, die vorher nicht da war.

Wie kann man nun Mengen, die durch eine beliebige Polynomrelation gegeben sind (in der auch „ \geq “ vorkommt), möglichst einfach beschreiben?

Diese Frage führt sofort auf die zentralen Grundlagen der reellen algebraischen Geometrie, die, obwohl sie ganz am Anfang stehen, immer noch den Nimbus des Geheimnisvollen verbreiten. Das Zauberwort heißt *Tarski-Prinzip*.

Bevor wir hierauf eingehen, wollen wir den Gegenstand dieses Vortrages festlegen:

Definition. Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt semi-algebraisch, wenn S von folgender Bauart ist:

$$S = \{f_{11}?, \dots, f_{1s_1}?\} \cup \dots \cup \{f_{t1}?, \dots, f_{ts_t}?\}.$$

Dafür steht ? für $=0$, ≥ 0 oder > 0 , es ist $f_{ij} \in \mathbb{R}[X]$ und $\{f_1?, \dots, f_s?\}$ ist dasselbe wie $\{f_1?\} \cap \dots \cap \{f_s?\}$.

Wir machen uns auch leicht klar, daß man S als endliche Vereinigung von Mengen der Form

$$\{h=0, g_1 > 0, \dots, g_s > 0\}.$$

schreiben kann. Ein System Φ von Gleichungen und Ungleichungen, die S beschreiben, heißt eine quantorenfreie Formel für S . Φ ist bei weitem nicht eindeutig.

Die Menge S ist also ein Element aus dem Booleschen Teilmengenverband, der von den Mengen $\{f > 0\} \subset \mathbb{R}^n$ erzeugt wird. Ein Beispiel sehen wir auf der Titelseite. Dort stehen auch einige Fragen, von denen wird die erste einfach so beantworten wollen:

Semialgebraische Geometrie ist die Geometrie semialgebraischer Mengen.

Mit der zweiten Frage wollen wir uns nicht ernsthaft befassen. Nur soviel: Semialgebraische Mengen bilden eine enorme Vielfalt natürlicher Figuren. So ist die Menge $S \subset \mathbb{R}^2$ zum obigen Beispiel gerade das erforderliche Fragezeichen.

Von der dritten Frage handelt der Vortrag, aber der kann natürlich nicht erschöpfend sein, weder in der Tiefe noch in der Breite. Wir wollen daher, wie angekündigt, wie bei einem Rundgang vorgehen, von einer Stelle zur nächsten ziehen, und an jeder Stelle ein bißchen erklären. Experten dürften dabei kaum etwas Neues erfahren. Vieles von dem, was zur Sprache kommt, wird sogar in Standardwerken behandelt [B-C-R], [Be-Ri], [Kn-Schei].

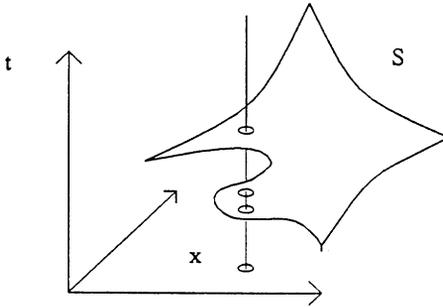
Für technische Unterstützung und zahlreiche Verbesserungsvorschläge danke ich Frank Mausz.

1 Quantorenelimination

Hinter dem Tarski-Prinzip verbergen sich eigentlich mehrere Prinzipien aus der Modelltheorie, die untereinander verwandt sind: *Quantorenelimination*, *Modell-Vollständigkeit* und *elementäre Äquivalenz*. Im engeren Sinne meint man das letzte. Grundlage von allem ist der

Satz von Tarski-Seidenberg. Sei $S \subset \mathbb{R}^m$ semialgebraisch und $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ polynomial. Dann ist auch $f(S)$ semialgebraisch.

Beweisidee: Wie üblich ziehen wir uns auf den Fall zurück, daß $f: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die kanonische Projektion ist. Sei zunächst $S = \{h(X, t) = 0\}$ eine Hyperfläche



Aus der Vorlesung zur praktischen Mathematik erinnern wir uns jetzt an Sturmsche Ketten (Sturm 1835 [St]). Sie geben Gleichungs- und Ungleichungsbedingungen in den Koeffizienten $a_i(x)$ von $h(x, t)$ dafür an, daß $h(x, t)$ eine reelle Lösung hat. Ähnliche Entscheidungsverfahren gibt es für den Fall, daß S durch ein System

$$\{h(X, t) = 0, g_1(X, t) > 0, \dots, g_s(X, t) > 0\}.$$

gegeben ist (Habicht [Hab] 1940, Tarski [Tar] 1951, Seidenberg [Sei] 1954, Hörmander [Hör] 1958).

Ein sehr elegantes Argument ist auch dieses: Wir betrachten die Algebra $A = \mathbb{R}[X, t]/(h)$ über $\mathbb{R}[X]$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, an dem die quadratische Form $tr(\varphi)$ über $\mathbb{R}[X]$ nicht ausgeartet ist. Dabei ist φ die Pfisterform $\langle 1, g_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, g_s \rangle$ über A und tr der Transfer über die Spur von A über $\mathbb{R}[X]$ ([Schar]). Dann hat die Signatur von $tr(\varphi)$ an der Stelle x den Wert $k2^s$ wobei $k = \# \{f^{-1}(x) \cap S\}$. Dieses Argument geht auf Sylvester 1853 [Syl] zurück. Solche Verfahren werden natürlich noch durch Verschwinden von Koeffizienten oder Diskriminanten gestört, eine kleine technische Schwierigkeit, die man zum Beispiel durch Abstieg über die Dimension beheben kann. \square

Fassen wir zusammen: Die Menge

$$f(S) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in \mathbb{R} : (x, t) \in S\}$$

ist semialgebraisch. Wir konnten also den Existenzquantor aus der Beschreibung von S eliminieren. Per Negation wird man auch Allquantoren los. Wir sehen:

Jede durch eine Polynomrelation definierte Menge ist schon semialgebraisch.

Dieses Prinzip nennen wir Quantorenelimination. Wir werden es in Abschnitt 4 etwas präzisieren.

Beispiel. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ semialgebraisch. Dann ist auch das Innere $\text{Int}(S)$ semialgebraisch, denn $\text{Int}(S)$ wird durch eine Polynomrelation definiert:

$$\text{Int}(S) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \varepsilon > 0 \forall y \in \mathbb{R}^n : (\|x - y\| < \varepsilon) \Rightarrow y \in S\}.$$

Beachte, daß man eine Beschreibung für $\text{Int}(S)$ im allgemeinen nicht einfach dadurch gewinnen kann, daß man in einer Beschreibung für S alle Ungleichungen durch strikte Ungleichungen ersetzt.

2 Modellvollständigkeit

Wir müssen die Grundlagen etwas erweitern. Hierzu dient ein Begriff, der auf Artin und Schreier [A-S1] [A-S2] [A] zurückgeht. Diese Forscher stießen schon in den Jahren 1926–1927 auf den Kern der in den Abschnitten 1–4 behandelten Theorie. (Für eine umfassende Darstellung siehe [Pr 1].)

Definition. Ein angeordneter Körper R heißt *reell abgeschlossen*, wenn für jedes $a \in R$ mit $a \geq 0$ auch $\sqrt{a} \in R$, und wenn jedes $f \in R[t]$ von ungeradem Grad eine Wurzel in R besitzt.

Ist R reell abgeschlossen, so ist $R(\sqrt{-1})$ algebraisch abgeschlossen. Diese Eigenschaft ist sogar charakteristisch für reell abgeschlossene Körper.

Beispiel. Der Körper \mathbb{R} ist reell abgeschlossen. Jeder angeordnete Körper (k, \geq) besitzt einen über k algebraischen reell abgeschlossenen Erweiterungskörper R , dessen einzige Anordnung die auf k gegebene Anordnung fortsetzt. Zwischen je zwei solchen Körpern gibt es genau einen k -Isomorphismus. R heißt reeller Abschluß von (k, \geq) . Der reelle Abschluß \mathbb{Q}_r von \mathbb{Q} ist der Körper der reell algebraischen Zahlen.

Man kann reelle algebraische oder semialgebraische Geometrie über beliebigen reell abgeschlossenen Körpern betreiben (siehe [De-Kn 1], [De-Kn 2]). Dies geschieht nicht nur um der Verallgemeinerung willen. Selbst wenn man an Resultaten über \mathbb{R} interessiert ist, kommen beliebige reell abgeschlossene Körper, deren Anordnung im allgemeinen sogar nicht-archimedisch ist, ins Spiel. Wir werden dies im nächsten Abschnitt sehen.

Der Einfachheit halber bleiben wir aber dabei, daß die Objekte, die wir letztlich studieren wollen, über \mathbb{R} definiert sind.

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ semialgebraisch, und sei R ein reell abgeschlossener Erweiterungskörper von \mathbb{R} . Dann bezeichnen wir mit $S(R)$ die Punkte von S in R . Dies bedarf einer Erläuterung: Sei zum Beispiel $S = \{f > 0\}$, $f \in \mathbb{R}[X]$. Dann setzen wir in naheliegender Weise

$$S(R) = \{\alpha : \mathbb{R}[X] \rightarrow R \mid \alpha(f) > 0\}.$$

Dabei ist α ein nicht trivialer \mathbb{R} -Homomorphismus. Zunächst ist allerdings noch nicht klar, daß $S(R)$ nur von S und nicht von der speziellen Wahl von f abhängt. Im allgemeinen ist S durch eine (quantorenfreie) Formel Φ gegeben, und wir betrachten die Homomorphismen $\alpha : \mathbb{R}[X] \rightarrow R$ die allen Gleichungen und Ungleichungen der Formel Φ genügen. Für diese Menge schreiben wir

$$\{\alpha : \mathbb{R}[X] \rightarrow R \mid R \models \alpha \Phi\}.$$

Falls diese Menge nicht leer ist, schreiben wir $R \models \Phi$. Beachte nun, daß

$$S = S(\mathbb{R}) = \{\alpha : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \models \alpha \Phi\}.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt der

Satz von der Modellvollständigkeit: *Aus $R \models \Phi$ folgt $\mathbb{R} \models \Phi$.*

Wir können jetzt setzen $S(R) := \{\alpha : \mathbb{R}[X] \rightarrow R \mid R \models \alpha \Phi\}$, denn der Satz zeigt insbesondere, daß dies nicht von der speziellen Formel Φ für S abhängt. Man hat also

$$S(R) = \emptyset \Leftrightarrow S = \emptyset.$$

Beweisidee. Mittels Projektion machen wir Induktion nach der Einbettungsdimension n , wobei der Satz für $n = 0$ offenbar richtig ist. Starten wir nun mit einer Formel Φ_n zur Einbettungsdimension n , so liefern die Eliminationsverfahren des vorigen Abschnitts eine quantorenfreie Formel Φ_{n-1} für die projizierte Menge. Aber diese Eliminationsverfahren sind unabhängig davon, ob man in \mathbb{R} oder R arbeitet. \square

3 Hilberts 17. Problem

Das 17. Hilbertsche Problem (Hilbert [H 2] 1900) wurde in den schon erwähnten Arbeiten von Artin und Schreier gelöst (siehe auch Lang [L] 1953). Wir formulieren gleich einen allgemeineren Satz von Stengle [Ste] 1974. Hierzu fixieren wir folgende Daten. Es sei wieder $X = (X_1, \dots, X_n)$, ferner $I \subset \mathbb{R}[X]$ ein Ideal und es seien $f, g_1, \dots, g_k \in \mathbb{R}[X]$. Wir bezeichnen mit T den Halbring, der von allen $a^2, a \in \mathbb{R}[X]$ und g_1, \dots, g_k erzeugt wird, und mit $Z(I)$ das Gebilde der reellen Punkte der Varietät von I .

Positivstellensatz. *Wenn*

$$\{f \geq 0\} \supset (Z(I) \cap \{g_1 \geq 0, \dots, g_k \geq 0\})$$

so existieren $m \in \mathbb{N}$ und $t_1, t_2 \in T$ mit

$$f^{2m+1} + t_1 f - t_2 \in I.$$

Folgerung. (Hilberts 17. Problem). *Sei $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist f eine Summe von Quadraten von rationalen Funktionen.*

Beweis (der Folgerung). Betrachte im Positivstellensatz den Fall, daß keine g_i vorhanden sind und daß I das 0-Ideal ist. Wir erhalten

$$f^{2m+1} + t_1 f = t_2$$

und t_1, t_2 sind Summen von Quadraten von Polynomen, also $f = \frac{t_2}{t_1 + f^{2m}}$.

Bemerkung. Auf Anregung von Minkowski untersuchte Hilbert zunächst die Frage, inwieweit sich positiv semidefinite Polynome als Summe von Quadraten von Polynomen schreiben lassen. Per Homogenisierung ist es naheliegend, Formen zu betrachten. Sei $P_{n,m}$ der Kegel der positiv semidefiniten Formen vom Grad m in

n Variablen über \mathbb{R} . Falls m ungerade ist, ist $P_{n,m} = \emptyset$. Sei also m gerade und sei $\Sigma_{n,m} \subset P_{n,m}$ der Kegel der Summen von Quadraten (aus Formen von Grad $m/2$). Es gilt

Satz (Hilbert [H 1] 1888). *Es ist $\Sigma_{n,m} = P_{n,m}$ genau für $n=2, m=2, (n,m)=(3,4)$*

Dabei sind die Fälle $n=2$ und $m=2$ evident und den Fall $(n,m)=(3,4)$ behandelte Hilbert bereits mit Konvexitätsüberlegungen, die in jüngerer Zeit verfeinert wurden ([Ch-La], [Ch-Da-La-Re]). Um zu zeigen, daß keine weiteren Fälle auftreten, genügt es, Formen aus $P_{3,6} \setminus \Sigma_{3,6}$ bzw. $P_{4,4} \setminus \Sigma_{4,4}$ zu finden. Hilbert hat die Existenz solcher Formen durch raffinierte geometrische Überlegungen erschlossen. Die explizite Angabe solcher Polynome gelang erst Motzkin [Mo] 1967 im Fall (4,4), nämlich $W^4 + X^2 Y^2 + Y^2 Z^2 + Z^2 X^2 - 4XYZW$ und R. M. Robinson [Ro] 1969 im Fall (3,6) nämlich $Z^6 + X^4 Y^2 + X^2 Y^4 - 3X^2 Y^2 Z^2$.

Nach diesem Ergebnis stellte Hilbert als 17. Problem die Frage, ob ein positiv semidefinites Polynom f wenigstens eine Summe von Quadraten von rationalen Funktionen ist. Im Falle von zwei Variablen konnte er zeigen, daß f sogar eine Summe von 4 Quadraten rationaler Funktionen ist. Den allgemeinen Fall löste Artin [A] 1927, allerdings ohne eine Abschätzung über die Anzahl der benötigten Quadrate. Diese gelang erst Pfister [Pf] 1967:

Satz. *Ist $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \geq 0$ so ist f eine Summe von höchstens 2^n Quadraten von Elementen aus $\mathbb{R}(X_1, \dots, X_n)$.*

Artin bemerkte auch, daß sein Ergebnis entsprechend für $f \in \mathbb{R}[V]$ gilt, wenn V eine irreduzible reelle algebraische Varietät der Dimension n ist. Das folgt ebenfalls aus dem Positivstellensatz. Die Abschätzung von Pfister gilt dort entsprechend. Nach Mahé [Ma] 1985 lassen sich ferner die im Positivstellensatz auftretenden Summen von Quadraten in ihrer Anzahl beschränken. (für Varianten und historische Bemerkungen zum 17. Hilbertschen Problem siehe [B-C-R, Chap. 6.7].)

Beweisidee für den Positivstellensatz. Der Beweis hat zwei Bestandteile. Der erste ist die Anwendung der Modellvollständigkeit, und wir sehen uns zunächst an, wie diese ins Spiel kommt: Die Aussage

$$\{f \geq 0\} \supset (Z(I) \cap \{g_1 \geq 0, \dots, g_k \geq 0\})$$

gilt über \mathbb{R} genau dann, wenn sie über jedem reell abgeschlossenen Erweiterungskörper $R \supset \mathbb{R}$ gilt. Sei $A := \mathbb{R}[X]/I$. Wir haben also: Für alle Homomorphismen $\alpha : A \rightarrow R_\alpha, R_\alpha$ reell abgeschlossen, gilt:

$$(g_1(\alpha) \geq 0, \dots, g_k(\alpha) \geq 0) \Rightarrow f(\alpha) \geq 0.$$

Der zweite Bestandteil des Beweises gewinnt hieraus die Aussage des Satzes. Das geschieht mit elementarer kommutativer Algebra: Einfache Manipulationen in den Grundrechenarten kombiniert mit dem Zornschen Lemma. Dies wird vielleicht noch deutlicher im nächsten Abschnitt, wenn wir die Analogie zum Hilbertschen Nullstellensatz diskutieren.

4 Elementäre Äquivalenz

Dieser Abschnitt gehört nicht unmittelbar zum Thema, aber einige Bemerkungen seien gestattet, um das Vorangehende in einem größeren Zusammenhang zu sehen. Dazu führen wir einige Begriffe der Modelltheorie ein, ohne ernsthaft in deren Formalismus einzusteigen. (Für genauere Information siehe [Pr 2].)

Eine *Formel* $\Phi(X)$ (genauer gesagt, eine Formel erster Stufe in der Sprache der angeordneten Körper) ist ein Ausdruck, der aufgebaut ist aus einer endlichen Anzahl von Konjunktionen, Disjunktionen, Verneinungen, Existenz- und Allquantoren in den Variablen, ausgehend von atomaren Formeln, und diese sind von der Form

$$f(X) > 0, \quad X = (X_1, \dots, X_n).$$

Dabei ist f ein Polynom mit Koeffizienten, sagen wir, aus einem reell abgeschlossenen Körper R oder einem Teilring $A \subset R$, etwa $A = \mathbb{Z}$. Man sagt dann, Φ hat Parameter in A . Die Formel $\Phi(X)$ heißt *Satz*, wenn alle Variablen X_i durch einen Existenz- oder Allquantor gebunden sind. Ist $R \supset A$ und ist Φ ein Satz mit Parametern in A , so schreiben wir, etwas allgemeiner wie vorher

$$R \models \Phi,$$

wenn der Satz Φ in R wahr ist. Gehen wir die Abschnitte 1 und 2 noch einmal durch, so sehen wir, daß wir die Modellvollständigkeit und die Quantorenelimination etwas allgemeiner aussprechen können.

Prinzip der Modellvollständigkeit. *Seien $R' \supset R$ reell abgeschlossene Körper und sei Φ ein Satz mit Parametern in R . Dann gilt*

$$R \models \Phi \quad \text{gdw.} \quad R' \models \Phi.$$

Prinzip der Quantorenelimination. *Sei R reell abgeschlossen und $\Phi(X)$ eine Formel mit Parametern in R und freien Variablen $X = (X_1, \dots, X_n)$. Dann gibt es eine quantorenfreie Formel $\Psi(X)$ mit Parametern in R und denselben freien Variablen, so daß für jeden reell abgeschlossenen Körper $R' \supset R$ gilt:*

$$\forall X: \quad \Phi(X) \Leftrightarrow \Psi(X).$$

Aus der Modellvollständigkeit folgt sofort das

Prinzip der elementären Äquivalenz. (Tarski-Prinzip) *Sei Φ ein Satz mit Parametern in \mathbb{Z} . Ist dann Φ in einem reell abgeschlossenen Körper wahr, so in jedem.*

Beweis. Seien R_1, R_2 reell abgeschlossene Körper. Beide erhalten den reellen Abschluß \mathbb{Q}_r und \mathbb{Q} . Wir haben also $R_1 \models \Phi$ gdw. $\mathbb{Q}_r \models \Phi$ gdw. $R_2 \models \Phi$. \square

Wir sehen also: Die elementare Theorie von \mathbb{R} oder einem beliebigen reell abgeschlossenen Körper ist dieselbe. Ein analoges Prinzip besteht für algebraisch abgeschlossene Körper der Charakteristik 0. Man nennt es Lefschetz-Prinzip. Hier kennt die Sprache allerdings keine \geq -Relation. Die atomaren Formeln sind die Formeln $f(X) \neq 0$. Erinnern wir uns: Grundlage der reellen Theorie war der Satz

von Tarski-Seidenberg. In der Theorie von \mathbb{C} tritt an seine Stelle der Satz von Chevalley, der besagt, daß das Bild einer affinen konstruierbaren Menge unter einer polynomialen Abbildung wieder konstruierbar ist. Quantorenelimination und Modellvollständigkeit gelten analog. Der Positivstellensatz ist eine reelle Variante des Hilbertschen Nullstellensatzes, den man ja mit Hilfe der Modellvollständigkeit so beweisen kann: Sei C algebraisch abgeschlossen von Charakteristik $0, f, g_1, \dots, g_m \in C[X]$. Dann gilt

$$C \models \{f=0\} \supset \{g_1=0, \dots, g_m=0\}$$

gdw. für alle $\alpha : C[X] \rightarrow C_\alpha, C_\alpha$ algebraisch abgeschlossen von Charakteristik 0 gilt

$$C_\alpha \models \{\alpha(f)=0\} \supset \{\alpha(g_1)=0, \dots, \alpha(g_m)=0\}$$

woraus wieder mit elementarer kommutativer Algebra folgt, daß $f \in \sqrt{(g_1, \dots, g_m)}$.

Hier ist eine berühmte Anwendung des Tarski-Prinzips: Sei R ein reell abgeschlossener Körper und D eine (nicht notwendig assoziative) Divisionsalgebra über R . Dann ist $\dim(D) = 1, 2, 4$ oder 8 .

Für $R = \mathbb{R}$ folgt dieser Satz aus einem tiefliegenden topologischen Satz von Adams [Ad] 1960. Die Übertragung von \mathbb{R} nach R geschieht mit dem Tarski-Prinzip. Es hat Versuche gegeben, den obigen Satz direkt und ohne Verwendung topologischer Argumente zu beweisen, aber nachdem wir das Tarski-Prinzip etwas kennengelernt haben, sollte klar sein, daß der oben angedeutete, mit überlegenen mathematischen Methoden geführte Beweis nichts zu wünschen übrigläßt.

5 Diagramme

Nachdem wir nun die Grundlagen bereitgestellt haben, können wir uns der eigentlichen Geometrie zuwenden. Sei also $S \subset \mathbb{R}^n$ semialgebraisch, etwa

$$S = \{f_{11}?, \dots, f_{1s_1}?\} \cup \dots \cup \{f_{t1}?, \dots, f_{ts_t}?\},$$

$$f_{ij} \in \mathbb{R}[X], \quad X = (X_1, \dots, X_n), \quad ? \in \{=0, >0, \geq 0\}.$$

Sei d_{ij} = Grad von f_{ij} . Wir setzen nun mit den entsprechenden ???

$$\Delta_n = \{d_{11}?, \dots, d_{1s_1}?\} \cup \dots \cup \{d_{t1}?, \dots, d_{ts_t}?\}$$

Δ_n heißt Diagramm zu S . Es ist der Menge S natürlich nicht eindeutig zugeordnet. Wir können weite Teile der semi-algebraischen Geometrie unter folgenden Fragen zusammenfassen.

1. Gegeben sei ein Diagramm Δ_n . Welche geometrischen Merkmale haben alle semialgebraischen Mengen S mit Diagramm Δ_n ?
2. Gegeben sei eine semialgebraische Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ (eventuell mit Zusatzeigenschaften). Wie ist ein möglichst einfaches Diagramm Δ_n zu S beschaffen?

Wir werden uns überwiegend mit Fragen vom Typ 1. befassen. Nur in den letzten beiden Abschnitten kommen wir auf Typ 2.

Bemerkung. In dem obigen Diagramm Δ_n kann man die Grade d_{ij} auch durch andere Größen beschreiben, die irgendwie die Komplexität der Polynome f_{ij} erfassen. Besonders interessant in diesem Zusammenhang ist die Anzahl d'_{ij} der Summanden von f_{ij} . Dies führt dann analog auf ein Diagramm Δ'_n .

6 Topologische Endlichkeitssätze

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ semialgebraisch. Das erste Resultat stammt von Whitney [Wh 1] 1957.

Satz. Die Menge S hat nur endlich viele Zusammenhangskomponenten.

Wir bezeichnen mit $b_i(S)$ die i 'te Bettizahl von S . Es ist also $b_0(S) < \infty$. Inzwischen weiß man natürlich viel mehr. Hierzu einige Exempel.

Satz. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ algebraisch, definiert durch Gleichungen vom Grad $\leq d$. Dann ist

$$\sum_{i=0}^n b_i(S) \leq d(2d-1)^{n-1}.$$

Diese Abschätzung stammt von Milnor [Mi 2] 1964. Ein ähnliches Ergebnis erzielten [Th 2] 1965 und, in einem Spezialfall, schon Oleinik [Ol] 1951. Auffällig ist, daß in dieser Abschätzung die Anzahl der definierenden Gleichungen gar nicht eingeht. Ist S nicht algebraisch, so kann man eine Abschätzung mit dieser Eigenschaft nicht mehr erreichen, aber man hat immer noch

Satz. Sei S abgeschlossen mit Diagramm Δ_n . Dann ist $\sum_{i=0}^n b_i(S) < \Delta_n$.

Das Zeichen „ $<$ “ bedeutet, daß sich die Zahl auf der linken Seite durch eine Funktion der Daten aus der rechten Seite, also in unserem Fall aus den Graden d_{ij} , die in Δ_n vorkommen, abschätzen läßt. Hier gibt es sogar eine polynomiale Funktion dieser Art. Der Beweis hierfür steht großenteils auch schon in [Mi 2]. Wir skizzieren die wesentlichen Argumente: Sei zunächst $S = \{f=0\}$ eine kompakte Hyperfläche. Wir können (mit bescheidenen Anleihen aus der Differentialtopologie) annehmen, daß $\mu: S \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto x_n$ eine Morse-Funktion ist. Wir zählen nun die Singularitäten von μ . Sie sind gegeben durch die Gleichungen

$$f=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}=0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}=0.$$

Weil μ eine Morse-Funktion ist, sind die Lösungen dieser n -Gleichungen in n Unbestimmten alle nicht-singulär. Nach dem Satz von Bezout gibt es also höchstens $d(d-1)^{n-1}$ Singularitäten von μ , $d = \text{grad}(f)$, und mit elementarer Morsetheorie [Mi 1] bildet diese Zahl eine Schranke für $\sum_{i=0}^n b_i(S)$.

Sei jetzt S eine beliebige Varietät, sagen wir

$$S = \{f_1=0, \dots, f_p=0\}.$$

Wie wir bald sehen werden, ändern sich die Bettizahlen nicht, wenn wir noch mit einer hinreichend großen Kugel schneiden. Wir betrachten also

$$S' = \{f_1^2 + \dots + f_p^2 = 0, \|x\|^2 \leq r\}$$

und hiervon eine kompakte Umgebung

$$T(\varepsilon, \delta) = \{f_1^2 + \dots + f_p^2 + \varepsilon^2 \|x\|^2 \leq \delta^2\}.$$

Dies ist eine n -dimensionale kompakte berandete Mannigfaltigkeit mit Rand

$$T = \partial T(\varepsilon, \delta) = \{f_1^2 + \dots + f_p^2 + \varepsilon^2 \|x\|^2 = \delta^2\}.$$

zu gegebenem ε für alle δ aus einer dichten Teilmenge von \mathbb{R} (Satz von Sard). Berechnen wir nun $b_i(S')$ z. B. mit der Čech Kohomologie (darf man, da S triangulierbar), so sehen wir, daß $b_i(S') \leq b_i(T(\varepsilon, \delta))$ für hinreichend kleines δ und $\varepsilon r \rightarrow \delta$. Andererseits weiß man, daß

$$2 \sum_{i=0}^n b_i(T) = \sum_{i=0}^n b_i(\partial T),$$

womit die Abschätzung auf den Fall der kompakten Hyperfläche zurückgeführt ist. Eine ähnliche Argumentation liefert auch den Beweis für abgeschlossene semialgebraische Mengen.

Wir sehen, daß der Satz von Bezout ein entscheidendes Argument für diese Endlichkeitssätze ist. Was passiert, wenn wir das Diagramm Δ_n durch Δ'_n ersetzen? Betrachten wir zunächst ein Polynom $f(t)$ in einer Variablen aus k Summanden, so besagt ein elementarer Satz von Descartes, daß f höchstens k Nullstellen hat. Auch dies läßt sich zu einer Aussage vom Typ eines reellen Satzes von Bezout verallgemeinern, eine Entdeckung, die erst vor einigen Jahren von Khovansky [Kh] gemacht wurde.

Satz. *Seien $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ und sei k die Anzahl der unter den f_i auftretenden verschiedenen Monome. Dann ist*

$$\#\{f_1 = 0, \dots, f_n = 0\}_{\text{nonsing}} \cap \{X_1 > 0, \dots, X_n > 0\} \leq (n+2)^k \cdot 2^k (k+1)/2.$$

Mit denselben Argumenten wie oben läßt sich nun hieraus ableiten, daß die genannten topologischen Endlichkeitssätze auch für Diagramme Δ'_n gelten, allerdings mit wesentlich höheren Schranken.

7 Trivialisierung

Die Resultate des letzten Abschnitts lassen sich in einer Hinsicht wesentlich verallgemeinern. Es gilt nämlich der

Satz (von den endlich vielen Typen). *Zu einem Diagramm Δ_n existieren semialgebraische Mengen S_1, \dots, S_r , so daß für jede semialgebraische Menge S mit Diagramm Δ_n gilt $S \simeq S_i$ für ein $i \in \{1, \dots, r\}$.*

Gemeint ist semialgebraische Homöomorphie, d. h. der Homöomorphismus hat einen semialgebraischen Graphen.

Auch hier gilt $r < \Delta_n$ aber eine Schranke ist nur noch „theoretisch“ berechenbar und sie ist nicht mehr polynomial. Die Methoden für den Beweis des Satzes sind im Grunde elementarer als im letzten Abschnitt. Man verfeinert die Elimination aus Abschnitt 1 und erhält nach Hardt [Ha] 1980

Satz (von der Trivialisierung). *Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ semialgebraisch und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ polynomial. Dann gibt es eine semialgebraische Zerlegung: $\mathbb{R}^m = T_1 \cup \dots \cup T_r$, so daß $f^{-1}(T_i) \approx T_i \times f^{-1}(x_i)$. Dabei ist x_i beliebig aus T_i .*

Wie erhält man hieraus den vorangehenden Satz? Wir betrachten zu Δ_n eine kanonische semialgebraische Universalmenge $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Dabei stehen die Variablen Y des \mathbb{R}^k für die möglichen endlich vielen Koeffizienten, die in den Polynomen einer semialgebraischen Menge S mit Diagramm Δ_n vorkommen. Sei $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ die kanonische Projektion. Zu einer semialgebraischen Menge S mit Diagramm Δ_n gibt es also ein $a \in \mathbb{R}^k$, so daß $S = U \cap \pi^{-1}(a)$, woraus mit dem Satz von Hardt in der Tat folgt, daß es nur endlich viele Typen für S gibt.

Durch Verfeinerung der Eliminationstheorie erhält man weitere grundlegende Einsichten über die topologische Natur semialgebraischer Mengen (Brakhage [Bra] 1954, Whitney [Wh 2] 1965] Giesecke [Gi] 1964).

Triangulierung. *Zu einer semialgebraischen Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und einen Unterkomplex $P \subset \Sigma^N$ aus Punkten und offenen Zellen, so daß $S \approx P$. Dabei ist Σ^N das Standardsimplex im \mathbb{R}^{N-1} .*

Diesen Satz haben wir in vorigen Abschnitten schon benutzt. Semialgebraische Mengen sind außerdem Whitney-stratifizierbar (Whitney [Wh 2], Łojasiewicz [Ło]), aber unter den Whitney-stratifizierbaren Mengen haben die semialgebraischen Mengen noch zusätzliche differentialtopologische Eigenschaften, und es ist nicht leicht zu sagen, welche davon für semialgebraische Mengen charakteristisch sind (bis auf einen Diffeomorphismus).

Wir kommen nochmal auf den Satz von den endlich vielen Typen. Eine seit langem diskutierte offene Frage wurde kürzlich gelöst: Der Satz gilt auch für Diagramme Δ'_n .

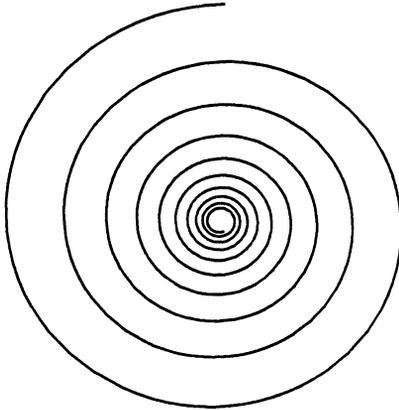
Der Beweis hat wieder zwei Bestandteile: Wir betrachten die elementare Theorie von \mathbb{R} , aber jetzt ergänzt durch ein zusätzliches Funktionssymbol „exp“ für die Exponentialfunktion. Der Begriff der Formel wird sinngemäß erweitert: Zunächst bildet man aus den Konstanten, Variablen und Funktionen $+$, \cdot und exp durch iterierte Anwendung Terme p , aus denen zunächst die elementaren Formeln $p > 0$ und schließlich, wie früher, alle Formeln gewinnt. Hierzu zeigt Wilkie in zwei bedeutenden Arbeiten (noch nicht veröffentlicht)

Satz. *Die Theorie von $(\mathbb{R}, +, \cdot, \exp)$ ist modellvollständig.*

Der zweite Schritt geht aus Überlegungen von van den Dries (noch nicht veröffentlicht) hervor. Er zeigt mit Hilfe des Satzes von Wilkie ein zum Satz von Hardt analoges Resultat für Mengen, die in $(\mathbb{R}, +, \cdot, \exp)$ definierbar sind.

8 Metrische Endlichkeitssätze

Kann eine semialgebraische Menge $S \subset \mathbb{R}^2$ ungefähr so aussehen wie eine unendliche Spirale?



Das widerspricht natürlich jeglicher Intuition. In der Tat, wenn wir so eine Spirale S mit einer Geraden durch den Ursprung schneiden, so entsteht eine diskrete Menge M aus ∞ -vielen Punkten, die wieder semialgebraisch sein müßte, was nach unseren Erkenntnissen unmöglich ist. Dieses Verfahren des Schneidens erlaubt also weitere Rückschlüsse auf die geometrische Beschaffenheit semialgebraischer Mengen. Es eignet sich besonders zur Berechnung von Volumina.

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ semialgebraisch und beschränkt. Für die Definition und Berechnung eines Relativvolumens $\text{vol}(S)$ ist die geometrische Maßtheorie zuständig [Fe] und sie bietet zwei berühmte Verfahren.

Zum einen berechnet man nach Hausdorff zunächst eine Hausdorff-Dimension $d = \dim_H(S)$ und sodann das d -dimensionale Hausdorff-Volumen $\text{vol}_H(S)$. Durch die Fraktalgeometrie haben wir uns schon daran gewöhnt, daß d im Prinzip auch nicht-ganze Werte annehmen kann, aber semialgebraische Mengen sind gutartig. Man hat

$$\dim_H(S) = \dim_Z(S) = \text{Dimension des Zariski-Abschlusses von } S.$$

$$\text{Also } \dim(S) := \dim_H(S) = \dim_Z(S) \in \mathbb{N}.$$

Zum anderen läßt sich nach Cauchy und Crofton ein integralgeometrisches Verfahren anwenden, auf das wir kurz eingehen, da es für semialgebraische Mengen sehr praktisch ist.

Hier benutzen wir schon, daß $d = \dim(S) = \dim_Z(S)$ existiert und bilden

$$\text{vol}_d(S) := c(d, n) \int_{A_{n-d, n}} \#(E \cap S) dE.$$

Dabei durchläuft $E \in A_{n-d, n}$ alle $(n - d)$ -dimensionalen affinen Unterräume des \mathbb{R}^n , dE ist das kanonische Maß von $A_{n-d, n}$ (als $O_n \times \mathbb{R}^n$ -homogener Raum), und $c(d, n)$ ist eine nur von d und n abhängige Konstante [Sa].

Semialgebraische Mengen S sind so vernünftig, daß $\text{vol}_d(S) = \text{vol}_H(S)$ für $d = \dim(S)$. Beachte, daß der obige Integrand $\#(E \cap S)$ fast überall endlich ist und sogar beschränkt durch eine Konstante k , die nur von einem Diagramm Δ_n zu S abhängt (Satz von den endlich vielen Typen). Hieraus erhält man leicht

Satz (vom beschränkten Volumen). *Zu einem Diagramm Δ_n und $d \in \mathbb{N}, 0 \leq d \leq n$, existiert eine Konstante $c(\Delta_n, d)$, so daß für alle semialgebraischen Mengen $S \subset \mathbb{R}^n$ mit Diagramm Δ_n und $\dim(S) = d$ und alle $r > 0$ gilt:*

$$\text{vol}_d(S \cap \{\|x\| \leq r\}) \leq c(\Delta_n, d)r^d.$$

Auf ganz ähnliche Weise gewinnt man nach Yomdin [Y 1] (1984) (siehe auch [Y 2], Gromov [Gr] sowie Coste und Reguiat [C-R]):

Satz (von der kurzen Verbindbarkeit). *Zu jedem Diagramm Δ_n gibt es eine Konstante $g(\Delta_n)$, so daß sich in jeder semialgebraischen Menge S mit Diagramm Δ_n je zwei Punkte aus einer Zusammenhangskomponente von $S \cap \{\|x\| \leq r\}$ durch einen Weg γ von einer Länge $\text{vol}_1(\gamma) \leq g(\Delta_n)r$ verbinden lassen.*

Satz (von der Lipschitz-Triangulierung). *Zu jedem Diagramm Δ_n und $r \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $h(\Delta_n, r)$, so daß jede kompakte semialgebraische Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ mit Diagramm Δ_n eine Triangulierung $\Sigma^N \supset P \xrightarrow{\sim} S$ besitzt, für die gilt:*

- $N \leq h(\Delta_n, r)(1 + \text{Durchmesser}(S))^n$
- f ist analytisch und $\det(D(f)) \neq 0$ im Inneren eines jeden Simplex $\Sigma^k \subset P$
- $\|Df\|_r \leq 1$ im Inneren eines jeden Simplex $\Sigma^k \subset P$.

Das Interessante an diesen Sätzen von Yomdin ist, daß sie wichtigen Resultaten aus der Differentialtopologie zugrunde liegen. Der erste führt auf eine quantitative Version des Satzes von Sard und der zweite auf einen Vergleich zwischen Volumenwachstum und Entropie. Hierauf können wir aber nicht weiter eingehen. Stattdessen sehen wir uns noch ein Resultat an, das sich wiederum aus dem Satz von den endlich vielen Typen und einer einfach integralgeometrischen Überlegung ergibt.

Satz. *Zu jedem Diagramm Δ_n gibt es eine Konstante $k(\Delta_n)$, so daß für jede semialgebraische kompakte C^2 -Mannigfaltigkeit $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ mit Diagramm Δ_n gilt*

$$\int_{M^{n-1}} |z| dx \leq k(\Delta_n).$$

Dabei ist z die Determinante der Gaußbildung $\Gamma: M^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$.

Auch für die innere Geometrie von M hat man eine Abschätzung:

Satz. *Zu jedem Diagramm Δ_n gibt es eine Konstante $k(\Delta_n)$, so daß für jede semialgebraische kompakte C^2 -Mannigfaltigkeit $M^m \subset \mathbb{R}^n$ mit Diagramm Δ_n gilt:*

$$\text{vol}(M^m)^{2-m/m} \int_{M^m} \int_{L_2 \subset TM(x)} |\kappa(x, L_2)| dL_2 dx \leq k(\Delta_n).$$

Dabei ist $\kappa(x, L_2)$ die Schrittkrümmung in x in Richtung L_2 . Nach einer Variante von Cherns kinematischer Formel [Chern] 1966 wird nämlich die rechte Seite nach

oben abgeschätzt (bis auf eine Konstante durch

$$\text{vol}(M^m)^{2-m/m} \int_{L_{n-m+2}} K(L_{n-m+2} \cap M^m) dL_{n-m+2}.$$

Dabei ist K die totale Absolutkrümmung und L_{n-m+2} variiert über alle $n-m+2$ -dimensionalen affinen Unterräume des \mathbb{R}^n mit der kanonischen Dichte [Sa].

9 Algebraische Struktur auf Mannigfaltigkeiten

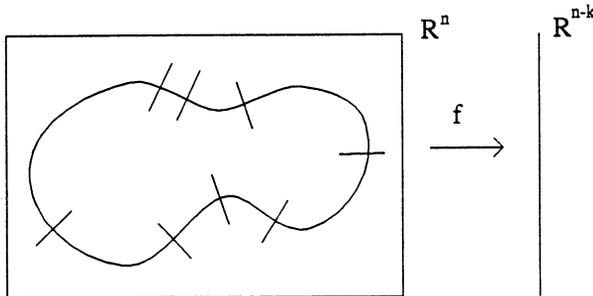
In diesem und im nächsten Abschnitt geht es hauptsächlich um algebraische Mengen. Wir betrachten aber nach wie vor nur das Gebilde der reellen Punkte von algebraischen Varietäten. Sei X eine kompakte orientierbare Fläche vom Geschlecht g . X ist bekanntlich als Riemannsche Fläche realisierbar und trägt die Struktur einer komplexen glatten algebraischen Kurve. Somit besitzt X insbesondere die Struktur einer nichtsingulären reellen algebraischen Varietät der Dimension 2. Nach Ideen von Seifert [Se] 1936, Nash [Na] 1952 und Tognoli [To] 1973 läßt sich dies auf beliebige Dimension verallgemeinern.

Satz. *Zu jeder kompakten zusammenhängenden C^∞ -Mannigfaltigkeit X existiert eine reelle algebraische affine nichtsinguläre Varietät Y und ein C^∞ -Isomorphismus $h: X \rightarrow Y$.*

Beweisidee. Wir können annehmen $X = X^k \subset \mathbb{R}^n$ und betrachten zunächst den Fall, daß X ein triviales Normalbündel N im \mathbb{R}^n besitzt. Es gibt dann eine C^∞ -Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k},$$

so daß $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ ein regulärer Wert bez. f ist und wir haben $X = f^{-1}(0)$.



In einer Umgebung U von X approximieren wir nun f mitsamt einer Ableitung hinreichend gut durch eine polynomiale Abbildung p . In der Nähe von $X = \{f=0\}$ entsteht dann eine Mannigfaltigkeit Y , so daß gilt: $p(y) = 0$ für alle $y \in Y$ und die Projektion $\pi: Y \rightarrow X$ entlang N ist ein C^∞ -Isomorphismus. Die Sache hat leider

noch einen Haken: Wir können nicht ausschließen, daß $\{p=0\}$ noch weitere Zusammenhangskomponenten besitzt.

Dies war der Stand von 1936. Zunächst befreien wir uns gemäß Nash [Na] von der Voraussetzung, daß N trivial ist. Dazu betrachten wir die Graßmannsche $G_{n,n-k}$ und darüber das kanonische Bündel $K \rightarrow G_{n,n-k}$. Wir ersetzen das obige f durch die natürliche Abbildung einer Umgebung U von X nach K . Es ist dann $X=f^{-1}$ (Nullschnitt). Wir können nun f nicht ohne weiteres durch ein Polynom approximieren, da f Werte in K und nicht in einem \mathbb{R}^m hat. Aber, für ein geeignetes m haben wir $K \subset \mathbb{R}^m$ als nichtsinguläre algebraische Untervarietät. Sei nun ν die Projektion einer Tubenumgebung von K auf K (entlang dem Normalenbündel von K im \mathbb{R}^m). Die Abbildung ν ist zwar nicht polynomial aber immer noch semialgebraisch und von der Klasse C^∞ . So eine Abbildung heißt Nash-Abbildung. Jetzt approximieren wir $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch eine polynomiale Abbildung p und gewinnen wieder

$$Y_1 := (\nu \circ p)^{-1}(K_0).$$

Dabei ist K_0 der Nullschnitt von K . Y_1 ist also eine im \mathbb{R}^n eingebettete zu X isomorphe semialgebraische C^∞ -Mannigfaltigkeit. Y_1 ist sogar isotop zu X und kann beliebig nahe an X gelegt werden. Allerdings kann Y_1 von den anderen Komponenten seines Zariski-Abschlusses getroffen werden. Daher betrachten wir nicht Y_1 sondern

$$Y = \{(y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid y \in Y_1, z = \nu \circ p(y)\}.$$

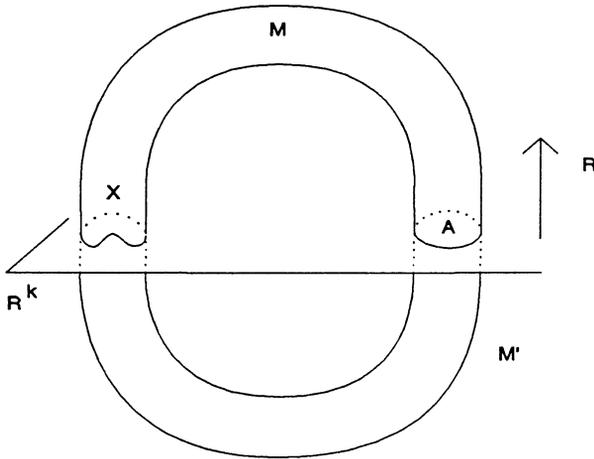
Für diese Menge finden wir nämlich eine polynomiale Beschreibung von maximalem Rang:

$$Y \subset Z = \{(y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid p(y) - z \in T_z K_0, f_i(z) = 0, i = 1, \dots, r\}.$$

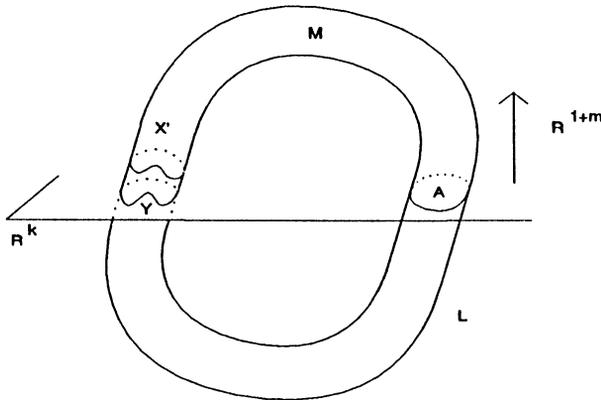
Dabei sind f_1, \dots, f_r Erzeugende des Ideals von K_0 und Y ist eine Zusammenhangskomponente von Z . Insgesamt erhalten wir also einen Diffeomorphismus $h: X \rightarrow Y \subset Z \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Soweit der Beitrag von J. Nash 1952.

Wir skizzieren nun die Idee von Tognoli [To] 1973, mit der man die restlichen Komponenten los wird. Zunächst wird der vorangehende Satz etwas verfeinert. Es sei $U' \subset X$ offen und U' sei auch offene Teilmenge einer nichtsingulären algebraischen Varietät V . Ferner sei $A \subset U'$ eine nicht singuläre algebraische Untervarietät. Dann kann man zusätzlich erreichen, daß $h(a) = (a, 0)$ für $a \in A$ d. h. $h(A)$ ist algebraisch in Y .

Nun aber zu dem entscheidenden Hilfsmittel: Aus der algebraischen Topologie weiß man, daß jede kompakte C^∞ -Mannigfaltigkeit X kobordant zu einer kompakten nicht-singulären algebraischen Mannigfaltigkeit A ist [Th 1]. Der Kobordismus sei gegeben durch die berandete Mannigfaltigkeit M und wir legen uns die ganze Situation so hin, wie die Oberseite der nachstehenden Figur:



Die Unterseite entsteht durch Spiegelung, so daß wir durch Verdoppelung die kompakte unberandete Mannigfaltigkeit \$M'\$ erhalten. Auf \$M'\$ wenden wir jetzt den Satz an und erhalten \$h : M' \to L \subset \mathbb{R}^{k+1-m}\$ wobei \$A\$ fest bleibt unter \$h\$.



(Die Figuren sind ähnlich wie in [B-C-R].)

\$L\$ ist algebraisch, \$A\$ ist algebraische Untervarietät von \$L\$ und \$X' = h(X)\$. Wir haben

$$X' \cup A = \{g=0\} \quad \text{für} \quad g = x_{k-1} \circ h^{-1}.$$

Approximieren wir nun \$g\$ hinreichend gut durch ein Polynom \$h\$, das auf \$A\$ verschwindet, so erhalten wir: \$Y \cup A = \{h=0\}\$ ist algebraisch und somit auch \$Y\$. Andererseits ist \$Y\$ homöomorph zu \$X\$.

Ein so schönes Resultat ruft natürlich weitere Fragen hervor:

Was ist mit nicht kompakten Mannigfaltigkeiten? Was ist mit singulären Räumen?

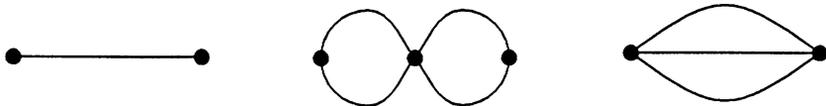
Diese Probleme werden in dem jüngst erschienenen Buch von Akbulut und King [A-K] ausführlich behandelt. Dort findet man z. B.

Theorem. Eine C^∞ -Mannigfaltigkeit X besitzt genau dann die Struktur einer nicht singulären reellen affinen algebraischen Varietät, wenn X isomorph zum Inneren einer berandeten kompakten C^∞ -Mannigfaltigkeit ist.

Damit wäre die erste Frage beantwortet. Der zweiten Frage wenden wir uns im nächsten Abschnitt zu.

10 Topologische Eigenschaften algebraischer Mengen

Sei X ein kompaktes Polyeder. Gibt es eine algebraische Menge $S \subset \mathbb{R}^n$, für ein geeignetes n , so daß $S \approx X$ (S ist homöomorph zu X)? Wir sagen dann X ist algebraisch. Wir betrachten einige Beispiele der Dimension 1. Dann ist X ein kompakter Graph.



Die mittlere Figur sieht aus wie eine Lemniskate, sie ist also algebraisch. Die Graphen links und rechts sehen nicht algebraisch aus. In der Tat gilt:

Satz. Ein kompakter zusammenhängender Graph X ist genau dann algebraisch, wenn er Eulersch ist.

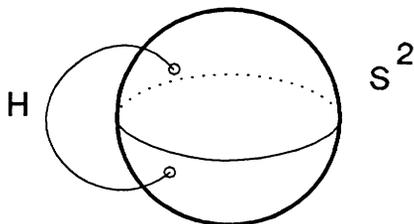
Eine Richtung sieht man sofort ein. Ist nämlich X algebraisch, so ist $\tilde{X} \approx S^1 \cup \dots \cup S^1$ wobei \tilde{X} die Normalisierung von X ist. Die andere Richtung ist auch nicht schwierig.

Dies läßt sich gleich verallgemeinern.

Sei X beliebig, $\dim(X) = d$, und sei X^* der rein d -dimensionale Anteil von X . Dann gilt (Borel-Haefliger 1961 [Bo-Hae])

Satz. X^* ist ein d -Zykel mod 2.

Dies läßt sich nicht umkehren. Wir betrachten z. B. für X eine 2-Sphäre S , an die wir einen 1-dimensionalen Henkel H heften.



Ist X algebraisch, so liegt H im singulären Ort Σ von X . Sei Y die irreduzible Komponente von Σ , die H enthält. Da die Zusammenhangskomponenten von Y Eulersch sind, verläuft Y auch auf S . Jetzt ist $\tilde{Y} = \pi^{-1}(Y)$ ein Divisor in der Normalisierung $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$. \tilde{Y} zerfällt in reelle und komplexe Komponenten, und an die reellen Komponenten grenzen (außer an endlich vielen Ausnahmepunkten) jeweils zwei reelle Blätter.

Damit wäre die Zahl der reellen Blätter, die an Y grenzen (fast überall) konstant modulo 4, was für X nicht zutrifft. X ist also nicht algebraisch.

Wir haben hier einige intuitive Begriffe benutzt. Was heißt „ein Blatt grenzt an?“ Man kann dies sehr schön mit dem Begriff des generischen reellen Punktes präzisieren, auf den wir im Abschnitt 13 kommen. Er ermöglicht auch eine saubere algebraische Argumentation für das, was wir oben angedeutet haben, und für den folgenden allgemeinen Satz von Sullivan [Su] 1971.

Satz. *Ist X algebraisch, so ist die lokale Eulercharakteristik $e(X, X \setminus \{x\})$ gerade für alle $x \in X$.*

Ist $\dim(X) \leq 2$, so ist diese Bedingung auch hinreichend dafür, daß X algebraisch ist. Für höhere Dimensionen werden die Verhältnisse viel komplizierter. Statt der Normalisierung muß man die Topologie der Auflösung von Singularitäten studieren und für die algebraische Realisierung die Methoden des vorigen Abschnitts verfeinern: Ein anspruchsvolles Programm, für das ich wieder auf das Buch von Akbulut und King [A-K] verweise.

11 Algebraische Homologie

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ algebraisch und kompakt. Ist $S \subset X$ eine algebraische Untervarietät, so definiert S nach dem Satz von Borel-Häfliger ein Element in $H_d(X, \mathbb{Z}/2)$. Die Gruppe, die von allen diesen Elementen erzeugt wird, bezeichnen wir mit $H_d^{\text{alg}}(X, \mathbb{Z}/2)$. Sie ist im allgemeinen eine echte Untergruppe von $H_d(X, \mathbb{Z}/2)$. Ist z. B. X irreduzibel, $\dim(X) = m$ und hat X mehrere reelle Zusammenhangskomponenten, so ist $H_m^{\text{alg}}(X, \mathbb{Z}/2) \neq H_m(X, \mathbb{Z}/2)$. Wir machen hieraus ein etwas weniger triviales

Beispiel (nach [Be-De] 1984). Es gibt eine glatte algebraische 2-Mannigfaltigkeit X , die diffeomorph zum Torus T^2 ist, und eine Einbettung $Y \subset X$, $Y \simeq S^1$, so daß die von Y definierte Klasse nicht in $H_1^{\text{alg}}(X, \mathbb{Z}/2)$ liegt.

Hierzu betrachten wir eine irreduzible ebene glatte reelle algebraische kompakte Kurve C aus mehreren Zusammenhangskomponenten, C_1 sei eine von diesen. Auf S^2 betrachte die obere Halbsphäre D mit Rand S und $s \in S$. Sei $W = C \times S^2$ mit Projektion $\pi: W \rightarrow C$. In W können wir den Torus $C_1 \times S$ beliebig durch eine algebraische Varietät X approximieren, weil $C_1 \times S$ die Mannigfaltigkeit $C_1 \times D$ berandet (approximiere eine Funktion auf W , die im Inneren von $C_1 \times D$ positiv und außen negativ ist, durch ein Polynom p und betrachte $\{p=0\}$). Dazu

bekommen wir eine Diffeotopie $f: X \rightarrow C_1 \times S$. Wir setzen $Y := f^{-1}(C_1 \times \{s\})$. Dann ist $\pi: Y \rightarrow C_1$ ein Diffeomorphismus. Wenn nun die Klasse $[Y]$ von Y algebraisch wäre, so könnte man Y durch eine algebraische Untervarietät W von X approximieren. (Approximiere einen Schnitt mit Nullstellenmenge Y in dem durch $[Y]$ definierten Vektorbündel.) Dabei läßt sich erreichen, daß $\pi: W \rightarrow C_1$ ein Diffeomorphismus ist. Dann wäre aber C_1 algebraisch, bis auf isolierte Punkte. Widerspruch. \square

Eine Reihe von Untersuchungen ist dem Problem gewidmet, zu einer vorgegebenen kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit X eine algebraische Realisierung zu finden, so daß $H_*^{\text{alg}}(X, \mathbb{Z}/2)$ eine vorgegebene Untergruppe von $H_*(X, \mathbb{Z}/2)$ ist [Bo-Ku 1], [Bo-Ku 2]. Dabei gibt es Einschränkungen. Zum Beispiel ist die erste Stiefel-Whitney Klasse des Tangentialbündels von X immer algebraisch.

Ist X algebraisch, so hat die Gruppe $H_*^{\text{alg}}(X, \mathbb{Z}/2)$ eine schöne alternative Beschreibung; hierzu betrachtet man die Gruppe der d -Zykeln aus d -dimensionalen \mathbb{R} -Untervarietäten von X und kürzt aus dieser sowohl Differenzen von rational äquivalenten Untervarietäten als auch Untervarietäten von kleinerer reeller Dimension heraus. Was übrig bleibt, heißt reelle Chow-Gruppe von X , geschrieben $Ch_d^{\text{reell}}(X)$. Nach dem Satz von Borel-Haefliger gewinnt man verhältnismäßig leicht einen Homomorphismus.

$$\beta: Ch_d^{\text{reell}}(X) \rightarrow H_d^{\text{alg}}(X, \mathbb{Z}/2).$$

Nach Ischebeck und Schülting [I-S] gilt sogar

Satz. β ist ein Isomorphismus.

12 Topologische Eigenschaften von abgeschlossenen Basismengen

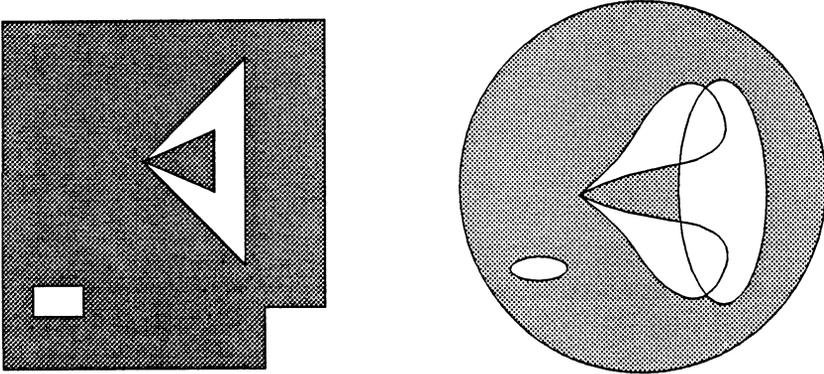
Eine semialgebraische Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ der Form $S = \{f_1 > 0, \dots, f_s > 0\}$ heißt offene Basismenge und eine Menge der Form $S = \{f_1 \geq 0, \dots, f_s \geq 0\}$ heißt abgeschlossene Basismenge. Man kann fragen, ob beschränkte abgeschlossene Basismengen ebenso wie kompakte algebraische Mengen irgendwelchen topologischen Beschränkungen unterliegen. Dies ist nicht der Fall, denn es gilt

Satz. Sei E ein endliches Polyeder mit N Ecken. Dann ist die Standardrealisierung S von E im \mathbb{R}^N eine abgeschlossene Basismenge.

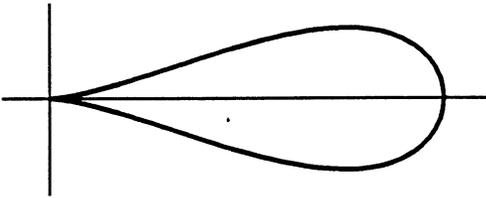
Das ist leicht zu beweisen und vielleicht auch nicht so interessant, weil die Einbettungsdimension von E so groß ist. Wir betrachten daher ein kompaktes Polyeder $E \subset \mathbb{R}^n$ und fragen, ob es ein dazu semialgebraisch isomorphes Polyeder $S \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so daß S eine abgeschlossene Basismenge ist. Dies ist für $n > 2$ nicht bekannt, für $n \leq 2$ ist es jedenfalls richtig.

Satz. Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ ein endliches Polyeder. Dann gibt es eine abgeschlossene Basismenge $S \subset \mathbb{R}^2$, die semialgebraisch isomorph zu E ist.

Die Beweisidee sieht man vielleicht am folgenden Beispiel:



Zunächst wird die abgeschlossene Basismenge S_1 gebildet (etwa konvex; in unserem Bild der Vollkreis der rechten Figur), und aus dieser werden sukzessive Mengen der Form $\{f > 0\}$ entfernt. Besonders nützlich sind dabei die tropfenförmigen affinen Bilder der Menge $T = \{x^3 - y^2 - x^4 > 0\}$.



13 Generische reelle Punkte und Fächer

Sei $R \supset \mathbb{R}$ ein reell abgeschlossener Körper, $S = \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in S(R)$, d. h. α ist ein Homomorphismus

$$\alpha : \mathbb{R}[X] \rightarrow R, \quad X = (X_1, \dots, X_n).$$

Dann bilden die Mengen $\{f \geq 0 \mid f \in \mathbb{R}[X], f(\alpha) \geq 0\}$ eine Filterbasis, die einen Ultrafilter φ_α im Verband der semialgebraischen Mengen im \mathbb{R}^n erzeugt. Sei $p_\alpha := \text{Kern}(\alpha)$ und $k(\alpha)$ der Restklassenkörper bei p_α . Es ist $R \supset k_\alpha$ und R induziert eine Anordnung $>_\alpha$ auf k_α . Es besteht eine kanonische bijektive Beziehung zwischen folgenden Objekten

- a) Ultrafilter φ von semialgebraischen Mengen.
- b) Paare $(p, >)$, bestehend aus einem Primideal p von $\mathbb{R}[X]$ und einer Anordnung $>$ des Restklassenkörpers.

c) Homomorphismen $\alpha: \mathbb{R}[X] \rightarrow R_\alpha$. Dabei ist $R_\alpha \supset \mathbb{R}$ ein reell abgeschlossener Körper, $\alpha(1) = 1$, und genau genommen muß man zwei solche Homomorphismen α und β noch identifizieren, wenn ein Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \xrightarrow{\alpha} & R_\alpha \\ & \searrow \beta & \downarrow \\ & & R_\beta \end{array}$$

vorliegt.

Daß b) und c) dieselben Objekte definieren, ist unmittelbar klar, und für a) und c) folgt dies aus der Modellvollständigkeit der Theorie der reell abgeschlossenen Körper (siehe Abschnitt 2). Wir nennen diese Objekte *generische reelle Punkte* von $\mathbb{R}[X]$. Ihre Gesamtheit bildet das *reelle Spektrum* $\text{Sper}(\mathbb{R}[X])$. Aus b) oder c) ersieht man, daß $\text{Sper}(A)$ für einen beliebigen kommutativen Ring A mit Einselement analog definiert werden kann. Für $\alpha \in \text{Sper}(A)$ heißt das gemäß b) zugehörige Primideal der *Träger* von α und es wird mit $\text{supp}(\alpha)$ bezeichnet.

Das reelle Spektrum spielt für die semialgebraische Geometrie eine ähnliche Rolle wie das Zariski-Spektrum für die gewöhnliche algebraische Geometrie. Sei nun $S \subset \mathbb{R}^n$ semialgebraisch. Dann korrespondiert S zu einer Menge $\tilde{S} \subset \text{Sper}(A)$. Gemäß a) setzen wir nämlich $\tilde{S} = \{\varphi \mid S \in \varphi\}$, oder gemäß c): $\tilde{S} = \bigcup_\alpha S(R_\alpha)$. Dabei läuft α über alle Elemente von $\text{Sper}(\mathbb{R}[X])$ (siehe Abschnitt 2).

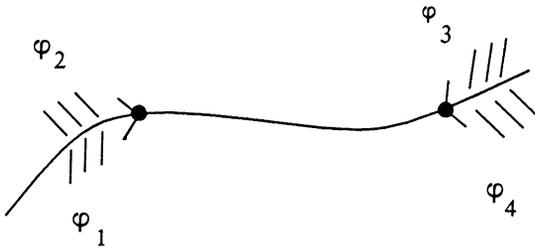
Im folgenden sei $A = \mathbb{R}[X]$, aber alles, was wir noch entwickeln, läßt sich auf viel allgemeinere Ringe übertragen. Wir wollen uns mit der Kennzeichnung spezieller semialgebraischer Mengen und der Beschreibung semialgebraischer Mengen durch wenige Polynome befassen. Der entscheidende Begriff, der dieser Theorie zugrunde liegt, sei hier definiert.

Definition. Eine vierelementige Teilmenge $F \subset \text{Sper}(A)$ heißt *Fächer* (genauer *Viererfächer*), wenn $\#(F \cap \{f > 0\}^-) \equiv 0 \pmod{2}$ ist für alle $f \in A$.

Es ergibt sich dann von selbst, daß alle Elemente aus F denselben Träger haben. Ein Fächer lebt also im reellen Spektrum eines Körpers, des Restklassenkörpers zu diesem Primideal. Die Resultate in den letzten beiden Abschnitten beruhen wesentlich darauf, daß sich Fächer algebraisch mit Hilfe von Bewertungen beschreiben lassen [Brö 1]. Man kann sich Beispiele von Fächern aber auch geometrisch vorstellen. Hierzu sei etwa $n=2$. Wir arbeiten also im \mathbb{R}^2 und betrachten dort eine algebraische Kurve γ und auf dieser zwei Punkte und ausgehend von diesen Punkten zwei Äste



Der Fächer F bestehe nun aus den vier Ultrafiltern, die wir symbolisch so kennzeichnen:



Zum Beispiel besteht φ_1 aus allen semialgebraischen Mengen S , die einen kleinen Bereich auf der entsprechenden Seite von γ enthalten.



In diesem Fall ist der Träger zu F das 0-Ideal. Die φ_i definieren also Anordnungen $>_i$ des Körpers $\mathbb{R}(X_1, X_2)$. Für $f \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ hat man $f >_i 0$ wenn f auf dem entsprechenden Ast positiv ist, oder wenn f auf γ verschwindet aber zur schraffierten Seite hin positiv wird.

Im allgemeinen sind Fächer nicht so gut zu sehen. Zum Beispiel kann die Kurve „ γ “ zusammengeblasen sein, und es gibt auch Fächer, die sich auch durch Aufblasung nicht in die obige Form entfalten lassen.

14 Kennzeichnung spezieller semialgebraischer Mengen

Unter den semialgebraischen Mengen $S \subset \mathbb{R}^n$ sind gewisse dadurch ausgezeichnet, daß sie ein Diagramm spezieller, eventuell einfacher Bauart zulassen, und man fragt sich, ob man diese einfache Bauart den Mengen ansehen kann. Eine erste Beobachtung in dieser Richtung ist der

Endlichkeitssatz *Ist S offen (abgeschlossen), so läßt S eine Beschreibung zu, die nur strikte (bzw. nicht strikte) Ungleichungen enthält.*

Es gibt viele einfache Beweise hierfür [B-C-R, Th. 2.7.1]. Zunächst wurde der Satz aber nicht als trivial empfunden (siehe [Bru S. 164]).

Auf die Theorie, die dem folgenden Satz zugrunde liegt, insbesondere Teil b) und c) können wir hier nicht eingehen. Ich verweise auf [Brö 3], [Mar] und die ausführliche Darstellung in [A-B-R 2].

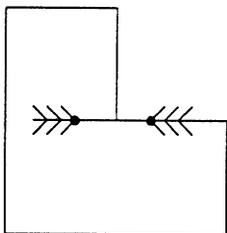
Satz. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen semialgebraisch.

- a) S ist algebraisch genau dann, wenn $\#(\tilde{S} \cap F) \equiv 0(4)$ für alle Fächer F . Hier meinen wir Fächer $F \subset \text{Sper}(\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n])$.
- b) S ist abgeschlossene Prinzipalmenge, d. h. $S = \{f \geq 0\}$ für ein Polynom f genau dann, wenn $\#(\tilde{S} \cap F) \equiv 0(2)$ für alle Fächer F .
- c) S ist abgeschlossene Basismenge, d. h. $S = \{f_1 \geq 0, \dots, f_k \geq 0\}$ für geeignete Polynome f_1, \dots, f_n genau dann, wenn $\#(\tilde{S} \cap F) \neq 3$ für alle Fächer F .

Für Teil b) und c) gibt es auch eine Version für den offenen Fall und die entsprechenden strikten Ungleichungen. Die Bedingung offen ist allerdings durch die folgende etwas stärkere Bedingung zu ersetzen.

(*) Die Menge S hat mit dem Zariski-Abschluß ihres Randes einen leeren Durchschnitt.

Zunächst kann man diesen Satz in der trivialen Richtung anwenden. In diesem Beispiel etwa



wir haben einen Fächer F mit $\#(\tilde{S} \cap F) = 3$, also ist S keine Basismenge.

Aber besonders für die nicht-triviale Richtung des Satzes gibt es zahlreiche geometrische Anwendungen [Brö 3], [A-B-R 2], etwa die folgende.

Satz. a) Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Basismenge. Dann ist S , vermindert um den Zariski-Abschluß ihres Randes, eine offene Basismenge.

b) Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Basismenge und sei $n \leq 3$. Dann ist der Abschluß \bar{S} eine abgeschlossene Basismenge.

Der Beweis von b) erfordert natürlich noch zusätzliche Überlegungen, was man schon aus der Dimensionsbeschränkung ersieht. Für $n = 4$ gibt es tatsächlich Gegenbeispiele.

Der Begriff des Fächers ist allgemeiner als es hier dargestellt wurde. Man hat Fächer von höherer 2-Potenzordnung. Ihr Studium führt auf quantitative Ergebnisse, auf die wir am Ende unseres Rundgangs kurz eingehen wollen, weil sie, als sie zum erstenmal ausgesprochen wurden, Zweifel hervorriefen oder zumindest Verwunderung erregten.

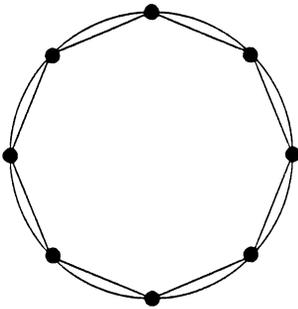
15 Beschreibung von semialgebraischen Mengen durch wenige Polynome

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ semialgebraisch. Wir wollen S unter Verwendung von möglichst wenigen Polynomen $f \in \mathbb{R}[X]$, $X = (X_1, \dots, X_n)$ beschreiben. Aus dem folgenden wird hervorgehen, was damit genau gemeint ist. Wir betrachten auch Sonderfälle.

a) S ist algebraisch (Zariski-abgeschlossen). In diesem Fall ist $S = \{f=0\}$ für ein $f \in \mathbb{R}[X]$.

Der Beweis ist ganz einfach. Wir haben ja $S = \{f_1 = 0, \dots, f_k = 0\}$, $f_i \in \mathbb{R}[X]$ und setzen $f := f_1^2 + \dots + f_k^2$.

b) S ist offene Basismenge. Dann ist $S = \{f_1 > 0, \dots, f_n > 0\}$ für geeignete $f_i \in \mathbb{R}[X]$. Siehe [Brö 2], [Brö 3], [Schei]. Der Punkt ist also, daß man die Zahl der Ungleichungen durch die Dimensionszahl n beschränken kann. Betrachten wir zum Beispiel im \mathbb{R}^2 für S das Innere des regelmäßigen m -Ecks, und m stellen wir uns sehr groß vor.



Dann ist $S = \{l_1 > 0, \dots, l_m > 0\}$, wobei die l_i die Linearformen sind, die den Kanten entsprechen. Wir suchen eine Beschreibung von S durch zwei Ungleichungen und – in diesem Spezialfall – finden wir sie auch leicht:

$$S = \{f_1 > 0, f_2 > 0\}, \quad f_1 = \prod_{i=1}^m l_i$$

und f_2 ist die Gleichung des Umkreises. Eine Verfeinerung dieses Ansatzes für den Beweis des allgemeinen Falls ist nicht bekannt. Vielmehr benutzt man algebraische Methoden, bei denen Anordnungen, Bewertungen und quadratische Formen von Körpern (siehe [La]) und gewissen Ringen verwoben sind ([Brö 3], [Schei] [Mar]).

Dasselbe gilt auch für die folgenden Resultate.

c) Sei S eine abgeschlossene Basismenge. Dann ist $S = \{f_1 \geq 0, \dots, f_k \geq 0\}$ für geeignete $f \in \mathbb{R}[X]$ und $k \leq n(n+1)/2$ und dies ist auch die beste Schranke für k ([Brö 3], [Schei]).

d) Sei S offen. Dann ist S eine Vereinigung von höchstens $t(n)$ offenen Basismengen. Dabei ist $t(n)$ eine nur von der Dimension n abhängige Funktion, die man abschätzen kann.

Man hat

$$t(1) = 1, \quad t(2) = 2, \quad t(3) \leq 1719$$

und darüber wachsen die besten bekannten Abschätzungen für $t(n)$ doppelt exponentiell mit n .

Aus b) und d) folgt, daß die Anzahl der Polynome, die zur Beschreibung einer beliebigen offenen semialgebraischen Menge S erforderlich ist, durch eine nur von n abhängige Funktion beschränkt werden kann. Hieraus gewinnt man leicht, daß so etwas für beliebige semialgebraische Mengen $S \subset \mathbb{R}^n$ gilt.

Die Schranken, die man erhält, werden wieder enorm hoch. Man kann sie dadurch verbessern, daß man semialgebraische Mengen nicht durch Systeme von Ungleichungen, sondern durch Signaturen von quadratischen Formen beschreibt, was sich überhaupt als adäquat herausgestellt hat. Schließlich sei bemerkt, daß sich die Ergebnisse der letzten beiden Abschnitte in vieler Hinsicht verallgemeinern lassen. Sie beziehen sich auch auf semialgebraische Mengen in algebraischen \mathbb{R} -Varietäten, semianalytischen Mengen in kompakten analytischen Mannigfaltigkeiten [A-B-R 1], konstruierbare Mengen in reellen Spektren [Mar] und sie können sogar im Rahmen einer rein axiomatischen Theorie behandelt werden [A-B-R 2], die allen genannten Fällen zugrunde liegt.

Literaturverzeichnis

- [Ad] Adams, J. F.: On the nonexistence of elements of Hopf invariant one. *Ann. of Math.* **72** (1960) 20–104
- [A-K] Akbulut, S.; King, H.: *Topology of real algebraic sets*. Springer, Mathematical Sciences Research Institute Publications 25, 1992
- [A-B-R 1] Andradas, C.; Bröcker, L.; Ruiz, J.: Minimal generation of basic open semi-analytic sets. *Invent. Math.* **92** (1988) 409–430
- [A-B-R 2] –: *Constructible Sets in Real Geometry*. Springer, *Ergebnisse Math. Berlin – Heidelberg – New York*, to appear 1996
- [A] Artin, E.: Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **5** (1927) 110–115
- [A-S 1] Artin, E.; Schreier, O.: Algebraische Konstruktion reeller Körper. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **5** (1927) 85–99
- [A-S 2] –: Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **5** (1927) 225–231
- [Be-De] Benedetti, R.; Dedo, M.: Counterexamples to representing homology classes by real algebraic subvarieties up to homeomorphism. *Compositio Math.* **53** (1984) 143–151
- [Be-Ri] Benedetti, R.; Risler, J. J.: *Real Algebraic and Semi-Algebraic sets*. Hermann, Paris 1990
- [Be-Wö] Becker, E.; Wörmann, T.: On the trace formula for quadratic forms and some applications. To appear.
- [Bo-Ku 1] Bochnak, J.; Kuchnarczyk, W.: Algebraic models of smooth manifolds. *Invent. Math.* **97** (1989) 585–611
- [Bo-Ku 2] –: Algebraic cycles and approximation theorems in real algebraic geometry. *AMS Transactions* **337** (1993) 463–472
- [B-C-R] Bochnak, J.; Coste, M.; Roy, M. F.: *Géométrie Algébrique Réelle*. Springer, *Ergebnisse Math. Berlin – Heidelberg – New York* 1987

- [Bo-Hae] Borel, A.; Haefliger, A.: La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique. *Bull. Soc. Math. France* **89** (1961) 461–513
- [Bra] Brakhage, H.: Topologische Eigenschaften algebraischer Gebilde über einem beliebigen reell-abgeschlossenen Grundkörper. Dissertation Heidelberg 1954
- [Brö 1] Bröcker, L.: Characterisation of fans and hereditarily pythagorean fields. *Math. Z.* **151** (1976) 149–163
- [Brö 2] –: Minimale Erzeugung von Positivbereichen. *Geom. Dedicata* **16** (1984) 335–350
- [Brö 3] –: On basic semialgebraic sets. *Expo. Math.* **9** (1991) 289–334
- [Bru] Brumfiel, G. W.: Partially Ordered Rings and Semi-Algebraic Geometry. Cambridge University Press 1979
- [Chern] Chern, S. S.: On the kinematic formula in integral geometry. *J. Math. and Mech.* **16** (1961) 101–118
- [Ch-Da-La-Re] Choi, M. D.; Dai, Z. D.; Lam, T. Y.; Reznick, B.: The pythagoras number of some affine algebras and local algebras. *J. Reine Angew. Math.* **336** (1982) 45–82
- [Ch-La] Choi, M. D.; Lam, T. Y.: Extremal positive semidefinite forms. *Math. Ann.* **231** (1977) 1–18
- [C-R] Coste, M.; Reguiat, M.: Trivialités en famille. *Real Algebraic Geometry*. (Coste, Mahé, Roy Eds.) Springer, Lecture Notes in Mathematics 1524, 193–204, 1994
- [De-Kn 1] Delfs, H.; Knebusch, M.: On the homology of algebraic varieties over real closed fields. *J. reine angew. Math.* **335** (1981) 122–163
- [De-Kn 2] –: Locally Semialgebraic Spaces. Springer, Lecture Notes in Mathematics 1173, 1985
- [Fe] Federer, H.: Geometric Measure Theory. Springer, Grundlehren Math. 153, Berlin – Heidelberg – New York 1969
- [Gi] Giesecke, B.: Simpliciale Zerlegung abzählbar analytischer Räume. *Math. Z.* **83** (1964) 177–213
- [Gr] Gromov, M.: Entropy, homology and semialgebraic geometry (after Yomdin, Y.). *Séminaire Bourbaki. Astérisque* **145–146** (1987) 225–240
- [Hab] Habicht, W.: Über die Zerlegung strikter definiter Formen in Quadrate. *Comment. Math. Helv.* **12** (1940) 317–322
- [Ha] Hardt, R.: Semi-algebraic local-triviality in semi-algebraic mappings. *Amer. J. Math.* **102** (1980) 291–302
- [H 1] Hilbert, D.: Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten. *Math. Ann.* **32** (1888) 342–350
- [H 2] –: Mathematische Probleme. *Göttinger Nachr.* 17 (1900) S. 284
- [Hör] Hörmander, L.: On the division of distributions by polynomials. *Ark. Mat.* **3** (1958) 555–568
- [I-S] Ischebeck, F.; Schülting, H. W.: Rational and homological equivalence for real cycles. *Invent. Math.* **97** (1988) 307–316
- [Kh] Khovanski, A.: On a class of systems of transcendental equations. *Soviet Math. Dokl.* **22**(3) (1980) 762–765
- [Kn-Schei] Knebusch, M.; Scheiderer, C.: Einführung in die reelle Algebra. Vieweg Aufbaukurs Math. Braunschweig – Wiesbaden 1989
- [La] Lam, T. Y.: Orderings, Valuations and Quadratic Forms. Conference Board of the mathematical sciences, regional conference series in math. 52 – A.M.S. 1983
- [L] Lang, S.: The theory of real places. *Ann of Math.* **57** (1953) 378–391
- [Ło] Łojasiewicz, S.: Ensembles semi-analytiques. I.H.E.S. (prépublication) 1964
- [Ma] Mahé, L.: Sommes de carrés et anneaux de Witt réduits. *C.R. Acad. Sc. Paris*, **300**, Série I, n^o 1 (1985)
- [Mar] Marshall, M.: Minimal generation of constructible sets in the real spectrum of a ring. *AMS Contemporary Math.* **155** (1994) 207–219
- [Mi 1] Milnor, J.: Morse Theory. Princeton University Press 1963
- [Mi 2] –: On the Betti numbers of real varieties. *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964) 275–280
- [Mo] Motzkin, T. S.: The arithmetic-geometric inequality. Inequalities, Shisha, O. ed. Academic Press 1967, 205–224
- [Na] Nash, J.: Real algebraic manifolds. *Ann. of Math.* **56** (1952) 405–421

- [Ol] Oleinik, O. A.: Estimates of the Betti numbers of real algebraic hypersurfaces. *Math. Sb. (N.S.)* **28** (70) (1951) 635–640
- [Pf] Pfister, A.: Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten. *Invent. Math.* **4** (1967) 229–237
- [Pr 1] Prestel, A.: *Lectures on Formally Real Fields*. Springer, Lecture Notes Math. 1093, 1984
- [Pr 2] –: Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie. Vieweg, Aufbaukurs Math. Braunschweig – Wiesbaden 1986
- [Ro] Robinson, R. M.: Some definite polynomials which are not sums of squares of real polynomials. *Notices Amer. Math. Soc.* **16** (1969) 554
- [Sa] Santalo, L. A.: *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1976
- [Schar] Scharlau, W.: *Quadratic and Hermitean Forms*. Springer Grundlehren Math. Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo 1985
- [Schei] Scheiderer, C.: Stability index of real varieties. *Invent. Math.* **97** (1989) 467–483
- [Sei] Seidenberg, A.: A new decision method for elementary algebra. *Ann. of Math.* **60** (1954) 365–374
- [Se] Seifert, H.: Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten. *Math. Z.* **41** (1936) 1–17
- [Ste] Stengle, G.: A Nullstellensatz and a Positivstellensatz in semialgebraic geometry. *Math. Ann.* **207** (1974) 87–97
- [St] Sturm, C.: Mémoire sur la résolution des équations numériques. *Inst. France Sc. Math. Phys.* **6** (1835)
- [Su] Sullivan, D.: Combinatorial invariants of analytic spaces. *Proc. of Liverpool singularities Symposium I, Lecture Notes in Math.* 192. Springer 1977, 165–168
- [Syl] Sylvester, J. J.: On a theory of syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's function. *Philos. Trans. Roy. Soc. London* **143** (1853)
- [Tar] Tarski, A.: A decision method for elementary algebra and geometry. Prepared for publication by J.C.C. Mac Kinsey, Berkeley 1951
- [Th 1] Thom, R.: Quelques propriétés globales des variétés différentiables. *Comment. Math. Helv.* **28** (1954) 17–86
- [Th 2] –: Sur l'homologie des variétés algébriques réelles. *Differential and Combinatorial Topology*. Princeton University Press 1965, 255–265
- [To] Tognoli, A.: Su una congettura di Nash. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **27** (1973) 167–185
- [Wh 1] Whitney, H.: Elementary structure of real algebraic varieties. *Ann. of Math.* **66** (1957) 545–556
- [Wh 2] –: Local properties of analytic varieties. *Differential and combinatorial topology*. Princeton University Press 1965, 205–244
- [Y 1] Yomdin, J.: The geometry of critical and near critical values of differentiable mappings. *Math. Ann.* **264** (1983) 495–515
- [Y 2] –: Volume growth and entropy. *Isr. J. Math.* **57** (1987) 285–300

Ludwig Bröcker
 Mathematisches Institut
 Einsteinstr. 62
 48149 Münster
 Germany

(Eingegangen 16. I. 1995)

Vom Nutzen der Mathematik *)

H. Neunzert, Kaiserslautern

Es ist gewiß sinnvoll, am Beginn eines wissenschaftlichen Kongresses, der eine relativ große öffentliche Aufmerksamkeit und auch Förderung erfährt, über den Nutzen der abzuhandelnden Wissenschaft nachzudenken.

Natürlich wird man sofort: Nutzen wofür oder für wen? fragen und die Mathematik, um die es ja hier geht, erlaubt darauf eine Vielfalt von Antworten: „Mathematik, ein Kulturgut, das Weltansicht und Produktionsweise verändert“ – der Titel eines Eröffnungsvortrags des Forschungsministers Krüger enthält in konzentrierter Form viele Aspekte. Mathematiker sind Kulturarbeiter, sie erzeugen ein Kulturgut, Mathematik ist von Nutzen für die Kultur. Das ist ohne Zweifel richtig, obwohl die Öffentlichkeit das nicht immer so sieht – aber es ist nicht mein Thema heute.

„Vos débats portent sur une domaine essentielle de la recherche, qui commande le progrès scientifique et technique de notre pays et sur une discipline centrale de notre système d'enseignement“ schrieb Mitterrand an den französischen Mathematikerkongress „Mathématiques à venir“ und spricht damit zwei weitere Aspekte an: den Nutzen der Mathematik für andere Wissenschaften und den Nutzen der Mathematik in der Erziehung, der Bildung des Geistes. Beide sind von größter Wichtigkeit, aber es gibt sicher Berufenere, darüber zu sprechen als mich.

Was bleibt – und dies ist mein Thema hier – ist der ökonomische Nutzen der Mathematik. Natürlich: Verglichen mit jenen anderen Nutzen ist dies irgendwie der banalste, er scheint zweitrangig. Andererseits bestimmt er das öffentliche Prestige der Mathematik, die Berufschancen unserer Absolventen (und es sind z. Zt. über 25000 Mathematikstudenten insgesamt in deutschen Hochschulen), die öffentliche Förderung unserer Wissenschaft – er bestimmt sie zwar nicht allein (dazu sind sich die Entscheidungsträger der anderen Werte der Mathematik doch zu bewußt), aber er bestimmt sie sicher mit. Deshalb ist dieser Nutzen zwar kein besonders oft oder gern diskutiertes, aber doch eben ein Thema – und es ist mein Thema, da ich mich seit 15 Jahren um Kontakte zu jenen bemühe, die den wirtschaftlichen Nutzen schaffen: den Anwendern der Mathematik in der Industrie.

*) Vortrag, gehalten auf der Jahrestagung der DMV 1994 in Duisburg.

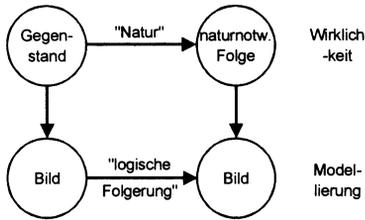
Neben meinen eigenen Erfahrungen basieren meine Bemerkungen zu diesem Thema vor allem auf gezielten Gesprächen und Korrespondenzen, die ich im letzten halben Jahr – seit ich von meiner heutigen Aufgabe weiß – mit verschiedenen Partnern geführt habe, z. B. mit den Fieldsmedaillisten Bombieri und P. L. Lions und den Forschungschefs von BASF, Daimler-Benz und Siemens. Und sie basiert auf einem noch unveröffentlichten Bericht der SIAM über ihr Projekt „Mathematics in Industry“, das die erste Auswertung von über 40 Interviews mit Mathematikern in der amerikanischen Industrie enthält.

Versuchen wir zunächst eine direkte Antwort auf die Frage, ob der ökonomische Nutzen der Mathematik eher groß oder klein ist. Da beginnt schon die Irritation: Fragt man Leute auf der Straße nach den nützlichen Wissenschaften, so wird Mathematik selten genannt; fragt man die Forschungschefs deutscher Industrieunternehmen, so ist Mathematik von größter Bedeutung: So weist z. B. der Siemensforschungschef, Prof. Danielmeyer, lapidar auf die überproportionale Beteiligung von Mathematikern am Transfer-Preis zwischen Wissenschaft und Industrie der Karl-Heinz-Beckurts-Stiftung hin und der Forschungschef von Daimler-Benz, Prof. H. Weule, schreibt: „Die heute in der industriellen Forschung und Entwicklung geforderten Höchstleistungen können nur mit zunehmendem Einsatz mathematischer Methoden erfüllt werden.“ Und er gibt auch gleich einen Grund für diese sicher gestiegene Bedeutung der Mathematik an: „Ein Beispiel hierfür sind Simulationsmethoden, mit denen bei der Entwicklung komplexer Produkte der notwendige Versuchs- und Konstruktionsaufwand deutlich reduziert werden kann.“ Natürlich: Mathematik ist der Kern jeder Computersimulation; Computersimulationen aber ersetzen in zunehmendem Maße die Experimente, die man zur Entwicklung und Kontrolle technischer Systeme benötigt. J. L. Lions sagte das auf einem Industriemathematikerkongreß in Neapel vor einigen Monaten noch pointierter: „Der Nutzen der Mathematik ist es, dabei zu helfen, Dinge besser, schneller, billiger und sicherer zu machen, und zwar

durch Simulation komplizierter Phänomene,
durch Visualisierung,
durch Reduktion der Datenfluten.“

Computersimulation besteht aus Modellbildung und wissenschaftlichem Rechnen. Modellieren ist dabei nicht, wie die Brockhaus-Enzyklopädie von '91 vorschlägt, „das plastische Formen in Ton, Wachs und Gips u. a. mit der Hand und Zuhilfenahme von Modellierhölzern und Drahtschleifen“, sondern eher dieses (ich zitiere Heinrich Hertz in der Einleitung zu seiner Mechanik 1897): „Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie uns von solcher Art, daß die denotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände.“

Und auch dies ist schon bei Hertz klar: Mathematik ist der Rohstoff der Modelle, das woraus sie gemacht sind. Modelle sind am Ende Relationen, mathematische Strukturen, z. B. Gleichungen etc. Sie müssen – nochmals nach Hertz – „logisch zulässig“, d. h. widerspruchsfrei sein, die mathematischen



Heinrich Hertz' Prinzipien der Mechanik

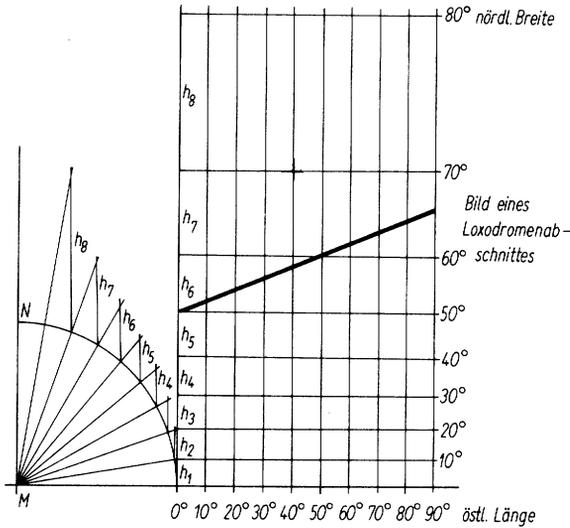
Probleme müssen gutgestellt sein etc. Die „Richtigkeit“ der Modelle prüft man, indem man das Diagramm überprüft: Man muß die Lösungen, die man aus dem Modell durch Berechnen oder Schließen gewonnen hat, mit den Beobachtungen vergleichen – man muß das Modell validieren. Je besser der Rohstoff, desto besser die Modelle – und je effizienter die Auswertungsmethoden, die Algorithmen, desto komplexer können die Modelle werden. Aufgaben für Mathematiker überall: Gute Modelle benötigen einen reichhaltigen Vorrat an Mathematik, der mit zunehmenden technischen Anforderungen steigen muß und oft weit über das normale Repertoire der „Ingenieurmathematik“ hinausgeht.

Mathematiker schaffen oder „fördern“ diesen Rohstoff; er ist in diesem Lande in exzellenter Qualität vorhanden. Und sie helfen dabei, ihn zu verarbeiten, das Modell auszuwerten: Dies ist das zweite Element der Computersimulation, das scientific computing. Natürlich wurde Modellieren, das es schon ein paar tausend Jahre gibt, besonders deshalb zur wirtschaftlichen Ressource, weil ihm heute ein mächtiges Hilfsmittel, der Computer, erwachsen ist. Gerade im technischen Bereich, in dem komplexe 3-dimensionale Objekte konstruiert, optimiert und visualisiert werden müssen und man sich nicht auf einfachere Erklärungsmodelle zurückziehen kann, hätte ohne Hilfsmittel Computer das mathematische Modell niemals eine solche Bedeutung erzielen können.

A. A. Samarski spricht vom Computerexperiment, das sich in den drei Stufen Modell – Algorithmus – Programm (MAP!) vollzieht und glaubt, daß es sich dabei um eine neue wissenschaftliche Methode handelt, die „sowohl den Denkstil als auch den Kreis der Probleme bestimmt, welche sich der Forscher zu stellen vermag“.

Es ist klar, daß dieses Computerexperiment einen interdisziplinären Charakter hat. Es erfordert Teamwork bei der Modellierung, weil der Fachwissenschaftler das zu modellierende Problem, der Mathematiker den Modellrohstoff besser kennt; Teamwork bei der Entwicklung von Algorithmen und ihrer Implementierung, weil der Informatiker das Werkzeug Computer besser kennt, schließlich Teamwork bei der Validierung, um Fehlerquellen aufspüren zu können. Man benötigt „eine Symbiose von Physikern und Ingenieuren, Mathematikern und Informatikern“.

Mathematik als zu bearbeitender Rohstoff mit dem Endprodukt einer zuverlässigen Simulationssoftware – Mathematik von unzweifelhaftem ökonomischen Nutzen! Bevor ich dieses Bild einer heilen Welt in Frage stelle, Wasser in den Wein gieße, will ich versuchen, die Grundthese mit Beispielen zu illustrieren. Bei

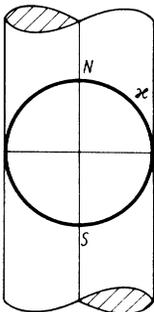


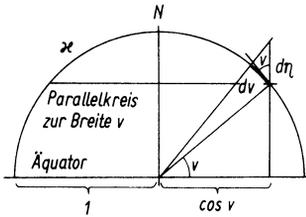
Die Darstellung von Loxodromen

der Auswahl habe ich lange geschwankt – aber ich kann der Versuchung nicht widerstehen, mit Mercator anzufangen.

Gesucht war ein ebenes Bild der Erdoberfläche, d. h. eine Karte, aus der man die für die Anwender wichtigen Schlüsse hinreichend genau ziehen kann. Die Anwender waren Seefahrer, diese fuhren im 16. Jhdt. hauptsächlich auf sogenannten Loxodromenkurven, Kurven, deren Tangenten mit der Nord-Süd-Richtung immer einen konstanten Winkel einschließen. Die Wunschvorstellung der Seeleute war wohl, solche Loxodromen auf der Karte als Geraden darstellen zu können; da damals sogenannte Zylinderentwürfe vorherrschten, bei denen Meridiane in parallele Geraden abgebildet werden, muß man, um dies zu erreichen, von der Abbildung Winkeltreue verlangen.

Sogenannte echte Zylinderentwürfe sind Abbildungen der Sphäre auf einen Zylinder, wobei Meridiane bzw. Breitenkreise in orthogonale Scharen jeweils paralleler Geraden abgebildet werden. Für Mercator stellte sich das Problem, wie



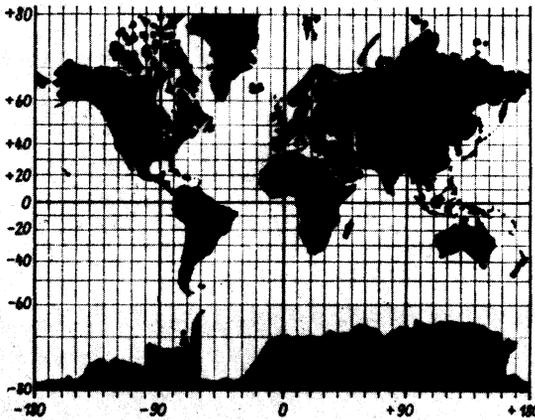


$$du \cos v : dv = du : d\eta$$

$$d\eta = \frac{dv}{\cos v}$$

Mercator's Zylinderentwurf (um 1570)

man die Abbildungen der Breitenkreise vornehmen muß, um Winkeltreue zu erzielen. (Die Bilder sind aus E. Schröder: Kartenentwürfe der Erde, Teubner Leipzig 1988.) Dabei ist $\frac{d\eta}{dv} = \frac{1}{\cos v}$ die Mercatorgrundformel, die Integration bewerkstelligte er schrittweise, ohne natürlich Differentiation oder Integration zu kennen. Es ging auch ohne – mühseliger und nicht besonders genau. Immerhin löste Mercator das Problem, wie eine Karte von 1569 beweist.



Karte nach Mercator's Zylinderentwurf

Und er löste sie, mit recht primitiver Mathematik, aber viel Intuition, 100 Jahre bevor die „Schulmathematik“ sie streng formulierte. Manchmal ist es auch umgekehrt: Der Rohstoff liegt Jahrzehnte lang in Schubladen, ehe er dann meist von Nichtmathematikern gefördert und genutzt wird.

Ich erzähle diese Mercatorgeschichte aber nicht nur, weil wir uns hier an der Gerhard-Mercator-Universität befinden, sondern auch, weil mich Industriemathematiker der Thyssen Stahl AG darauf aufmerksam machten, daß sie bei der Vermessung der Steindicken von Stahlkonvertern während des Gebrauchs auf ähnliche Probleme stießen wie seinerzeit Mercator. Dabei müssen aus Laser-Abstandsmessungen Landkarten der Konverterinnenwand erstellt werden – jetzt natürlich on-line und mit hoher Präzision.

Das Beispiel – in seinen beiden Versionen – demonstriert die Nützlichkeit der Mathematik, ihre Fähigkeit, in technisch ganz verschiedenen Aufgabenstellungen gemeinsame Strukturen zu erkennen und so Innovation durch Ideentransfer zu bewirken. Es zeigt weniger, inwiefern die Qualität des Rohstoffs die Qualität der Modelle beeinflusst. Um dies zu verdeutlichen, wähle ich noch ein Beispiel aus unserer eigenen Praxis, das eher dem Bereich der computer aided quality control (CAQ) zuzurechnen ist. Genauer: Es geht um die Beurteilung von Kunststoffgeweben, von sogenannten „Vliesen“. Ein Vlies ist ein unregelmäßiges Gewebe von miteinander verklebten Kunststoffäden. Die Qualität des Vlieses wird durch seine Gleichförmigkeit bestimmt; Wolken und Strähnen vermindern die Qualität.

Das praktische Problem, das uns gestellt wurde, bestand darin, ein objektives Maß für die Vliesqualität zu finden. In einem ersten Schritt – erfolgreiche Industriekooperationen haben immer mehrere Schritte – ging es deshalb darum, einen Abstand zur Gleichförmigkeit zu finden, der die Qualitätsmerkmale modelliert.

Ein Vlies ist durch Grauwerte von Bildelementen, von pixel, beschrieben; diesen pixel, ca. $N=6000$ kleinen Rasterpunkten pro Vliesmeter, werden also positive Zahlwerte μ_1, \dots, μ_N zugeordnet, die wir uns auch als Absorption von Licht beim Durchgang durch das Vlies vorstellen können. Da uns nur Änderungen, nicht die absolute Lichtstärke interessieren, können wir normieren:

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N) \in \mathbb{R}^N, \quad \mu_i \geq 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, N \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^N \mu_i = 1$$

Absolute Gleichförmigkeit bedeutet dann natürlich $\dot{\mu}_1 = \dots = \dot{\mu}_N$, d. h. $\dot{\mu}_i = \frac{1}{N}$ für alle i . Es geht also darum, zu gegebenem Vlies μ einen Abstand $d(\mu, \dot{\mu})$ zur Gleichförmigkeit $\dot{\mu} = \left(\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N}\right)$ so zu definieren, daß das, was für die Qualität wesentlich ist, also Wolken und Strähnen, entsprechend gewertet wird.

Da $\mu \in \mathbb{R}^N$ ein N -dimensionaler Vektor ist, wird die erste Idee des Mathematikers vielleicht der euklidische Abstand sein:

$$d_e(\mu, \dot{\mu}) = \sum_{i=1}^N (\mu_i - \dot{\mu})^2$$

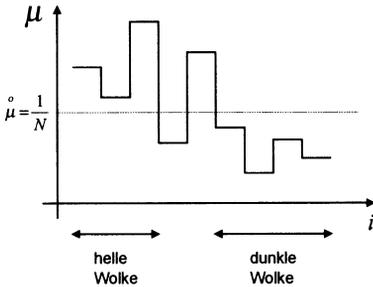
Die erste Idee des (statistischen) Physikers, der Gleichförmigkeit mit Entropie zusammenbringt, wird vielleicht die relative Entropie von μ bzgl. $\dot{\mu}$ sein:

$$d_E(\mu, \dot{\mu}) = \sum_{i=1}^N \mu_i \ln N + \sum_{i=1}^N \mu_i \ln \mu_i$$

Aber was in der Thermodynamik erwünscht ist, ist hier in beiden Fällen gleich schlecht: Ordne ich die pixel anders an, so ändert sich dieser Abstand nicht; praktisch heißt das: Ein großes „Loch“ (eine Wolke) wiegt so viel wie viele kleine Löcher – und das stimmt nun bei der Qualitätsbewertung sicher nicht.

Basteln wir also unser Modell, indem wir die Größe von Wolken messen. Stellen wir uns der Einfachheit halber ein „eindimensionales“ Vlies vor, in

dem die pixel nacheinander angeordnet sind. Ein Loch ist dann ein Abschnitt $\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1}, \dots, \mu_\beta$, wobei $\mu_j - \frac{1}{N}$ für alle $\alpha \leq j \leq \beta$ positives (helle Wolke) oder negatives Vorzeichen (dunkle Wolke) hat.



Als „Volumen“ der Wolke bezeichnen wir dann

$$\left| \sum_{j=a}^{\beta} (\mu_j - \dot{\mu}_j) \right|$$

und das Volumen der größten Wolke ist

$$D(\mu, \dot{\mu}) = \max_{1 \leq \alpha \leq \beta \leq N} \left| \sum_{j=\alpha}^{\beta} (\mu_j - \dot{\mu}_j) \right|.$$

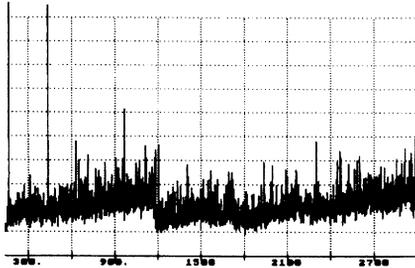
(Wir können hier über alle α und β maximieren, ohne auf das Vorzeichen von $\mu_j - \dot{\mu}_j$ zu achten – überschreiten wir eine Wolkengrenze, so wird wegen des Vorzeichenwechsels die Summe $\left| \sum_{j=\alpha}^{\beta} (\mu_j - \dot{\mu}_j) \right|$ zunächst kleiner und wenn wir es

beim Maximum nicht mehr berücksichtigen, so verändern wir den Maßstab nur wenig.) Dieses „Wolkenvolumen“ existiert in der Mathematik schon: Unter dem Namen „Diskrepanz“ wurde es von Hermann Weyl in einer berühmten Arbeit „Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo 1“ eingeführt. Diese Diskrepanz hat eine bewegte Geschichte hinter sich – sie spielt z. B. in dem Buch „Random Number Generation and Quasi-Monte-Carlo Methods“ des Wiener Mathematikers Niederreiter in der SIAM-Reihe (1992) die entscheidende Rolle; man kann daraus viele Anregungen gewinnen. Ein Aspekt wurde aber von den Zahlentheoretikern nicht beachtet: Eine schnelle (on-line) Berechnung der Diskrepanz für großes N . Eine einfache, aber für uns nicht so schnell zu findende Lösung war (G. Rote): Mit

$$X_k = \sum_{l=1}^k (\mu_l - \dot{\mu}_l)$$

ist $D(\mu, \dot{\mu}) = \max_{1 \leq i, j \leq N} (X_i - X_j) = \max_{1 \leq i \leq N} X_i - \min_{1 \leq j \leq N} X_j$.

Dies funktioniert ausgezeichnet – auf dem Bildschirm der Firma erschien über der Zeit abgetragen die Diskrepanz der untersuchten Vliesmeter – mit steigender Diskrepanz verschlechtert sich die Qualität, so daß nach ca. 1200 m eine Reinigung der Anlage vorgenommen wird.



Diskrepanz als zeitlich veränderliche Qualität des Vlieses

Man kann natürlich noch andere Abstände in Betracht ziehen; z. B. ergeben sich solche aus den verschiedenen Metriken von Wahrscheinlichkeitsräumen. Sie sind z. T. auch brauchbar, stellen wiederum numerische Probleme, verbessern aber letztendlich das Modell nicht.

Doch wie gesagt: Ein gelöstes Problem in der Industriemathematik ist selten ganz gelöst; die Wünsche steigen mit dem Erreichten. „Können wir nicht Wolkigkeit und Strähnigkeit getrennt bewerten?“ Unser Abstand berücksichtigte eher die Wolken, Strähnigkeit war nicht genügend erfaßt.

Um dies zu verbessern, versuchten wir, diese Strähnen durch geeignete Bildverarbeitungsprozesse besser herauszuarbeiten.

In diesem Bereich gibt es eine Reihe ganz neuer mathematischer Ideen, die noch keinen Eingang in die „normale“ Bildverarbeitung gefunden haben – ein noch nicht genutzter Rohstoff, der aber sicher nützlich ist. Ich will eine Idee hier kurz beschreiben, die hauptsächlich von P. L. Lions und J. M. Morel in Paris Dauphine entwickelt wurde; in einer Doktorarbeit von J. Weickert in Kaiserslautern wird diese Idee an das vorliegende Problem angepaßt und vor allem auch numerisch realisiert. Es geht um nichtlineare Diffusionsfilter. Wir nutzen dazu die kontinuierliche Beschreibung:

Ist $\hat{u}(x, y)$ der Grauwert des Bildes am Ort (x, y) , so bedeutet Bildverarbeitung eine stufenweise Veränderung dieses Grauwertes

$$\hat{u}(x, y) \rightarrow u(t, x, y),$$

wobei t der die Veränderung beschreibende Parameter ist ($u(0, \cdot) = \hat{u}$). Durch diese Veränderung sollen Störungen beseitigt, das Bild kontrastreicher gemacht (z. B. Kanten verstärkt) werden.

Eine alte Idee ist es, die Diffusion zur Beseitigung des Rauschens, also hochfrequenter Störungen, zu benutzen: $u(t, \cdot)$ ist dann Lösung des Anfangswertproblems

$$u_t = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u), \quad u(0, \cdot) = \hat{u}.$$

Mit wachsendem t nimmt die Variation von u ab: Es verschwinden die kleinen hochfrequenten Störungen, nach und nach werden aber auch die „echten“ Effekte gedämpft und verschwinden für $t \rightarrow \infty$. Man muß also den Prozeß rechtzeitig stoppen.

Will man Kanten oder Strähnen länger erhalten, muß man die Diffusivität von der lokalen Bildsituation abhängig machen. Die ursprüngliche Idee von Malic und Perona war:

Ist die Diffusivität in der Nähe der Kanten groß, außerhalb des Kantenbereichs aber klein, so bleibt im Prozeß die Kante erhalten, während Effekte seitlich von ihr gedämpft werden.

Kanten sind Kurven, längs denen $\|\nabla u\|$ groß ist, während ∇u dort die Richtung senkrecht zur Kante gibt.

Führt man ein lokales Koordinatensystem ein, indem man ξ in Richtung ∇u und η in Richtung der Tangente wählt, so kann man die Diffusionsgleichung (mit $D = 1$) auch in der Form

$$u_t = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$$

schreiben. Eine extreme Realisierung der Idee von Malic und Perona ist es nun, in ξ -Richtung keine Diffusion anzunehmen und man erhält

$$u_t = u_{\eta\eta};$$

rechnet man dies auf das ursprüngliche Koordinatensystem zurück, so erhält man

$$u_t = \|\nabla u\| \cdot \text{curv}(u) = \|\nabla u\| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right)$$

die sogenannte „mean curvature“ Gleichung, die in vielen physikalischen und technischen Prozessen eine Rolle spielt. Hier kann man viele Ideen austauschen: Innovation durch Ideentransfer, der dadurch ermöglicht wird, daß die mathematische Struktur des Modells die Ähnlichkeit der Problemstellung verdeutlicht.

P. L. Lions hat aus Axiomen der Bildverarbeitung eine „Fundamentalgleichung“ hergeleitet, die sehr ähnlich zur mean curvature Gleichung ist:

$$u_t = \|\nabla u\| \operatorname{curv}(u)^{1/3}$$

Eine Bildverarbeitung, die dieser Evolution folgt, erfüllt eine Reihe von natürlichen Forderungen (Axiomen), die man an solche Prozesse stellen kann. Diese Gleichung ist „morphologisch“ und affin invariant und gut geeignet zur Mustererkennung.

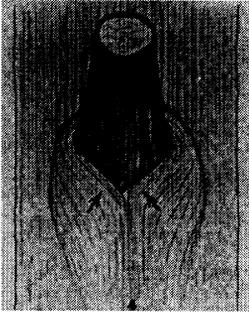
Eines der Axiome ist, daß Kontraste im Prozeß nicht verstärkt werden sollen (weil das Bild dadurch verfälscht werden kann). Zur Herausarbeitung gewisser Effekte, etwa der Strähnen, ist aber Kontrastverstärkung durchaus erwünscht. Dann liegt eine andere Abänderung der Diffusionsgleichung nahe, die sogenannte „anisotrope Diffusion“

$$u_t = \operatorname{div}(D(\nabla u_\sigma) \cdot \operatorname{grad} u).$$

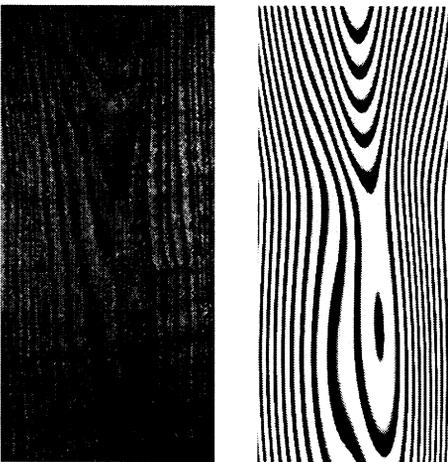
Hier wird die Diffusion naturgemäß zum Diffusionstensor, durch den die Diffusivität richtungsabhängig gemacht werden kann. u_σ ist eine „vorgeglättete“ Version von u , die notwendig ist, um ein zu „nervöses“ Verhalten am Anfang zu verhindern. Wählt man Eigenvektoren des Tensors in Richtung ∇u_σ und $(\nabla u_\sigma)^\perp$ und die zugehörigen Eigenwerte unterschiedlich (klein in Richtung ∇u_σ , falls eine Kante vorliegt, d. h. falls $\|\nabla u_\sigma\|$ groß ist), so ergibt sich eine Evolution, die zwar nicht morphologisch und nicht affin invariant, dafür aber kontrastverstärkend und grauerhaltend und deshalb für unsere Zwecke besser geeignet ist.

Natürlich ergeben sich viele theoretische Fragestellungen in Zusammenhang mit diesen nichtlinearen Diffusionen, die ja nicht einmal mehr quasilinear sind, Fragen z. B. nach dem Maximumprinzip, dem Verhalten für $t \rightarrow \infty$ usw. Vor allem aber sind die auf diesen Ansätzen basierenden Verfahren recht erfolgreich, jedenfalls besser als alles andere auf dem Markt befindliche.

Wir verwenden sie nicht nur zur Vliesbewertung, sondern auch zur Klassifizierung von Holzfurnieren, eine besonders reizvolle Aufgabe, da sie von



Wirkliches Baumwachstum als Modell für Furniermuster



Echtes und künstliches Furniermuster

Bildverarbeitung über das mathematische Modellieren des Baumwachstums bis zu lernenden Systemen sehr verschiedene mathematische Aspekte umfaßt.

Abschließend zu diesen Beispielen möchte ich erwähnen, daß ich überzeugt bin, im Bereich der Qualitätskontrolle und -bewertung, die eine immer größere Bedeutung gewinnen, ungeheuer viele und interessante mathematische Aufgaben liegen und ich glaube, es wäre von Vorteil für die Industrie und für die Mathematik, wenn wir dieses Feld nicht ausschließlich den Kollegen der Informatik überlassen würden.

Ich hoffe, daß ich Sie ein wenig davon überzeugen konnte, daß Mathematik ein wertvoller Rohstoff, eine ökonomisch nützliche Technologie sein kann.

Aber ist sie es auch wirklich? Wieso dann diese häufig anzutreffende öffentliche Einschätzung der Mathematik als Wissenschaft im Elfenbeinturm? Woher diese Ambivalenz?

Meine These ist, daß es *zwei Mathematikwelten* gibt, die recht unabhängig voneinander existieren. „The culture and the values of mathematics in business, industry and government differ radically from those of academia“ beginnt der SIAM-report und definiert damit gleich zu Beginn diese beiden Welten: Die Mathematik in der Industrie und die Mathematik an den Universitäten. Diese erstgenannte Welt ist anders, ganz anders – aber sie ist auch eine Mathematikwelt und sie ist jene, die den ökonomischen Nutzen der Mathematik fast alleine produziert; sie ist der „Alleinvertreter“. Die zweite Welt, jene an den Hochschulen, die ja auch diesen Kongreß mit über 90% der Teilnehmer bestimmt (und der ich ja auch angehöre!), ist weitgehend in sich abgeschlossen. Sie bestimmt, was gute und schlechte Mathematik ist – nach „innerweltlichen“ Grundsätzen, sie hat einen „Alleinvertretungsanspruch“. Da Industriemathematik nicht immer diesen Kriterien genügen kann, wird sie oft nicht als Mathematik wahrgenommen. Ich zitiere nochmals den SIAM-report: „A harsh reality is the lack of a market niche for mathematics outside of academia ... Mathematics is seldom the dominant technical discipline. Demonstrating relevance is a key to survival outside of academia.“ Der Industriemathematiker ist also nicht geborgen in mathematischen Fachbereichen, in denen die Forschung ihren eigenen Gesetzen folgen kann – er muß beweisen, daß „Mathematik etwas bringt“. Deshalb sieht man sich auch vor andere Probleme gestellt: „Good problems need not to be elegant, new or well posed – just necessary to corporate welfare.“ Und man benötigt auch andere Talente: Die Fähigkeit zur Teamarbeit, zur Verständigung mit Nichtmathematikern, ein breitgestreutes wissenschaftliches Interesse, Kritikfähigkeit. Man muß erkennen, wo Mathematik eine Chance bietet – man braucht Problemfindungskompetenz, nicht nur Problemlösungskompetenz, wie sie Schule und Hochschule ausschließlich anstreben.

Da bleibt dem Industriemathematiker oft nicht viel Zeit, jene zweite Welt zu beobachten, die ihrerseits zumindest in der Vergangenheit nicht sehr viel Interesse an der ersten Welt zeigte. So entstand die Trennung – der Fieldsmedaillist Bombieri spricht allgemeiner von einer Trennung von Wissen und Gesellschaft, die früher nicht existierte und heute überwunden werden muß.

Was ist zu tun, um jene schädliche Trennung zu überwinden, die beiden Welten besser zu koppeln?

Zuerst eine Warnung, die ich, wieder einmal, von Felix Klein, borge, der 1906 in einem Vortrag „Wissenschaft und Technik“ sagte: „Der größte Feind, der richtigen Bestrebungen erwächst, ist nicht äußerer Widerstand, sondern Übertreibung. Noch andere, noch wichtigere Vorbedingungen für das Gedeihen der Technik gibt es als die Verbindung mit der Wissenschaft. Das sind die allgemeinen intellektuellen und ethischen Qualitäten: der technische Instinkt, der Unternehmungsgeist, die Beharrlichkeit; auch die Organisation der Arbeit spielt eine wichtige Rolle. Und ebenso hat die Wissenschaft ihre stärksten Wurzeln für sich: den unbedingten Trieb zur Erforschung der Wahrheit, woran sich die Unbestechlichkeit des Urteils schließt, die Freude am geordneten Denken, die Gründlichkeit und auch wohl eine gewisse Langsamkeit. Werden die beiden Gebiete in gedeihliche Wechselwirkung treten? Es gelingt nicht immer. Aber wo sich die geeigneten Kräfte zusammenfinden, da entsteht neues, nach beiden Seiten förderliches Leben. Für die Wissenschaft kommt hier nicht nur der wichtige Impuls in Betracht, der sich aus dem Herankommen neuer Hilfskräfte ergibt, sondern ganz wesentlich auch die Befruchtung mit neuen, fremder Erfahrung entstammenden Ideen. Die technischen Betriebe aber werden durch erfolgreichen Kontakt mit der Wissenschaft auf eine höhere Stufe der Leistungsfähigkeit emporgehoben, zum Teil überhaupt erst ermöglicht.“

Also: Koppeln heißt nicht verschmelzen, jede Welt muß ihre Stärken bewahren. Aber es heißt: Zusammenarbeiten, einander respektieren, aufeinander hören (ein hübsches in die Landschaft passendes Beispiel zeigt die Zusammenarbeit eines Eisenhütteningenieurs mit der doch recht bekannten reinen Mathematikerin Ruth Moufang aus den letzten Kriegsjahren, auf das mich Frau Tobies aufmerksam machte).

Was kann man tun, um diese Kopplung zu verbessern? Auch dazu macht Weule eine interessante Aussage: „Voraussetzung für einen breiteren Einsatz mathematischer Methoden in der Industrie ist aus meiner Sicht, daß sich die Hochschulen zunehmend in ihrer Arbeit auf industrielle Belange konzentrieren und daß andererseits die Industrie den Dialog mit der Wissenschaft verstärkt sucht. Letzteres wird dadurch erschwert, daß Ingenieure in ihrer mathematischen Ausbildung nur wenig darüber erfahren, wie durch Einsatz mathematischer Methoden reale Probleme gelöst werden können. Dies erkennen die Ingenieure erst im späteren Verlauf der Ausbildung – meistens zu spät. So ist es mir ergangen und nach vielen Kontakten mit jungen Ingenieuren habe ich den Eindruck gewonnen, daß es heute in großem Umfang auch noch so ist. Ich begrüße es daher außerordentlich, daß Sie sich mit diesem Themenkreis auseinandersetzen und wünsche Ihnen für die anstehenden Veränderungsprozesse viel Erfolg.“ In der Tat wäre es für die Mathematik sehr förderlich, wenn die mathematische Ausbildung von Ingenieuren nicht als notwendiges Übel, sondern als eine wichtige Aufgabe gesehen würde und wenn sich nicht gerade die besten ihres Faches dieser Aufgabe oft entzögen.

Wir müssen auch den mathematischen Nachwuchs, der ja in seiner überwiegenden Zahl in die Welt der Industriemathematik eintreten wird, darauf vorbereiten; und dies bedeutet, daß wir ihn auch zur Interdisziplinarität, zur

Sprachfähigkeit, zum Interesse für andere Wissenschaften wie Technik und Informatik erziehen müssen, ohne dabei die Entwicklung des Rohstoffs Mathematik zu vernachlässigen. Ich glaube, daß dabei neue Unterrichtsformen wie z. B. sogenannte Modellierungsseminare hilfreich sein können: Die Studenten lernen in interdisziplinären Teams die Erstellung von mathematischen Modellen zu realistischen Aufgabenstellungen, ihre Auswertung mittels Computer und die Interpretation der Ergebnisse.

Interessante Probleme findet man, indem man sich in der Welt der Industriemathematik umsieht; man muß nur seine „Nische“ in der Universität verlassen und sich in die Welt der Praxis hinausbegeben: Es ist meine Erfahrung, daß man dort meist freundlich und neugierig aufgenommen wird und daß man buchstäblich fast überall interessante mathematische Probleme findet. Voraussetzung dafür ist Offenheit, die Bereitschaft, die Kriterien dieser Welt zunächst anzunehmen. Die Sektion Industriemathematik, die meine Partner aus der Industrie und ich gemeinsam gestaltet haben, enthält fast ausschließlich Beiträge aus der Praxis: Ich kann Sie nur auffordern, während dieser Woche diese Eigendarstellung der ersten Welt zu besuchen.

Am 26. September 1894, vor fast genau 100 Jahren, hielt Felix Klein auf der Naturforschertagung einen ebenfalls popularwissenschaftlich orientierten Vortrag. Er sagte: „Wir empfinden, daß unter dem Einflusse der modernen Entwicklung unsere fortschreitende Wissenschaft je länger je mehr Gefahr läuft, sich zu isolieren Hier liegt eine große, täglich wachsende Gefahr. Dem wollen wir Mitglieder der mathematischen Vereinigung nach Kräften entgegenwirken.“ Und an die Naturforscher gewandt, fügte er hinzu: „Wir wünschen von Ihnen in persönlichem Verkehr zu lernen, wie sich der wissenschaftliche Gedanke in Ihren Disziplinen entwickelt, und wo dementsprechend der Ansatzpunkt für das Eingreifen des Mathematikers gegeben sein mag. Wir wünschen umgekehrt, von Ihrer Seite für unsere Auffassungen und Bestrebungen einiges Interesse und Verständnis zu finden.“

So groß die Fortschritte der Mathematik im letzten Jahrhundert waren – ihre Beziehung zur Außenwelt, zur Praxis scheint sich kaum verbessert zu haben. Dazwischen gab es allerdings – unter dem Einfluß Felix Kleins – ein Hoch zu Beginn dieses Jahrhunderts. Dasselbe müssen wir heute – ohne die Hilfe einer Persönlichkeit wie Felix Klein – in gemeinsamer Anstrengung wieder erreichen: Nur so verschaffen wir der Mathematik die Bedeutung, die ihr wirklich zukommt, als eine wunderbare und gerade deshalb auch nützliche Wissenschaft.

Helmut Neunzert
 Fachbereich Mathematik
 Universität Kaiserslautern
 Erwin-Schrödinger-Straße
 D-67663 Kaiserslautern

(Eingegangen 25. 11. 1994)



Buchbesprechungen

Fleming, W. H., Soner, H., Controlled Marcov Processes and Viscosity Solutions (Applications of Mathematics 25), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1993, 428 S., DM 98,-

Das vorliegende Werk ist seit 1965 die siebte Buchveröffentlichung W. Flemings mit verschiedenen Co-Autoren, von denen die letzten sechs Bücher sich mit Problemen der Steuerung und Filterung von Prozessen beschäftigen. Diese Veröffentlichung ist also zu betrachten als Fortsetzung des äußerst erfolgreichen Bemühens des ersten Autors, wesentliche neue Resultate und Entwicklungen zur Steuerungstheorie zusammenzufassen und geschickt aufgearbeitet einem breiten Leserkreis vorzulegen. Der inhaltliche Aufbau der ersten fünf Kapitel dieser Arbeit ähnelt dem viel zitierten Buch W. Flemings mit R. W. Rishel [FR] und ergänzt dieses um die in den letzten Jahren erzielten Ergebnisse, an deren Erforschung die Autoren wesentlich beteiligt waren. Die letzten vier Kapitel besprechen eine Vielzahl von Problemen aus mit der Steuerungstheorie teilweise nur im weiteren Sinn verwandten Gebieten der Mathematik – wie zum Beispiel large-deviations-Probleme – und Aufgaben in Physik, Ökonomie usw.

Der verbindende rote Faden ist das ausführlich und anschaulich beschriebene Konzept der *Viskositätslösung* für partielle Differentialgleichungen unterschiedlichen Typs.

Die dynamische Programmierungsgleichung DP oder Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung HJB charakterisiert in entsprechender Form deterministische wie auch stochastische Kontrollprobleme. Im günstigsten klassischen Fall liefert die Lösung der DP-HJB-Gleichung über ein Maximumprinzip notwendige und über ein Verifikationstheorem hinreichende Bedingungen für die Optimalität von Steuerungen. Dabei stößt man jedoch typischerweise auf das Problem, daß die Wertefunktion des Kontrollproblems nicht glatt genug ist, um die partielle Differentialgleichung DP-HJB zu lösen. So wird denn ein wohl auf Methoden der Vektoroptimierung [R1], zuerst von M. G. Crandall und P. L. Lions [CL1-3] eingeführtes Konzept zur schwachen Lösung der DP-HJB-Gleichung vorgestellt: *Viskositätslösungen*. Unter diesem Lösungskonzept, das zumindest im Fall partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung eng verwandt ist mit der viscosity vanishing Methode, ist die Wertefunktion unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen eindeutige Lösung der DP-HJB-Gleichung.

Die ersten zwei Kapitel dieses Buches führen diese Viskositätslösungen VL für die DP-Gleichung zu deterministischen Kontrollproblemen ein. Dieser Teil – obwohl sicherlich eigenständig zu lesen – setzt also die Ausführungen in den Kapiteln I–IV in [FR] fort, wobei anhand von Beispielen die Notwendigkeit des VL-Zugangs erläutert wird.

Es folgt eine allgemeine Einführung und Übersicht über klassische Resultate zur Steuerung von Markov-Prozessen (Kap. III) und Markov-Diffusionen (Kap. IV). Im letzteren Fall nimmt die HJB-Gleichung die Form einer nichtlinearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit Endbedingung an:

$$0 = \min [A^v V(t, x) + L(t, x)] / v \in U$$

$$A^v = \delta / \delta t + 1/2 \sum_{ij} a_{ij}^v \delta^2 / \delta x_i \delta x_j + \sum_i f_i^v \delta / \delta x_i$$

Nachdem auch hier zuerst Beispiele von klassischen Lösungen (bei uniform parabolischen Differentialgleichungen vorgestellt werden, beginnen die Autoren mit einer intensiven Analyse der Wertefunktion $V(t, x)$. Die Resultate von Krylow [KR1], Lions [L1-5, 8, 9] und Evans [E1-4] werden vorgestellt im Hinblick auf die allgemeine Behandlung der VL in Kapitel V.

Es wird die DP-Gleichung der allgemeinen Form

$$-\delta/\delta t W(t, x) + \mathcal{H}(t, x, D_x W(t, x), D_x^2 W(t, x), W(t, x)) = 0$$

untersucht, wobei W eine VL ist, falls

$$-q + \mathcal{H}(t, x, p, A, W(t, x)) \leq 0 \quad \text{für alle Superdifferenziale } (q, p, A) \text{ von } W$$

und $-q + \mathcal{H}(t, x, A, W(t, x)) \geq 0$ für alle Subdifferenziale (q, p, A) von W .

Die Menge der Superdifferenziale von W in $(t, x) \in Q$ ist gegeben durch

$$D^{-(1,2)}W(t, x) = \{(q, p, A) \in R \times R^n \times S^n /$$

$$\limsup_{(h, y) \rightarrow 0} \{W(t+h, x+y) - W(t, x) - qh - p \cdot y - 1/2 Ay \cdot y\} / (|h| + |y|^2)\} \leq 0$$

und die der Subdifferenziale durch

$$D^{-(1,2)}W = -D^{-(1,2)}(-W).$$

Schon die Stetigkeit der Wertefunktion reicht, um in ihr eine VL der zugehörigen HJB-Gleichung zu finden. Sehr ausführlich wird das Problem der Eindeutigkeit oder besser der Existenz eines Vergleichssatzes für VL untersucht und das bislang beste Ergebnis, nämlich Jensens [J] Maximumprinzip unter Anwendung eines schwachen Konvexitätsbegriffs hergeleitet mit den Verallgemeinerungen durch Ishii [I2].

In den letzten vier Kapiteln wird der Zusammenhang zwischen Kontrolltheorie und einer Vielzahl anderer Gebiete der Theorie stochastischer Prozesse ausführlich erläutert. Wegen der geforderten Kürze dieser Besprechung möchte ich nur einige mir wesentlich erscheinende Themen ansprechen. Der Gebrauch einer auf Schrödinger zurückgehenden logarithmischen Transformation hat sich schon vor Jahren als sehr erfolgreich zum Beispiel bei der Erläuterung des Zusammenhangs zwischen Kontroll- und Filtertheorie [M] erwiesen. Basierend auf zum Teil eigenen Arbeiten der Autoren wird diese Technik angewandt auf das Studium bedingter Markov-Diffusionen, auf Probleme mit Austrittszeiten und auf small noise-Probleme. Bei Flemings Entwicklung der Wertefunktion in Potenzen des noise-Parameters zeigt sich noch einmal die Macht der VL-Methode, die dann in Kapitel VII zur Betrachtung von large deviations und vanishing viscosity-Problemen führt. Dazu wird ausführlich dort das Barles-Perthame [BP1, 2]-Vorgehen zur Untersuchung der Konvergenz einer Folge V^ϵ von VL gegen die VL einer Grenzgleichung erläutert, wozu nichtstetige VL eingeführt werden.

Kapitel VIII wendet sich einem auf Bather und Chernov [BC1-2] zurückgehenden singulären Kontrollproblem zu, dem man sich in praktischen Anwendungen wie Portfolio-Problemen mit Transaktionskosten [DN] oder finite fuel-Problemen [K1, KS1-3] gegenüber sieht. Besonders interessant sind solche Probleme auch wegen ihrer engen Beziehung zu Stopproblemen [KS1-2]. Die Untersuchung hier liefert dann eine einsichtige Interpretation des *principle of smooth fit* in einem der zuerst gelösten singulären Kontrollprobleme in [BSW].

Wird ein stochastisches Steuerungsmodell für ein konkretes Problem entworfen, so wird man Approximationen nutzen müssen, um die numerische Berechenbarkeit zu sichern. Auf der Grundlage Kushners [Ku1] finite difference-Schemas als Modell und der zugehörigen diskretisierten DP-Gleichung (die von einem Markov-Ketten-Kontrollproblem herrühren könnte) untersuchten Fleming und Soner abschließend mit VL-Methoden die Konvergenz der diskreten Wertefunktion bei feiner werdender Diskretisierung. So werden einige Ergebnisse Kushners neu bewiesen auf der Grundlage der Arbeiten von Barles und Souganidis [BS].

In den Anhängen A–E werden einige, im Buch wesentlich benutzte Sätze in der dort benutzten Form zusammengefaßt, was die Lektüre des gesamten Werks erheblich vereinfacht. Ein sehr umfangreiches Literaturverzeichnis beschließt das Buch.

Aus dem großen Wissen der beiden Autoren heraus ist ein Werk entstanden, das fast lückenlos die Entwicklung der zeitstetigen Markovschen Kontrolltheorie der letzten 17 Jahre beschreibt. In Nachfolge und Ergänzung von [FR], der Hauptreferenz zu diesem Thema in den letzten Jahren, ist das vorliegende Buch sicherlich eines der wesentlichsten und umfassendsten Werke zur Markovschen Kontrolltheorie für die auf diesem Gebiet arbeitenden Wissenschaftler. Darüberhinaus wird es sich als äußerst wertvolle Referenz für Arbeiten im Zusammenhang mit Viskositätslösungen zeigen, deren Bedeutung für verschiedene andere Gebiete der Mathematik hier angedeutet wird. Sicherlich aber wird das VL-Konzept noch viele andere Anwendungen finden.

Fleming und Soner schlossen ihre Arbeit an dieser Veröffentlichung kurz vor dem 65. Geburtstag Wendell Flemings ab. Da Fleming so seinen Lesern ein wertvolles Geburtstagsgeschenk gab, sei es mir bitte erlaubt, in die Glückwünsche zu dem gelungenen Werk an beide Autoren verspätete Glückwünsche an den ersten Autor zu seinem Geburtstag einzuschließen.

- [BP1] Barles, G.; Perthame, B.: Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *SIAM J. Control Optim.* **26** (1988) 1113–1148
- [BP2] Barles, G.; Perthame, B.: Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems. *Math. Modelling & Num. Analysis* **21** (1987) 557–579
- [BS] Barles, G.; Souganidis, P. E.: Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations. *J Asymptotic Analysis* **4** (1991) 271–283
- [BC1] Bather, J. A.; Chernoff, H.: Sequential decisions in the control of a spaceship. Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability **3** (1967) 181–207
- [BC2] Bather, J. A.; Chernoff, H.: Sequential decisions in the control of a spaceship (finite fuel). *J. Appl. Prob.* **49** (1967) 584–604
- [BSW] Benes, V. E.; Shepp, L. A.; Witsenhausen, H. S.: Some soluble stochastic control problems. *Stochastics* **4** (1980) 39–83
- [CL1] Crandall, M. G.; Lions, P. L.: Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. A.M.S.* **27/7** (1984) 1–42
- [CL2] Crandall, M. G.; Lions, P. L.: Conditions d'unicité pour les solutions généralisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre. *C. R. Acad. Sci. Paris* **292** (1981) 183–186
- [CL3] Crandall, M. G.; Lions, P. L.: Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions; Part I, Uniqueness of solutions. *J. Func. Anal.* **62** (1985) 339–396. Part II, Existence of solutions. **65** (1986) 368–405. Part III. **68** (1986) 214–147. Part IV, Unbounded linear terms. **90** (1990) 137–283. Part V, B-continuous solutions. **97** (1991) 417–465
- [DN] Davis, M. H. A.; Norman, A. R.: Portfolio selection with transaction costs. *Math. Oper. Res.* **15-4** (1990) 676–713
- [E1] Evans, L. C.: Classical solutions of fully nonlinear, convex, second order elliptic equations. *Comm. Pure and Appl. Math.* **25** (1982) 333–363
- [E2] Evans, L. C.: A second order elliptic equation with a gradient constraint. *Comm. P.D.E.'s* **4** (1979) 552–572
- [E3] Evans, L. C.: The perturbed test function technique for viscosity solutions of partial differential equations. *Proc. Royal Soc., Edinburgh* **111A** (1989) 359–375
- [E4] Evans, L. C.: Classical solutions of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation for uniformly elliptic operators. *Trans. A.M.S.* **275** (1983) 245–255
- [FR] Fleming, W. H.; Rishel, R. W.: *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. New York: Springer-Verlag 1975
- [I2] Ishii, H.: Uniqueness of unbounded viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Indiana U. Math. J.* **26** (1984) 721–748
- [J] Jensen, R.: The maximum principle for viscosity solutions of second order fully nonlinear partial differential equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **101** (1988) 1–27

- [K1] Karatzas, I.: A class of singular stochastic control problems. *Adv. Appl. Probability* **15** (1983) 225–254
- [KS1] Karatzas, I.; Shreve, S. E.: Connections between optimal stopping and singular stochastic control; I: Monotone follower problems. *SIAM J. Control Optim.* **22** (1984) 856–877
- [KS2] Karatzas, I.; Shreve, S. E.: Connections between optimal stopping and singular stochastic control; II: Reflected follower problems. *SIAM J. Control Optim.* **23** (1985) 433–451
- [KS3] Karatzas, I.; Shreve, S. E.: Equivalent models for finite fuel stochastic control. *Stochastics* **18** (1986) 245–276
- [KR1] Krylow, N. V.: *Controlled Diffusion Processes*. New York: Springer-Verlag 1980
- [Ku1] Kushner, H. J.: *Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations*. New York: Academic Press 1977
- [L1] Lions, P. L.: Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations I. *Comm. PDE.* **8** (1983) 1101–1134
- [L2] Lions, P. L.: Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations; Part II: Viscosity solutions and uniqueness. *Comm. PDE.* **8** (1983) 1229–1276
- [L3] Lions, P. L.: Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations; Part III: Regularity of the optimal cost function. *Nonlinear PDE and App.*, College de France Seminar vol. V. Boston: Pitman 1983
- [L4] Lions, P. L.: *Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*. Boston: Pitman 1982
- [L5] Lions, P. L.: Viscosity solutions and optimal stochastic control in infinite dimensions, Part 1. *Act Math.* **161** (1988) 243–278. Part 2. *Springer Lecture Notes in Math.* No. 1390 (1988) 147–170. Part 3. *J. Funct. Anal.* **86** (1989) 1–18
- [L8] Lions, P. L.: Some properties of viscosity semigroups of Hamilton-Jacobi equations. In: *Nonlinear Differential Equations and Applications*. London: Pitman 1988
- [L9] Lions, P. L.: Control of diffusion processes in RN. *Commun. Pure Appl. Math.* **34** (1981) 121–147
- [M] Mitter, S. K.: *Nonlinear Filtering and Stochastic Mechanics*. In: *Stochastic Systems: The Mathem. of Filtering and Identification and Appl.* Dordrecht: D. Reidel Publ. Co 1981
- [R1] Rockafellar, R. T.: *Convex Analysis*. Princeton Ser. Vol. 28. Princeton NJ: Princeton Univ. Press 1970

Konstanz

M. Kohlmann

Kolmogorow, A., N., Selected Works, herausgegeben von V. M. Tikhomirov, Band I, II, III. Moskau: Nauka 1985; hier die englische Übersetzung (von V. M. Volsow), Dordrecht: Kluwer Academic Publisher 1993, insgesamt 1422 S., Dfl 930

Andrej Nikolajewic Kolmogorow (1903–1987), eine der gewaltigsten Mathematiker-gestalten des 20. Jahrhunderts, ist den meisten mit Mathematik Befassten durch seine maßtheoretische Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie (1933) und seine weiteren großen Leistungen in dieser Disziplin bekannt. Nicht nur Spezialisten wissen von seinem Beispiel einer L^1 -Funktion mit fast überall divergenter Fourierreihe (1923, Kolmogorow war damals 20 Jahre alt; erst 1966 bewies L. Carleson, daß Fourierreihen von L^2 -Funktionen fast überall konvergieren). Die sog. „KAM-Theorie“ der Stabilität von Planetensystemen entstand aus einer Skizze von „K“olmogorow (1954) und wurde in den darauffolgenden Jahren von seinem Schüler V. I. „A“rnol’d und J. „M“oser zur ersten Vollendung gebracht. 1957 führte Kolmogorow den Begriff ε -Entropie – z. B. von Funktionenmengen – ein; der damit eröffnete neue Zugang zu Hilberts 13. Problem über die Darstellbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen durch Superposition von Funktionen von weniger Variablen und A. G. Vitushkins einschlägigem Theorem (1954) ist nur ein besonders glänzendes Detail aus der Fülle der Resultate, die aus diesem Anstoß hervorgegangen sind. Die Einführung der Entropie-Invarianten in die maßtheoretische Ergodentheorie, mit der sogleich resultierenden Aufspaltung der Klasse aller Bernoulli-Shifts in mindestens ein

Kontinuum von Isomorphieklassen (Kolmogorov 1956; daß diese Invariante diese Shifts vollständig klassifiziert, bewies D. Ornstein 1969) wurde von P. R. Halmos als die „Atombombenexplosion in der Ergodentheorie“ bezeichnet. Mit einer späten Arbeit zur Charakterisierung der Zufälligkeit von Symbolfolgen mit Hilfe von Berechnungskomplexitäten initiierte Kolmogorov 1965 die bald darauf durch P. Martin-Löf (1966) und C. P. Schnorr (um 1970) erbrachte endgültige Beantwortung der 1919 mit der Skizzierung des Begriffs „Kollektiv“ durch R. v. Mises aufgeworfenen Fragen.

Mehrere der hier angedeuteten Leistungen wären ohne weiteres Fields-Medal-fähig und weisen Kolmogorov sozusagen als mehrfachen Nobelpreisträger aus. Sie sind umso bedeutender, als sie in den meisten Fällen nicht als Einzelleistungen die mathematische Landschaft überragen, sondern diese Landschaft geradezu neu geprägt und gewaltige, von vielen getragenen Forschungsbewegungen in Gang gesetzt haben. Es ist natürlich, daß die – wie bei David Hilbert – rund 60 Schüler von Kolmogorov (unter ihnen I. M. Gelfand, Yu. V. Prokhorov, V. I. Arnol'd, B. V. Gnedenko) hieran besonderen Anteil haben; die Zahl der Mathematiker, die, oft ohne Kolmogorov in Person begegnet zu sein, aus seinem Werk entscheidende Anregungen genommen haben, ist Legion. Fügt man hinzu, daß A. N. Kolmogorov ein reiner Charakter, ein ungewöhnlich runder Mensch, und ein hinreißender Lehrer – selbst für 14jährige Schüler an einer Moskauer „Spezialschule“ – gewesen ist, so kann man die Mathematikerschaft in aller Welt, und ganz besonders in seinem Heimatland, nur glücklich schätzen, daß es ihn gegeben hat.

Wohl bei weitem nicht alle, die aus dieser gewaltigen Kraftquelle das eine oder andere empfangen haben, waren über die außerordentliche Breite dieser Mathematikerpersönlichkeit voll im Bilde. Hier schafft nun die vorliegende umfassende Werkauswahl Abhilfe. Sie enthält in 3 Bänden alle wichtigen Originalarbeiten und Überblicksartikel von Kolmogorov. Die vertretenen Gebiete sind u. a.

Band I: Trigonometrische Reihen, deskriptive Mengentheorie, Maß- und Integraltheorie, intuitionistische-Logik, Homologietheorie, Punktmengentopologie, Turbulenztheorie, klassische Mechanik, Populationsdynamik.

Band II: Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie, Markov-Prozesse, stationäre Prozesse, Vorhersagetheorie, statistische Methoden.

Band III: Informationstheorie, Algorithmen, Zufälligkeitstheorie.

Funktionentheorie, Algebra und Zahlentheorie scheinen nicht zu Kolmogorovs engerem Spektrum gehört zu haben.

Ähnlich wie einst Felix Klein hat Kolmogorov diese Werkausgabe in der russischen Fassung selbst mitgestaltet und knappe Erinnerungen und Kommentare beige-steuert. Die am Ende eines jeden Bandes zusammengefaßten ausführlichen Kommentare bedeutender Landsleute Kolmogorovs ordnen das erarbeitete Oeuvre in die mathematische Szenerie des 20. Jahrhundert ein. Eine gewisse patriotische Einfärbung ist hier, wie auch in den Bänden vorangestellten biographischen Beiträgen nicht zu übersehen, aber wer wollte hier rechten? Es wird immer denkwürdig bleiben, wie da – ich habe es für die Teilgebiete Informationstheorie und Ergodentheorie miterlebt – die mathematischen Ping-Pong-Bälle zwischen USSR und USA hin und her flizten, so als habe sich wenigstens die Mathematik eine Art von irdischem Paradies erhalten können.

Die Übersetzung sämtlicher Texte ins Englische ist V. M. Volosov, G. Lindquist, und A. B. Lossinsky zu danken, die Herausgeberarbeit leistete und koordinierte A. N. Shiryaev. Kleinere Druckfehler stören das Gesamtbild nicht nennenswert, so weit ich sehe.

Die Ausgabe ist ein Schatz: große Empfehlung. Der Preis ist prohibitiv: ein Trauerspiel.

Dale, A. I., A History of Inverse Probability, From Thomas Bayes to Karl Pearson (Studies in the History of Math. and Phys. Sciences 16), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1992, 459 S., DM 124,-

Das Buch wirkt auf den ersten Blick wie ein umgestülpter Zettelkasten: mit einer Vollständigkeit, die dem „working statistician“ manchen vorher nie gekannten Namen unter die Augen hält, werden – so nehme ich an – alle Autoren, die sich je auch nur entfernt zum Thema „Rückschluß-Wahrscheinlichkeiten“, d. h. zur Bayes-Formel, und das heißt zu der Frage, wie man apriori-Wahrscheinlichkeiten nach gemachten Beobachtungen zu ändern hat, mit den Inhalten ihrer Publikationen (und – meist nur am Rande – auch mit ihren Biographien) vorgestellt: vom „Gründervater“ Thomas Bayes (1702–1761; seine Biographie füllt ein sehr sorgfältig nach Quellen ausgearbeitetes Kapitel des Buchs) über Condorcet (1734–1794), Laplace (1749–1827), Poisson (1781–1840), Edgeworth (1845–1926) bis Karl Pearson (1857–1936) reihen sich die Namen Moses Mendelsohn, Michell, Beguelin, Lagrange, Emerson, Buffon, Trembley, Prevost, Lhuillier, Gauß, Morgan, Lacroix, Lubbock, Drinkwater-Bethune, Bolzano, de Morgan, Bienaymé, Ostrogradskii, Galloway, Catalan, Friess, Cournot, Mill, Gouraud, Ellis, Donkin, Boole, Terrot, Meyer, Wild, Venn, Laurent, Monro, Jevons, Lotze, Bing, Crofton, von Kries, G. F. Hardy, Bertrand, Chrystal, Makeham. Die in der modernen Fehde mit den Entscheidungstheoretikern (Neyman, Fisher) etwas ins Hintertreffen geratenen Bayesianer finden hier die komplette Bibliothek ihrer Inkunabeln in geraffter Gestalt, und es erweist sich bei näherem Zusehen, daß dem Autor ein breites, sorgfältig gesponnenes Band des kritisch abwägenden Referierens aus den über zwei Jahrhunderte verteilten Quellen, bestickt mit zahllosen Originalzitaten – die französischen in der Originalsprache – gelungen ist. Nach der Konzeption des Autors berührt dies Band nur einen bestimmten Ausschnitt des riesigen Themenkreises „Stochastik“ und man mag fragen, ob das inhaltliche Interesse, das die Rückschluß-Überlegungen beanspruchen können, nicht doch hinter der Menge des hier Ausgebreiteten arg zurückbleibt, jedenfalls im Rahmen eines historischen Gesamtbildes der Stochastik, das ja erst mit drei oder vier weiteren Längsschnitten der hier vorgelegten Art zustandekommen könnte. Für historische Detailarbeit an einer Einzelfrage von grundsätzlicher Bedeutung ist hier aber gründlich der Boden bereitet. Warme Empfehlung.

Erlangen

K. Jacobs

Figotin, A., Pastur, L., Spectra of Random and Almost Periodic Operators (Grundlehren der math. Wissenschaften Bd. 297), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1992, 587 S., DM 178,-

Zufällige Operatoren dienen u. a. in der Festkörperphysik zur quantenmechanischen Beschreibung von ungeordneten Systemen, wie amorphen Materialien (z. B. Gläsern) oder (ungeordneten) Legierungen.

Ein Elektron in einem Festkörper wird beschrieben durch einen Schrödingeroperator $H = H_0 + V$ auf $L^2(\mathbb{R}^d)$, wobei $H_0 = -\Delta$ den (negativen) Laplaceoperator (kinetische Energie) bezeichnet und V den Multiplikationsoperator mit der Funktion $V(x)$ (potentielle Energie). In einem perfekten Kristall wird man für V eine periodische Funktion ansetzen; ein ungeordnetes System beschreibt man durch eine (räumlich) zufällige Funktion $V_\omega(x)$. Dieses Potential enthält etwa die (als zufällige angesehene) Abweichung der Atome von ihren idealen Gitterlagen oder eine durch Abkühlen aus einer Schmelze entstandene zufällige Verteilung von (z. B. verschiedenartigen) Atomsorten. Statt des oben diskutierten Schrödingeroperators wird häufig eine diskretisierte Version untersucht, die auf $l^2(\mathbb{Z}^d)$ operiert und bei der H_0 durch einen Differenzenoperator, das Potential auf \mathbb{R}^d durch eine

Funktion auf \mathbb{Z}^d ersetzt werden. Dieses diskrete Modell ist nach dem Physiker Anderson benannt, der als einer der ersten zufällige Operatoren untersuchte (Ende der fünfziger Jahre). Anderson, Mott und andere gaben Argumente dafür, daß solche Operatoren ungewöhnliche Spektraleigenschaften besitzen.

Erst Anfang der siebziger Jahre wandten sich Mathematiker diesem Problemfeld zu, allen voran L. A. Pastur, der als einer der (mathematischen) Pioniere auf diesem Gebiet gelten kann. Wenn also jemand, der seit über zwanzig Jahren in einem Gebiet entscheidende Arbeiten schreibt, zusammen mit einem seiner begabtesten Schüler ein umfassendes Werk über sein Gebiet verfaßt, so darf man wohl zu Recht gespannt auf das Ergebnis sein. Pastur und Figotin haben in diesem Buch fast das gesamte – inzwischen sehr umfangreiche – Material über zufällige und fastperiodische Operatoren zusammengetragen und aufgearbeitet. Selbst wer mit dem Thema sehr vertraut ist, wird in fast jedem Abschnitt neue Ergebnisse oder Gesichtspunkte finden. Lediglich im letzten Abschnitt über Andersonlokalisierung bemerkt der Spezialist, daß sich der Springer-Verlag viel Zeit gelassen hat zwischen Abgabe des Manuskripts und Druck des Buches.

Es sind vor allem zwei Themenkreise, die die Theorie zufälliger Operatoren beherrschen: Spektraleigenschaften der Operatoren und die integrierte Zustandsdichte. Um die integrierte Zustandsdichte N zu definieren, schränkt man zunächst den Operator H_ω auf ein beschränktes Gebiet ein, etwa auf einen Würfel A_L der Seitenlänge L . Am Rande von A_L wollen wir z. B. Dirichlet-Randbedingungen fordern – damit wird der eingeschränkte Operator $H_\omega^{(L)}$ zu einem selbstadjungierten Operator auf $L^2(A_L)$ mit rein diskrettem Spektrum. Die Eigenwertzählfunktion $N_L(E) = \#\{E_i \leq E | E_i \text{ Eigenwert von } H_\omega^{(L)}\}$ ist also wohldefiniert (wir zählen die Eigenwerte entsprechend ihrer Vielfachheit). Die normalisierte Funktion $\frac{1}{|A_L|} N_L(E)$ ist das Volumen von A_L , zählt nun die Anzahl der Zustände bis zur Energie E pro Einheitsvolumen. Für eine sehr große Klasse von Operatoren, die praktisch alle von physikalischer Bedeutung enthält, kann man zeigen, daß

$$N(E) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{|A_L|} N_L(E)$$

existiert.

Dieser Limes heißt die integrierte Zustandsdichte. Sie ist ein Maß für die „Dichte“ des Spektrums unterhalb der Energie E und daher von grundlegender physikalischer Bedeutung. Besonders wichtig ist es, die Asymptotik von N für kleine Energien zu kennen. Ein großer Teil der Monographie von Pastur und Figotin ist diesem Problemkreis gewidmet. Der Leser lernt die verschiedenen Methoden kennen, die zur Untersuchung der Zustandsdichte entwickelt wurden. Unter anderem wird die berühmte Arbeit von Donsker und Varadhan über das „Wiener Würstchen“ diskutiert und angewandt. Ausführlich diskutieren die Autoren auch spezielle Ergebnisse für den Fall der Raumdimension $d=1$, in dem durch die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen viel mächtigere Werkzeuge zur Verfügung stehen.

Letzteres gilt in noch viel stärkerem Maße für die Spektraltheorie. Hier ist die Theorie für Raumdimension $d=1$ (nach der Pionierarbeit von Goldscheid, Molchanov und Pastur) weit fortgeschritten. In sehr vielen Fällen kann man heute zeigen, daß der Operator H_ω ein dichtes Punktspektrum hat, genauer, es gibt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren und die Eigenwerte liegen (z. B. in der Halbachse $[0, \infty[$) dicht. Dies kontrastiert scharf zum Fall periodischer Potentiale, für die das Spektrum rein absolut stetig ist. Dieses Phänomen des reinen Punktspektrums (bei zufälligen Operatoren) heißt auch Anderson-Lokalisierung. Die physikalische Interpretation besagt nämlich, daß die Eigenzustände lokalisiert (nämlich quadratintegrierbar) sind und deshalb keine elektrische Leitfähigkeit des Materials vorliegt.

Im mehrdimensionalen Fall (sagen wir $d=3$) erwarten die Physiker Spektralbereiche, in denen Anderson-Lokalisierung (= dichtes Punktspektrum) herrscht, und zwar an den Bandkanten des Spektrums. Im „Innern“ der spektralen Bänder sollte dagegen gute Leitfähigkeit vorliegen, also (absolut-)stetiges Spektrum. Bei Erhöhung der Unordnung sollte der Bereich des Punktspektrums immer größer werden.

Von diesen physikalischen Erwartungen konnte bislang nur die Existenz dichten Punktspektrums an Bandkanten des Spektrums bewiesen werden. Die berühmte Arbeit von Fröhlich und Spencer brachte den Durchbruch für dieses Resultat. Zu beweisen, daß in anderen Bereichen stetiges Spektrum auftritt, ist wohl die interessanteste, aber sicher auch eine der schwierigsten Aufgaben für die zukünftige Entwicklung der Theorie zufälliger Operatoren.

Operatoren mit fastperiodischen Potentialen ist das letzte Kapitel des Buches gewidmet. Sie stehen in gewisser Weise zwischen periodischen und zufälligen Potentialen. Solche Operatoren zeigen einen ganzen Zoo von mehr oder weniger merkwürdigen spektralen Eigenschaften, von absolutstetigem Spektrum auf nirgendsdichten Mengen über singulärstetiges Spektrum bis hin zu Punktspektrum.

Das vorliegende Buch stellt in umfassender Weise unser heutiges Wissen über zufällige und fastperiodische Operatoren zusammen. Die Autoren vermitteln nicht nur die mathematischen Techniken und Methoden sondern auch die physikalischen Hintergründe. Dies ist gerade in einem tatsächlich interdisziplinären Gebiet unerläßlich. Das Buch ist für Mathematiker, wie für mathematisch interessierte Physiker gleichermaßen geeignet. Die geradezu enzyklopädische Fülle des Materials mag einen Leser zunächst abschrecken. Dafür wird er aber in gründlicher Weise auch mit den spektraltheoretischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen vertraut gemacht, so daß an Vorkenntnissen wenig mehr als der übliche Vordiplom-Stoff vorausgesetzt wird.

Zu Recht ist der „Pastur-Figotin“ in der kurzen Zeit seit seinem Erscheinen zu einem Standardwerk der mathematischen Physik geworden.



Walter de Gruyter
Berlin • New York

de Gruyter Studies in Mathematics

VOLUME 21 -

A. Bendikov

Potential Theory on Infinite-Dimensional Abelian Groups

1995. 17 x 24 cm. VI, 184 pages. Cloth DM 168,- / öS 1.311,- / sFr 161,-
ISBN 3-11-014283-X

A study on translation invariant potential theory on infinite-dimensional locally compact groups. This book contains an introductory and comprehensive account of the potential theory of elliptic and parabolic differential operators - an infinite-dimensional extension of classical potential theory and its probabilistic counterpart.

VOLUME 22

V. E. Nazaiinskii / V. E. Shatalov / B. Yu. Sternin

Methods of Noncommutative Analysis Theory and Applications

1996. 17 x 24 cm. X, 374 pages. Cloth DM 198,- / öS 1.545,- / sFr 190,-
ISBN 3-11-014632-0

Provides a systematic and self-contained introduction to the basics of noncommutative analysis with interesting applications, ranging from classical to modern ones. A particular feature is the authors' use of many examples from asymptotic theory, diffraction theory, plasma physics, quantum groups (Yang-Baxter equations) to develop the reader's understanding of important concepts. Noncommutative analysis originated in the classical works by R. Feynman around 1950 when he presented his heuristic ideas for a functional calculus of noncommuting operators. It proved to be an effective and universal tool in various fields of mathematics and physics, such as functional analysis, geometric quantization, algebra, quantum mechanics, and differential equations.

VOLUME 23

H. Bauer

Probability Theory

Translated from the German by R.B. Burckel

1996. 17 x 24 cm. XV, 523 pages. Cloth DM 148,- / öS 1.155,- / sFr 143,-
ISBN 3-11-013935-9

This is the English translation of the author's very successful German edition which has been a standard textbook in probability theory for a period of nearly 30 years. This translation is based on the 4. German edition published in 1991.

Prices are subject to change

Walter de Gruyter & Co • Genthiner Straße 13 • D-10785 Berlin • Tel: (030) 2 60 05-0 • Fax: (030) 2 60 05-2 22
Walter de Gruyter Inc. • 200 Saw Mill River Road • Hawthorne, New York 10532 • Phone: (914) 747-0110 • Fax: (914) 747-1326

Calculus of Variations: The standard reference work

This long-awaited book by two of the foremost researchers and writers in the field is the first part of a treatise that will cover the subject in breadth and depth, paying special attention to the historical origins. A variety of aids to the reader are provided: an introduction to each chapter, section and subsection; an overview of the relevant literature (in Vol. 2) plus the references in the Scholia to each chapter, and in the bibliography; and finally an index of the examples used throughout the book.

Later volumes will deal with direct methods and regularity theory. Both individually and collectively these volumes will undoubtedly become standard references.

Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 311
A Series of Comprehensive Studies in Mathematics

**Mariano Giaquinta
Stefan Hildebrandt**

Calculus of Variations II



Prices are subject to change without notice.
In EU countries the local VAT is effective.

Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 310
A Series of Comprehensive Studies in Mathematics

**Mariano Giaquinta
Stefan Hildebrandt**

Calculus of Variations I



The Langrangian Formalism
1995. XXII, 350 pages. 73 figures.
Hardcover DM 188,—
ISBN 3-540-50625-X

The Hamiltonian Formalism
1995. Approx. 500 pages. 41 figures.
Hardcover DM 198,— ISBN 3-540-57961-3

Remaining 4 volumes to appear
over the next few years.



Springer

Kamps

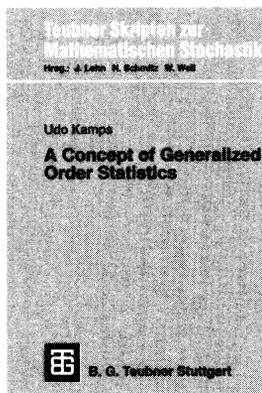
A Concept of Generalized Order Statistics

Order statistics and record values appear in many statistical applications and are widely used in statistical modeling and inference. In addition to these well-known models, several other models of ordered random variables, known and new ones, are introduced which can be effectively applied, e.g., in reliability theory.

The main purpose of this book is to present a concept of generalized order statistics as a unified approach to a variety of models of ordered random variables. Numerous related results on distributional and moment properties of order statistics and record values are found in the literature which are deduced separately. The concept of generalized order statistics, however, enables a common approach to structural similarities and analogies. Well known results can be subsumed, generalized, and integrated within a general framework. Therefore, the concept of generalized order statistics provides a large class of models with many interesting, important and useful properties for both the description and the analysis of practical problems.

From the contents

Models of ordered random variables (with applications in reliability theory): order statistics, order statistics with non-integral sample size, sequential order statistics, record values, k-records, Pfeifer's record model, k_n -records from non-identical distributions, ordering via



By Priv.-Doz. Dr.
Udo Kamps
Technische Hochschule
Aachen

1995. 210 pages.
16,2 x 23,5 cm.
Paper DM 39,80
ÖS 311,- / SFr 39,80
ISBN 3-519-02736-4

(Teubner Skripten zur
Mathematischen Stochastik)

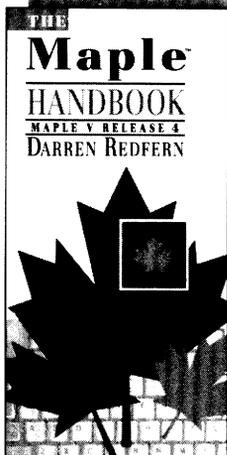
truncation of distributions,
censoring schemes – generalized order statistics – distribution theory of generalized order statistics – moments of generalized order statistics – existence of moments – characterization of distributions by sequences of moments – recurrence relations for moments and characterizations of distributions – inequalities for moments and characterizations of distributions – reliability properties: transmission of aging properties, partial ordering of generalized order statistics



B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig

Postfach 80 10 69 70510 Stuttgart

Maple V Release 4 – The new documentation



R. Redfern

The Maple Handbook

For Release 4
3rd edition 1995.
Spiral bound DM 48,-
ISBN 0-387-94538-5
Due December 1995

The **Maple Handbook** is an essential reference tool for all users of the Maple system. It provides a complete listing of every command in the Maple language, categorized into logical categories (e.g. calculus, programming, statistics, etc.) and explained in the context of those categories. If a Maple command has different purposes in different categories, it is included more than once as appropriate. A short introductory tutorial starts. *The Handbook*, and each category begins with a brief introduction to the related subject area. It is well referenced, with an alphabetical index of commands, and pointers to appropriate sections of the official Maple documentation.

This new approach to reference materials for Maple enhances the material found in Maple's on-line help files and provides a very efficient organized and intuitive resource for all Maple users.

Waterloo Maple Software

Maple V Learning Guide

2nd edition 1995.
Approx. 400 pages. 50 figures.
Softcover DM 39,-
ISBN 0-387-94536-9
Due November 1995

Maple V Learning Guide is the fully revised introductory documentation for Maple V Release 4. It shows how to use Maple V as a calculator with instant access to hundreds of high-level math routines and as a programming language for more demanding or specialized tasks. Topics include the basic data types and statements in the Maple V language. The book serves as a tutorial introduction and explains the difference between numeric computation and symbolic computation, illustrating how both are used in Maple V Release 4. Extensive "how-to" examples are presented throughout the text to show how common types of calculations can be easily expressed in Maple. Graphics examples are used to illustrate the way in which 2D and 3D graphics can aid in understanding the behaviour of problems.

Waterloo Maple Software

Maple V Programming Guide

2nd edition 1995.
Approx. 400 pages. 50 figures.
Softcover DM 48,-
ISBN 0-387-94537-7
Due November 1995

Maple V Programming Guide is the fully revised and updated language and programming reference for Maple V Release 4. It presents a detailed descriptions of Maple V Release 4 – the completely new version of the powerful, interactive computer algebra system in mathematics, the sciences, engineering, and education. This manual describes the use of both numeric and symbolic expressions, the data types available, and the programming language statements in Maple. It shows how the system can be extended or customized through user defined routines and gives complete descriptions of the system's user interface and 2D and 3D graphics capabilities.

Prices are subject to change without notice.
In EU countries the local VAT is effective.



Springer