

E 20577 F

98. Band Heft 4

ausgegeben am 12. 11. 1996

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil



B. G. Teubner Stuttgart 1996

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 148, – einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:

B. G. Teubner GmbH, Industriestr. 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 80 1069, D-70510 Stuttgart, Tel. (07 11) 789 01-0, Telefax (07 11) 789 01-10
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, 80336 München, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 \$ 01.00 + .20.

© B. G. Teubner GmbH, Stuttgart 1996 – Verlagsnummer 2911/4

Printed in Germany – ISSN 0012-0456

Satz: Elsner & Behrens GdB, D-68723 Oftersheim

Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

98. Band



B. G. Teubner Stuttgart 1996

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-80336 München, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970.0012-0456/83 \$01.00+.20.

© B. G. Teubner Stuttgart 1996 – Verlagsnummern 2911/1, 2911/2, 2911/3, 2911/4

Printed in Germany – ISSN 0012-0456

Satz: Elsner & Behrens GdB, Oftersheim

Druck: pagina media gmbH, Hemsbach

Inhalt

1. Abteilung

G. Bruhn (ed.) et al.: Wolfgang Haack zum Gedächtnis	1
M. Denker und S. Heinemann: Dynamik analytischer Endomorphismen auf der Sphäre	12
H. Esnault: Recent development on characteristic classes of flat bundles on complex algebraic manifolds	182
E. Heinz: Monge-Ampèresche Gleichungen und elliptische Systeme	173
F. Litten: Ernst Mohr – Das Schicksal eines Mathematikers	192
K. Rubin: Euler Systems and Exact Formulas in Number Theory	30
P. Schneider: Gebäude in der Darstellungstheorie über lokalen Zahlkörpern	135
G. Schumacher: Über die Entwicklung der Komplexen Analysis in Deutschland vom Ausgang des 19. Jahrhunderts bis zum Anfang der siebziger Jahre	41
Sir P. Swinnerton-Dyer: Diophantine Equations: the geometric approach	146
L. van den Dries: O-minimal structures on the field of real numbers	165

2. Abteilung

Buchbesprechungen

Adam Ries, Coß (<i>H. Lüneburg</i>)	2
Adams, J. Frank: Selected Works (<i>R. Vogt</i>)	6
Artin, M., Algebra (<i>W. Barth</i>)	5
Barnsley, M., Fractals Everywhere (<i>Ch. Bandt</i>)	24
Björner, A., Las Vergnas, M., Sturmfels, B., White, N., Ziegler, G., Oriented Matroids (<i>W. Hochstättler</i>)	10
Connes, A., Noncommutative Geometry (<i>J. Cuntz</i>)	44
Dembod, A., Zeltouni, O., Large Deviations Techniques and Applications (<i>K. Fleischmann</i>)	18
De Vore, R. A., Lorentz, G. G., Constructive Approximation (<i>R. Schaback</i>)	17
Dierkes, U., Hildebrandt, S., Küster, A., Wohlrab, O., Minimal Surfaces, I Boundary Value Problem, II Boundary Regularity (<i>F. Tomi</i>)	13
Ebeling, W., Lattices and Codes (<i>R. Schulze-Pillot</i>)	35
Edgar, G. A., Sucheston, L., Stopping Times And Directed Progresses (<i>R. Wittmann</i>)	27
Enock, M., Schwartz, J.-M., Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups (<i>H. Boseck</i>)	42
Fulton, W., Introduction to Toric Varieties (<i>H. Lange</i>)	37
Gilbert, N. D., Porter, T., Knots and Surfaces (<i>G. Burde</i>)	41
Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., Table of Integrals, Series and Products (<i>G. Schmeisser</i>)	25
Gruber, P. M., Wills, J. M. (Herausgeber), Handbook of Convex Geometry (<i>G. M. Ziegler</i>)	40
Hilbert, D., Theory of Algebraic Invariants (<i>W.-D. Geyer</i>)	4
Hoffman, P. N., Humphreys, J. F., Projective Representations of the Symmetric Groups (<i>O. Morris</i>)	12
Kostrikin, A. I., Shafarevich, I. R. (Eds.), Algebra IV, Infinite Groups. Linear Groups (<i>B. Wehrfritz</i>)	38

IV Inhalt

Kostrikin, A. I., Shafarevich, I. R., (Eds.), Algebra VIII, Representations of Finite-dimensional Algebras (<i>C. M. Ringel</i>)	29
Kung-ching Chang, Infinite Dimensional Morse Theory And Multiple Solution Problems (<i>H. Hofer</i>)	46
Levendorskii, S., Degenerate Elliptic Equations (<i>N. Jacob</i>)	48
Loday, J. L., Cyclic Homology (<i>M. Puschnigg</i>)	15
Lüneburg, H., Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers (<i>K. Jacobs</i>)	1
Lusztig, G., Introduction to Quantum Groups (<i>W. Soergel</i>)	11
Malkowsky, E., Nickel, W., Computergraphik in der Differentialgeometrie (<i>W. Barth</i>)	22
Malle, G., Didaktische Probleme der elementaren Algebra (<i>J. Cofman</i>)	3
de Melo, W., van Strien, S., One-Dimensional Dynamics (<i>G. Keller</i>)	21
Prüss, J., Evolutionary Integral Equations and Applications (<i>G. Leugering</i>)	19
Young, R. K., Wavelet Theory and its Applications (<i>W. Schempp</i>)	49

Inhalt Band 98, Heft 4

1. Abteilung

E. Heinz: Monge-Ampèresche Gleichungen und elliptische Systeme	173
H. Esnault: Recent development on characteristic classes of flat bundles on complex algebraic manifolds	182
F. Litten: Ernst Mohr – Das Schicksal eines Mathematikers	192

2. Abteilung

Ebeling, W., Lattices and Codes (<i>R. Schulze-Pillot</i>)	35
Fulton, W., Introduction to Toric Varieties (<i>H. Lange</i>)	37
Kostrikin, A. L., Shafarevich, I. R. (Eds.), Algebra IV, Infinite Groups. Linear Groups (<i>B. Wehrfritz</i>)	38
Gruber, P. M., Wills, J. M. (Herausgeber), Handbook of Convex Geometry (<i>G. M. Ziegler</i>)	40
Gilbert, N. D., Porter, T., Knots and Surfaces (<i>G. Burde</i>)	41
Enock, M., Schwartz, J.-M., Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups (<i>H. Boseck</i>)	42
Connes, A., Noncommutative Geometry (<i>J. Cuntz</i>)	44
Kung-ching Chang, Infinite Dimensional Morse Theory And Multiple Solution Problems (<i>H. Hofer</i>)	46
Levendorskii, S., Degenerate Elliptic Equations (<i>N. Jacob</i>)	48
Young, R. K., Wavelet Theory and its Applications (<i>W. Schempp</i>)	49

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

R. Berndt: Bruno Schoeneberg

G. Harder: Wittvektoren

R. Kühnen: Herbert Grötzsch zum Gedächtnis

H. Tietz: Herbert Grötzsch in Marburg

J. Zowe: Mathematik und Entwurf mechanischer Strukturen

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 52062 Aachen

Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen

Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Arcisstraße 21, 80333 München 2

Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Monge-Ampèresche Gleichungen und elliptische Systeme¹

E. Heinz, Göttingen

Im folgenden gebe ich einen Überblick über einige klassische und neuere Ergebnisse aus der Theorie der Monge-Ampèreschen Gleichungen und der elliptischen Systeme. In §1 behandle ich elliptische Monge-Ampèresche Gleichungen in zwei Variablen. Ausgangspunkt ist das Weylsche Einbettungsproblem. In §2 werden verschiedene Resultate über elliptische Systeme besprochen, die für die Anwendungen auf Monge-Ampèresche Gleichungen von Bedeutung sind. Schließlich werden in §3 einige offene Fragen erörtert.

1 Monge-Ampèresche Gleichungen

Die Theorie der Monge-Ampèreschen Gleichungen wurde in hohem Maße durch Probleme aus der Differentialgeometrie beeinflusst. Unter diesen nimmt das Problem von Weyl einen zentralen Platz ein. Bevor ich das Problem formuliere, sei an einige bekannte Definitionen erinnert. Eine partielle Differentialgleichung

$$(1.1) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$
$$(p = z_x, q = z_y; r = z_{xx}, s = z_{xy}, t = z_{yy})$$

heißt *elliptisch* für eine vorgelegte reelle Lösung $z = z(x, y)$, wenn

$$(1.2) \quad D = F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2 > 0$$

ausfällt. (1.1) ist vom *Monge-Ampèreschen Typ*, wenn

$$(1.3) \quad F = Ar + 2Bs + Ct + rt - s^2 - E = 0$$
$$(A = A(x, y, z, p, q), \dots, E = E(x, y, z, p, q))$$

gilt. Elliptizität von (1.3) bedeutet also, daß

$$(1.4) \quad D = (A + t)(C + r) - (B - s)^2 = AC - B^2 + E > 0.$$

¹ Modifizierte Fassung eines Vortrages am 19. 9. 95 auf der DMV-Tagung in Ulm.

gilt. Das *Weylsche Einbettungsproblem* ([12], [14], [17]) verlangt die Bestimmung einer isometrischen Einbettung $r : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ einer auf der Einheitskugel $\Sigma = S^2$ vorgegebenen positiv-definiten Metrik $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ positiver Gaußscher Krümmung K als konvexe Fläche, d.h., die Lösung der Differentialgleichung $dr^2 = ds^2$ auf Σ , die sich in lokalen Koordinaten (u, v) in der Form

$$(1.5) \quad r_u^2 = E, \quad r_u r_v = F, \quad r_v^2 = G$$

schreiben läßt. Dabei wird $r \in C^2(\Sigma)$ vorausgesetzt. Die Funktion $\rho = \frac{1}{2} r^2$ genügt der Darbouxschen Differentialgleichung

$$(1.6) \quad (\rho_{uu} - \Gamma_{11}^1 \rho_u - \Gamma_{11}^2 \rho_v - E)(\rho_{vv} - \Gamma_{22}^1 \rho_u - \Gamma_{22}^2 \rho_v - G) \\ - (\rho_{uv} - \Gamma_{12}^1 \rho_u - \Gamma_{12}^2 \rho_v - F)^2 \\ = K(u, v) \left[2\rho(EG - F^2) - (G\rho_u^2 - 2F\rho_u\rho_v + E\rho_v^2) \right]$$

die mit dem System (1.5) äquivalent ist. Sie ist vom Monge-Ampèreschen Typ, und bei geeigneter Wahl des Koordinatenursprungs ist

$$(1.7) \quad D = K(u, v)(r_u r_v)^2 > 0.$$

Es sei Ω eine beschränkte offene Menge im \mathbb{R}^2 . Für eine Funktion

$$z = z(u, v) = z(w) \in C^{k, \nu}(\Omega) \quad (k = 0, 1, \dots; 0 < \nu \leq 1)$$

erklären wir die Schaudernorm $\|z\|_{k, \nu}^\Omega$ in der üblichen Weise durch die Gleichung

$$(1.8) \quad \|z\|_{k, \nu}^\Omega = \sup_\Omega |z| + \dots + \sup_\Omega |D^k z| + \sup_{\substack{w_1, w_2 \in \Omega \\ w_1 \neq w_2}} \frac{|D^k z(w_1) - D^k z(w_2)|}{|w_1 - w_2|^\nu}$$

Die Durchführung der Weylschen Kontinuitätsmethode [14] erfordert eine Abschätzung der Größe $\|\rho\|_{2, \nu}^{\Omega'}$ ($\nu > 0$) durch die Metrik ds^2 . Dabei ist Ω ein Parametergebiet von Σ und $\Omega' \subset \subset \Omega$. Die Lösung dieses Problems erfolgt in zwei Schritten. Zunächst hat man für die mittlere Krümmung H von r die Weylsche Ungleichung ([14], [17])

$$(1.9) \quad H^2 \leq \max_\Sigma \left(K - \frac{1}{4K} \Delta_2(K) \right),$$

wobei Δ_2 den zu ds^2 gehörigen Beltrami-Operator bedeutet. Dies liefert eine Abschätzung von $\|\rho\|_2^\Omega$ durch $\|ds\|_4^\Omega$. Nach einem Theorem von Nirenberg [13] über elliptische Differentialgleichungen in zwei Variablen folgt daraus die gesuchte Ungleichung für $\|\rho\|_{2, \nu}^{\Omega'}$ und damit die Lösung des Weylschen Einbettungsproblems für eine Metrik $ds^2 \in C^4(\Sigma)$.

Der Weylsche Beweis der Ungleichung (1.9) beruht auf einer scharfsinnigen Anwendung des Maximumprinzips und setzt voraus, daß die Gleichungen (1.5) auf ganz Σ gelten. Es erhebt sich die Frage, ob auch ähnlich wie beim Nirenbergschen Theorem eine *innere* Abschätzung der zweiten Ableitungen von ρ möglich ist. Das würde bedeuten, daß bereits das Bestehen der Gleichung (1.6) in Ω eine Abschätzung

für $\|\rho\|_{2,\nu}^{\Omega'}$ ($\Omega' \subset\subset \Omega$) nach sich zieht. Die naheliegende Vermutung, daß der Monge-Ampèresche Charakter von (1.6) dafür ausreicht, erweist sich als falsch. Das Problem der inneren Abschätzungen für elliptische Monge-Ampèresche Gleichungen ist zuerst von H. Lewy ([9], [10]) in Angriff genommen worden. Für eine spezielle Klasse analytischer Monge-Ampèrescher Gleichungen, die die Darboux'sche Gleichung (1.6) enthält, konnte er innere Abschätzungen der zweiten und höheren Ableitungen beweisen, allerdings nicht explizit, sondern in Form von Kompaktheitsaussagen. Unser Ziel besteht in der lokalen Abschätzung der Höldernormen $\|z\|_{2,\nu}^{\Omega'}$ durch die C^1 -Norm $\|z\|_1^{\Omega}$ und die Daten für eine Klasse Monge-Ampèrescher Gleichungen (1.3), die die Lewysche Klasse enthält (Satz 1 und Satz 2). Dabei werden wir anstelle von $\Omega' \subset\subset \Omega$ nur $\Omega' \subseteq \Omega$ voraussetzen. Solche Abschätzungen sind auch für die Lösungen von Randwertaufgaben geeignet. Für eine offene, beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ setzen wir

$$\Omega_d = \{(x, y) \in \Omega : \text{dist}((x, y), \partial\Omega) > d\}.$$

Voraussetzung (V₁). Die Koeffizienten $A = A(x, y, z, p, q), \dots, E = E(x, y, z, p, q)$ von (1.3) gehören zur Klasse $C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^3)$ und genügen für $(x, y) \in \bar{\Omega}$ und $|z|, |p|, |q| \leq R < \infty$ den Ungleichungen

$$(1.10) \quad |A|, \dots, |E|; |A_x|, \dots, |E_q| \leq \lambda(R) < \infty.$$

Voraussetzung (V₂). Für $(x, y, z, p, q) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^3$ hat man die Strukturbedingungen

$$(1.11) \quad \begin{cases} \omega_1(x, y) = A_p, \\ \omega_2(x, y) = A_q + 2B_p \\ \omega_3(x, y) = C_p + 2B_q \\ \omega_4(x, y) = C_q, \end{cases}$$

wobei die Funktionen $\omega_1, \dots, \omega_4$ zur Klasse $C^1(\bar{\Omega})$ gehören und den Ungleichungen

$$(1.12) \quad \|\omega_k\|_1^{\Omega} \leq \alpha < \infty \quad (k = 1, \dots, 4)$$

genügen.

Satz 1. Sei $z = z(x, y) \in C^2(\Omega)$ eine Lösung von (1.3) mit

$$(1.13) \quad \|z\|_1^{\Omega} \leq \gamma \leq \infty,$$

wobei A, \dots, E den Voraussetzungen (V₁) und (V₂) genügen. Außerdem sei

$$(1.14) \quad D = AC - B^2 + E \geq \mu > 0$$

für $(x, y) \in \Omega, z = z(x, y), p = p(x, y), q = q(x, y)$. Dann hat man für $d > 0$ und $0 < \nu < 1$ eine Ungleichung der Form

$$(1.15) \quad \|z\|_{2,\nu}^{\Omega_d} \leq \Theta = \Theta(\lambda(R); \alpha, \gamma, \mu, \nu, d) < \infty.$$

In etwas schärferer Form findet sich Satz 1 in der Arbeit [2]. Um Aussagen am Rand $\partial\Omega$ zu beweisen, gehen wir aus von zwei offenen, beschränkten Mengen $\Omega, O \subset \mathbb{R}^2$ mit $\partial\Omega \cap O \neq \emptyset$ und setzen $G = \Omega \cap O$ sowie $G(d) = \Omega \cap O_d$. $\partial\Omega \cap O$ sei

C^3 -regulär. Das bedeutet, daß sich diese Menge lokal als Nullstellenmenge reellwertiger Funktionen $g \in C^3$ mit $\nabla g \neq 0$ darstellen läßt.

Voraussetzung (V_3). Für $(x, y) \in \partial\Omega \cap O$ hat man die Ungleichung

$$(1.16) \quad k(A, B, C; x, y) = \omega_1 \nu_1^3 + \omega_2 \nu_1^2 \nu_2 + \omega_3 \nu_1 \nu_2^2 + \omega_4 \nu_2^3 + \kappa \geq \beta > 0.$$

Dabei ist $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ die äußere Normale in $\partial\Omega$, und $\kappa = \kappa(x, y)$ ist die Krümmung von $\partial\Omega$ im Punkt (x, y) .

Dann läßt sich folgendes beweisen [6, Satz 2]:

Satz 2. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt. Außerdem genüge (Ω, O) der Bedingung (V_3), und es sei $z \in C^0(\bar{G})$ mit $z(x, y) = h(x, y)$ für $(x, y) \in \partial\Omega \cap O$ und $h \in C^3(\bar{G})$. Dann gehört die Funktion z zur Klasse $C^{2,\nu}(\bar{G}(d))$ für $d > 0$ und $0 < \nu < 1$, und man hat eine Abschätzung der Form*

$$(1.17) \quad \|z\|_{2,\nu}^{\bar{G}(d)} \leq \Theta < \infty,$$

wobei Θ nur von den Größen γ, μ, ν, d und den Daten $(\Omega, O, h; A, \dots, E)$ abhängt.

Die letzte Ungleichung bedarf einer Präzisierung, auf die wir hier nicht eingehen wollen.

Bemerkungen zu Satz 1 und Satz 2.

(1) Die Ungleichung (1.17) geht über eine a priori-Abschätzung insofern hinaus, als die Endlichkeit der linken Seite nicht vorausgesetzt wird. Wählt man speziell für O eine Umgebung eines Randpunktes $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$, so erhält man eine Aussage über das Randverhalten von z bei (x_0, y_0) und eine Abschätzung der $C^{2,\nu}$ -Norm von z in einer Halbumgebung von (x_0, y_0) . Wählt man für O eine Kreisscheibe von hinreichend großem Radius, so geht (1.17) in eine Abschätzung für $\|z\|_{2,\nu}^{\Omega}$ über.

(2) Die Voraussetzungen (V_1) und (V_2) sind für die Darboux'sche Gleichung (1.6) erfüllt, wenn die Metrik ds^2 zur Klasse C^3 gehört. Die Koeffizienten A, B, C hängen dann linear von p, q ab. Satz 1 liefert dann eine Abschätzung für die mittlere Krümmung $|H|$ einer geschlossenen Eifläche durch die C^3 -Norm der Metrik ds^2 , also eine Verschärfung der Weyl'schen Ungleichung (1.9), und damit die Lösung des Weyl'schen Einbettungsproblems für eine Metrik der Klasse C^3 . Wie Sabitov [15] und F. Schulz [16] mit anderen Methoden bewiesen haben, läßt sich diese Voraussetzung sogar noch abschwächen. Es braucht nur $ds^2 \in C^{2,\nu}$ mit $\nu \in (0, 1)$ gefordert zu werden. Ferner läßt sich zeigen, daß für die Darboux'sche Gleichung (1.6) die Größe k in Voraussetzung (V_3) bis auf einen positiven Faktor mit der geodätischen Krümmung $\kappa_g(\partial\Omega, ds^2)$ übereinstimmt. (V_3) kann also in diesem Fall durch

$$(1.18) \quad \kappa_g(\partial\Omega, ds^2) \geq \beta > 0$$

ersetzt werden.

(3) Wenn A, \dots, E von p, q unabhängig sind, entfällt (V_2), und (1.13) läßt sich abschwächen zu

$$(1.19) \quad \|z\|_0^{\Omega} \leq \gamma < \infty.$$

(V_3) ist dann mit $\kappa \geq \beta > 0$ äquivalent (vgl. [6, Satz 3]).

2 Elliptische Systeme

Die Beweise der Sätze 1 und 2 machen Gebrauch von Aussagen über elliptische Systeme in zwei Variablen, die von unabhängigem Interesse sind. Es handelt sich dabei um Systeme der Form

$$(2.1) \quad \Delta x = h_1(x, y)(x_u^2 + x_v^2) + h_2(x, y)(x_u y_u + x_v y_v) \\ + h_3(x, y)(y_u^2 + y_v^2) + h_4(x, y)(x_u y_v - x_v y_u),$$

$$(2.2) \quad \Delta y = \tilde{h}_1(x, y)(x_u^2 + x_v^2) + \tilde{h}_2(x, y)(x_u y_u + x_v y_v) \\ + \tilde{h}_3(x, y)(y_u^2 + y_v^2) + \tilde{h}_4(x, y)(x_u y_v - x_v y_u),$$

die zuerst von H. Lewy [11] im Zusammenhang mit seinen Arbeiten über Monge-Ampèresche Gleichungen untersucht worden sind. Ein spezieller Fall sind die harmonischen Abbildungen ($h_1 = \dots = \tilde{h}_4 = 0$). Lewy [11] zeigte, daß eine lokal injektive Abbildung $(u, v) \rightarrow (x, y)$, die dem obigen System mit analytischen Koeffizienten h_1, \dots, \tilde{h}_4 genügt, stets eine nichtverschwindende Funktionaldeterminante $J = J(u, v)$ besitzt. Wie in [4] bewiesen wurde, gilt dieses Theorem auch für den Fall, daß die Koeffizienten h_1, \dots, \tilde{h}_4 beschränkt sind und die assoziierten Funktionen

$$\varphi_1 = \tilde{h}_1, \varphi_2 = h_1 - \tilde{h}_2, \varphi_3 = h_2 - \tilde{h}_3, \varphi_4 = h_3$$

einer Lipschitzbedingung genügen, also insbesondere für Koeffizienten $h_1, \dots, \tilde{h}_4 \in C^{0,1}$. Eine Anwendung dieses Satzes auf das Studium isolierter Singularitäten von Lösungen Monge-Ampèrescher Gleichungen findet sich in [7]. Es ist leicht einzusehen, daß der Lewysche Satz falsch wird, wenn man nur $h_1, \dots, \tilde{h}_4 \in C^{0,\mu}$, $\mu \in (0, 1)$ voraussetzt. Ebenso verliert er seine Gültigkeit für harmonische Abbildungen in höheren Dimensionen. J.C. Wood [18] hat dafür ein explizites Gegenbeispiel konstruiert:

Die Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \ni (u, v, w) \rightarrow (u^3 - 3uw^2 + vw, v - 3uw, w) \in \mathbb{R}^3$$

ist harmonisch, injektiv, und es gilt $J = 3u^2$.

Von Bedeutung für die Gewinnung von a priori Schranken bei Monge-Ampèreschen Gleichungen ist die Frage, ob sich unter geeigneten Normierungsbedingungen die Größe $|J|$ durch eine positive Zahl nach unten abschätzen läßt. Zur Abkürzung setzen wir $B(r) = \{w \in \mathbb{C} : |w| < r\}$ und $B = B(1)$. Wir gehen von folgender Definition aus.

Definition 1. $\Gamma = \Gamma(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ ist die Klasse aller topologischen Abbildungen $z = z(w) = x(u, v) + iy(u, v)$ ($w = u + iv$) von \bar{B} auf sich mit folgenden Eigenschaften:

(a) $x(u, v)$ und $y(u, v)$ gehören zur Klasse $C^2(B)$ und sind Lösungen von (2.1) – (2.2), wobei $h_1, \dots, \tilde{h}_4; \varphi_1, \dots, \varphi_4$ den Ungleichungen

$$(2.3) \quad |h_1|, \dots, |\tilde{h}_4| \leq \lambda_0 < \infty \quad (z \in \bar{B})$$

und

$$(2.4) \quad \|\varphi_1\|_{0,1}^B, \dots, \|\varphi_4\|_{0,1}^B \leq \lambda_1 < \infty$$

genügen.

(b) Es ist $z(0) = 0$ und

$$(2.5) \quad \iint_B (|z_u|^2 + |z_v|^2) dudv \leq \lambda_2 < \infty.$$

Dann läßt sich folgendes beweisen [5].

Satz 3. Sei $z = z(w) \in \Gamma(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. Dann hat man für $0 < r < 1$ und $0 < \nu < 1$ Ungleichungen der Form

$$(2.6) \quad \|z\|_{1,\nu}^{B(r)} \leq \Theta_0(\lambda_0, \lambda_2, \nu, r) < \infty$$

und

$$(2.7) \quad |J(w)| \geq \Theta_1(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, r) > 0 \quad (|w| < r).$$

Wegen (b) sind die Funktionen $z \in \Gamma$ in \bar{B} gleichgradig stetig (Lemma von Courant-Lebesgue). Die Abschätzung (2.6) folgt dann direkt aus der Differentialungleichung

$$(2.8) \quad |\Delta z| \leq 4\lambda_0 (|z_u|^2 + |z_v|^2).$$

Tiefer liegt die Ungleichung (2.7). Der in [5] gegebene Beweis beruht auf dem Ähnlichkeitsprinzip für eine Klasse pseudoanalytischer Funktionen (similarity principle) und liefert eine explizite Konstruktion der Funktion Θ_1 . Es läßt sich zeigen, daß auch im Falle harmonischer Abbildungen auf die Bedingung (2.5) nicht verzichtet werden kann.

Es besteht ein fundamentaler Zusammenhang zwischen der Monge-Ampèreschen Gleichung (1.3) und dem elliptischen System (2.1) – (2.2). Dieser läßt sich folgendermaßen beschreiben: Sei φ die zu (1.3) gehörige charakteristische Differentialform, also

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \varphi &= F_t dx^2 - F_s dx dy + F_r dy^2 \\ &= (C + r) dx^2 - 2(B - s) dx dy + (A + t) dy^2. \end{aligned}$$

Wegen $D > 0$ ist diese (positiv oder negativ) definit. Führt man anstelle von x, y neue Variable (charakteristische Parameter) ein, so daß

$$(2.10) \quad \varphi = \Lambda(du^2 + dv^2) \quad (\Lambda \neq 0)$$

gilt, so genügen die Funktionen $x = x(u, v)$ und $y = y(u, v)$ dem System (2.1) – (2.2) mit

$$(2.11) \quad \begin{cases} h_\nu(x, y) = k_\nu(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y)) \\ \tilde{h}_\nu(x, y) = \tilde{k}_\nu(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y)). \end{cases} \quad (\nu = 1, \dots, 4).$$

Dabei sind k_ν und \tilde{k}_ν gewisse nichtlineare Differentialausdrücke erster Ordnung in A, \dots, E . Insbesondere hat man die Gleichungen

$$(2.12) \quad \begin{cases} \tilde{k}_1 = C_q, & k_1 - \tilde{k}_2 = C_p + 2B_q, \\ k_2 - \tilde{k}_3 = -(A_q + 2B_p), & k_3 = A_p \end{cases}$$

(vgl. dazu [2]). Unter Ausnutzung dieses Zusammenhangs läßt sich Satz 1 direkt mit Hilfe des Uniformisierungsprinzips auf Satz 3 zurückführen [2]. Schwieriger zu beweisen sind die Randaussagen (Satz 2). Auch hier läßt sich die Uniformisierungsmethode anwenden [6]. Für die Untersuchung der zweiten Ableitungen r, s, t in der Umgebung des Randes $\partial\Omega$ reicht jedoch das System (2.1) – (2.2) allein nicht aus. Vielmehr muß auf das elliptische System erster Ordnung zurückgegriffen werden, dem die Größen x, y, z, p, q als Funktionen der charakteristischen Parameter (u, v) genügen. In formaler Hinsicht ist die Situation ähnlich wie im hyperbolischen Fall [1, Kap. V, Anhang §4].

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir noch die Darboux'sche Differentialgleichung (1.6) etwas genauer betrachten. Wie aus ihrer Herleitung ersichtlich ist, ist die zugehörige charakteristische Form Φ zur zweiten Fundamentalform der Fläche r proportional. Es gilt also

$$(2.13) \quad \Phi = \chi(L du^2 + 2M dudv + N dv^2)$$

mit $\chi \neq 0$. Somit fallen die charakteristischen Parameter mit den konjugiert-isothermen Parametern (α, β) der Fläche r zusammen, und die Gleichungen (2.1) – (2.2) reduzieren sich auf das Darboux'sche System

$$(2.14) \quad \begin{cases} \Delta u + (\Gamma_{11}^1 + \frac{K_u}{2K})(u_\alpha^2 + u_\beta^2) + (2\Gamma_{12}^1 + \frac{K_v}{2K})(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + \Gamma_{22}^1(v_\alpha^2 + v_\beta^2) = 0 \\ \Delta v + \Gamma_{11}^2(u_\alpha^2 + u_\beta^2) + (2\Gamma_{12}^2 + \frac{K_u}{2K})(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + (\Gamma_{22}^2 + \frac{K_v}{2K})(v_\alpha^2 + v_\beta^2) = 0 \end{cases}$$

Die Koeffizienten k_1, \dots, \tilde{k}_4 hängen also nicht von z, p, q ab. Dies ist die von Lewy [10] betrachtete Klasse Monge-Ampèrescher Gleichungen.

Das System (2.14) läßt sich auch direkt zur Konstruktion isometrischer Einbettungen $r: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ von ds^2 verwenden². Dabei stützen wir uns auf den folgenden elementaren

Hilfssatz 1. *Es sei $w: \bar{B} \rightarrow \bar{B}$ ($w = u(\alpha, \beta) + iv(\alpha, \beta)$) ein Homöomorphismus der Klasse $C^2(B)$, so daß die Funktionen u, v dem System (2.14) genügen. Dann gibt es eine reguläre isometrische Einbettung $r: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ von ds^2 der Klasse C^3 , so daß $r^* = r \circ w$ eine konjugiert-isotherme Parametrisierung von r darstellt.*

Der folgende Satz findet sich in etwas allgemeinerer Form in der Arbeit [3].

² vgl. [3]. Eine Verallgemeinerung auf den Fall Riemannscher Räume konstanter Krümmung findet sich in [8].

Satz 4. Sei $ds^2 \in C^3(\bar{B})$ mit $K > 0$ und

$$(2.15) \quad \kappa_g(\partial B, ds^2) \geq 0 \quad \forall w \in \partial B.$$

Dann gibt es zu jedem Homöomorphismus $t: \partial B \rightarrow \partial B$ der Klasse $C^1(\partial B)$ einen Homöomorphismus $w: \bar{B} \rightarrow \bar{B}$ der Klasse $C^2(B)$ mit $w|_{\partial B} = t$, so daß in B die Gleichungen (2.14) gelten.

Es gibt also zu jedem Homöomorphismus $t: \partial B \rightarrow \partial B$ der Klasse $C^1(\partial B)$ eine isometrische Einbettung $r: \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ von ds^2 . Sind t und \tilde{t} zwei verschiedene Homöomorphismen mit $t(\zeta_j) = \tilde{t}(\zeta_j)$ ($j = 1, 2, 3$), wobei $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ drei verschiedene Punkte von ∂B bedeuten, so sind die zugehörigen Flächen r und \tilde{r} inkongruent.

3 Offene Fragen

Es ergeben sich eine Reihe von offenen Problemen. Wir beschränken uns auf solche, die nicht ausschließlich technischer Natur sind.

(1) Man verallgemeinere Satz 1 und Satz 2 auf Systeme Monge-Ampèrescher Gleichungen mit allgemeineren Randbedingungen und behandle Randwertaufgaben für das spezielle System (1.5) sowie für Klassen nichtlinearer Systeme erster Ordnung in Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

(2) Der in [3] gegebene Beweis von Satz 4 erfolgt mit topologischen Methoden (Abbildungsgrad von Leray-Schauder). Es erhebt sich die Frage nach der Eindeutigkeit der Zuordnung $t \rightarrow w$. In engem Zusammenhang damit steht die Frage, ob sich zwei beliebige isometrische Realisierungen von ds^2 durch eine stetige Deformation (Verbiegung) in einander überführen lassen.

(3) Man lasse in Satz 4 die Bedingung (2.15) fallen und gebe eine möglichst umfassende Klasse $\mathcal{M} = \mathcal{M}(ds^2)$ von Homöomorphismen $t: \partial B \rightarrow \partial B$ an, für die die Aussagen von Satz 4 gelten. Insbesondere betrachte man den Fall $\kappa_g < 0$.

Literatur

- [1] Courant, R., Hilbert, D.: Methoden der Mathematischen Physik II. Berlin: Springer-Verlag 1937
- [2] Heinz, E.: Interior estimates for solutions of elliptic Monge-Ampère equations. Proc. Sympos. Pure Math. 4 (1961), 149 – 155
- [3] Heinz, E.: Existence theorems for one-to-one mappings associated with elliptic systems of second order II. J. Analyse Math. 17 (1966), 145 – 184
- [4] Heinz, E.: Über das Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante bei einer Klasse eindeutiger Abbildungen. Math. Z. 105 (1968), 87 – 89
- [5] Heinz, E.: Zur Abschätzung der Funktionaldeterminante bei einer Klasse topologischer Abbildungen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. II. Math.-Phys. Kl. 1968, 183 – 197.
- [6] Heinz, E.: Lokale Abschätzungen und Randverhalten von Lösungen elliptischer Monge-Ampèrescher Gleichungen. J. reine angew. Math. 438 (1993), 1 – 29
- [7] Heinz, E., Beyerstedt, R.: Isolated singularities of Monge-Ampère equations. Calc. Var. 2 (1994), 241 – 247
- [8] Herb, Th.: The Darboux System and Embedding Problems in three-Dimensional Riemannian Spaces. Math. Z. 204 (1990), 357 – 371

- [9] Lewy, H.: A priori limitations for solutions of Monge-Ampère equations I. Trans. Amer. Math. Soc. 37 (1935), 417 – 434
- [10] Lewy, H.: A priori limitations for solutions of Monge-Ampère equations II. Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 365 – 374
- [11] Lewy, H.: On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings. Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), 689 – 692
- [12] Lewy, H.: On the existence of a closed convex surface realizing a given Riemannian metric. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 24 (1938), 104 – 106
- [13] Nirenberg, L.: On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity. Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), 103 – 156
- [14] Nirenberg, L.: The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large. Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), 337 – 394
- [15] Sabitov, I. K h.: The regularity of convex regions with a metric that is regular in the Hölder classes. Siberian Math. J. 17 (1976), 681 – 687
- [16] Schulz, F.: Über die Differentialgleichung $rt - s^2 = f$ und das Weylsche Einbettungsproblem. Math. Z. 179 (1982), 1 – 10
- [17] Weyl, H.: Über die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch ihr Linienelement. Selecta Hermann Weyl, S. 148 – 178. Basel-Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1956
- [18] Wood, J. C.: Lewy's Theorem fails in higher dimensions. Math. Scand. 69 (1991), 166

E. Heinz
Bunsenstr. 3/5
Math. Inst. der Universität
37073 Göttingen

(Eingegangen 2. 11. 1995)

Recent developments on characteristic classes of flat bundles on complex algebraic manifolds

Hélène Esnault, Essen

Refined characteristic classes of flat bundles have been recently considered by several authors. The most striking example is given by Reznikov's solution to Bloch's conjecture on smooth projective varieties (see section 3). A purely algebraic theory has been developed as well (see section 4). In this note, we present an account of this. We recall at the beginning older work on topological classes (see section 2), necessary to understand the background of more recent results and questions.

1 Generalities

1.1

If X_{an} is a complex analytic manifold, a rank n flat bundle $(E_{\text{an}}, \nabla_{\text{an}})$ is a rank n analytic bundle E_{an} endowed with a \mathbb{C} linear map

$$\nabla_{\text{an}} : E_{\text{an}} \rightarrow \Omega_{X_{\text{an}}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\text{an}}}} E_{\text{an}}$$

with values in the analytic one forms $\Omega_{X_{\text{an}}}^1$, fulfilling the Leibniz condition

$$\nabla_{\text{an}}(\lambda e) = d\lambda \otimes e + \lambda \nabla_{\text{an}}(e)$$

for λ and e local sections of the analytic functions $\mathcal{O}_{X_{\text{an}}}$ and E_{an} . ∇_{an} extends to

$$\nabla_{\text{an}} : \Omega_{X_{\text{an}}}^i \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\text{an}}}} E_{\text{an}} \rightarrow \Omega_{X_{\text{an}}}^{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\text{an}}}} E_{\text{an}}$$

via the sign convention

$$\nabla_{\text{an}}(\omega e) = d\omega \otimes e + (-1)^i \omega \wedge \nabla_{\text{an}}(e)$$

for $\omega \in \Omega_{X_{\text{an}}}^i$. ∇_{an} is flat or integrable if the $\mathcal{O}_{X_{\text{an}}}$ linear map

$$\nabla_{\text{an}}^2 : E_{\text{an}} \rightarrow \Omega_{X_{\text{an}}}^2 \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\text{an}}}} E,$$

called curvature, vanishes. The local existence of n linearly independent solutions to the system ∇_{an} of linear differential equations guarantees that $L = \text{Ker} \nabla_{\text{an}}$ is a local system of complex vector spaces of dimension n over X_{an} . The corresponding monodromy representation $\rho : \pi_1(X, x) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ is defined by following solu-

tions in L along loops $\gamma \in \pi_1(X, x)$. The correspondence

$$\begin{aligned} L &\rightarrow (E_{\text{an}} = L \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{X_{\text{an}}}, \nabla_{\text{an}} = 1 \otimes d) \\ (E_{\text{an}}, \nabla_{\text{an}}) &\rightarrow L = \text{Ker} \nabla_{\text{an}} \end{aligned}$$

is known under the name of Riemann-Hilbert correspondence. (Here d is the Kähler differential).

In this article, we study flat bundles $(E_{\text{an}}, \nabla_{\text{an}})$ on analytic manifolds which arise from an algebraic structure. Crucial to our purpose is Deligne’s theorem:

Theorem 1.1 [10] *Let X be a complex algebraic manifold, and $(E_{\text{an}}, \nabla_{\text{an}})$ be a flat bundle on the associated analytic manifold X_{an} . Then there is an algebraic bundle E and an algebraic connection*

$$\nabla : E \rightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} E$$

such that $(E, \nabla)_{\text{an}} = (E_{\text{an}}, \nabla_{\text{an}})$.

A connection $\nabla_{\text{an}} : E_{\text{an}} \rightarrow \Omega_{X_{\text{an}}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\text{an}}}} E_{\text{an}}$ can be interpreted as a $\mathcal{O}_{X_{\text{an}}}$ splitting of the Atiyah extension

$$0 \rightarrow \Omega_{X_{\text{an}}}^1 \otimes E_{\text{an}} \rightarrow \mathcal{P}^1(E_{\text{an}}) \rightarrow E_{\text{an}} \rightarrow 0$$

of principal parts of E_{an} (see [1], [10]). One says that ∇ is an algebraic connection if it is induced by an algebraic splitting of the Atiyah extension $\mathcal{P}^1(E)$ of principal parts of E . It implies automatically that the curvature is algebraic.

Thus Deligne’s theorem is an application of Serre’s GAGA theorem [22], when X is proper. But when X is not proper, it contains a large part of the theory of differential equations with regular singularities.

A more precise formulation is

Theorem 1.2 *In the above situation, for each good compactification $j : X \hookrightarrow \bar{X}$ such that \bar{X} is smooth and $\bar{X} - X = D$ is a normal crossing divisor, there are algebraic extensions $(\bar{E}, \bar{\nabla})$, $\bar{\nabla} : \bar{E} \rightarrow \Omega_{\bar{X}}^1(\log D) \otimes \bar{E}$ of $(E_{\text{an}}, \nabla_{\text{an}})$.*

(One can even determine all possible such extensions [16], Appendix C).

1.2

Let $CH^i(X)$ be the Chow group of codimension i cycles on X modulo rational equivalence. The algebraicity of flat bundles 1.1 allows to define Chern classes

$$c_i^{CH}(E) \in CH^i(X).$$

This gives at least two guide lines in the interest for algebraic bundles in algebraic geometry.

- They grasp the part of the topology of X_{an} encoded in finite representations of the fundamental group.
- They possibly give interesting algebraic cycles on X .

The purpose of this article is to give the state of the art on the second question. The first one had a spectacular development in the last decade, due to work by Narasimhan-Seshadri, Donaldson, Uhlenbeck-Yau, Hitchin, Corlette, Simpson and others (see [23]).

1.3 Examples

Flat bundles in algebraic geometry arise naturally as Gauß-Manin bundles or as bundles coming from finite coverings.

- Let $\varphi : Y \rightarrow X$ be a smooth proper family over X smooth. Then for each $i \geq 0$,

$$R^i \varphi_* \Omega_{Y/X}^*$$

is endowed with the Gauß-Manin connection. When one has a flat (in the sense of algebraic geometry) compactification $\bar{\varphi} : \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ of φ such that $X \hookrightarrow \bar{X}$ is a good compactification, then

$$R^i \bar{\varphi}_* \Omega_{\bar{Y}/\bar{X}}^*(\log(\bar{Y} - Y))$$

is a natural logarithmic extension of $R^i \varphi_* \Omega_{Y/X}^*$.

- Let $\varphi : Y \rightarrow X$ be an étale covering over X smooth. Then $\varphi_*(\mathcal{O}_Y, d)$ splits into a sum of flat bundles. When one has a flat compactification $\bar{\varphi} : \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ of φ such that $X \hookrightarrow \bar{X}$ is a good compactification, then $\varphi_*(\mathcal{O}_Y, d_{\log})$ splits into a sum of flat bundles with a logarithmic connection along $\bar{X} - X$ extending the factors over X , where

$$d_{\log} : \mathcal{O}_{\bar{Y}} \rightarrow \Omega_{\bar{Y}}^1(\log(\bar{Y} - Y)).$$

2 Topology

The topological Chern classes $c_i^{\mathbf{Z}}(E) \in H^{2i}(X_{\text{an}}, \mathbf{Z})$ of flat bundles are torsion. In fact, Chern-Weil theory expressing the class in

$$H^{2i}(X_{\text{an}}, \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} = H^{2i}(X_{\text{an}}, \mathbf{C}) = \text{de Rham cohomology group } H_{DR}^{2i}(X_{\text{an}})$$

as the cohomology class of a smooth differential form associated to any connection implies that $c_i^{\mathbf{Z}}(E) \otimes \mathbf{Q} = 0$. Grothendieck [19], Théorème 4.8, gives bounds for the torsion of $c_i^{\mathbf{Z}}(E)$ in terms of invariants of the Galois group of the field of definition of (X, E) by reduction modulo a prime p .

A deep explanation of the torsion of $c_i^{\mathbf{Z}}(E)$ when X is proper is given by

Theorem 2.1 (Deligne-Sullivan) ([11]) *Let X be proper smooth over \mathbf{C} (in fact a compact polyedron would be sufficient). Let (E, ∇) be a flat bundle. Then there is an étale cover $Y \rightarrow X$ (explicitly described in terms of a subring A of \mathbf{C} of finite type such that the monodromy representation*

$$\rho : \pi_1(X, x) \rightarrow GL(n, A)$$

is A valued) such that $E|_Y$ is trivialized as a C^∞ bundle.

This is in contrast to the algebraic situation. Deligne gives the following example. Let X be a smooth proper curve, and E be a non torsion element in $\text{Pic}^0 X$, the group of rank 1 vector bundles of degree ($= c_1$) 0. Then if $Y \rightarrow X$ is finite and $E|_Y \simeq \mathcal{O}_Y$, E is a direct factor of \mathcal{O}_Y as a \mathcal{O}_X module. If $Y \rightarrow X$ is étale, this contradicts that E is not torsion. If $Y \rightarrow X$ ramifies, then a power of E has to be an ideal sheaf on X , so is not in $\text{Pic}^0 X$.

3 Analytic Structure

3.1 Deligne-Beilinson cohomology

The Deligne-Beilinson cohomology $H_D^a(X, \mathbb{Z}(b))$ ([2], [17]) encodes the topological cohomology $H^i(X_{\text{an}}, \mathbb{Z})$ and its Hodge filtration F^i coming from the analytic structure of the algebraic manifold. It is naturally presented as an extension

$$(1) \quad 0 \rightarrow \frac{H^{a-1}(X_{\text{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})}{F^b} \rightarrow H_D^a(X, \mathbb{Z}(b)) \rightarrow \text{Ker}(F^b H^a(X_{\text{an}}, \mathbb{C}) \rightarrow H^a(X_{\text{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})) \rightarrow 0$$

The right hand side group is discrete, whereas the left hand side group is endowed with the classical topology coming from \mathbb{C} . For example, when X is proper, then the group $H_D^{2i}(X, \mathbb{Z}(i))$ is an extension of the image in the de Rham cohomology of the group of codimension i Hodge cycles by a group, which is itself an extension of the torsion in $H^{2i}(X_{\text{an}}, \mathbb{Z})$ by Griffiths' intermediate jacobian

$$H^{2i-1}(X_{\text{an}}, \mathbb{C})/H^{2i-1}(X_{\text{an}}, \mathbb{Z}) + F^i.$$

The latter is a complex torus, sometimes (e.g. for $i = 1$ or $i = d, d = \dim X$) an abelian variety. (It would be easier to say that $H_D^{2i}(X, \mathbb{Z}(i))$ is an extension of the Hodge cycles by the intermediate jacobian, but in the above presentation, we distributed the torsion differently).

There is a cycle map

$$CH^i(X) \rightarrow H_D^{2i}(X, \mathbb{Z}(i)).$$

So flat bundles have classes $c_i^D(E) \in H^{2i-1}(X_{\text{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})/F^i$ (see equation 1). For example, for $i = 1$, $c_1^D(E) \in \frac{H^1(X_{\text{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})}{F^1}$. When $i = 1$ and X is proper, then the intermediate jacobian is just the classical jacobian $\text{Pic}^0 X$.

3.2

A key conjecture by Bloch and Beilinson ([4], [2]) asserts that if X is projective smooth, there should exist on $CH^i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ a filtration

$$0 = F^{i+1} \subseteq F^i \subset \dots \subset F^1 \subset F^0 = CH^i(X) \otimes \mathbb{Q}$$

compatible with products and correspondences. Then F^1 should be $\text{Ker} CH^i(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^{2i}(X, \mathbb{C})$, in particular $F^1 CH^1(X) \otimes \mathbb{Q} = \text{Pic}^0(X) \otimes \mathbb{Q}$, F^2 should be $\text{Ker} CH^i(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_D^{2i}(X, \mathbb{Q}(i))$. So if one had a splitting principle for flat bundles,

in the sense that one could reduce the computation of $c_i^{CH}(E) \in CH^i(X)$ to the one of a direct sum of rank 1 flat bundles then one would have

“Conjecture” (Bloch) [3] $c_i^{CH}(E) \in F^i CH^i(X) \otimes \mathbb{Q}$ when (E, ∇) is flat on X projective smooth.

As one does not know the existence of the filtration, and as flat bundles are far from “splitting” as sums of rank 1 flat bundles, the “conjecture” does not mean anything precise, except of

Conjecture (Bloch) [3] $c_i^{\mathcal{D}}(E) \otimes \mathbb{Q} = 0$ for $i \geq 2$ when X is projective smooth.

3.3

In his seminal paper [3] introducing the dilogarithm function in algebraic geometry, not only Bloch states the above conjectures, but he proves at the same time

Theorem 3.1 (Bloch) [3] *If $i = 2$ and X is proper smooth, there is a countable subgroup $\Delta^* \subset \mathbb{C}/\mathbb{Q}$ such that*

$$c_2^{\mathcal{D}}(\text{flatbundles}) \in \text{Im } H^3(X_{\text{an}}, \Delta^*) \text{ in } \frac{H^3(X_{\text{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})}{F^2}.$$

In fact, even if X is not proper, Bloch shows that

$$\text{Im } c_2^{\mathcal{D}}(\text{flat bundles}) \text{ in } \frac{H^3(X_{\text{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Q})}{\mathbb{H}^3(X_{\text{an}}, \Omega_{X_{\text{an}}}^{\geq 2})} \in \text{Im } H^3(X, \Delta^*).$$

Also, if X is proper, one can refer only to the Hodge theory to show

Theorem 3.2 [15] *On X proper smooth, the classes $c_i^{\mathcal{D}}$ (bundles with algebraic connection) form a countable subset of $H_{\mathcal{D}}^{2i}(X, \mathbb{Z}(i))$.*

(This theorem is of no use as one does not know any example of an algebraic bundle on a proper smooth variety which is not flat but carries a non flat algebraic connection).

Reznikov made a major progress answering positively Bloch’s conjecture. His result is stronger. Not only $c_i^{\mathcal{D}}(E)$ is torsion for $i \geq 2$ but some good analytic classes in $H^{2i-1}(X_{\text{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ mapping to $c_i^{\mathcal{D}}(E)$ are torsion as well (see 3.5).

3.4 Secondary Analytic Classes

A rank 1 flat bundle is equivalent to a representation

$$\rho \in \text{Hom}(\pi_1(X, x), \mathbb{C}^*) = H^1(X_{\text{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}).$$

This class ρ maps to the class $c_1^{\mathcal{D}}(E) \in \frac{H^1(X_{\text{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})}{F^1}$ when the algebraic bundle E underlies the analytic one (see theorem 1.1)). General functorial and additive classes in $H^{2i-1}(X_{\text{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ can be constructed for $i \geq 1$. I know of four ways.

1. The original one of Cheeger-Simons [7] consists in defining a group of differential characters $\hat{H}^j(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (or $\hat{H}^j(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$) on a differentiable manifold X , which is an extension of global C^∞ \mathbb{R} (or \mathbb{C}) valued forms of degree j with \mathbb{Z} periods by $H^{j-1}(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (or $H^{j-1}(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$). They show that flat bundles (E, ∇) on the C^∞ manifold X have classes $\hat{c}_j(E, \nabla) \in H^{2j-1}(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \hat{H}^{2j}(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$. (One defines exactly similarly classes of flat bundles in $H^{2j-1}(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \subset \hat{H}^{2j}(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$). Those classes are smooth and do not refer to an analytic structure. If X is a proper smooth algebraic manifold, then Bloch for unitary bundles ([3]) and Gillet-Soulé for non unitary ones ([18]) show that those classes map to $c_i^{\mathcal{D}}(E)$.
2. Karoubi ([20]) constructed classes with K theory.
3. Beilinson ([2]) observes that the Deligne-Beilinson cohomology $H_{\mathcal{D}}^{2i}(BG_\bullet, \mathbb{Z}(i))$ of the discrete simplicial scheme BG_\bullet , $G = GL(n, \mathbb{C})$, is just $H^{2i-1}(BG_\bullet, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$. This defines classes by universality.
4. One can also develop a modified splitting principle ([12], [13]) to define functorial and additive classes $c_i^{\text{an}}(E, \nabla) \in H^{2i-1}(X_{\text{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$.

One shows ([14], [12], [20]) that the classes defined by the splitting principle, by universality and by K theory are the same.

3.5

Now we can express Reznikov’s theorem.

Theorem 3.3 (Reznikov) [21] *On X projective smooth, $\hat{c}_i(E, \nabla)$ and $c_i^{\text{an}}(E, \nabla)$ lie in*

$$H^{2i-1}(X_{\text{an}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset H_{\mathcal{D}}^{2i-1}(X, \mathbb{Z}(i))$$

for $i \geq 2$.

One may apply his method to show

Theorem 3.4 [9] *On X smooth $\hat{c}_i(E, \nabla)$ and $c_i^{\text{an}}(E, \nabla)$ lie in $H^{2i-1}(X_{\text{an}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (which no longer injects into $H_{\mathcal{D}}^{2i}(X, \mathbb{Z}(i))$ for X not proper) for $i \geq 1$ when (E, ∇) is a \mathbb{Q} variation of Hodge structure, for example when (E, ∇) is a Gauß-Manin bundle associated to a smooth proper family (see (1.3)).*

In fact, in [9], there is a version of this on a topological manifold X .

3.6 Questions

There are many questions raised by Reznikov’s answer.

- When X is not proper, what about $c_i^{\mathcal{D}}(E)$, $c_i^{\text{an}}(E, \nabla)$?
- For (E, ∇) a \mathbb{Q} variation of Hodge structure, one has the vanishing theorem 3.4. Let $j : X \rightarrow \bar{X}$, $(\bar{E}, \bar{\nabla})$ be as in theorem 1.1. The de Rham classes $c_i^{\text{DR}}(\bar{E})$ of \bar{E} are expressible in terms of cycles supported in D with coefficients depending on the residues of $\bar{\nabla}$ along D ([16], Appendix B). Let $\mathbb{Q} \subset A \subset \mathbb{C}$ be the smallest field containing those coefficients. For example, when the residues are nilpotent, $c_i^{\text{DR}}(\bar{E}) = 0$, and $A = \mathbb{Q}$. Does one have $c_i^{\mathcal{D}}(\bar{E}) = 0$ in $H_{\mathcal{D}}^{2i}(\bar{X}, A(i))$? (See also [9]).

- When one knows that $c_i^{\text{an}}(E, \nabla) \in H^{2i-1}(X_{\text{an}}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, what does the torsion reflect exactly? (Of course this torsion is an upper bound for the torsion of the classes $c_i^{\mathbf{Z}}(E)$ (2)).
- Grothendieck’s coniveau filtration of a cohomology theory H fulfilling localization is defined by

$$N^a H(X) = \{x \in H, \exists \text{ subscheme } Z \subset X, \text{codim } Z \geq a, x|_{X-Z} = 0 \text{ in } H(X-Z)\}.$$

Bloch-Ogus theory [6] implies that $N^j H^{2i-1}(X_{\text{an}}, \mathbf{C}/\mathbf{Z}) = 0$ for $j \geq i$. So the lowest piece possibly non vanishing is $N^{i-1} H^{2i-1}(X_{\text{an}}, \mathbf{C}/\mathbf{Z})$. (For $i = 1$, $N^0 H^1(X_{\text{an}}, \mathbf{C}/\mathbf{Z}) = H^1(X_{\text{an}}, \mathbf{C}/\mathbf{Z})$ but for $i \geq 2$, the lowest piece is smaller than the whole group). When (E, ∇) comes from a finite representation of the fundamental group, then

$$c_i^{\text{an}}(E, \nabla) \in N^{i-1} H^{2i-1}(X_{\text{an}}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

for all $i \geq 1$. ([14]). The proof requires the existence of algebraic classes ([13], section 4). Does one have in general

$$c_i^{\text{an}}(E, \nabla) \in N^{i-1} H^{2i-1}(X_{\text{an}}, \mathbf{C}/\mathbf{Z})?$$

4 Algebraic Structures

4.1 Secondary Algebraic Classes

A natural question is to find classes lifting the secondary analytic classes $c_i^{\text{an}}(E, \nabla)$ as well as the most possible algebraic classes $c_i^{\text{CH}}(E) \in CH^i(X)$. This is the purpose of [13].

We denote by \mathcal{K}_i^m the image of the Zariski sheaf of Milnor K theory in the constant sheaf of Milnor K theory of the field $k(X)$ of rational functions on X . (Here X is defined over any field k). The $d \log : \mathcal{K}_1 \rightarrow \Omega_X^1$ map defined by $d \log f = \frac{df}{f}$ extends to a map $d \log : \mathcal{K}_i^m \rightarrow \Omega_X^i$.

Theorem 4.1 [13] *Let (E, ∇) be a flat connection with logarithmic poles along D . Then there are functorial and additive classes*

$$c_i(E, \nabla) \in H^i := \mathbf{H}^i(X, \mathcal{K}_i^m \xrightarrow{d \log} \Omega_X^i(\log D) \rightarrow \Omega_X^{i+1}(\log D) \rightarrow \dots)$$

lifting $c_i^{\text{CH}}(E) \in CH^i(X) = H^i(X, \mathcal{K}_i^m)$. When the field of definition of X is \mathbf{C} , there are maps

$$\begin{aligned} H^i &\rightarrow \mathbf{H}^{2i}(X_{\text{an}}, \mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\text{an}}} \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \Omega_{X_{\text{an}}}^i \rightarrow \Omega_{X_{\text{an}}}^{i+1}(\log D) \rightarrow \dots \end{aligned} \rightarrow H^{2i-1}(X_{\text{an}} - D_{\text{an}}, \mathbf{C}/\mathbf{Z})$$

taking $c_i(E, \nabla)$ to $c_i^{\text{an}}(E, \nabla)$, compatibly with the image $c_i^{\mathcal{D}}(E)$ of $c_i^{\text{CH}}(E)$.

4.2

The algebraic classes $c_n(E, \nabla)$ define torsion free classes

$$\gamma_n(E, \nabla) \in \mathbf{H}^{n-1}(X, \frac{\Omega_X^n(\log D)}{\Omega_{\text{clsd}}^n} \rightarrow \Omega_X^{n+1}(\log D) \rightarrow \dots)$$

which are difficult to understand, and classes

$$\theta_n(E, \nabla) \in H^0(X, \frac{\Omega_X^{2n-1}(\log D)_{\text{clsd}}}{d\Omega_X^{2n-2}(\log D)}) = H^0(X - D, \mathcal{H}^{2n-1}).$$

Here \mathcal{H}^j is the Zariski sheaf associated to the presheaf $H^j_{DR}(U)$ defined by Bloch and Ogus [6].

The rest of this note is devoted to the classes $\theta_n(E, \nabla)$ studied in [5]. It turns out that they define an algebraic Chern-Simons theory.

4.3

Locally, the bundle E is trivialized: $E \simeq \oplus \mathcal{O}_X$, so a connection ∇ (not necessarily integrable) is determined by a $r \times r$ matrix A of one forms. The curvature ∇^2 is then $\nabla^2 = F(A) = dA - A^2$. Let P be an invariant homogeneous polynomial of degree n on matrices $M \in M(r \times r, k)$ (X might be defined on any field k of characteristic zero), that is an element

$$P \in \text{Hom}_k(\text{End}(k^r)^{\otimes n}, k),$$

invariant under the diagonal adjoint action of $GL(r, k)$. Then the forms

$$TP(A) = n \int_0^1 P(A \wedge F(tA)) dt,$$

with $d TP(A) = P(F(A))$, defined by Chern-Simons ([8]), glue together to a well defined class

$$\omega_n(E, \nabla, P) \in H^0(X, \frac{\Omega_X^{2n-1}}{d\Omega_X^{2n-2}}).$$

When ∇ is flat, then

$$\omega_n(E, \nabla, P) \in H^0(X, \mathcal{H}^{2n-1}) \subset H^0(X, \frac{\Omega_X^{2n-1}}{d\Omega_X^{2n-2}}).$$

Theorem 4.2 *If $D = \phi$, then*

$$\theta_n(E, \nabla) = \omega_n(E, \nabla, P_n)(=: \omega_n(E, \nabla)),$$

where P_n is the invariant polynomial describing the n -th Chern class.

4.4

The comparison 4.2 allows to make a purely algebraic Chern-Simons theory on X over $k = \mathbb{C}$.

We introduce the generalized Griffiths group $\text{Griff}^n(X)$ as the group of codimension n cycles homologous to zero on X modulo those homologous to zero on some divisor in X . For example $\text{Griff}^2(X)$ is the classical Griffiths group of codimension 2 cycles homologous to zero modulo those algebraically equivalent to zero.

There is an extension

$$0 \rightarrow \frac{H^{2n-1}(X_{\text{an}}, \mathbb{Z})}{N^1 H^{2n-1}(X_{\text{an}}, \mathbb{Z})} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d_n} \text{Griff}^n(X) \rightarrow 0,$$

where $\mathcal{E} \subset H^0(X, \mathcal{H}^{2n-1}(\mathbb{Z}))$, and $\mathcal{H}^j(\mathbb{Z})$ is the Zariski sheaf associated to the presheaf $H^i(U_{\text{an}}, \mathbb{Z})$. Then

Theorem 4.3 *Let (E, ∇) be a flat connection on X proper smooth over \mathbb{C} . Then $\omega_n(E, \nabla) \in \mathcal{E} \otimes \mathbb{Q}$, $d_n(\omega_n(E, \nabla))$ is the Chern class $c_n(E) \in \text{Griff}^n(X) \otimes \mathbb{Q}$, and $\omega_n(E, \nabla) \otimes \mathbb{Q} = 0$ if and only if $c_n(E) \otimes \mathbb{Q} = 0$.*

The proof relies on the comparison 4.2, on Reznikov’s theorem 3.3, and on the definition of the mixed Hodge structure on the (infinite dimensional) \mathbb{Z} module \mathcal{E} .

4.5

To make the theory more flexible, one has to introduce logarithmic poles. In fact,

$$\omega_n(E, \nabla) \in H^0(X, \mathcal{H}^{2n-1}) \subset H^0(X - D, \mathcal{H}^{2n-1})$$

and lies in $\mathcal{E} \otimes \mathbb{C}$. Its image $d_n(c_n(E, \nabla))$ in the Griffiths group differs from the algebraic class of E by a class supported in D , whose precise shape is clear for $n = 2$ (and is vanishing if ∇ has nilpotent residues along D).

4.6 Rigidity

The link of $\omega_n(E, \nabla)$ with the algebraic class in the Griffiths group (if $D = \emptyset$) forces $\omega_n(E, \nabla)$ to be invariant in a deformation of (E, ∇) over X . But in fact, a stronger rigidity holds true: one can allow X to vary in a one dimensional family.

4.7 Vanishing – Non Vanishing

The invariants

$$\omega_n(E, \nabla) \in H^0(X, \frac{\Omega_X^{2n-1}}{d\Omega^{2n-2}})$$

are certainly non vanishing when ∇ is not flat, as

$$d\omega_n(E, \nabla) = c_n(E) \in H^0(X, \Omega_{\text{clsd}}^{2n}).$$

However, the only examples we have for an integrable connection are vanishing classes:

Gauß-Manin systems of curves (even with logarithmic poles), general weight one Gauß-Manin systems, weight two Gauß-Manin systems of surfaces, finite monodromy.

In characteristic p large enough, one can define $\omega_n(E, \nabla)$ and all Gauß-Manin systems of proper smooth varieties vanish.

One may raise the question of whether on X smooth proper, $\omega_n(E, \nabla)$ always vanishes for $n \geq 2$.

References

- [1] Atiyah, M.: Complex analytic connections in fibre bundles, *Trans. Am. Math. Soc.* **85** (1957), 181–207
- [2] Beilinson, A.: Higher regulators and values of L -functions, *J. Soviet Math.* **30** (1985), 2036–2070
- [3] Bloch, S.: Applications of the dilogarithm function in algebraic K -theory and algebraic geometry, *Int. Symp. on Alg. Geometry, Kyoto* (1977), 103–114
- [4] Bloch, S.: *Lectures on Algebraic Cycles*, Duke University Publications (1980)
- [5] Bloch, S., Esnault, H.: Algebraic Chern-Simons theory, preprint 1996, 47 pages
- [6] Bloch, S., Ogus, A.: Gersten's conjecture and the homology of schemes, *Ann. Sc. ENS*, 4^o série **7** (1974), 181–202
- [7] Cheeger, J., Simons, J.: Differential characters and geometric invariants, in "Geometry and Topology, Proceedings of the special year, University of Maryland 1983-84", *Lecture Notes in Math.* **1167** (1985), Springer, 50–80
- [8] Chern, S.-S., Simons, J.: Characteristic forms and geometric invariants, *Ann. of Math.* **99** (1974), 181–202
- [9] Corlette, K., Esnault, H.: Classes of local systems of \mathbb{Q} hermitian vector spaces, preprint (1995)
- [10] Deligne, P.: *Équations Différentielles à Points Singuliers Réguliers*, Springer Lecture Notes **163** (1970)
- [11] Deligne, P., Sullivan, D.: Fibrés vectoriels complexes à groupe structural discret, *CRAS* **281** (1975), 1081–1083
- [12] Esnault, H.: Characteristic classes of flat bundles, *Topology* **27** (1988), 323–352
- [13] Esnault, H.: Characteristic classes of flat bundles, II, *K-Theory* **6** (1992), 45–56
- [14] Esnault, H.: Coniveau of Classes of Flat Bundles trivialized on a Finite Smooth Covering of a Complex Manifold, *K-Theory* **8** (1994), 483–497
- [15] Esnault, H., Srinivas, V.: Chern classes of vector bundles with holomorphic connections on a complete smooth variety, *J. Diff. Geom.* **36** (1992), 257–267
- [16] Esnault, H., Viehweg, E.: Logarithmic De Rham complexes and vanishing theorems, *Inv. math.* **86** (1986), 161–194
- [17] Esnault, H., Viehweg, E.: Deligne-Beilinson cohomology, in "Beilinson's Conjectures on Special Values of L -Functions", *Perspectives in Mathematics* **4** (1988), 43–91
- [18] Gillet, H., Soulé, Ch.: Arithmetic Chow groups and differential characters, in "Algebraic K -Theory: connections with geometry and topology", ed. Jardine and Snaithe (1989), Kluwer Academic Publishers, 30–68
- [19] Grothendieck, A.: Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets, in "Dix exposés sur la cohomologie des schémas", North-Holland (1968), 215–305
- [20] Karoubi, M.: Classes caractéristiques de fibrés feuilletés, holomorphes et algébriques, *K-Theory* **8** (1994), 153–211
- [21] Reznikov, A.: All regulators of flat bundles are torsion, *Annals of Math.* **139** (1994), 1–14
- [22] Serre, J.-P.: *Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique*, *Ann. Inst. Fourier* **6** (1956), 1–42
- [23] Simpson, C.: Higgs bundles and local systems, *Publ. Math. IHES* **75** (1992), 5–95

Hélène Esnault
 Universität GH Essen
 FB 6, Mathematik und Informatik
 D-45117 Essen
 Germany
 e-mail: esnault@uni-essen.de

(Eingegangen 31. 1. 1996)

Ernst Mohr – Das Schicksal eines Mathematikers*

F. Litten, München

Wenn über Mathematiker als Leidtragende des Nationalsozialismus geschrieben wird, erscheint auch der Name Ernst Mohr [Mehrtens, 345; Dick, Pinl, 177f.]¹. Bislang gab es allerdings keine ausführlichere, veröffentlichte Darstellung der entsprechenden Geschehnisse, und die unveröffentlichte Darstellung von {Ebert}, die weitgehend auf den Beständen des Berlin Document Centers basiert, ist leider nicht korrekt.² In diesem Artikel soll nun das Schicksal Mohrs anhand eines breiteren Quellenbestandes geschildert werden, wobei nicht nur die Verhaftung 1944, sondern auch der Göttinger „Fall Mohr“ 1934 und die Nachkriegszeit eine Rolle spielen. Auf die mathematischen Leistungen Mohrs und ihre Einschätzung wird nur am Rande eingegangen; eine genauere Untersuchung müßte einem eigenen Artikel vorbehalten bleiben.³

I

Ernst Mohr wurde am 20. April 1910 in Ebersbach an der Fils (Württemberg) geboren. Sein Vater Fritz war Seilermeister, ebenso dessen Vater; seine Mutter Lina, geb. Maisch, war die Tochter eines Försters. 1916 besuchte er für ein Jahr die Dorfschule in Ebersbach, ab 1917 die Oberrealschule in Göppingen an der Fils (2. Elementarklasse, Vorklasse, dann erste bis neunte Klasse) bis zur Reifeprüfung im Frühjahr 1928. Im Sommersemester 1928 begann er das Studium der Mathematik und Physik an der Universität Tübingen, wechselte zum Wintersemester 1929 an die Universität München und schließlich zum Sommersemester 1931 an die Universität Göttingen {TUB PA, 5.11.1952}. Neben mathematischen und physikalischen Vorlesungen unter anderem bei Richard Courant, David Hilbert, Edmund Landau, dem Münchner „Dreigestirn“ Constantin Carathéodory, Oskar Perron und Heinrich Tietze, Robert W. Pohl und Arnold Sommerfeld hörte er auch Vorlesungen in Philosophie bei Richard Höningwald und Georg Misch [Mohr (1933), 87].

* Ich danke den Mitarbeitern der im Quellenverzeichnis genannten Archive und Behörden für ihre freundliche Unterstützung. Besonderer Dank gebührt Frau W. Mohr für die informativen Gespräche und die Hilfe bei den Akteneinsichtsgenehmigungen.

¹ Belegangaben in geschweiften Klammern beziehen sich auf unveröffentlichte, solche in eckigen Klammern auf veröffentlichte Quellen.

² [Heiber, 301f.] ist noch unzuverlässiger.

³ Vgl. [Naturforschung; Mathematica; Kalf; Nitsche].

In Göttingen promovierte Mohr schließlich bei Hermann Weyl⁴ mit einer Dissertation über die Darstellungen der Komplexgruppe und der irreduziblen unter ihnen [Mohr (1933)]. In seinem Gutachten vom 6. Juli 1933 stellt Weyl die Dissertation in den Kontext der Arbeiten von Issai Schur über die volle lineare Gruppe und Richard Brauer über die Drehungsgruppe. Zwar sei sie an Originalität vor allem nicht mit der Brauers zu vergleichen, Mohr habe aber die „selbständige Beherrschung eines nicht leicht zu handhabenden Apparates“ erkennen lassen und ein auftretendes neues Problem richtig gelöst, daher sei das Prädikat „gut“ angebracht {UAG MI}. Nachdem Mohr die mündliche Prüfung am 19. Juli 1933 mit „sehr gut“ bestanden hatte {TUB PA}, erhielt er Weihnachten 1933 das Doktordiplom.

II

Mit der Promotion begann für Mohr ein in mehrerer Hinsicht schwieriger Lebensabschnitt.⁵ Jegliche finanzielle Unterstützung seiner Eltern und vor allem Großeltern versiegte. Mit Beginn des Wintersemesters 1933 übernahm er eine Hilfsassistentenstelle bei Friedrich Karl Schmidt (damals Dozent für Mathematik an der Universität Göttingen), die ihm monatlich 48 Reichsmark einbrachte. Abgesehen davon, daß dies schwerlich zum Leben ausreichte, sahen auch Mohrs Zukunftschancen nicht sehr rosig aus. Offenbar hatte Mohrs Arbeitskraft nach der Promotion so nachgelassen, daß Schmidt ihn für eine akademische Laufbahn kaum als geeignet ansah und ihm indirekt den Lehrerberuf empfahl.⁶ Dazu kamen noch private Probleme mit seinen Eltern und seiner damaligen Verlobten, sowie eine offensichtliche Unzufriedenheit mit der nationalsozialistischen Regierung, deren Methoden er als „undeutsch“ bezeichnete. Nur mit Mühe konnte sich Mohr im Frühjahr 1934 durch Unterstützung seitens seiner späteren Frau – aber zu dieser Zeit nicht Verlobten, was zu einiger Verwirrung führte – Johanna Wagener und durch zusätzliche Zahlungen von Schmidt finanziell über Wasser halten.

In Göttingen stand in diesem Frühjahr die Neubesetzung des Weylschen Lehrstuhls an.⁷ Die Fakultät schlug an erster Stelle Helmut Hasse vor, das Reichs- und Preußische Ministerium für Wissenschaft, Erziehung und Volksbildung (im folgenden Reichswissenschaftsministerium) stimmte dem im April 1934 zu; indes versuchte der Assistent und Privatdozent am Mathematischen Institut, Werner Weber, auf verschiedene Weise diese Entscheidung zu sabotieren, da ihm Hasse nicht nationalsozialistisch genug erschien. Bei einer dieser Aktionen wurden der Aerodynamiker Johann Nikuradse und der Leiter des SS-Geheimdienstes in Göttingen, Hauptmann a. D. Johannes Weniger, in die Angelegenheit verwickelt. Im Haus von Wenigers Mutter aber lebte Mohr, beide kannten sich und Weniger „benutzte“

⁴ Vgl. [Bigalke, 82].

⁵ Das folgende nach {UAG Weber}.

⁶ Mohr selbst erwähnt in seiner Aussage vom 2. Juni 1934 {UAG Weber}, er habe eigentlich die Absicht gehabt, sein Staatsexamen abzulegen und in Süddeutschland Lehrer zu werden, man habe ihm aber öfter eine akademische Karriere nahegelegt.

⁷ Vgl. hierzu die ausführlichere Darstellung bei [Schappacher, 354ff.].

Mohr als Informationsquelle, z. B. als er ihn am 24. Mai 1934 über Hasse befragte und für den 26. ein weiteres Gespräch vereinbarte.

Nun besuchte am 26. Mai vormittags Johanna Wagener, ohne Wissen Mohrs, Schmidt, um sich für Mohr einzusetzen. Dabei machte Schmidt ihr klar, daß er Mohr nicht für eine Assistentenstelle als geeignet ansehe und daß außerdem die Besetzung dieser Stelle Hasse vorbehalten bleiben müsse, da sie gründlich und auf Jahre hinaus geplant werden wolle. Die Unterredung endete offenbar recht heftig, und Frau Wagener verließ Schmidt, um Mohr Mitteilung davon zu machen. Wie Mohr in seiner Vernehmung vom 2. Juni sagt, „kam [ihm daraufhin] ganz plötzlich die Erleuchtung, als ob Herr Prof. Hasse die alten Assistenten von Prof. Courant bevorzugen würde und damit den alten Geist des Göttinger Mathematischen Instituts konservieren würde.“

Kurze Zeit später hatte Mohr sein Treffen mit Weniger. Es ist unklar, was genau Mohr Weniger erzählte; danach blieb jedenfalls der Eindruck, daß Hasse mit einer vorbereiteten Assistentenliste nach Göttingen kommen würde, so daß örtlich keine Einflußnahme mehr möglich wäre und der „alte Geist“ weiterbestände. Auch Weber erfuhr am Abend von diesem „Tatbestand“.

Am folgenden Tag traf sich Weber mit dem Fachschaftsleiter, dem Mathematik-Studenten Heinz Kleinsorge, in Sachen Hasse; Weniger reiste nach Berlin, um im Reichswissenschaftsministerium Schritte gegen Hasse unternehmen zu lassen.

Am Montag, den 28. Mai, gab es eine von Kleinsorge hastig initiierte Unterschriftenaktion am Mathematischen Institut gegen die Institutsübernahme durch Hasse. Durch einen Anruf von Hasse, der es vermutlich von Schmidt gehört hatte, erfuhr der Rektor der Universität Göttingen von der „Unruhe“, die sich auszubreiten begann.

Die Ereignisse spitzten sich schließlich am folgenden Tag zu. Weber erhielt von Weniger einen Brief aus Berlin, in dem anscheinend eine Rücknahme der Berufung Hasses nach Göttingen durch das Reichswissenschaftsministerium in Aussicht gestellt wurde. Kleinsorge wandte sich an den Studentenschaftsführer Wolff, daraufhin ging man zum Rektor, der sich mittags zwei Stunden durch Weber und Mohr die Anwürfe gegen Hasse erläutern ließ. Daß das Reichswissenschaftsministerium die Berufung rückgängig gemacht habe, war dem Rektor nicht bekannt.

Für fünf Uhr an diesem Dienstag hatte Hasse die Institutsübergabe angesetzt. Der Rektor hatte mit Weber und Mohr vereinbart, daß sich diese im Beisein des Dekans mit Hasse treffen und ihre Bedenken äußern würden. Bei dieser Gelegenheit verweigerte Weber die Schlüsselübergabe an Hasse, dieser kehrte nach Marburg zurück.

Das Reichswissenschaftsministerium reagierte prompt: bereits am 30. Mai verfügte es die vorläufige Enthebung Webers sowie den Abbruch aller Verhandlungen mit Mohr wegen einer Assistentenstelle. Zu diesem Zeitpunkt waren bei Weber und dem Studentenschaftsführer Wolff angeblich Bedenken aufgekommen, wieweit die Vorwürfe Mohrs betreffend der Stellenbesetzung glaubhaft waren; für Weber kam diese „Einsicht“ allerdings vorerst zu spät.

Eine universitätsinterne Untersuchung des Vorfalls begann am 1. Juni mit Vernehmungen verschiedener Beteiligter und Zeugen, wobei indes die so wichtige

Aussage Wenigers recht dürftig ausfiel. Das Reichswissenschaftsministerium blieb bei der Berufung Hasses, berief aber auch Erhard Tornier, einen ausgewiesenen Nationalsozialisten, nach Göttingen, wo er am 3. Juni die Landau-Stelle einnahm. Während Weber nur einen Verweis erhielt, konzentrierte sich Tornier auf Mohr. Am 5. Juni erhielt Mohr durch Tornier Hausverbot für das Mathematische Institut wegen „Äusserungen, die Sie über die Nationalsozialistische Partei und die Reichsregierung [...] gemacht haben“ {UAG MI}.⁸ Weitere Bemühungen Torniers, gegen Mohr vorzugehen, unter anderem über den Göttinger Kreisleiter Thomas Gengler, blieben allerdings erfolglos.⁹

Das Hausverbot gegen Mohr blieb bestehen, bis Hasse in einem Brief vom 25. September 1936 an Nikuradse andeutete, daß er mit Mohr bei Gelegenheit ein klärendes Gespräch führen wolle, um „die alte leidige Angelegenheit [...] aus der Welt zu schaffen“ {UAG MI}.

Der „Fall Mohr“ ist ein recht merkwürdiger. Mohrs Bedeutung in dieser Angelegenheit scheint vom Inhalt der Aussagen übertrieben, jedoch dürfte hier der Ton dieser Aussagen die Einschätzung mindestens teilweise bestimmt haben. So spricht der Rektor von einem „sehr übersteigerten Erregungszustand“ Mohrs {UAG MI, 5.6.1934}. Dies deutet darauf hin, daß Mohr, als er von Frau Wagener über ihre Unterredung mit Schmidt und die dabei zur Sprache gekommenen Zukunftsaussichten unterrichtet wurde, unter der oben geschilderten mehrfachen Belastung die Beherrschung verlor und sich zum „Kampf gegen Hasse“, so [Schappacher, 354], mitreißen ließ. Daß dabei politische Argumente ebenfalls benutzt wurden, ist teilweise zeitgemäß bedingt, läßt aber sicherlich keine Rückschlüsse auf Mohrs tatsächliche politische Einstellung zu; im Gegenteil zeigt es meines Erachtens, wie weit der wirklich nicht nationalsozialistische und eigentlich nicht gegen Hasse eingestellte Mohr „neben sich stand“. Seine viel später gegenüber seiner Tochter geäußerte Einschätzung „Ich hab’ da was Dummes gemacht“ dürfte ein passendes Epitaph für diesen „Fall“ sein.

III

Mohr’s Karrierechancen in Göttingen waren nach diesen Vorkommnissen verständlicherweise gering. Er hatte jedoch insofern Glück, als er am 1. November 1934 eine Stelle als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Lehrstelle für Strömungslehre der TH Breslau bei Johann Nikuradse erhielt.¹⁰ In dieser Funktion konnte er sich nicht nur für die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen vorbereiten, die er

⁸ [Schappacher, 356] nennt diese Äußerungen „äußerst fadenscheinig bezeugt“; ich halte sie eigentlich für verhältnismäßig gut dokumentiert, unter anderem durch F. K. Schmidt.

⁹ Der Brief Torniers an Gengler beginnt: „Hoffentlich haben Sie sich nun entsprechend ausgeschlafen, sodass Sie den Fall Mohr in Angriff nehmen können.“ Ein Parteiverfahren, wie es [Schappacher, 356] andeutet, dürfte bei der nicht vorhandenen NSDAP-Mitgliedschaft Mohrs kaum möglich gewesen sein; es ist auch in dem Schreiben vom 23. August {UAG MI} nicht erwähnt.

¹⁰ [Schappacher, 356] gibt an, daß Mohr diese Stelle Weber zu verdanken hatte. Das folgende nach {BDC REM}. Es handelte sich nicht, wie manchmal in den Akten steht, um einen Lehrstuhl für Strömungslehre.

am 15. Februar 1935 in Göttingen (!) ablegte, er begann hier auch seine Beschäftigung mit angewandter Mathematik, speziell eben Aero- und Hydrodynamik. Ab 1. Oktober 1936 übernahm er die Verwaltung einer planmäßigen Assistentenstelle und bereitete sich auf die Habilitation vor. Am 21. Dezember 1937 bat Mohr um Zulassung zur Habilitation an der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften der TH Breslau mit der Habilitationsschrift „Die laminare Strömung längs der Platte und damit verwandte Flüssigkeitsbewegungen“. Die Gutachten Werner Schmeidlers (Inhaber des Lehrstuhls für Höhere Mathematik) und Nikuradses vom 17. bzw. 18. Februar 1938 bezeichnen diese Schrift als einen „wertvollen Beitrag zur Prandtlschen Grenzschichtentheorie“ und betonen die Qualität und Klarheit der physikalischen und mathematischen Abschnitte. Da auch die wissenschaftliche Aussprache am 23. Februar 1938 zur allgemeinen Zufriedenheit ablief, erhielt Mohr am 28. Juni 1938 den Grad eines Dr.phil.habil.

Mittlerweile war Mohr vom Dekan (Ludwig Mann, Lehrstuhl für Mechanik) auch für eine Beihilfe vorgeschlagen worden. Das hierfür notwendige Gutachten des Nationalsozialistischen Deutschen Dozentenbundes an der TH Breslau vom 3. März 1938 enthält die Bemerkung, daß Mohr „ziemlich zurückgezogen“ arbeite, politisch nicht hervorgetreten sei, aber einen „guten und zuverlässigen Eindruck“ mache. „Auch nach dem Zeugnis alter Parteigenossen, die ihn in Göttingen kennen gelernt haben, sind Tatsachen nicht bekannt geworden, die gegen ihn sprechen könnten.“ Mit solcher Befürwortung erhielt Mohr zu seiner inzwischen auf RM 251,30 gewachsenen Besoldung eine auf ein Jahr befristete monatliche Beihilfe von RM 15.

Der logische Schritt für Mohr nach der Habilitation war die Beantragung einer Dozentur. Diesem Antrag auf eine Dozentur in Mechanik stimmte der Dekan in einem Schreiben an das Reichswissenschaftsministerium vom 23. November 1938 zu. Die Überlastung des Lehrstuhlinhabers für Mechanik (Mann) und des einen Lehrbeauftragten (Nikuradse), der überdies eher experimentell arbeitete, machten eine weitere Dozentur gerade für die Ingenieursausbildung dringend notwendig, und Mohr stelle „eine geeignete aufwärtsstrebende Persönlichkeit“ dar. Außerdem wies Mann darauf hin, daß auch die mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Breslau an Mohr als Dozenten für angewandte Mathematik sehr interessiert sei. Dieses Interesse dokumentiert sich in einem von Johann Radon und Georg Feigl gemeinsam verfaßten Gutachten über Mohr vom 11. November 1938. Mohr sei „ein noch weiterentwicklungsfähiger, vielversprechender angewandter Mathematiker [...], umso mehr als er [...] die Gabe eines sehr klaren und lebendigen Vortrages besitzt.“ Auch an der Universität Breslau bestände ein dringendes Bedürfnis nach einem Dozenten für angewandte Mathematik, da eigentlich niemand so recht zuständig sei bzw. die Zeit dafür habe. Wie Mann versprochen sich Radon und Feigl von einer gleichzeitigen Dozententätigkeit Mohrs an Universität und TH Breslau eine Belebung und gegenseitige Befruchtung.

Da Mohr inzwischen (Sommer 1938) den für die Erlangung der Dozentur obligatorischen Lehrgang des Reichslagers der NSDAP in Bad Tölz mit „günstigem Eindruck“ absolviert und auch die Parteidienststellen sich positiv geäußert hatten, wies das Reichswissenschaftsministerium ihn am 2. Januar 1939 der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften der TH Breslau zur Ableistung der Lehrprobe zu. Aufgrund einer erneuten Bitte der Universität Breslau am 31. Januar 1939, Mohr die

Lehrprobe dort ableisten zu lassen, erklärte das Reichswissenschaftsministerium am 21. Februar, daß es mit einer Erweiterung der Lehrprobe auf angewandte Mathematik in Anwesenheit der entsprechenden Vertreter der Universität Breslau einverstanden sei. Dieses Schreiben kam allerdings zu spät, da die Lehrprobe an der TH Breslau bereits am 13. Februar mit dem Thema „Laminarer Anlauf“ zur vollen Zufriedenheit stattgefunden hatte. Daher wurde für den 16. Mai eine Ergänzungslehrprobe an der Universität zum Thema „Das Bernoullische Theorem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ angesetzt. Der von Feigl angefertigte und von Radon befürwortete Bericht gipfelt in der Passage: „Nach Ansicht des Unterzeichneten [Feigl] hat die Probevorlesung in überzeugender Weise dargetan, dass Mohr als Dozent für Mathematik mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik ausserordentlich geeignet ist.“ Am 24. Juli 1939 wurde Mohr zum Dozenten für Mechanik und angewandte Mathematik an der TH und der Universität Breslau ernannt und damit Beamter auf Widerruf.

Mohr war nun also Dozent an zwei Hochschulen (und seit März 1939 verheiratet mit Johanna Wagener), allerdings verdiente er sein Geld noch immer als Assistent. Da diese Stelle eigentlich zu einem anderen Lehrstuhl gehörte und Mohr außerdem die Möglichkeit gegeben werden sollte, sich ohne wirtschaftliche Sorgen seiner Arbeit zu widmen, stellte am 6. Februar 1940 der Dekan der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften der TH Breslau (inzwischen Rudolf Suhrmann, Lehrstuhl für technische Chemie) Antrag auf Diäten für Mohr. Das Gutachten des NSD-Dozentenbundes vom folgenden Tag ist recht vorsichtig: Mohr sei politisch farblos und sehr zurückgezogen, aber immerhin sei er Blockwalter der NSV, daher könne man annehmen, daß er als politisch zuverlässig gelte. Tatsächlich war Mohr am 1. April 1936 Mitglied der NSV (Nationalsozialistische Volkswohlfahrt) geworden und im Frühjahr 1936 in den Reichsluftschutzbund eingetreten. Damit hatte er sozusagen die politischen Minimalanforderungen erfüllt – aber nicht mehr. Sein Beispiel (und nicht nur seines) zeigt auch, daß es nicht grundsätzlich notwendig war, für die Habilitation und die manchmal größere Hürde der Erlangung einer Dozentur Parteimitglied zu sein, sondern daß dies von örtlichen, fachlichen und persönlichen Umständen abhing. Allerdings erhielt Mohr die Diäten erst mit Erlaß vom 30. November 1940, da zuerst keine entsprechende Stelle frei war.

Mohr hätte jetzt einigermäßen ruhig seiner Arbeit nachgehen können,¹¹ wenn es nicht den Reichsminister für die besetzten Ostgebiete gegeben hätte. Dieser, genauer gesagt der Aufbaustab K[aukasien] im Reichsministerium für die besetzten Ostgebiete, versuchte Mohr 1941 und 1942 mehrmals für die Bearbeitung von Lehrbüchern für das „zukünftige Reichskommissariat K“ abstellen zu lassen. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da mit der verantwortlichen Bearbeitung der Lehrbücher der „Leiter der kontinentaleuropäischen Forschung beim Beauftragten des Führers für die Überwachung der gesamten geistigen und weltanschaulichen Schulung und Erziehung der NSDAP [Alfred Rosenberg], Professor A. Nikuradse“ betraut war, der Bruder Johann Nikuradses. Letzterer war es auch gewesen, der einen entsprechenden Antrag unterschrieben hatte.

¹¹ Siehe dazu u. a. [Mohr (1941)].

Jedoch stieß Nikuradse auf Widerstand seitens der TH Breslau und des Reichswissenschaftsministeriums. Mohr wurde zuerst als unabkömmlich deklariert, dann war er als Vertretung des ausgeschiedenen a.o. Professors Hans Petersson an der Dt. Universität Prag vorgesehen, so daß bestenfalls eine Mitarbeit Mohrs in den Semesterferien in Frage käme. Tatsächlich hatte Wilhelm Führer, Oberregierungsrat im Reichswissenschaftsministerium, am 22. April 1942 eine Anfrage an die Mathematiker Alfred Klose, Ludwig Bieberbach und Schmeidler gerichtet, in der er um Gutachten über Mohr und Günther Schulz bat, die für den Lehrstuhl in Prag vorgesehen waren.¹² Schmeidler hielt in seinem Gutachten vom 5. Mai 1942 beide für gleichermaßen geeignet; Bieberbach schrieb am 7. Mai: „Während man auf Mohr’s Entwicklung hoffen kann, macht Schulz den Eindruck eines zur vollen Reife gediehenen Mathematikers“; Klose schließlich hielt Mohr als „einen der tüchtigsten und lebendigsten unter den jungen deutschen Mathematikern“ für eine ao. Professur für vollauf geeignet.

Am 29. Mai 1942 wurde Mohr mit der Vertretung Peterssons in Prag beauftragt, arbeitete aber weiterhin auch für Nikuradse an strömungsmechanischen Problemen. Neuerliche Anträge Nikuradses und des Aufbaustabs K auf völlige Freistellung Mohrs für solche kriegswichtige Forschungen wurden wegen der Unentbehrlichkeit Mohrs in Prag abgelehnt. Immerhin wurde Mohr durch die Mitarbeit an Nikuradses Forschungsaufträgen vom Rüstungskommando Breslau am 20. März 1942 zur Schlüsselkraft erklärt. Leider fehlt in den Akten jegliche Stellungnahme Mohrs zu diesen Anträgen; laut Gnadengesuch Mohrs vom 26. Oktober 1944 {BAP NJ 13334} hatten er und Nikuradse bis zu seiner Verhaftung über Ansätze für die laminare Grenzschicht sowie „Ansätze betr. Flügelgestaltung in Verbindung mit Experimenten von Nikuradse“ geforscht. Obwohl hier auch die Erledigung von Aufgaben für das Ostministerium erwähnt wird, dürfte diese Zusammenarbeit nie weit gediehen sein.

Am 8. Juli 1943 schließlich wurde Mohr mit Wirkung vom 1. April 1943 auf die freie Planstelle eines ao. Professors für Mathematik an der Dt. Universität Prag berufen; damit wurde er auch Beamter auf Lebenszeit. Die Zukunft seiner Familie – inzwischen hatte er zwei Töchter – schien, soweit es die Zeiten erlaubten, gesichert.

IV

Durch die Göttinger Vorkommnisse offensichtlich gewarnt, hatte Mohr sich, soweit man feststellen kann, mit anti-nationalsozialistischen Bemerkungen nach außen zurückgehalten. Überhaupt wird von verschiedenen Seiten die Zurückgezogenheit und Verslossenheit Mohrs in jenen Zeiten betont. Im privaten Kreis hingegen hatte er aus seinen Überzeugungen keinen Hehl gemacht. Die Folgen berichtete er später {EBB, 4.7.1950}: *Am 12. Mai 1944 in Prag im Hotel Béranek* [von der Gestapo] *verhaftet und zwar auf Grund einer gemeinen Denunziation einer Freundin meiner Frau. Die Familie meiner Frau und die sogenannte Freundin kannten sich durch*

¹² {Rohrbach} schreibt, er habe Mohr nach Prag geholt; Feigl erklärt in {BAP NJ 13334}, er habe Mohr für die Stelle in Prag vorgeschlagen.

Jahre in Thüringen. Einer illegalen Widerstandsgruppe gehörte ich nicht an. Es bestand aber damals in Breslau, von wo ich ja kam, ein kleiner Kreis von Hochschullehrern, dem auch ich angehörte, der eindeutig gegen Hitler und sein Terrorsystem gerichtet war. Ich nenne die Namen: Professor Dr. Feigl, Mathematiker in Breslau und leider verstorben im Frühjahr 1945 nach der Flucht aus Breslau, dann Professor Dr. [Clemens] Schaefer, Physiker und jetzt Direktor des Physikalischen Instituts der Universität Köln. Ferner Professor Dr. [Hubert] Cremer, Mathematiker in Breslau und jetzt an der Technischen Hochschule Aachen. Der Astronom Professor Dr. [Erich] Schönberg, jetzt Direktor der Sternwarte in München. Über die Vorgeschichte meiner Verhaftung gebe ich kurz folgendes an: Besagte sogenannte Freundin meiner Frau, Frau Anna-Ruth Nau [...] kam während des Krieges mit ihrem Mann nach Posen, wo dieser Inspektor eines Gutes wurde. [...] Dorthin kam meine Frau auf Besuch während der Zeit, wo ich in Prag war (im Sommer-Semester 1943). Ich wohnte in Prag stets im Hotel, während meine Frau nach wie vor in Breslau in der alten Wohnung blieb. Während ihres Aufenthalts erkrankte die Waldtraut [älteste Tochter] schwer und meine Frau telegrafierte mir, und bat mich, sofort dorthin zu kommen. Glücklicherweise überstand die Waldtraut die Krankheit rasch, und nach ungefähr 14 Tagen konnten wir zusammen nach Breslau zurückkehren. Ich selbst kam während dieser Tage in gar keine engere Beziehung zu dieser Frau Nau, sprach aber mit ihr offen über manche Dinge und machte aus meinem Herzen keine Mördergrube, immer davon ausgehend, daß ich ja mit eigenen Augen sah, wie eng und vertraut das Verhältnis meiner Frau zu Frau Nau war. Unter anderem sagte ich in jener Zeit Frau Nau auch, daß in Posen heißer Boden wäre, riet ihr, Posen rechtzeitig zu verlassen, wobei ich ihr noch sagte, daß sie jederzeit erste Aufnahme und Hilfe bei mir in Breslau bekäme. Leider war bei einigen Zusammenkünften auch eine Kindergärtnerin, Frau Edith Ohme dabei, die später Frau Nau als Zeugin gegen mich angab. Später im September besuchte Frau Nau uns für acht Tage in Breslau, und ich verharrete auch weiterhin in der Auffassung, daß zwischen uns alles zum Besten stünde. Welche Gründe Frau Nau veranlaßten, ausgerechnet dreiviertel Jahre später mich bei der Gestapo anzuzeigen, entzieht sich meiner Kenntnis. Ich nehme an, Neid auf meine Frau und dies besonders, weil der Mann von Frau Nau in jener Zeit eingezogen wurde und dieselbe Frau Nau sehen mußte wie ich zuhause sein konnte. Zu allem Unglück wurde ich zu Beginn des Verhörs in Prag, das sehr raffiniert und vorsichtig anfing, auch nach dieser Frau gefragt und man erkundigte sich bei mir, wie ich über sie dächte und was ich von ihr hielte, wobei ich immer noch in meinem festen Glauben, daß sie echt wäre, ihr in jeder Hinsicht ein gutes Zeugnis ausstellte. Erst dann wurde der Spieß umgedreht und mir eröffnet, daß diese Frau mich schwer belastet hätte. Angeblich hätte ich ihre Ehre als deutsche Frau tief gekränkt und nach Aussage ihres Mannes, dem sie davon Mitteilung gemacht habe, ihr Dach und Heim geschändet und sie hätte sich verpflichtet gefühlt, mich als einen gefährlichen Menschen anzuzeigen.

Nach diesen Verhören in Prag wurde Mohr Ende Mai in das (weniger gewalttätige) Landgerichtsgefängnis in Meseritz bei Frankfurt/Oder gebracht. Dort arbeitete er im Außenkommando in einer Fabrik der Firma Luftfilter AG, Berlin-Halensee, die ihre Produktion zum Teil nach Meseritz verlagert hatte {EBB}. Ab 26. Juli saß er offiziell in Untersuchungshaft, nachdem ein Haftbefehl verhängt worden war. Zu einer kleinen Verzögerung war es gekommen, da der Oberreichsanwalt beim Volksgerichtshof eigentlich gegen beide Eheleute Mohr Anklage erheben wollte. Die

Untersuchungen in Sachen Johanna Mohr wurden jedoch von der Staatspolizeileitstelle Breslau geführt, so daß erst einmal die Akten übersandt werden mußten. Daß die Anklage am 19. September 1944 dann doch nur gegen Ernst Mohr erhoben wurde, lag an der Verzögerung des Abschlusses der Ermittlungen in Breslau: Frau Mohr hatte am 20. Juli einen Jungen geboren {BAP NJ 13334}.

Die Anklageschrift des Oberreichsanwalts nahm die Urteilsbegründung, wie kaum anders zu erwarten, bereits vorweg: Mohr wurde beschuldigt, „Feindsender“ abgehört zu haben, den „Führer“ einen „Teppichfresser“ genannt und ihn parodiert zu haben, die Kriegslage als hoffnungslos und die Judenvertreibung als großen Fehler bezeichnet zu haben. Auch habe Mohr die Darstellung Stalins in der deutschen Presse als falsch gerügt und – was fast schon im Widerspruch zum vorigen stand – Vergleiche zwischen Nationalsozialismus und Bolschewismus gezogen: Beide Systeme seien sich aufgrund ihrer diktatorischen Form ähnlich. Nebenbei wurde bemerkt, daß die Mutter von Frau Mohr Russin war. Schließlich wird noch eine Bemerkung Mohrs zu einem „hoffnungsvollen Brief eines [Frau Nau] bekannten Frontsoldaten“ zitiert: „Auch so ein Idiot“. (Dies sollte sich im Verfahren schwer auswirken, denn bei dem Frontsoldaten handelte es sich um Herrn Nau.) Zwar habe Mohr diese Äußerungen abgestritten bzw. umzudeuten versucht (er hatte zugegeben, BBC gehört zu haben), doch sei er durch die Zeuginnen Nau und Ohme überführt. Er habe sich wehrkraftzersetzend verhalten und stehe, „wie er eindeutig zum Ausdruck gebracht hat, innerlich auf der Seite unserer Kriegsfeinde und hat sie mit seinen Worten systematisch begünstigt“. Beantragt wurden die Eröffnung der Hauptverhandlung vor dem Volksgerichtshof und die Fortdauer der Untersuchungshaft {BAP NJ 14078}.

Der Verhandlungstermin wurde auf Dienstag, 24. Oktober 1944, 10 Uhr festgelegt. Einige Tage zuvor fand die Überführung Mohrs in das Strafgefängnis Plötzensee statt. Die „geradezu lächerliche“¹³ Verhandlung vor dem 1. Senat des Volksgerichtshofs dauerte ungefähr eine Stunde; als Richter nahmen teil Landgerichtsdirektor Stier als Vorsitzender, Kammergerichtsrat Rehse¹⁴, NSKK-Brigadeführer Heinsius, SA-Obergruppenführer Hell, Reichshauptamtsleiter Giese und, als Vertreter des Oberreichsanwaltes, der Erste Staatsanwalt Figge. Das um 15 Uhr verkündete Urteil stützte sich in der Begründung stark auf die Zeuginnenaussagen und entsprach dem Antrag der Anklage: Tod {BAP NJ 13334}. Fast angelegentlich wurde auf §5, Absatz 1, Satz 1 der Kriegssonderstrafrechtsverordnung („Wehrkraftzersetzung“) und §91b Strafgesetzbuch („Feindbegünstigung“) Bezug genommen.¹⁵ Die „Begründung“ zeigt den typischen, primitiven Charakter der Volksgerichtshofurteile jener Zeit.¹⁶ „Wer sich, wie es der Angeklagte getan hat, nicht scheut, trotz seiner achtbaren Stellung im akademischen Leben unter Mißbrauch seiner scheinbaren geistigen Überlegenheit sieggläubige Volksgenossen zersetzend zu beeinflussen, kann mit irgend einer Milde umsoweniger rechnen, als er im Laufe

¹³ Mohr in {IfZ, 13. 9. 1950}.

¹⁴ Vgl. [Im Namen des Deutschen Volkes, 440ff.]. Rehse hatte u. a. wenige Monate vorher für die Todesstrafe im Fall des Berliner Zoologen Walther Arndt gestimmt, der daraufhin am 26. Juni 1944 hingerichtet wurde. Vgl. [Eisentraut].

¹⁵ Vgl. [Im Namen des Deutschen Volkes, 211ff.].

¹⁶ Vgl. [Kroeschell, 114f.].

seiner Unterhaltungen sogar die Zuversicht eines Frontsoldaten gegenüber dessen Ehefrau „idiotisch“ genannt und damit diese Soldatenfrau selbst, nämlich die Zeugin Nau, aufs schwerste getroffen hat. Durch seine Tat hat der Angeklagte um die Wende des vierten und fünften Kriegsjahres seinen dem Führer geleisteten Treueid schnöde gebrochen. Damit hat er sich für immer ehrlos gemacht. Nur der T o d, auf den der Senat erkannt hat, kann seine Schuld sühnen. Durch diesen Verrat hat der Angeklagte auch alles das ausgelöscht, was sonst vielleicht zu seinen Gunsten sprechen könnte [!]. Es kann infolgedessen nicht strafmildernd gewertet werden, daß er, wie er behauptet, im Rahmen seiner wissenschaftlichen Forschungsarbeit Beachtliches für die deutsche Rüstung, insbesondere die der Luftwaffe geleistet hat. - - - - Weil Mohr verurteilt worden ist, hat er nach dem Gesetz die Kosten des Verfahrens zu tragen.“ {BAP Z/C 14224; BDC VGH}.

V

Mohrs Verhaftung war selbstverständlich im Kreis seiner Kollegen nicht unbeachtet geblieben. Vor allem Hans Rohrbach, laut {Mohr} sogar er allein unter den Prager Professoren, versuchte etwas über Mohrs Verbleib und zu erwartendes Schicksal herauszufinden. Allerdings ging der erste dokumentierbare Versuch, Mohrs Schicksal zu beeinflussen, von anderer Seite aus. Georg Feigl, Mohrs Breslauer Kollege, informierte Wilhelm Süß, damals Leiter des Arbeitskreises Mathematik im Reichsforschungsrat, daß Mohr verhaftet worden sei {BAP NJ 13334, 5.11.1944}. Süß wiederum hatte von dem Münchner Physiker Walther Gerlach erfahren, daß die SS beabsichtigte, „in einem Konzentrationslager ein Recheninstitut einzurichten, in dem die Fachkenntnisse der in Konzentrationslagern befindlichen entsprechenden Wissenschaftler nutzbar gemacht werden sollen.“ In einem Brief an SS-Standartenführer Wolfram Sievers vom „Ahnenerbe“ machte er einen Vorschlag „für diesen Plan, den ich sehr begrüße“: Mohr, der seit einigen Jahren in der Strömungsforschung gearbeitet habe (diese Arbeiten seien geheim), solle doch in diesem Recheninstitut eingesetzt werden {BDC Boseck, 7.9.1944}.

Das Recheninstitut – genauer: die Mathematische Abteilung des Instituts für wehrwissenschaftliche Zweckforschung der Waffen-SS und Polizei im Amt „Ahnenerbe“ des Persönlichen Stabes Reichsführer-SS¹⁷ – befand sich zu diesem Zeitpunkt eigentlich noch im Aufbau. Es ging auf einen Auftrag Heinrich Himmlers vom 25. Mai 1944 zurück, in dem er den SS-Obergruppenführer Oswald Pohl mit der Gesamtverantwortung, den Leiter des Ahnenerbes, SS-Oberführer Walter Wüst (Rektor der Universität München) mit der wissenschaftlichen Leitung und in dessen Vertretung eben Sievers betraute. Auf SS-Obergruppenführer Wilhelm Koppe ging, laut diesem Schreiben, „die wertvolle Anregung zu diesem Gesamtkomplex“ zurück {BDC Boseck}.¹⁸ Mit der unmittelbaren Leitung wurde der Diplom-Mathematiker Karl-Heinz Boseck betraut {BDC Boseck, 19.9.1944}.

¹⁷ Vgl. [Kater, 223 und passim].

¹⁸ Siehe zu diesem Thema auch {Ebert} und [Walter].

Am 28. Oktober 1944 wandte sich Boseck, dessen Mathematische Abteilung mittlerweile im KZ Sachsenhausen untergebracht war, an seine vorgesetzte Behörde, das Amt „Ahnenerbe“, mit der Bitte, in der Sache Mohr, von der er über Sievers erfahren habe, „mit Nachdruck“ aktiv zu werden. Dabei bemerkte er auch, daß er gehört habe, daß der Professor für Mathematik an der TH Brunn, Erwin Lohr, verhaftet worden sei. Am 2. November erhielt er die Mitteilung, daß in Sachen Mohr „die notwendigen Schritte unternommen worden“ seien {BDC Boseck}.

Schließlich enthält der „3. Bericht über die Errichtung einer wissenschaftlichen Forschungsstätte (Mathematische Abteilung) im KL. Sachsenhausen“ vom 1. Dezember 1944, verfaßt von Sievers, die Mitteilung, daß im KZ Buchenwald 14 Häftlinge als brauchbar ausgewählt worden waren, von denen allerdings aus „sicherheitstechnischen Gründen“ fünf, darunter „auch ein Dozent für Mathematik der Prager Universität“ nicht nach Sachsenhausen überstellt werden konnten {BDC Boseck}.

Dieser Bericht gab {Ebert} die Veranlassung festzustellen, daß Mohr sich im KZ Buchenwald befunden habe, was indes nie der Fall war; die einzige Erklärung ist, daß hier Lohr gemeint war, nicht Mohr. Tatsächlich spielte das „Ahnenerbe“, trotz der obigen Äußerungen, bestenfalls eine untergeordnete Rolle in Mohrs Schicksal nach der Verurteilung (s.u.).

Die zweite Unternehmung, Mohrs Leben zu retten, begann mit einem Gesuch von Mohrs Rechtsanwalt Riediger am 1. November 1944.¹⁹ Er bat um einen kurzfristigen Vollzugsaufschub, da einige Gutachten von Kollegen Mohrs zu erwarten seien, die dessen Leistungen und charakterliche Stärken darlegen würden. Offenbar unabhängig davon reichte Rohrbach am 4. November ein Gnadengesuch für Mohr beim Reichsjustizminister ein, in dem er darlegte, daß Mohr nicht nur keine Wehrkraftzersetzung betrieben habe, sondern vor allem von großer Bedeutung für die Flugzeugkonstruktionsforschung sei.

Am 8. November stellte Riediger den angekündigten Antrag, Mohrs Strafe auf dem Gnadenwege in eine Freiheitsstrafe umzuwandeln. Zur Unterstützung legte er entsprechende Schreiben Clemens Schaefers, Nikuradses (fünf Seiten lang) und Feigl vor. Diese behandelten Mohrs wissenschaftliche Leistungen und Bedeutung für den Flugzeugbau, aber auch sein allgemeines Verhalten in den letzten Jahren. So schrieb z.B. Feigl: „Menschen seines Schlages finden sich unter Mathematikern nicht selten: in allem, was nicht die eigene Wissenschaft betrifft, äusserst kindlich und naiv, harmlos, unüberlegt, zuweilen furchtbare Torheiten begehend.“

Zudem liegt ein Schreiben des Leiters des Planungsamtes des Reichsforschungsrates, Werner Osenberg, vom 13. November 1944 vor, in dem dieser um eine Verschiebung der Urteilsvollstreckung bat, da an ihn die Bitte herangetragen worden sei, für Mohr ein Gnadengesuch zu verfassen. Bevor er dazu Stellung nehmen könne, müsse die Angelegenheit aber erst „eingehend“ geprüft werden. In diesem Schreiben wird auch die Möglichkeit erwähnt, Mohr innerhalb eines Konzentrationslagers als Mathematiker einzusetzen, vermutlich also ein Hinweis auf das Institut für wehrwissenschaftliche Zweckforschung.

¹⁹ Das folgende nach {BAP NJ 13334, Bd. 3}.

Diese Anträge spielten jedoch nicht die entscheidende Rolle, ebensowenig ein Gnadengesuch Mohrs vom 26. Oktober 1944 – denn zu einer Gnadenentschließung kam es überhaupt nicht. Ausschlaggebend war ein Brief des Geschäftsführenden Mitglieds der Forschungsführung des Reichsministers der Luftfahrt und Oberbefehlshabers der Luftwaffe an den Reichsjustizminister vom 8. November 1944. Darin stand, daß die deutsche Luftfahrtforschung gegenwärtig „die äussersten Anstrengungen“ unternehmen müsse, um den feindlichen Vorsprung auf diesem Gebiet einzuholen. Dies sei umso schwieriger, als es an Nachwuchs mangle und dieser auch eine lange Einarbeitungszeit benötige. Daher werde vorgeschlagen, Mohrs Urteil auszusetzen und ihn für Arbeiten in der Luftfahrtforschung heranzuziehen. Die Betreuung dieser Arbeiten solle August-Wilhelm Quick, Leiter des Instituts für Aerodynamik und Flugmechanik der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt (DVL), Berlin Adlershof, übernehmen. Damit der Aufwand nicht zu groß werde, solle Mohr in der Nähe Berlins untergebracht werden. Quick werde die von Mohr zu bearbeitenden Aufgaben auf den Gebieten der Grenzschichttheorie, der kompressiblen Flüssigkeiten und der Stabilitätsprobleme bei Hochgeschwindigkeitsflugzeugen in Absprache mit der Forschungsführung auswählen.

Tatsächlich teilte das Reichsministerium der Justiz am 16. November dem Oberreichsanwalt beim Volksgerichtshof mit, daß dem Antrag der Forschungsführung des Reichsluftfahrtministeriums entsprochen und die Gnadenentschließung für sechs Monate ausgesetzt werden solle. Dann müsse „nach dem gebotenen strengsten Maßstabe“ entschieden werden, ob Mohr weiterhin unentbehrlich sei. Entsprechendes wurde sehr eilig der Leitung des Zuchthauses Brandenburg sowie der Forschungsführung mitgeteilt.

Mohr, der am 2. November von Plötzensee nach Brandenburg verlegt worden war, wurde am 18. Dezember 1944 wieder nach Plötzensee zurückgebracht, da dies vom Reichsluftfahrtministerium für wünschenswert erklärt worden war.

Es stellt sich nun die Frage, wieso die Forschungsführung des Reichsluftfahrtministeriums sich für Mohr einsetzte. Mohr selbst benennt, neben seiner Frau, konsequent Rohrbach als denjenigen, der sich hauptsächlich für den Aufschub einsetzte. So schildert er dem Schriftsteller Walter Hammer den Vorgang folgendermaßen: *Nach ungefähr 10 Tagen wurde ich in einem grösseren Transport nach Brandenburg zur Hinrichtung gebracht, und es war mir klar, daß es sich nur noch um Tage handeln konnte. Inzwischen fand meine Frau in Berlin einen neuen Rechtsanwalt, Herrn Dr. Lindenberg, der jetzt auch noch hier lebt und arbeitet, welcher ihr den Tip gab, daß nur eines meinen Kopf retten könnte, nämlich ein Forschungsauftrag. Mit diesem Wissen eilte meine Frau zu Herrn Prof. Rohrbach, meinem ehemaligen Kollegen von der Karls-Universität in Prag, der ein Haus in Berlin-Nikolassee hatte, wo auch seine Familie wohnte und wo sie ihn in jener Zeit auch antraf. Am nächsten Tag schon eilte Professor Rohrbach in den Volksgerichtshof, wo meine Akten bereits weg waren, von da in das Justizministerium, wo er einen gewissen Herrn Dr. Schmerse, Oberlandesgerichtsrat, antraf, der eben dabei war einen Stapel von Vollstreckungsurkunden zu unterschreiben. Unter diesem Stapel befand sich auch die Urkunde für mich; sie war noch nicht unterzeichnet. Herr Dr. Schmerse war so hochherzig, Herrn Professor Rohrbach zu erklären, nachdem er diesen angehört hatte, meine Urkunde zwei Tage zurück zu legen, bis der Forschungsauftrag eingegangen wäre und dann sich für einen*

Aufschub der Vollstreckung einzusetzen. Wieder waren es hochherzige Männer, welche im Verein mit den Bemühungen von Professor Rohrbach einen solchen Auftrag für mich in dieser kurzen Zeit zustande brachten und so kam es schließlich, dass ich im letzten Augenblick dem Henkerbeil entging. {IfZ, 13.9.1950}.

In seinen Lebensläufen vom 4. Juli 1950 {EBB} und vom 5. November 1952 {TUB PA} erwähnt Mohr in diesem Zusammenhang auch Quick. Ebenso schrieb Rohrbach in einer Erklärung {GbdL, 22.5.1958}, daß er nach langwierigen Verhandlungen im Reichsjustizministerium und Reichsluftfahrtministerium den Aufschub erreichte. Außerdem liegen ein Schriftstück Lindenberg's an Frau Mohr vom 18. November und ein Brief Rohrbach's an Frau Mohr vom 25. November 1944 vor {EBB}, die beide Rohrbach's wichtige Rolle dokumentieren: sowohl Lindenberg wie Mohr in Brandenburg erfuhren durch Rohrbach von dem Aufschub. An Sommerfeld schrieb Mohr am 6. Dezember 1946, daß Rohrbach sogar Ludwig Prandtl deswegen aufgesucht hatte, der ihn allerdings unverrichteter Dinge wieder wegschickte {DMA}. Schließlich wird Rohrbach's Hilfe für Mohr von Clemens Schaefer in einem Gutachten im Zusammenhang mit der kommissarischen Besetzung des Lehrstuhls für Mathematik und Astronomie an der Universität Würzburg im Jahre 1948 „rühmend hervorgehoben“ {BKM, 19.7.1948}.

Zwei Punkte müssen indes ebenfalls erwähnt werden: Die Darstellung in {Rohrbach} weicht etwas von der obigen ab, vor allem in der Frage des erlangten Forschungsauftrages. Er schreibt, daß Mohr für eine von ihm gegründete und von Gerhard Gentzen geleitete Arbeitsgruppe in Prag im Zusammenhang mit der Entwicklung der V-Waffen in Peenemünde Berechnungen ausführte und daß er Mohr das zu bearbeitende Material in Plötzensee überbrachte.²⁰ Es ist aber ziemlich eindeutig, daß die DVL für Mohr „verantwortlich“ war, wie auch die Sprecherlaubniserteilungen in {BAP NJ 13334} zeigen. Vielleicht waren die Rohrbach'schen Aufträge ein Zusatz. Außerdem schildert {Rohrbach} die „Aktenverschiebung“ als häufigeren Vorgang während des sechsmonatigen Aufschubs, wofür es jedoch eigentlich keine Veranlassung gab.

Der zweite Punkt betrifft Johann Nikuradse. Mohr erwähnt ihn nie unter seinen „Rettern“. Nikuradse selbst erklärte 1958, daß er am 20. Oktober 1943 von der Forschungsführung des Luftfahrtministeriums einen „Auftrag der Sonderstufe über systematische Untersuchungen der Reibungsschichten“ erhalten hatte, an dem Mohr mitgearbeitet habe. „Das Urteil wurde auf Betreiben des Luftfahrtsministeriums auf sechs Monate ausgesetzt. Der Ausfall des Herrn Prof. Dr. Mohr hätte sonst bewirkt, daß die Erledigung auf viele Jahre in Frage gestellt wurde. Ein Ersatz für die wissenschaftliche Bedeutung des Herrn Prof. Dr. Mohr war zur Zeit nicht vorhanden. Davon ließ sich das Luftfahrtministerium für seinen Einsatz zu Gunsten des Herrn Prof. Dr. Mohr leiten.“ {GbdL, 9.4.1958}

Die hier gegebene Argumentation entspricht genau der des Luftfahrtministeriums 1944. Hinzu kommt, daß Nikuradse nun tatsächlich die besseren Verbindungen zum Luftfahrtministerium gehabt haben dürfte. Außerdem erinnert sich eine frühere Mitarbeiterin Nikuradse's, daß sie die Aufgaben zusammenstellte,

²⁰ Über diese Arbeiten besteht indes laut {Menzler-Trott} Unklarheit.

die Nikuradse dann nach Berlin zu Mohr brachte {Bigalke}, woraus [Bigalke, 82] die Rettung Mohrs durch Nikuradse ableitete.

Die Mehrzahl der Unterlagen, und die Aussagen Mohrs, sprechen für Rohrbach.²¹ Da aber über den Entscheidungsprozeß in der Forschungsführung des Reichsluftfahrtministeriums keine Unterlagen vorliegen (und wenn sie existierten, sind sie mit großer Wahrscheinlichkeit den Bombardierungen zum Opfer gefallen), kann man über die Rolle Nikuradses keine zuverlässige Aussage machen.

Mohr jedenfalls hatte ein halbes Jahr Aufschub (bis 24. April 1945) und führte in Plötzensee die ihm aufgetragenen Berechnungen aus. Einen Teil seiner Eindrücke schilderte er Walter Hammer {IfZ, 18.6.1952}: *Ich wurde so um den 20. Oktober herum von Meseritz nach Plötzensee gebracht und wenige Tage später am 24. Oktober 1944 vom Volksgerichtshof unter dem Vorsitz von Dr. Stier zum Tode verurteilt. Schon vor der Verurteilung war ich im Totenhaus und mußte dort, kaum daß ich angekommen war, die ersten schrecklichen Erlebnisse hinnehmen. Es gab zu jener Zeit fast laufend Hinrichtungen im Zuge des 20. Juli. Ich wurde s. Zt. nachmittags so gegen vier Uhr in meine Zelle gebracht und kurze Zeit darauf flüsterte mir ein Kalfaktor durch die Zellentür, daß eben in diesem Augenblick wieder sechs Männer in den Schuppen geführt würden. Auch bereitete er mich vor, daß ich unter Umständen vor der Verurteilung gefesselt würde, da der Leiter des Totenhauses sehr gemein wäre (in meinem Fall trat dies übrigens nicht ein). Kaum war die Nacht da, gab es schwere Fliegerangriffe auf dem benachbarten Westhafen, und auch darüber erfuhr ich von meinem mir unbekannt gebliebenen Kalfaktor, was an Schrecklichem alles schon passiert war. Unter anderem wurde bei einem früheren Angriff das benachbarte Haus (ich glaube mit der Nummer III) getroffen und brannte völlig aus. Später erfuhr ich von einem anderen Gefangenen weitere Einzelheiten darüber: es sollen einige französische Häftlinge geflüchtet sein, die Gelegenheit hatten, während das Haus brannte, zu entkommen. Fast alle wurden wieder gefaßt und mußten sterben. Zwei der Franzosen meldeten sich freiwillig zurück, in der Hoffnung, dadurch am Leben bleiben zu können, eine Hoffnung, die sich aber nicht erfüllte. Auch der Hinrichtungsschuppen wurde s. Zt. beschädigt und so gab es für kurze Zeit eine Pause in dem planmäßigen Mord. Übrigens waren die offiziellen Hinrichtungstage in Plötzensee Dienstag und Freitag, der Montag war offizieller Hinrichtungstag in Brandenburg. Dienstag und Freitag mußten fast regelmäßig so 20–25 Menschen ihr Leben lassen, darunter selbstverständlich der größte Teil politischer Natur. Gegen das Frühjahr 1945 hin, häuften sich allerdings die Fälle von sogenannten Plünderern, aber man weiß ja, wie barbarisch diese Urteile waren. Außer diesen Tagen gab es aber meist noch im Zuge der Affäre des 20. Juli Hinrichtungen von größeren und kleineren Gruppen von politischen Gefangenen, darunter auch Frauen. Wie Sie wissen, kam ich etwa acht Tage nach meiner Verurteilung mit einem Transport mit vielen Ausländern nach Brandenburg. Nur einem rechtzeitig eingegangenen Forschungsauftrag verdanke ich mein Leben. Ich wurde zu diesem Zweck kurz vor Weihnachten nach Plötzensee zurückgebracht und zwar in das Haus II und dort in den Isolierbau. Von diesem Tage an wurde ich nicht mehr gefesselt, und ich hatte es von da ab vergleichsweise gut. Auch*

²¹ Man könnte allerdings auch aus der Aussage des Rechtsanwalts Riediger {GbdL, 11. 4. 1958} ableiten, daß Rohrbach und das Reichsluftfahrtministerium getrennt für Mohr intervenierten.

durfte ich kurze Zeit später bei Fliegeralarmen stets in den Keller und auf diese Weise kam ich auch mit anderen Gefangenen, allerdings nicht Politischen, in Berührung. Ich erfuhr so Manches von draußen. Unter anderem kam auch ein Kalfaktor mit dem Namen Elias in den Keller. [...] Herr Elias war Kalfaktor von Herrn Oberinspektor Runge vom Büro und so hatte er Gelegenheit, alle die politischen Gefangenen noch zu sehen bzw. kennen zu lernen, die von außerhalb nach Plötzensee zur Hinrichtung gebracht wurden. Er mußte diesen Menschen meistens noch etwas zu essen geben und von ihm erfuhr ich auch, daran erinnere ich mich noch genau, daß am 16. April [9. (?) April] Ernst [richtig: Ewald] von Kleist[-Schmenzin] zur Hinrichtung eingeliefert wurde.

Soweit nun meine Erinnerung reicht, fanden nach dem 20. April in Plötzensee keine Hinrichtungen mehr statt. Ich meine sogar, am Vorabend, d. h. am 19. April von den letzten Hinrichtungen gehört zu haben. Schon in den Wochen vorher waren viel Transporte und selbstverständlich wurde unter den Todeskandidaten viel aufgeräumt. Nach dem 20. April hatte sich jedoch die Lage in Berlin schon sehr zugespitzt. Es gab fast dauernd Alarme. Nach jedem Alarm kam durch meine Zelle auch ein holländischer politischer Gefangener, der mir eines Tages sagte, daß er hier einen Wachtmeister kenne, der ihm gesagt hätte, es wäre bald Feierabend. Soweit ich weiß, war es am Dienstag, den 24. April soweit, daß die noch verbliebenen Gefangenen einschließlich meiner Person in die Zellen des untersten Geschosses gebracht wurden. Ich lag mit einem Griechen Christophorides zusammen und nach einer bewegten Nacht war es am anderen Nachmittag soweit: mein Grieche war einst Partisane, kannte also russische Maschinengewehre und fuhr an jenem Nachmittage plötzlich hoch, laut rufend, jetzt sind die Russen da. In der Tat hörte man laute Schläge wie von einem Hammer und von unserem Zellenfenster aus konnten wir beobachten, wie das Tor von Haus IV zu Haus II aufgestoßen wurde und ein Wachtmeister, der mir dem Gesicht nach bekannt war, durch Genickschuß getötet wurde. Die Befreiung vollzog sich rasch und ein russischer Soldat öffnete uns die Zellentür. Unten in der Hausvaterei gab es ein großes Tohuwabohu. Schließlich war der ganze Hof voll von Gefangenen und russischen Soldaten und langsam bildeten sich Gruppen, die die Strafanstalt verließen. Da ich selbst Berlin nicht kannte, schloß ich mich einer kleineren Gruppe an, die geführt wurde von dem von Ihnen genannten Herrn Dr. van Husen, und der angehörte ein holländischer Häftling, dessen Namen ich vergessen habe, Herr Alber, jetzt in Köln und ehemals bereits in Köln als Stadtdirektor, und ich. Die erste Nacht verbrachten wir in einem Luftschutzkeller im afrikanischen Viertel, und am folgenden Tage fanden wir Dank der Vermittlung von Herrn van Husen Unterkunft bei dem Pfarrer Kampe in Berlin Reinickendorf, der auch jetzt noch dort amtiert.

VI

Der Lebenslauf Mohrs nach seiner Befreiung und nach Kriegsende wird üblicherweise recht kurz angegeben: Herbst 1945 Anstellung als Referent am Amt für Volksbildung des Magistrats von Berlin; zum 1.1.1946 ordentliche Professur für Mathematik an der TH Berlin (Lehrstuhl für reine und angewandte Mathematik, der durch Werner Schmeidlers Entlassung freigeworden war); 1950 Übernahme des Lehrstuhls Aloys Timpes für Mathematik und Wirtschaftsmathematik, damit

Schmeidler, inzwischen „rehabilitiert“, seinen alten Lehrstuhl wieder übernehmen konnte; im gleichen Jahr Mitbegründer der Berliner Mathematischen Gesellschaft; 1978 Emeritierung. In der Mathematik galt Mohrs Interesse nach Kriegsende im wesentlichen Problemen der Analysis, z. B. Differentialgleichungen und Eigenwertproblemen [Dick, Pinl, 177; Knobloch, 265; Litten, 707; Mathematica, 9].

Tatsächlich gewinnt man den Eindruck, daß 1945 Mohrs Leben völlig neu begonnen habe. Damit entspricht man auch – ohne daß hier Absicht impliziert sei – jener weit verbreiteten Wunschvorstellung, daß man die Zeiten vor und nach 1945 klar und säuberlich trennen, und dann jene 12 Jahre ja eigentlich gleich vergessen könne.

Doch die Vergangenheit ließ sich nicht einfach ausschalten, jedenfalls nicht für Mohr. Deutlich wird dies in einem Brief Mohrs an Walter Hammer vom 29.10.1952 {IFZ}: *Sie selbst, lieber Herr Hammer, sind ja einigermaßen über meinen Fall informiert. U.a. wissen Sie auch, daß ich im Frühjahr 1945 von den Russen in Berlin-Plötzensee befreit wurde. Die Rote Armee stürmte die Strafanstalt und befreite die noch inhaftierten politischen Gefangenen der Reihe nach. Nun bin ich doch im Frühjahr 1950 von Ost- nach Westberlin umgezogen und das brachte mit sich, daß ich mich in Westberlin erneut um die Anerkennung als OdF [Opfer des Faschismus] bemühen mußte. Ich wurde s.Zt. von dem ersten Magistrat, der noch für ganz Berlin zuständig war, nach kurzer Zeit als OdF anerkannt [29.10.1945 {EBB}], zumal ich eine Reihe von Zeugen beibringen konnte, die s.Zt. mit mir in dem ersten Magistrat tätig waren, so z.B. Pfarrer Buchholz, der damals die kirchlichen Angelegenheiten unter sich hatte, und Oberlehrer Nissen, der im Sommer 1945 zum Leiter der Strafanstalt in Spandau ernannt wurde. In Westberlin anerkannte man selbstverständlich das alles nicht, und da ich auch alle Unterlagen in Ostberlin lassen mußte, fing ich nun aufs Neue an, dieselben Schriftstücke wieder zu sammeln, die ich schon einst hatte. Ich legte also der Reihe nach vor:*

1. Das Zeugnis von Pfarrer Buchholz,
2. Das Zeugnis von Oberinspektor Runge, s.Zt. Oberinspektor in Plötzensee und jetzt wieder im alten Beruf als Gerichtsvollzieher,

ferner ein Schriftstück meines damaligen Rechtsanwaltes Dr. Riediger, der jetzt in Marktredwitz in Niederbayern sitzt, weiter einige Unterlagen von mir befreundeten politischen Gefangenen, die mich von damals kannten und noch so Einiges. Nachdem das alles eingereicht war, dauerte es zunächst sehr lange, bis überhaupt von dem Amt an mich eine Anfrage kam, und zwar wurde gefordert, daß ich ein Zeugnis der letzten Haftanstalt beibringen müsse, in der ich gesessen hätte. Ich gab darauf zurück, daß ich nicht in der Lage wäre, da ich ja nicht entlassen sondern vielmehr von den Russen befreit worden wäre. Ich könnte also nie eine derartige Unterlage beibringen. Nichtsdestoweniger ging ich eines Tages nach Plötzensee, um mich zu erkundigen. Die Antwort war selbstverständlich negativ und man empfahl mir daraufhin, ich sollte beim Generalstaatsanwalt von Westberlin anfragen, ob dort Unterlagen vorhanden wären. Tatsächlich war dort noch ein Aktenstück, doch ging aus diesem nur hervor, daß ich am soundsovielten als politischer Gefangener in Plötzensee in Untersuchungshaft eingeliefert worden wäre. Ferner wurde an dem Schreiben meines Rechtsanwaltes bemängelt, daß dort keine genauen Daten angegeben waren. Das stimmt, ist aber nicht

die Schuld von Herrn Dr. Riediger, denn auch Herr Dr. Riediger mußte aus Breslau fliehen und alles zurücklassen und deshalb konnte er sich nach 5 Jahren nicht mehr an das genaue Datum meiner Verhaftung, meiner Verurteilung ... erinnern.

Außerdem geschah folgendes:

Von der Annahme ausgehend, daß mein zuständiges OdF-Amt von Westberlin erst einmal mir die Anerkennung als OdF aussprechen mußte, wartete und wartete ich Tage, Wochen, Monate und Jahre und bekam, wenn ich ab und zu anrief jeweils den Bescheid, daß meine Sache jetzt beim Senat läge und ich demnächst eine Entscheidung erwarten dürfe. Inzwischen war aber, wie ich erst erfuhr als es zu spät war, die Frist dafür abgelaufen, um, wie man sagt, mein Urteil aufzuheben. Als ich dieserhalb mit dem zuständigen Staatsanwalt in Moabit sprach, meinte dieser man könne daran nichts mehr ändern, wobei er einräumte, daß in der Öffentlichkeit nicht genügend bekannt gemacht wäre, daß eine solche Frist bestünde. Ich habe daraufhin meinen Rechtsanwalt in Berlin, Herrn Dr. Lindenberg um Hilfe angerufen und einstweilen ist diese Sache noch in der Schwebe. [...]

Wenn ich zu Ihnen, lieber Herr Hammer, als Mensch zu Mensch spreche, so muß ich Ihnen aber leider sagen, daß ich den Eindruck nicht los werde, daß hier bei den zuständigen Stellen schon allenthalben für mich fühlbar wird, daß man gegen Menschen, wie ich es bin, eingestellt ist. Und dies trotz aller schönen Beteuerungen nach außen. So können Sie sich auch in Etwa erklären, warum ich nicht der Einladung gefolgt bin, Anfang September an der Feier in Plötzensee teilzunehmen. Wenn ich natürlich gewußt hätte, daß Sie dabei sind, wäre ich doch gekommen. Ich selbst war in Plötzensee und habe alles Furchtbare miterlebt; ich lag schwer krank und schwer gefesselt in der Totenzelle im Totenhaus IV bei Fliegeralarmen und Kälte, und ich habe erlebt die Hinrichtungstage. Ich war auch, Dank der Güte des jetzigen Direktors in Plötzensee allein an der Hinrichtungsstätte und habe dort gebetet. Aber solange ich nicht nach außen die Anerkennung als OdF bekomme, werde ich an offiziellen Feiern für OdF nicht teilnehmen. Meine Lage wird nun insofern gespannter, als ja nun, wie Sie wissen, auch nach Westberlin das Beamtengesetz kommen soll. Gerade heute bekam ich die Formulare, die ich ausfüllen und bis zum 5. November in unserer Verwaltung einreichen muß. Ich brauche Ihnen nicht zu sagen, daß ich bei den meisten Fragen, wenn ich eine Antwort gebe, eine entsprechende amtlich beglaubigte Unterlage nicht vorweisen kann. Wie Sie wissen, wurde nach meiner Verurteilung zum Tode auch meine Frau verhaftet [30. November 1944; Haft erst in Breslau, dann Reichenberg, schließlich Glatz {BAP NJ 13334, 8.4.1945}] und zwar von einem Kinde weg, das noch an ihrer Brust getrunken hat. Dann blieb die Oma, die inzwischen herbei geeilt war, allein mit den drei Kindern in Kunzendorf bei Breslau, wo sie bei einem Bauern untergebracht waren, und zwar, wie Sie sich wohl vorstellen können, nicht anders, denn als geächtete Person, da inzwischen alles bekannt geworden war, sowohl meine Verurteilung zum Tode wie die Verhaftung meiner Frau. Man wollte damals auch die Kinder von der Oma wegnehmen, was diese jedoch zu verhindern verstand. Dann kam der Sturm über Schlesien und bei 28 Grad Kälte, frühmorgens als noch Dunkelheit herrschte, mußte das Dorf binnen zwei Stunden geräumt werden. Meine Kinder wurden auf einen offenen Planwagen gebracht und dann ging es auf einen langen Treck. Das jüngste Kind, ein Junge, der während meiner Haft geboren wurde und den ich nie gesehen habe, verstarb nach kurzer Zeit und liegt im schlesischen Gebirge. Erst ein halbes Jahr nach unserer Befreiung im November 1945

fanden meine Frau und ich die beiden anderen Kinder und zwar in einem völlig ausgehungerten Zustand. Alles Hab und Gut war hin und alle Unterlagen weg. Zum Glück lebte die Oma auch noch und diese hatte einige wichtigste Urkunden von mir gerettet. Als wir im November 1945 mit diesen Urkunden von Thüringen nach Berlin zurückfuhren, wurden meine Frau und ich in dem dunklen Zuge zwischen Halle und Bitterfeld zusammen mit den anderen Insassen des Abteils von Banditen ausgeplündert und so verlor ich auch die letzten Unterlagen.

Selbstverständlich kann ich für jede meiner Aussagen zum Glück noch Freunde und Bekannte von Breslau als Zeugen angeben. So kann z.B. Professor Schaefer, Universität Köln, bezeugen, daß ich im Sommer-Semester 1942 einen Ruf auf eine Lehrkanzel für Mathematik an der Deutschen Karls-Universität zu Prag bekommen habe, ferner, daß ich verhaftet und zum Tode verurteilt worden bin.

Aber können Sie verstehen, daß ich langsam müde werde, mich dauernd mit solchen Anfragen und ähnlichem zu befassen? Abgesehen, daß die Nachkriegsjahre in Berlin alles andere denn leicht waren. Ich will nicht klagen, aber schließlich kam ich nach Berlin zusammen mit meiner Frau, mit dem, was ich auf dem Leibe hatte. Die Jacke, die ich trug, hatte mir eine Frau in Breslau geschenkt und die Hose hatte ich ebenfalls geschenkt bekommen, und Schuhe hatte ich, die zu eng waren, und damit mußte ich die zwei ersten Jahre in Berlin auskommen. Natürlich bin ich zum Teil daran selbst schuld, insofern, als ich mich weigerte, der kommunistischen Partei beizutreten. Ich war ja im Anfang im Magistrat tätig und man ließ mich fühlen, daß man gerade von mir einen Eintritt erwarte. Ich entsprach dem nicht, muß aber sagen, daß auch nichts gegen mich unternommen wurde. Man behandelte mich nach wie vor höflich, aber wie ich feststellen konnte, doch mit einer gewissen Kühle. Zum Glück kam ich bald in meinen Beruf zurück und fand hier an der neueröffneten Techn. Universität ein dankbares Tätigkeitsfeld. Auch hatte ich in den ersten Jahren immer noch gute Bekannte, ich möchte fast sagen, immer noch Freunde in dem damaligen Magistrat, Dank deren Hilfe es mir möglich war, Manches hier durchzusetzen und manchem Studenten und auch Kollegen zu helfen. Ich kann Ihnen aber auch sagen, daß ich meine Macht nie mißbraucht habe.

Sie werden sich vielleicht auch die Gefühle vorstellen können, die mich bewegen, wenn ich sehen muß, daß Menschen, die einst durch die vergangene Nazizeit schwer belastet waren, heute als selbstverständlich die hilfreiche Hand des Staates hinter sich wissen dürfen und nicht nur das, sondern sich sogar auf bereits verbrieftes Recht berufen dürfen, während unsereiner sich wie vogelfrei vorkommen muß.

Ich sage nicht mehr, denn ich hoffe nach wie vor, daß ich auch in der kommenden Zeit, wie einst in meiner schwersten Zeit, Menschen finde, die mir helfen. So hoffe ich auch fest, daß ich unbeschadet aller dieser Schwierigkeiten, sobald das Beamtengesetz kommt, als Beamter übernommen werde, wurde ich doch s.Zt. im Jahre 1943 zum beamteten a.o. Professor ernannt und gleichzeitig auf Lebenszeit ins Beamtenverhältnis berufen. Ich bin aber auch heute soweit, daß ich Sie, lieber Herr Hammer, um Hilfe anrufe: Wenn Sie so gut wären und an die betreffende Stelle in unserem Magistrat schrieben und für mich ein Wort einlegten, damit endlich meine Anerkennung als OdF durchgeht, so wäre ich Ihnen von Herzen dankbar.

Tatsächlich war Mohrs Anerkennung als Verfolgter zu diesem Zeitpunkt bereits erfolgt, doch wurde er von dieser Tatsache erst am 14. November 1952 in Kenntnis gesetzt {EBB}. Eine andere Hoffnung Mohrs mußte etwas länger warten:

am 14. Dezember 1953 erfolgte ein Senatsbeschluß und am 24. Dezember 1953 die Aushändigung der Ernennungsurkunde, derzufolge Mohr mit Wirkung vom 1. Dezember 1952 als ordentlicher Professor in das Beamtenverhältnis auf Lebenszeit übernommen wurde (bis dahin war er Angestellter gewesen). Daß dies überhaupt möglich war, scheint allerdings auch einem „Glücksfall“ zu verdanken gewesen zu sein, denn Mohrs Verurteilung war nicht im Strafregister eingetragen (wohl aufgrund der Aussetzung der Gnadenentschließung). Mit einem Eintrag und ohne Aufhebung des Urteils wäre seine Verbeamtung gescheitert {TUB PA}.

Die eigentliche Wiedergutmachung stellte die Entschädigung dar. Bereits am 1. Februar 1952 hatte Mohr verschiedene Anträge gestellt. Die Entschädigung für Freiheitsentzug wurde am 8. Mai 1953 anerkannt, die Entschädigung für Schaden im beruflichen Fortkommen erst am 15. September 1959, der Schaden an Gesundheit schließlich am 8. Juli 1963 (die daraus resultierende Rente wurde rückwirkend ab dem 1. November 1953 bezahlt) {EBB}. Diese zum Teil extremen Verzögerungen waren jedoch nicht speziell gegen Mohr gerichtet, nach Auskunft eines Behördenleiters findet man fast in jedem Vorgang (berechtigte) Klagen über zu lange Bearbeitungszeiten.²²

Letztendlich erfolgte noch ein wichtiger Schritt der ideellen Wiedergutmachung – die Aufhebung des Todesurteils. Am 3. Januar 1958 teilte der Senator für Inneres dem Berliner Kammergericht mit, daß Mohr für die anstehende Neuregelung seiner beamtenrechtlichen Stellung nach Artikel 131 Grundgesetz eine Aufhebung des Todesurteils benötige. Einen entsprechenden Antrag stellte Mohr am 3. Februar 1958 beim Landgericht Berlin, wohin die Angelegenheit verwiesen worden war. Auch damals konnte kein entsprechender Strafregistereintrag gefunden werden, Akten waren kaum greifbar, so daß einige Zeugenaussagen Gewicht erhielten. Erklärungen von Riediger, Mohrs früherem Rechtsanwalt, und Nikuradse wurden beigebracht; Riediger wurde sogar nach einer entsprechenden Verfügung in Nürnberg vernommen, vor allem zu der Frage, aus welchem Grund Mohr verurteilt worden war. Da die entsprechenden Aussagen, dazu noch eine Erklärung Rohrbachs, ziemlich deklungsgleich die rein politischen Gründe für die Verurteilung verdeutlichten, erklärte die Generalstaatsanwaltschaft bei dem Landgericht Berlin am 30. Mai 1958, daß keine Einwände gegen die Urteilsaufhebung beständen. Der entsprechende Beschluß der 13. Strafkammer des Landgerichts Berlin datiert vom 19. Juni 1958. Denkwürdig ist ein dazugehöriges Postskript: „Da sich die der Verurteilung wegen Wehrkraftzersetzung zugrundeliegende Tat des Antragsstellers somit nachweislich nur gegen die nationalsozialistische Regierungsform, nicht dagegen gegen die Wehrkraft des deutschen Volkes im eigentlichen Sinne gerichtet hat, fiel sie mithin unter die eingangs erwähnte Vorschrift des §1 Abs. 1 WGG.“ {GbdL} Fast möchte man meinen, daß Mohr Glück hatte, daß die politische Komponente anerkannt wurde.²³ Übrigens machte Mohr keine Ansprüche nach Art. 131 GG geltend.

Die Wiedergutmachung war also abgeschlossen: Mohr hatte eine Beamtenstellung, er erhielt eine Entschädigungsrente, das Todesurteil war aufgehoben. Er redete nicht oder nur selten über das Vergangene. Aber war es wirklich vorbei? Am

²² Zur (traurigen) Wiedergutmachungspraxis vgl. z. B. [Goschler, 149–160].

²³ Vgl. [Im Namen des Deutschen Volkes, 389ff.].

17. April 1961 schrieb er: *Obwohl diese Zeit nun schon über 16 Jahre zurückliegt, so kann ich sie nicht vergessen: regelmäßig werde ich von Angstträumen heimgesucht; es folgen dann Tage, an denen ich mich elend fühle, die Menschen meide und unfähig bin, Etwas zu leisten.* {EBB}

Seine Erinnerungen konnten ihm nicht mehr genommen werden. Ernst Mohr verstarb am 16. Mai 1989 in Berlin-Zehlendorf.

Unveröffentlichte Quellen

- BAP NJ 13334: Bundesarchiv Potsdam: Akte NJ 13334.
 BAP NJ 14078: Bundesarchiv Potsdam: Anklageschrift gegen Mohr.
 BAP Z/C 14225: Bundesarchiv Potsdam: Urteil gegen Mohr.
 BDC Boseck: Berlin Document Center (jetzt Bundesarchiv Außenstelle Zehlendorf): Research Wi Boseck.
 BDC REM: Berlin Document Center: Personalakte Mohr des Reichsministeriums für Wissenschaft, Erziehung und Volksbildung.
 BDC PK: Berlin Document Center: Parteikanzlei-Korrespondenz Mohr.
 BDC VGH: Berlin Document Center: Volksgerichtshofurteil Mohr.
 Bigalke, Hans-Günther: Telefonische Auskünfte an den Verfasser, Frühjahr 1994.
 BKM: Bayerisches Kultusministerium: Akte 5b/81a5, o. Professor für Mathematik und Astronomie an der Universität Würzburg.
 DMA: Deutsches Museum – Archive, Dokumentationen, Sondersammlungen: Nachlaß Sommerfeld: Schreiben Mohrs an Sommerfeld vom 6.12.1946.
 EBB: Entschädigungsbehörde Berlin: Akte Mohr 17152.
 Ebert, Hans: „Häftlingswissenschaftler“ im Einsatz für die SS 1944/45. Manuskript in TUB HA.
 GbdL: Generalstaatsanwalt bei dem Landgericht Berlin: Akte (513) 2 P Aufh. 8/58 (83/58).
 IfZ: Institut für Zeitgeschichte, München: ED 106 Archiv Walter Hammer, Bd. 80, Schriftwechsel Hammer – Mohr.
 Knobloch, Eberhard: Mathematik an der Technischen Hochschule/Technischen Universität 1799-1988. Unveröffentlichtes Manuskript.
 Menzler-Trott, Eckart: Schreiben vom 17.11.1995 an den Verfasser.
 Mohr, Ernst: Gutachten über Hans Rohrbach vom 14.5.1947. Im Privatbesitz des Verfassers.
 Rohrbach, Hans: Schreiben vom 10.7.1992 an den Verfasser.
 TUB HA: Technische Universität Berlin, Hochschularchiv: Nachlaß Hans Ebert.
 TUB PA: Technische Universität Berlin, Personalarchiv: Personalakte Ernst Mohr, Bd. 1, 2.
 UAG MI: Universitätsarchiv Göttingen: Bestand Mathematisches Institut, Personalien.
 UAG Weber: Universitätsarchiv Göttingen: Kur.-Personalakte Werner Weber (früheres Az.: XVI.V.A.d. 102).

Veröffentlichte Quellen

- Bigalke, Hans-Günther: Heinrich Heesch: Kristallgeometrie, Parkettierungen, Vierfarbentforschung. Basel 1988.
 Dick, Auguste; Pinl, Maximilian: Kollegen in einer dunklen Zeit. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 75 (1973/74), S. 166-208.
 Eisentraut, Martin: Vom Leben und Sterben des Zoologen Walther Arndt. In: Sitzungsberichte der Gesellschaft Naturforschender Freunde zu Berlin. Neue Folge, Band 26. Berlin 1986. S. 161-187.
 Goschler, Constantin: Wiedergutmachung – Westdeutschland und die Verfolgten des Nationalsozialismus 1945-1954. München 1992.
 Heiber, Helmut: Universität unterm Hakenkreuz. Teil I. München 1991.

- Im Namen des Deutschen Volkes – Justiz und Nationalsozialismus. Hrsg. vom Bundesminister der Justiz. Köln 1989.
- Kalf, Hubert: Ernst Mohrs Version der Weylschen Theorie der Sturm-Liouville-Operatoren. In: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 1988-1992. Berlin o.D. S. 221-234.
- Kater, Michael H.: Das „Ahnenerbe“ der SS 1935-1945. Stuttgart 1974.
- Knobloch, Eberhard: Mathematics at the Berlin TH/TU – Social, Institutional, and Scientific Aspects. In: The History of Modern Mathematics. Hrsg. von David E. Rowe und John McCleary. Vol. II: Institutions and Applications. Boston 1989. S. 251-284.
- Kroeschell, Karl: Rechtsgeschichte Deutschlands im 20. Jahrhundert. Göttingen 1992.
- Litten, Freddy: Ernst Mohr. In: Neue Deutsche Biographie. Bd. 17. Berlin 1994. S. 707-708.
- Mathematica – Ad diem natalem septuagesimum quintum data – Festschrift Ernst Mohr zum 75. Geburtstag. Hrsg. vom Fachbereich 3 – Mathematik – der Technischen Universität Berlin. Berlin 1985.
- Mehrtens, Herbert: Angewandte Mathematik und Anwendungen der Mathematik im nationalsozialistischen Deutschland. In: Geschichte und Gesellschaft 12 (1986), Heft 3, S. 317-347.
- Mohr (1933), Ernst: Die Darstellung der Komplexgruppe und der Charakteristiken der irreduziblen unter diesen. Dissertation Universität Göttingen 1933.
- Mohr (1941), Ernst: Über den gegenwärtigen Universitätsunterricht in der angewandten Mathematik. In: Deutsche Mathematik 6 (1941), S. 493-504.
- Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939-1946. Bd. 1, 2, 3, 5, 10. Wiesbaden 1948 (Bd. 1, 2, 5) bzw. Weilheim 1953 (Bd. 3, 10).
- Nitsche, Johannes C. C.: Zum Gedenken an Ernst Mohr – 1910-1989. In: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 1988-1992. Berlin o.D. S. 209-220. (Darin auch ein Verzeichnis der Schriften Mohrs mit den dazugehörigen Referaten im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, im Zentralblatt und in den Mathematical Reviews).
- Schappacher, Norbert: Das Mathematische Institut der Universität Göttingen 1929-1950. In: Die Universität Göttingen unter dem Nationalsozialismus. Hrsg. von Heinrich Becker, Hans-Joachim Dahms und Cornelia Wegeler. München 1987. S. 345-373.
- Walter, Kurt: Astronomy in Poland during the Second World War. In: Journal of the British astronomical Association 97 (1987), Heft 5, S. 270-273.

Freddy Litten
Habsburgerstr. 8
80801 München
e-mail: F. S. Litten @lrz.uni-muenchen.de

(Eingegangen 13. 7. 1995)

Buchbesprechungen

Ebeling, W., Lattices and Codes, A Course Partially Based on Lectures by F. Hirzebruch, Braunschweig u. a.: Vieweg 1994, 178 S., Softc., DM 48,-

Die Theorie der ganzzahligen quadratischen Formen wird heute meist in der Sprache der Gitter in Vektorräumen mit quadratischer Form behandelt. Man betrachtet also einen Vektorraum V der endlichen Dimension m über \mathbf{Q} mit symmetrischer Bilinearform $B(x, y)$ und zugehöriger quadratischer Form $Q(x) = B(x, x)$ und darin ein \mathbf{Z} -Gitter L vom vollen Rang m mit $B(L, L) \subseteq \mathbf{Z}$. Die Gram-Matrizen $(B(e_i, e_j))$ des Gitters bezüglich beliebiger \mathbf{Z} -Basen $\{e_i\}$ bilden dann eine Äquivalenzklasse ganzzahliger symmetrischer Matrizen S unter der Operation $S \mapsto T^t S T$ der Matrizen $T \in GL_n(\mathbf{Z})$, und zwei Gitter L und L' in Räumen (V, B) bzw. (V', B') liefern genau dann die gleiche Äquivalenzklasse, wenn L unter einer Isometrie von (V, B) auf (V', B') auf L' abgebildet wird.

Ein Großteil der grundlegenden Fragen der Theorie ist heute gut verstanden. Zu nennen sind hier vor allem die Arbeiten von Hermite, Minkowski und Siegel zur Reduktionstheorie und zur Maßtheorie der Einheitengruppen, ferner die Untersuchung der Arithmetik der p -adischen Komplettierungen der Gitter und der adelischen Theorie der orthogonalen Gruppen durch Eichler, Kneser und O'Meara und schließlich der Aufbau der analytischen Theorie und der Verbindungen zur Theorie der Modulformen durch Hecke, Siegel, Eichler und Weil. Das in der letzten Zeit wieder stark anwachsende Interesse an der Theorie der Gitter bezieht sich denn auch zu einem erheblichen Teil auf die (vorübergehend mehr im Hintergrund gewesenen) Fragen der expliziten Klassifikation und der expliziten Konstruktion und Untersuchung von Gittern mit speziellen Eigenschaften, insbesondere für den Fall positiv definitiver quadratischer Form. (Auf die ebenfalls sehr aktuelle Fortentwicklung der analytischen Theorie im Rahmen der Theorie der Thetakorrespondenz und der dualen reductiven Paare soll in dieser Besprechung nicht eingegangen werden.)

Das 1988 erschienene Buch „Sphere packings, Lattices and Groups“ von Conway und Sloane [C-S] (2. Auflage 1993) spricht in einer Sammlung von Originalarbeiten, Übersichtsartikeln und speziell für das Buch verfaßten Beiträgen die wichtigsten Themen an: Das Problem der Konstruktion möglichst dichter gitterförmiger Kugelpackungen (und damit verwandte Probleme), die Realisierung endlicher Gruppen als Einheitengruppen (d. h. Isometriegruppen) von Gittern und die Verbindung beider Fragen zur algebraischen Kodierungstheorie über die Konstruktion von Gittern mit Hilfe von Codes über endlichen Körpern.

Das vorliegende Buch von Ebeling bietet, basierend auf Vorlesungen des Verfassers und von F. Hirzebruch, eine gut lesbare Einführung in den letztgenannten Themenkreis, zu dem es bisher keine lehrbuchmäßige Darstellung gab (das Thema der Konstruktion von Kugelpackungen wird nur am Rande gestreift). Es geht dabei um folgendes einfache Prinzip: Ist $L \subseteq V$ wie oben ein ganzzahliges Gitter (d. h. $B(L, L) \subseteq \mathbf{Z}$), so ist das Dualgitter $L^\# = \{x \in V \mid B(x, L) \subseteq \mathbf{Z}\}$ ein Obergitter von L und man kann die Diskriminantengruppe $\Delta(L) := L^\# / L$ betrachten. Wir nehmen $Q(L) \subseteq 2\mathbf{Z}$ an (das Gitter L heißt dann gerade) und haben mit $2N^{-1}\mathbf{Z} = Q(L^\#)\mathbf{Z}$ auf $\Delta(L)$ eine quadratische Form $q = \overline{(NQ)}/2$ mit Werten in $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ und eine zugehörige symmetrische Bilinearform $b(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$; da $NL^\# \subseteq L$ gilt, können wir $\Delta(L)$ auch als Modul über $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ auffassen. Die ganzzahligen Obergitter von L stehen dann in Bijektion zu den Untergruppen H von $\Delta(L)$, für die $b(H, H) = 0$ gilt, gerade Gitter erhält man, falls auch noch $q(H) = 0$ erfüllt ist.

Speziell betrachtet man meist den Fall, daß $N = p$ eine Primzahl ist und daß bei geeigneter Koordinatenwahl die induzierte Bilinearform b auf $\Delta(L)$ die Standardbilinearform $\sum x_i y_i$ ist; dann sind die oben betrachteten Untergruppen von $\Delta(L)$ genau die Codes im

F_p^n (wo $n = \dim_{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} \Delta(L)$ ist), die in ihrem Dualcode enthalten sind (und zusätzlich doppelt gerade sind). Schon in dieser Grundversion erhält man so eine Reihe hübscher Konstruktionen. Der Fall, daß (L, Q) das Würfelgitter ist ($B(e_i, e_j) = 2\delta_{ij}$) liefert etwa die bei Sloane „Konstruktion A“ genannte Methode, zu einem selbstdualen Code C über F_2 ein unimodulares (d. h. selbstduales) Gitter L_C zu konstruieren. Einfallsreiche Varianten findet man etwa in [Qu, C-S, Ch. 8].

Das Buch von Ebeling beginnt in Kapitel 1 mit einer Zusammenstellung der Grundbegriffe sowohl der Gittertheorie als auch der algebraischen Kodierungstheorie und stellt mit der bekannten Klassifikation der Wurzelgitter aus der Theorie der einfachen Lie-Algebren den üblichen Vorrat von Standardgittern zu Verfügung. Kapitel 2 wendet sich dem zweiten Hauptthema des Buches zu: der Thetareihe $\sum_{x \in L} \exp(\pi i Q(x)z)$ des positiv definiten Gitters (L, Q) . Die Grundbegriffe der Theorie der Modulformen zur vollen Modulgruppe $SL_2(\mathbf{Z})$ werden in Anlehnung an Serres „Cours d'arithmétique“ eingeführt und mittels der Poissonschen Summenformel gezeigt, daß die Thetareihe eines geraden unimodularen Gitters eine solche Modulform ist. Das Analogon der Thetareihe für Codes $C \subseteq F_2^n$ ist das Gewichtepolynom (weight enumerator) $W_C(X, Y) = \sum_{i=0}^n A_i X^i Y^{n-i}$, wo A_i die Anzahl der $c \in C$ ist, die genau i Einsen enthalten. Im Fall des oben erwähnten Gitters L_C wird gezeigt, daß man die Thetareihe von L_C erhält, indem man in W_C die Thetanullwerte

$$\vartheta_{00} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i n^2 z) \text{ und } \vartheta_{10} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 z\right)$$

gezeigten Ergebnisse über Modulformen und Thetareihen gewinnt man dann die MacWilliams-Identität für Gewichtepolynome selbstdualer Codes über F_2 und den Satz von Gleason über die Struktur des Ringes der Gewichtepolynome doppelt gerader selbstdualer Codes über F_2 , Ergebnisse, die man natürlich auch direkt durch diskrete Fourieranalysis erhalten kann. Eine Reihe von Beispielen (u. a. quadratische Restcodes, Golay-Code, Steiner-Systeme und Konstruktion des Leech-Gitters) rundet dieses Kapitel ab. In Kapitel 3 wird die Transformationsformel der Thetareihen mit harmonischen Polynomen von ganzzahligen Gittern beliebiger Stufe bewiesen (obgleich hier im weiteren eigentlich nur der viel einfachere Fall gerader unimodularer Gitter benötigt wird). Anschließend wird der von B. B. Venkov stammende Beweis für die Richtigkeit der Niemeierschen Klassifikation der geraden unimodularen Gitter in Dimension 24 mit Hilfe der Thetareihen mit harmonischen Polynomen vom Grad 2 teilweise ausgeführt. Als Vorbereitung hierfür werden (in Anlehnung an Arbeiten von Koch und Venkov) die oben skizzierten Beziehungen zwischen den Obergittern eines festen ganzzahligen Gitters und Untergruppen der Diskriminanten-Gruppe im Falle von Wurzelgittern ausführlich diskutiert und in Beziehung gesetzt zu analogen Ergebnissen für Codes über F_2 , die von H. Koch stammen. Etwas irritierend ist hier allerdings die Definition, zwei Obergitter Γ, Γ' eines Gitters Λ isomorph zu nennen, wenn sie durch eine Λ in sich überführende Isometrie ineinander übergehen. Insbesondere wird dadurch nicht deutlich, worin die Schwierigkeit bei dem (dem Leser als Übung überlassenen) Beweis des Theorems 3.3 liegt, in dem es um Isomorphie ohne diese Zusatzbedingung geht. Kapitel 4 ist einer ausführlichen Untersuchung des Leech-Gitters (das bis auf Isometrie eindeutig bestimmte gerade unimodulare Gitter in Dimension 24 ohne Vektoren x mit $B(x, x) = 2$) gewidmet. Insbesondere wird die Methode von Borcherds zur Untersuchung des Überdeckungsradius (covering radius) und der sogenannten deep holes des Leech-Gitters mit Hilfe der Einbettung in ein 26-dimensionales Gitter der Signatur $(25, 1)$ (der hyperbolischen Einbettung) durchgeführt. Kapitel 5 schließlich kehrt wieder zurück zum Thema des Zusammenhangs zwischen Codes, Gittern und Thetareihen. Man geht hier aus von dem Primideal \mathfrak{P} über p im Ring der ganzen Zahlen \mathfrak{D} des Kreisteilungskörpers $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ mit der Bilinearform $\text{Tr}(x\bar{y})/p$. Die Diskriminanten-Gruppe hiervon ist $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, und man kann gemäß dem eingangs diskutierten Prinzip Obergitter von

\mathfrak{P}^n in Beziehung setzen zu Codes im F_p^n . Die hierfür eigentlich schon in Kapitel 3 etablierten allgemeinen Prinzipien werden im konkreten Fall erneut hergeleitet. Neu ist, daß man die Gitter aufgrund ihrer Konstruktion nun auch mit einer Struktur als \mathfrak{D}^+ -Gitter ausgestattet hat, wo \mathfrak{D}^+ der Ring der ganzen Zahlen im total reellen Teilkörper von $Q(\zeta_p)$ ist. Als solche haben sie Thetareihen, die Hilbertsche Modulformen sind. Für diese wird der Satz von Hirzebruch und van der Geer gezeigt, nach dem man hier ähnlich wie in Kapitel 2 einen Zusammenhang zwischen dem vollständigen Gewichtepolynom (Lee weight enumerator) des Codes und der Thetareihe des Gitters hat. In den Spezialfällen $p=5$ und $p=3$ kommt man dadurch mittels der Kenntnisse, die man über den Ring der Modulformen hat (wieder ähnlich wie in Kapitel 2) zu hübschen Beweisen von Sätzen über die Gewichtepolynome von selbstdualen Codes über F_p .

Das Buch gibt eine empfehlenswerte erste Einführung in das Thema. Die Stoffauswahl ist dabei deutlich von der Entstehung aus Vorlesungen beeinflusst. Für ein reines Lehrbuch hätte man wohl darauf verzichtet, in anderen Lehrbüchern gut nachlesbare Beweise zu wiederholen (wie hier etwa die Theorie der Wurzelsysteme und die Transformationsformel der Thetareihen) und dafür vielleicht bei weiterführenden Themen versucht, mehr Vollständigkeit zu erreichen. Daß der Autor von dem ursprünglichen Vorlesungskonzept nicht abgewichen ist, mag so zwar gewisse formale Mängel mit sich bringen, erhält aber andererseits die Lebendigkeit der zugrundeliegenden Vorlesungen und führt den Leser mit einem Minimum an Vorkenntnissen in eine interessante Theorie und ihre Verbindungen zu anderen Gebieten ein.

[C-S] Conway, J. H.; Sloane, N. J. A.: Sphere packings, lattices and groups. Grundlehren d. math. Wiss. 290, Springer 1988

[Qu] Quebbemann, H.-G.: A construction of integral lattices. Mathematika 31 (1984) 137–140

Saarbrücken

R. Schulze-Pillot

Fulton, W., Introduction to Toric Varieties (Annals of Math. Studies 131), Princeton University Press 1993, 157 S., pb, DM 60,-

Als Einführung in die Algebraische Geometrie eignet sich am besten das Studium spezieller Klassen besonders einfacher algebraischer Varietäten. Für einführende Vorlesungen werden hierzu meistens Algebraische Kurven oder auch die Varietäten, die in der klassischen Projektiven Geometrie vorkommen, also Quadriken, Grassmannsche etc., gewählt. Bei diesen Varietäten treten aber viele Phänomene, die im allgemeinen vorkommen können, nicht auf.

Die Torus-Varietäten stellen nun eine ganz andere relativ leicht zugängliche Klasse von Varietäten dar. Sie sind nicht nur einfach zu definieren, viele, im allgemeinen schwierige Ergebnisse, gestatten hier kurze und leicht einsichtige Beweise. Aus diesem Grunde sind sie nicht nur als Einführung geeignet, sondern bieten auch die Möglichkeit, Ergebnisse beispielsweise der Mori-Theorie in Spezialfällen zu testen.

Ein dritter Grund für die Wichtigkeit von Torus-Varietäten ergibt sich aus ihrer Definition: Sie entstehen aus einfachen Objekten der konvexen Geometrie: Jedem konvexen Polytop oder auch jedem Fächer von rationalen konvexen polyedrischen Kegeln läßt sich eine Torus-Varietät zuordnen. Mit Hilfe von Sätzen über diese Varietäten, beispielsweise Riemann-Roch oder dem Hodge-Index-Satz lassen sich dann wichtige Ergebnisse der konvexen Geometrie sowie der Kombinatorik auf sehr einfache Weise ableiten.

Die zu besprechende Vorlesungsausarbeitung stellt eine sehr gute Einführung in die Theorie der Torus-Varietäten im Hinblick auf alle drei obengenannten Aspekte dar. Kurz zum Inhalt:

Kapitel 1 enthält die Grundlagen über konvex polyedrische Kegel sowie die Definition von Torus-Varietäten. Kapitel 2 gibt Kriterien für Kompaktheit und Nichtsingularität, Singularitäten werden untersucht und aufgelöst. Kapitel 3 behandelt die Operation des zugrundeliegenden algebraischen Torus, die den Varietäten den Namen gibt, führt Divisoren und Geradenbündel ein und berechnet deren Kohomologie. Kapitel 4 führt die Momentenabbildung und das Tangentialbündel ein. Die Serre-Dualität wird bewiesen und die Betti-Zahlen ausgerechnet. In Kapitel 5 wird Schnitttheorie betrieben und der Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch bewiesen. Schließlich enthält Kapitel 5 eine Reihe von Anwendungen für die konvexe Geometrie. Um nur zwei Beispiele zu geben: Die Alexandrov-Fenchel-Ungleichung ist eine einfache Folgerung des Hodge-Index-Satzes und Stanleys Satz über die Charakterisierung von Zahlenfolgen f_0, f_1, \dots, f_{n-1} , die als Anzahlen von Ecken, Kanten, \dots , $(n-1)$ -Seiten von n -dimensionalen konvexen simplizialen Polytopen vorkommen, ergibt sich aus einfachen kohomologischen Ergebnissen der zugehörigen Torus-Varietät.

Der Stil ist derselbe wie in allen Büchern Fultons: Es wird weniger Wert gelegt auf Vollständigkeit der Beweise und größtmögliche Allgemeinheit als darauf, die Ergebnisse zu erklären und die wesentlichen Beweisideen herauszuarbeiten. Übrigens enthält das Buch eine Fülle von Beispielen, die meisten von ihnen in Form von Exercises, wobei die schwierigeren mit Hinweisen versehen sind. Es gibt bemerkenswert wenig Druckfehler. Einen möchte ich als Erlanger allerdings nicht verschweigen: Paul Gordan wurde amerikanisiert, sein Lemma über die endliche Erzeugung der Halbgruppe der ganzzahligen Punkte eines rationalen konvexen polyedrischen Kegels heißt hier Gordons Lemma.

Das Buch kann uneingeschränkt als Einführung in die Torus-Varietäten nebst Anwendungen oder auch in weitestem Sinne in die Algebraische Geometrie empfohlen werden. Nicht zuletzt wegen der vielen Beispiele und Übungsaufgaben eignet es sich hervorragend als Vorlage für ein Seminar (Das habe ich ausprobiert und zwar mit Studenten des 5ten und 6ten Semesters).

Erlangen

H. Lange

Kostrikin, A. L., Shafarevich, I. R. (Eds.) Algebra IV, Infinite Groups. Linear Groups, with contributions by A. Yu. Ol'shanskij, A. L. Shmel'kin, A. E. Zalesskij, übersetzt aus dem Russischen von J. Wiegold (Encyclopaedia of Mathematical Sciences 37), Berlin u. a.: Springer 1993, 203 S., DM 144,-

This volume is a composite of two short books by different authors. Approximately half the book is on Linear Groups and is by A. E. Zalesskij. I found this attractively and informatively written. It is not easy to write at this level, being all too easy to fall between two stools, to bore the expert while failing to inform the novice. The author has a sure touch for the amount of explanation to put in and to leave out. The sections, where I am not expert, I found informative and comprehensible, while those where I am expert, I still found pleasure in reading. As one would expect the author has a wider knowledge of the Russian literature than that of the West. Although on occasion this might be galling to the western expert, over all this probably makes the whole exercise more useful to the western reader, since our knowledge of the Russian literature can also leave something to be desired. It was a bit of a fidget that works referred to in the text often do not appear in the references at the end, although I accept that a complete list would have been unreasonably long. Another, very minor, criticism is that it seems in places to read like an elderly out-of-date account that has been spiced up with the insertion of more recent material. We consider the detailed contents later in this review.

The remainder of the volume, entitled *Infinite Groups* and by A. Yu. Ol'shanskij and A. L. Shmel'kin, is again split into two quite separate parts. The first has the title *Combinatorial Group Theory*. This is also excellently written and great fun to read, with technical explanation kept to a minimum but still with enough to carry the uninitiated along; a very difficult thing to do as anyone who has tried will know.

The second part, a mere fifty pages is devoted to all the rest of infinite group theory. The authors here have clearly set themselves an impossible task and, I am afraid, in my view, fail badly. These very brief potted summaries of small parts of very large sections of mathematics will not give any feel for the areas even to the semi-expert and will be quite unhelpful for the uninitiated. The difference with the other parts of the book is very marked. In a sense I think there is a failure here on the part of the editors. It should be their responsibility to divide the mathematical sciences into sensible and even volume-size pieces and present their authors with an achievable goal. This here they have not done. For example one page is devoted to polycyclic groups (this section is actually one of the best and is attractively and informatively put), nearly 10 pages to abelian groups, while 36 pages (more if one counts in some parts of Section I, Chapter 2) are also related to combinatorial group theory. Moreover a later volume of the *Encyclopaedia (Algebra VII)*, called *Combinatorial Group Theory; Applications to Geometry*, must contain much of the same type of material. By any reasonable measure this is surely wildly out of balance. The introductions to the two parts of *Infinite Groups* seem very pompous, at least to this English reader, who is more used to a lower key style. Also the introduction to Chapter 2 on *Infinite Groups* puts forward a philosophy of group theory that is certainly alien to me and I suspect to many working group theorists. However it is good sometimes to be forced to rethink the basis of one's attitude to mathematics, even if one comes to the conclusion that one was right to begin with.

We now give a more technical summary of the volume's contents. The section on combinatorial group theory kicks off with free groups and moves rapidly on to subgroups of free groups, Schreier transversals, Nielsen's method, defining relations, presentations of groups, free products, free products with amalgamation, HNN-extensions, bipolar structures, groups acting on trees, finitely presented groups, one-relator groups, small cancellation groups, the geometric interpretation of cancellation in terms of diagrams (built from vertices, edges and, coming from the defining relations, 2-cells, Novikov and Adian's work on the Burnside problem (the completions of the solution to both the general and the restricted Burnside problems are too recent to be included), Ol'shanskij's work on Tarski monsters and related groups, algorithmic problems for groups and finally growth functions of groups and the work of Gromov in particular.

The second chapter of the section on *Infinite Groups* runs rapidly through the following with, on average, some 10 pages on each, abelian groups, group extensions and homological questions, soluble groups, nilpotent groups and finally periodic groups.

The section on *Linear Groups* covers the following topics in three chapters. The first starts with many explicit examples of linear groups and is excellent reading for the beginner; then comes linear group constructions, viz. direct sums, tensor products and many other types, then the classical groups are introduced, symplectic, orthogonal and unitary, then linear groups over evaluated fields, the Zariski topology and finally algebraic groups. Chapter 2 is called "The Machinery of Linear Group Theory". It starts at the beginning with irreducibility, indecomposability, primitivity and Clifford's theorem and goes on to topological methods, algebraic group methods and residual methods (effectively making use of the theory of commutative finitely generated domains).

Chapter 3 is satisfactorily summarized by its title "A sketch of the Contemporary State of the Theory of Linear Groups". It sweeps over a very wide field very briefly and touches in particular on maximal subgroups of linear groups, finite linear groups, linear groups over the integers and similar ground rings, skew linear groups (i. e. matrix groups

over potentially non-commutative division rings) and finally, and in passing, finitary groups and semi-linear groups (where the "linear" maps are twisted by automorphisms of the ground ring).

The translation seems generally to be good and I suspect retains some of the feel of the Russian original. A small point: it is a pity that the Russian PH is translated as RN and not the usual SN (the S here stands for soluble and the N for normal; a knowledge of the Russian for these words will explain the PH). The same comment applies to the use of RI in place of the more usual SI.

The above, of course is a very personal impression of this book. Overall I greatly enjoyed reading it and I feel the efforts of the three authors (and of the translator) were well worthwhile.

London

B. Wehrfritz

Gruber, P. M., Wills, J. M., (Herausgeber), **Handbook of Convex Geometry** – Vol. A und Vol. B, Amsterdam: North Holland 1993, 816 und 780 S., Dfl 295 und 285, zusammen Dfl 540

Das Vorwort zu diesen beiden gewichtigen Bänden beschreibt das Hauptziel: „*One aim of this handbook is to survey convex geometry, its many ramifications and its relations with other areas of mathematics. We believe that it will be a useful tool for the expert.*“ Diesem Ziel wird das vorliegende Handbuch in hervorragender Weise gerecht.

Das Vorwort fährt fort: „*A second aim is to give a high level introduction to most branches of convexity and its applications, showing the major ideas, methods and results.*“ Ich behaupte, daß dies ganz einfach unmöglich ist – wenn man seinen Begriff von „Introduction“ nicht so eng faßt, daß man mit einer Skizze der wesentlichen Fragestellungen, einer Skizze der hauptsächlichen Methoden, und den entsprechenden Literaturhinweisen zufrieden ist – denn zu ausgeführten Beispielen oder zur Demonstration der Methoden „am lebenden Objekt“ fehlt schließlich doch der Platz.

Denn eines wird auf den rund 1600 Seiten deutlich: die Konvexgeometrie ist ein weites Feld, mit vielen Seitenwegen und Verbindungen; jede halbwegs vollständige Übersicht muß trotz „Mut zur Lücke“ ziemlich umfangreich ausfallen. Konvexgeometrie als mathematische Disziplin schließt eben auch die Geometrie der Zahlen mit ein, die Differentialgeometrie konvexer Flächen, analytische Hilfsmittel, Geometrie der Banachräume, diskrete Geometrie und Geometrie der Polytope, lineare und konvexe Optimierung, und vieles mehr.

Eine Übersicht über das Gebiet, von den historischen Entwicklungslinien her gesehen, liefert das Eingangskapitel „History of Convexity“ von P. Gruber. Leider vermißt man dort das unabdingbare Literaturverzeichnis, und (wie auch in anderen Kapiteln) die Querverweise in die anderen Kapitel: mit den nötigen „Zeigern“ hätte man viel besser die Funktion eines Einstiegskapitels erfüllen können.

Im vorliegenden Handbuch wird das weite Feld der Konvexgeometrie in fünf große Bereiche aufgeteilt. Band A enthält die historische Skizze, sowie

Part 1: „Classical Convexity“, und

Part 2: „Combinatorial Aspects of Convexity“.

Im Band B finden sich

Part 3: „Discrete Aspects of Convexity“ (Gitter und konvexe Körper, Packungen, Überdeckungen und Zerlegungen)

Part 4: „Analytic Aspects of Convexity“ (Differentialgeometrische Fragen, Banachräume, Hilfsmittel der harmonischen Analysis, etc.), sowie der kürzere

Part 5: „Stochastic Aspects of Convexity“.

In beiden Bänden findet man das Autoren- und Stichwortverzeichnis für beide Bände. Diese Verzeichnisse (von entscheidender Bedeutung für die Brauchbarkeit eines solchen Werkes!) scheinen weitgehend sorgfältig gearbeitet, wenn auch nicht perfekt. Dasselbe gilt auch für die Literaturverzeichnisse der einzelnen Kapitel.

Die vergleichsweise relativ kurze Entstehungszeit („nur wenige Jahre“) garantiert, daß das Handbuch für eine Weile wirklich den „Stand der Technik“ darstellen kann. Es wäre natürlich schön, wenn sich die Aktualität irgendwie halten ließe. Dafür böte es sich hier an (statt der Produktion von Loseblattsammlungen, wie sie wohl juristische Fachverlage zum Geldverdienen erfunden haben) regelmäßige Ergänzungen elektronisch am Netz abzulegen. Dies könnte sich auch in Bezug auf Fortschritte zu den zentralen und interessanten Forschungsproblemen bewähren, die in einigen der Kapitel angeboten werden.

Die einzelnen Kapitel des Handbuches decken weite Bereiche der Konvexgeometrie und angrenzender Gebiete ab, wobei die Aufteilung in Einzelthemen, und somit auch die vereinzelt Lücken im Themenangebot, sich stark den Autoren anpassen. Das Handbook ist eben durchaus kein reines Nachschlagewerk. Die Stile der Einzelkapitel sind höchst unterschiedlich – entsprechend den einzelnen Autoren, die für die Einzelkapitel verantwortlich zeichnen (alle Fachleute auf ihrem Gebiet, ein großer Teil aus dem deutschen Sprachraum). So findet man recht trockene Übersichten wie auch lebendige Skizzen, Hauptergebnisse wie Hilfsmittel, auch Beweisskizzen und Beispiele, und immer eine große Fülle an Information, und Hinweise auf mehr. („*The manuscripts which we finally received turned out to be much more diverse than we had anticipated. They clearly exhibit the most different characters and scientific styles of the authors and this should make the volume even more attractive.*“.)

Zweifellos ist das Handbuch ein nützliches und wohl unersetzliches Hilfsmittel für den Experten, aber auch eine hervorragende, verlässliche Informationsquelle für alle, die auf Nachbargebieten arbeiten. Es wäre wohl noch nützlicher, wenn jeder die beiden Bände auf dem Schreibtisch haben könnte. Leider, leider ist die Preispolitik von North-Holland darauf nicht ausgelegt. Man verkauft anscheinend lieber jeder Bibliothek ein einziges teures Exemplar, anstatt das Werk vielen einzelnen Mathematikern in die Hände zu geben.

Vieles, was sich ohne Detailkritik einzelner Kapitel zu den vorliegenden Bänden sagen läßt, gilt auch für das sich ausbreitende Genre von Handbüchern im allgemeinen. In angrenzenden Gebieten seien hier nur das „Handbook of Combinatorics“ genannt, das von Graham, Grötschel und Lovász herausgegeben demnächst bei North-Holland erscheint, und das in Vorbereitung befindliche „CRC Handbook of Discrete and Computational Geometry“, das Goodman und O'Rourke koordinieren.

Zusammenfassung: Jede gute Mathematikbibliothek braucht dieses Handbuch sowieso – und jeder Mathematiker braucht eine gute Mathematikbibliothek. Eine solche gute Mathematikbibliothek, per definitionem, bietet eine Lesecke, in die man das Handbuch verschleppen kann und darf. In der Bibliothek hat man dann ja auch die Chance, auf die Quellen und Referenzen zuzugreifen, den Hinweisen auf die „Originalliteratur“ zu folgen, und weiterzulesen. Allemaal: das Schmökern lohnt ...

Berlin

G. M. Ziegler

Gilbert, N. D., Porter, T., Knots and Surfaces, Oxford University Press 1994, 267 S., hardcover 31.50 £, paperback 19.50 £

Die Aufgabe dieses Buches könnte sein, Studienanfänger in Mathematik topologisches Anschauungsmaterial (Knoten, Graphen, Flächen) näher zu bringen und, soweit es mit elementaren kombinatorischen und gruppentheoretischen Methoden möglich ist,

Mathematisierung und Problemlösung an diesen Objekten zu üben. Die Autoren sprechen propädeutisch eine ganze Reihe von geometrischen und algebraischen Konzepten der niederdimensionalen Topologie an, können aber Beweise immer nur da anbieten, wo es „leicht geht“. Darin liegt eine gewisse Problematik, insbesondere für die Verwendung des Buches im deutschen Universitätsbetrieb, denn es ist ausdrücklich für „undergraduates“ gemacht. Sicherlich ließen sich Proseminare über solche Themen neben den kanonischen Anfängerkursen mit Gewinn für die Studenten durchführen; die Freiräume dafür sind aber meist nicht vorhanden. Den Ansprüchen höherer Semester ist die Darstellung nicht gewachsen.

Zum Inhalt: Im ersten Kapitel werden Knotendiagramme und Reidemeister-Prozesse eingeführt, dazu Beispielmaterial. Im zweiten findet man eine Begründung des Jones-(Kauffman-) Polynoms; das Homfly-Polynom wird mit einigen seiner Eigenschaften besprochen – seine Existenz kann in diesem Rahmen nicht bewiesen werden. Die auf Alexander zurückgehende kombinatorische Definition seines Polynoms wird nur skizziert. Es folgt im dritten Kapitel eine kurze Einführung in Begriffe der Allgemeinen Topologie, um das Knotenproblem in seiner eigentlichen dreidimensionalen Qualität einordnen zu können. Die Klassifikation der kompakten Flächen wird im folgenden Kapitel durchgeführt und im fünften werden Geschlecht, Summe, Brückenzahl von Knoten besprochen, meist ohne Beweise der zugehörigen Sätze. Die Kapitel 6, 8, 9, 10 behandeln Gruppenpräsentationen, den Foxschen Differentialkalkül sowie die Fundamentalgruppe mit dem van-Kampen-Theorem. Ausführlicher und auch tiefer gehend wurden dieselben Themen in Crowell und Fox' Buch „Introduction to Knot Theory“ dargestellt. Das Buch schließt mit ein wenig Überlagerungstheorie – wobei wieder kritische Stellen umschiffen werden, z. B. wird die Existenz einer universellen Überlagerung angenommen.

Als Anstoß und Anregung mag das Buch gute Dienste leisten.

Frankfurt/M

G. Burde

Enock, M., Schwartz, J.-M., Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups, with a preface by A. Cones, with an afterword by A. Ocneau, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1992, 257 S., DM 158,-

Die Frage nach einer eleganten und gut formulierbaren Dualitätstheorie für lokal-kompakte topologische Gruppen hat Mathematiker immer wieder beschäftigt, nachdem L. S. Pontrjagin die Dualitätstheorie abelscher lokal-kompakter topologischer Gruppen topologisch und wenig später D. A. Raikow diese Theorie analytisch beschrieben hatte. Die von G. I. Kac (dies ist nicht der durch seine Arbeiten über unendlichdimensionale Lie-Algebren und Lie-Superalgebren sehr viel bekanntere V. G. Kac) Anfang der sechziger Jahre in diesem Zusammenhang eingeführten Ringgruppen, heute Kac-Algebren genannt, haben sich als ein sehr geeignetes Mittel zur Formulierung einer analytischen Dualitätstheorie erwiesen, die die Dualitätstheorie lokal-kompakter topologischer Gruppen einschließt und die Ableitung bekannter auch nicht-abelscher Dualitätstheorien (T. Tannaka, H. G. Krein, P. Eymard, T. Tatsuuma, J. Ernest u. a.) gestattet. Die beiden Autoren haben über viele Jahre an der Entwicklung der Theorie der Kac-Algebren und ihrer Dualität mitgewirkt. Ihre umfassende Kenntnis der Materie wird durch das vorgelegte Buch in eindrucksvoller Weise belegt. Die Einleitung enthält einen mit vielen Literaturhinweisen versehenen Abriss der geschichtlichen Entwicklung des Dualitätsproblems und der Theorie der Kac-Algebren wie mit ihr zusammenhängender Strukturen in den letzten fünfzig Jahren. Das umfangreiche Literaturverzeichnis ist fast vollständig.

Die Bedeutung des Buches liegt jedoch nicht allein in der bislang erörterten Problematik einer Dualitätstheorie für lokal-kompakte topologische Gruppen. Die Unter-

suchungen zu Quantengruppen haben in jüngster Zeit für die algebraische Theorie der nicht kommutativen und nicht cokommutativen Hopf Algebren großes Interesse geweckt. S. L. Woronowicz hat hier die C^* -Struktur als analytisches Element zusätzlich eingeführt und betrachtet. So können gerade die Strukturaussagen zu Kac-Algebren, wie sie in dem vorliegenden Buch behandelt werden, wichtige Grundvorstellungen und neue Gesichtspunkte für eine Theorie der C^* -Quantengruppen liefern, auch wenn sie, wie A. Connes in seinem Vorwort bemerkt, noch nicht hinreichend „nicht unimodular“ sind. Untersuchungen zur Thematik der Quantengruppen sind im Literaturverzeichnis weitgehend berücksichtigt.

Kac-Algebren sind co-involutive Hopf-von-Neumann-Algebren, die ein linksinvariantes Gewicht besitzen. Es handelt sich um eine Kategorie in verschiedener Beziehung reich strukturierter komplexer Algebren; um Hopf-Algebren, genauer Hopf-Algebren mit Integral, im Sinne von M. Sweedler, in diesem Buch Gewicht genannt, die gleichzeitig C^* - bzw. W^* -Algebren sind, wobei Involution, Coprodukt und Antipode gewissen Verträglichkeitsbedingungen genügen. Eine ausreichende Kenntnis der Theorie der C^* - und W^* -Algebren, wie der Grundlagen der Theorie der Hopf-Algebren ist nach Ansicht des Referenten eine notwendige Voraussetzung für das Verständnis des sehr präzise aber mitunter knapp geschriebenen Textes.

Das Standardbeispiel einer Kac-Algebra ist die Algebra $L^\infty(G)$ der Klassen mit Bezug auf ein linksinvariantes Haar-Maß meßbarer, wesentlich beschränkter, komplexwertiger Funktionen auf einer lokal-kompakten topologischen Gruppe G mit der Algebra $L^1(G)$ der Klassen summierbarer Funktionen als präduale Algebra, wobei das Coprodukt und die Coinvolution in $L^\infty(G)$ durch Dualisieren aus dem Produkt bzw. der Involution in $L^1(G)$ erklärt sind. Diese Kac-Algebra $\mathbb{K}_a(G)$ ist kommutativ, hier abelsch genannt.

Die beiden ersten Kapitel des Buches haben vorbereitenden Charakter. Es werden notwendige Definitionen sowie Ergebnisse über Hopf-Algebren, über C^* - und W^* -Algebren zusammen- und bereitgestellt, erste Sätze über Hopf-von Neumann-Algebren, über Gewichte und Kac-Algebren werden bewiesen. Der zentrale Teil für die Dualitätstheorie sind die Kapitel 3 und 4, in denen die dualen Algebren definiert und beschrieben und die Dualitätssätze bewiesen werden. Die zur kommutativen Kac-Algebra $\mathbb{K}_a(G)$ duale ist die Kac-Algebra $\mathbb{K}_s(G)$, sie besteht aus der von der linken regulären Darstellung erzeugten von Neumann-Algebra versehen mit einem Coprodukt einer Antipode und einem Gewicht, die durch geeignete Bindung an die linke reguläre Darstellung wohlbestimmt sind. Die Kac-Algebra $\mathbb{K}_s(G)$ ist cokommutativ, hier symmetrisch genannt.

Die letzten beiden Kapitel sind kategoriellen Aspekten sowie speziellen Klassen von Kac-Algebren gewidmet. Das ausführliche Inhaltsverzeichnis gibt einen guten Einblick in den Aufbau des Buches und die abgehandelten Probleme: Introduction, Chapter 1. Co-Involutive Hopf-Von Neumann Algebras, 1.1 Von Neumann Algebras and Locally Compact Groups, 1.2 Co-Involutive Hopf-Von Neumann Algebras, 1.3 Positive Definite Elements in a Co-Involutive Hopf-Von Neumann Algebra, 1.4 Kronecker Product of Representations, 1.5 Representations with Generator, 1.6 Fourier-Stieltjes Algebra, Chapter 2. Kac Algebras, 2.1 An Overview of Weight Theory, 2.2 Definitions, 2.3 Towards the Fourier Representation, 2.4 The Fundamental Operator W , 2.5 Haar Weights Are Left-Invariant, 2.6 The Fundamental Operator W Is Unitary, 2.7 Unicity of the Haar Weight, Chapter 3. Representations of a Kac Algebra; Dual Kac Algebra, 3.1 The Generator of a Representation, 3.2 The Essential Property of the Representation λ , 3.3 The Dual Co-Involutive Hopf-Von Neumann Algebra, 3.4 Eymard Algebra, 3.5 Construction of the Dual Weight, 3.6 Connection Relations and Consequences, 3.7 The Dual Kac Algebra, Chapter 4. Duality Theorems for Kac Algebras and Locally Compact Groups, 4.1 Duality of Kac Algebras, 4.2 Takesaki's Theorem on Symmetric Kac Algebras, 4.3 Eymard's Duality Theorem for Locally Compact Groups, 4.4 The Kac Algebra $\mathbb{K}_s(G)$, 4.5 Characterisation

of the Representations and Wendel's Theorem, 4.6 Heisenberg's Pairing Operator, 4.7 A Tatsuuma Type Theorem for Kac Algebra, Chapter 5. The Category of Kac Algebras, 5.1 Kac Algebra Morphisms, 5.2 H -Morphisms of Kac Algebras, 5.3 Strict H -Morphisms, 5.4 Preliminaries About Jordan Homomorphisms, 5.5 Isometries of the Preduals of Kac Algebras, 5.6 Isometries of Fourier-Stieltjes Algebras, Chapter 6. Special Cases: Unimodular, Compact, Discrete and Finite-Dimensional Kac Algebras, 6.1 Unimodular Kac Algebras, 6.2 Compact Type Kac Algebras, 6.3 Discrete Type Kac Algebras, 6.4 Krein's Duality Theorem, 6.5 Characterisation of Compact Type Kac Algebras, 6.6 Finite Dimensional Kac Algebras, Postface, Bibliography, Index.

Greifswald

H. Boseck

Connes, A., Noncommutative Geometry, San Diego: Academic Press 1994, 661 S., \$ 59.95

Das vorliegende Buch nimmt unter den Neuerscheinungen im Bereich der Mathematik eine Sonderstellung ein. Alain Connes, einer der bemerkenswertesten Mathematiker der neueren Zeit, unternimmt hier einerseits eine Darstellung und Erläuterung seines Werkes. Andererseits und gleichzeitig gibt er einen faszinierenden Überblick über die nichtkommutative Geometrie, die größtenteils von seinen Ideen geprägt ist, mit einer Fülle von neuen Einsichten, Anregungen und Perspektiven. Das Buch beruht zwar ursprünglich auf einer Übersetzung des französischen „Géométrie non commutative“, das seinerseits auf einer Zusammenfassung mehrerer Übersichtsartikel von Connes basierte, hat aber damit letzten Endes nur wenig gemein. Die interessantesten Teile sind die, die neu hinzugekommen sind, und die ursprünglichen Teile sind vollständig überarbeitet. Es liegt ein ganz neues und in sich geschlossenes Werk vor.

Die nichtkommutative Geometrie hat sich in natürlicher Weise aus der Theorie der Operatoralgebren heraus entwickelt. Schon in den 30er Jahren begannen Murray und von Neumann das Studium von Algebren von Operatoren auf einem Hilbertraum, die unter der Bildung des Adjungierten eines Operators invariant und außerdem abgeschlossen in der starken Operator-topologie sind (diese Algebren werden jetzt als von Neumann Algebren bezeichnet). Motiviert waren diese Arbeiten durch von Neumanns Untersuchungen zur Struktur der Quantenmechanik. Für von Neumann repräsentierten die Elemente dieser Algebren Funktionen nichtkommutierender Variablen und führten zu einer neuen Art von Geometrie („continuous geometry“).

Die nächste wichtige Etappe wird in den 40er Jahren erreicht in Arbeiten von Gelfand-Neumark und I. Segal, die zu einer algebraischen Charakterisierung normabgeschlossener involutiver Algebren von Operatoren auf einem Hilbertraum (C^* -Algebren) führen und zeigen, daß nichtkommutative C^* -Algebren gerade die kanonischen nichtkommutativen Verallgemeinerungen der Algebren von stetigen Funktionen auf lokalkompakten Räumen sind. Auch hier standen wieder Untersuchungen zur Struktur der Quantenmechanik, wenigstens teilweise, Pate. Nach einer längeren Phase mit Anwendungen eher technischer Natur, z. B. in der abstrakten Theorie der unitären Darstellungen lokalkompakter Gruppen, erhielt das Gebiet Ende der 60er Jahre einen wichtigen Impuls durch die Tomita-Takesaki-Theorie. Diese ganz neue Methode führte dann auch zu der Klassifikation der amenablen von-Neumann-Algebren durch Connes. Damit kommen wir zum Inhalt des Buches.

Als Beispiele von (in der kommutativen Theorie pathologischen) Räumen, deren Topologie und Geometrie mit den Methoden der nichtkommutativen Geometrie untersucht werden können, gibt der Autor in der Einleitung an:

der Raum aller Penrosepflasterungen
 der Raum der Blätter einer geblätterten Mannigfaltigkeit
 der Raum der irreduziblen Darstellungen einer diskreten Gruppe
 der Phasenraum in der Quantenmechanik
 die Brillouinzone im Quanten-Hall-Effekt
 die Raum-Zeit

Dies sind natürlich Beispiele, die noch relativ nahe bei gewöhnlichen klassischen Räumen liegen. Der neue Begriff eines nichtkommutativen Raums (d. h. eine nichtkommutative Algebra, meistens spezieller eine C^* -Algebra) ist in Wirklichkeit viel allgemeiner und flexibler. Wie im klassischen Fall können die folgenden Strukturen und Eigenschaften von Räumen untersucht werden:

Maßtheorie
 Invarianten der algebraischen Topologie
 Differentialgeometrische Strukturen und Invarianten

Ganz grob gesprochen wird die klassische Maßtheorie durch die Theorie der von-Neumann-Algebren verallgemeinert. Die Basis für die Untersuchung der Topologie nichtkommutativer Räume ist in erster Linie die K -Theorie von C^* -Algebren und ihre von Kasparov und anderen entwickelte bivariate Form in verschiedenen Versionen (wie etwa die neuere E -Theorie von Connes-Higson). Auf differentialgeometrische Strukturen auf nichtkommutativen Algebren werden wir noch zu sprechen kommen.

Ein Ausgangspunkt für die Entwicklung und Anwendung vieler Methoden der nichtkommutativen Geometrie war die Indextheorie. Selbst die nichtkommutative Maßtheorie kann bei Indexfragen eine wichtige Rolle spielen. Will man als Index eines (verallgemeinerten) Fredholmoperators (reelle) Zahlen erhalten, so ist die gut ausgearbeitete Theorie der von-Neumann-Algebren ein wichtiges Hilfsmittel (dies hängt eng mit dem Begriff der reellwertigen Dimension bestimmter Hilberträume nach Murray-von-Neumann zusammen). Der mit Begriffen der nichtkommutativen Maßtheorie formulierte Indexsatz für longitudinal elliptische Operatoren auf geblätterten Mannigfaltigkeiten war ein Ansatzpunkt für Connes auf diesem Gebiet.

Die K -theoretische Formulierung dieses und vieler weiterer ähnlicher Indexsätze benutzt dann natürlich die K - und KK -Theorie für nichtkommutative C^* -Algebren. Die im klassischen Fall wohlbekannte kohomologische Formulierung des Indexsatzes führt auf die Frage nach einer Version der de-Rham-Theorie und von charakteristischen Klassen im nichtkommutativen Fall. Diese Rolle wird von der von Connes entdeckten zyklischen Kohomologie übernommen. Die „periodische“ Form dieser Theorie ergibt im klassischen Fall tatsächlich die de-Rham-Theorie und es ist (seit kurzem) bekannt, daß sie dieselben formalen Eigenschaften wie die K -Theorie besitzt. Ein geeigneter „Cherncharakter“ von der K -Theorie in die zyklische Homologie existiert in natürlicher Weise.

Ein konkreter Differentialkalkül und damit eine differenzierbare Struktur auf einer C^* -Algebra A wird nach Connes gegeben durch eine Darstellung von A in einem Hilbertraum und einen selbstadjungierten Operator F mit $F^2 = 1$, der modulo kompakten Operatoren mit einer dichten Teilalgebra von A vertauscht (man nennt das Paar (A, F) einen Fredholmmodul). Differentialformen über A werden dann definiert durch die Korrespondenz $df = [F, f]$. Die sogenannte Dixmierspur führt zu einer Theorie der Integration von Differentialformen mit verblüffenden Anwendungen und Beziehungen. Eine Riemannsche Struktur auf A schließlich wird durch einen unbeschränkten Fredholmmodul definiert, d. h. durch eine Darstellung von A zusammen mit einem unbeschränkten selbstadjungierten Operator D mit kompakter Resolvente, so daß eine dichte Unter algebra von A modulo beschränkter Operatoren mit D kommutiert. Im klassischen Fall $A = C(M)$ ist D der Diracoperator, der, wie Connes zeigt, nicht nur die differenzierbare Struktur, sondern auch

die Metrik auf der Mannigfaltigkeit M (mit Spinstruktur) eindeutig bestimmt. Viele Begriffe der Differentialgeometrie, wie Vektorraumbündel, Zusammenhänge, Krümmung usw. haben natürliche Entsprechungen im Nichtkommutativen.

Alle diese Methoden und Ergebnisse und noch vieles mehr werden dargestellt in der bekannten suggestiven Art des Autors und mit einer Unzahl von schlagenden Beispielen. Er vermittelt die richtige Sichtweise zu vielen tiefliegenden Resultaten aber auch im Vorübergehen zu wohlbekannten klassischen Sachverhalten. Das Buch ist so reichhaltig an Ideen und Ergebnissen, daß es unmöglich ist, hier einen Eindruck davon zu geben. Die (teilweise sehr tiefliegenden) Resultate werden anschaulich erklärt und in Zusammenhang gestellt, aber natürlich werden in den allermeisten Fällen keine Beweise gegeben. Viel Wert wird auf Anwendungen und Illustrationen gelegt. In der Mathematik reichen diese von einer Vielzahl sehr allgemeiner Indexsätze über die Novikovvermutung, die Frage der Existenz von Metriken mit positiver Skalar­krümmung, der Existenz gewisser Gruppendarstellungen, der Topologie von Räumen mit S^1 -Wirkung, der Ergodentheorie, Knoteninvarianten, Invarianten von 3- und 4-Mannigfaltigkeiten bis zur statistischen Theorie der Primzahlen und der Geometrie fraktaler Mengen, um nur einige zu nennen. Ein besonderes Anliegen sind dem Autor die Beziehungen zur theoretischen Physik, denen einiger Raum gewidmet wird. Diskutiert werden unter anderem die Erklärung des Quanten-Hall-Effekts durch die nichtkommutative Geometrie (in der die Tatsache, daß die Hall-Leitfähigkeit ein ganzzahliges Vielfaches von e^2/h ist, dadurch entsteht, daß sie als nichtkommutative charakteristische Klasse gedeutet wird), eine geometrische Herleitung des Higgsmechanismus im Standardmodell von Glashow-Weinberg-Salam, nichtkommutative Yang-Mills-Theorie und ein vierdimensionales Analogon des Poljakowwirkung.

Es ist bemerkenswert, wie die Arbeiten Connes einerseits eine ganz ungewöhnliche Vielfalt der verwendeten Methoden und der Beziehungen zu allen möglichen Gebieten zeigen (schließlich geht es darum, einen großen Teil der gesamten Mathematik nichtkommutativ zu verallgemeinern), andererseits aber auch eine außergewöhnliche Einheit des übergeordneten Gesichtspunkts aufweisen. Es entsteht ein beeindruckendes komplexes Ideengebäude, dessen Potential erst am Anfang seiner Ausschöpfung steht. Das Buch wird die Mathematiker und die Mathematik, vielleicht auch die Physiker und die Physik sicher noch einige Zeit beschäftigen.

Ganz zum Schluß noch ein kleines caveat. Nach den vielen Jahren, in denen die nichtkommutative Analysis und Geometrie als eine von vielen verkannte Theorie am Rande ein Schattendasein führte, besteht nun manchmal die Gefahr, unter dem Schlagwort nichtkommutative Geometrie ins allzu Modische und Oberflächliche zu verfallen, und damit den Blick auf die vielen wirklich tiefen Errungenschaften auf diesem Gebiet zu verstellen. Das vorliegende Buch ist zwar in Einzelfällen nicht völlig frei von der Berücksichtigung modischer Aspekte bei der Auswahl der Gegenstände, aber mit Sicherheit im Inhalt frei von allem Oberflächlichen.

Heidelberg

J. Cuntz

Kung-ching Chang, Infinite Dimensional Morse Theory And Multiple Solution Problems, Basel u. a.: Birkhäuser 1993, 313 S., DM 113,-

Variationsmethoden sind ein wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung von Differentialgleichungen und den dazugehörigen Randwertproblemen. So lassen sich zum Beispiel periodische Lösungen eines Hamiltonschen Systems als kritische Punkte eines Funktionals auf dem Schleifenraum auffassen oder aber Lösungen eines nichtlinear gestörten Laplace-Operators als kritische Punkte eines gestörten Dirichlet-Integrals. Die

Liste solcher Probleme, wie harmonische Abbildungen, Yang-Mills-Gleichungen etc. ist praktisch endlos.

Bei der Untersuchung von Problemen mit einer variationellen Struktur ist die Palette verfügbarer Methoden ungleich größer als im allgemeinen Fall. Auch erwartet man vom variationellen Problem mehr Lösungen, als dies bei einem nichtvariationellen Problem der Fall wäre. Man denke nur daran, daß ein allgemeines Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit im allgemeinen weniger Nullstellen hat als ein Gradientenfeld.

Die Behandlung eines konkreten Problems, wie zum Beispiel eines Randwertproblems für eine partielle Differentialgleichung, bedarf mehrerer Schritte, die, abhängig vom Problem, unterschiedlich schwierig sein können. Schritt eins ist im allgemeinen das Finden eines guten Funktionenraumes, auf dem das Funktional wohldefiniert ist. Der zweite Schritt besteht darin zu zeigen, daß genügend Kompaktheit im Problem ist. Eine besondere Rolle spielt hier die sogenannte Palais-Smale-Bedingung. Gilt diese (was leider insbesondere bei geometrischen Problemen häufig nicht der Fall ist), so hat man optimale Voraussetzungen für die erfolgreiche Anwendung abstrakter Variationsmethoden. Der dritte Schritt besteht dann in der Untersuchung der bereits bekannten Lösungen, der Topologie des zugrunde liegenden Raumes und mit Hilfe topologischer Hilfsmittel dem Aufspüren weiterer Lösungen.

Das Ziel von Changs Buch ist die Darstellung von funktionalanalytischen Variationsmethoden und deren Illustration durch diverse Anwendungen.

Das Buch beginnt mit einer klaren Darstellung der unendlich-dimensionalen Morsetheorie. Es werden die lokalen kritischen Gruppen einer unter Umständen degenerierten Mannigfaltigkeit eingeführt, wie auch die Morseungleichungen. Es wird auch die äquivalente Morsetheorie behandelt.

Im zweiten Kapitel werden die Variationsmethoden entwickelt, die speziell auf die Anwendungen auf elliptische Randwertprobleme und Hamiltonsche Systeme zugeschnitten sind. Bei den Anwendungen ist die Situation häufig die folgende. Das Verhalten des vorgegebenen Funktionals ist zum Beispiel nur asymptotisch bekannt und es mögen ebenfalls ein paar (triviale) Lösungen bekannt sein, wie auch das Verhalten des Funktionals in ihrer Nähe. Die Frage ist dann, gibt es weitere Lösungen, die im Zusammenspiel des lokalen und asymptotischen Verhaltens zusätzlich existieren müssen? Hier ist die Methode des topologischen „Linkings“ sehr wichtig. Diese wird im zweiten Kapitel erklärt, wie auch der Zusammenhang zwischen der „Dimension“ des topologischen Linkings und der Morseindizes der dabei gefundenen globalen kritischen Punkte. Insbesondere werden hier auch Zusammenhänge zwischen den lokalen Gruppen eines kritischen Punktes und dem lokalen Leray-Schauder-Abbildungsgrad hergeleitet.

Im dritten Kapitel wendet der Autor die entwickelten Methoden auf elliptische Randwertprobleme an. Die Probleme sind abstrakt gesehen von der Form $Lu = Fu$, wobei L ein unbeschränkter selbstadjungierter Operator und $F = \Phi'$ ein nichtlinearer Potentialoperator ist. Das vorliegende Problem läßt nun als Konsequenz der Interaktion der Nichtlinearität F mit dem Spektrum des Operators L eine bestimmte Anzahl von Lösungen erwarten. Das Potential von L ist eine quadratische Form. Verschiedene Phänomene erhält man in Abhängigkeit des asymptotischen Verhaltens von Φ .

Das vierte Kapitel ist der Untersuchung Hamiltonscher Systeme gewidmet. Es werden ein paar wichtige Spezialfälle der Arnoldvermutung dargestellt. So zum Beispiel das bahnbrechende Conley-Zehnder-Theorem wie auch ein Satz über Lagrangesche Schnitte im $\mathbb{C}P^n$.

Im fünften Kapitel, das sich etwas vom Stil der ersten vier Kapitel abhebt, werden Harmonische Abbildungen und das Plateausche Problem für Minimalflächen untersucht. Im Gegensatz zu den ersten vier Kapiteln, in denen erst eine abstrakte Theorie entwickelt wird, die dann ohne große Schwierigkeiten auf eine bestimmte Klasse von Problemen

angewendet wird, muß hier näher am Problem gearbeitet werden, da zum Beispiel die Geometrie der Zielmannigfaltigkeit eine wichtige Rolle für die Existenz (oder Nichtexistenz) einer Lösung spielt. Dementsprechend sind die abstrakten Resultate nicht mehr direkt, oder bestenfalls nur partiell anwendbar. Hingegen ist natürlich die zugrundeliegende Beweisphilosophie immer noch dieselbe.

Das Buch schließt mit einem Appendix über Wittens Beweis der Morseungleichungen. Dieser alternative Beweis selbst wird im Buch nicht gebraucht. Es sei hier noch vermerkt, daß Wittens Beweis einer der Ausgangspunkte von A. Floers bahnbrechender Verallgemeinerung der Morsetheorie (Floerhomologie) gewesen ist.

Zusammenfassend kann man das folgende sagen. Das Buch ist vom mathematischen Standpunkt sorgfältig geschrieben. Man könnte sich jedoch eine kohärentere Darstellung wünschen, insbesondere vermißt der Leser häufig motivierende Erläuterungen. Der Autor ist auch häufig etwas ungenau mit seinen bibliographischen Bemerkungen. So ist zum Beispiel das von ihm als „Kato-Hess-Theorem“ aufgeführte Resultat ein Satz von Manes und Micheletti. Das besser als Hess-Kato-Theorem bezeichnete „Kato-Hess-Theorem“ ist eine Erweiterung des Manes-Micheletti-Satzes auf nicht selbstadjungierte elliptische Differentialoperatoren der zweiten Ordnung und war auch von diesem motiviert.

Das Buch stellt grob gesprochen sehr ausführlich Variationsmethoden dar, die am besten anwendbar sind, falls die sogenannte Palais-Smale-Bedingung gilt. Allerdings muß gesagt werden, daß die meisten Variationsprobleme, die heute in der Forschung untersucht werden, diese Bedingung genau nicht erfüllen. Es wäre jedoch ein gravierender Fehlschluß deshalb dem Buch die Aktualität abzusprechen. Es handelt sich hier um ein äußerst nützliches Buch, in dem viele wichtige Resultate und Methoden, die man im Gebiet ständig braucht, zum erstenmal zusammenfassend dargestellt werden. Ich glaube jedoch nicht, daß dieses Buch für ein Selbststudium geeignet ist, falls der Leser nicht schon über eine gewisse mathematische Reife und gute Grundkenntnisse der nichtlinearen Funktionalanalysis verfügt. Jedoch erfüllt es als Nachschlagwerk wie auch in Zusammenhang mit anderer Literatur wie zum Beispiel Struwes „Variational Methods“ einen guten Zweck.

Zürich

H. Hofer

Levendorskii, S., Degenerate Elliptic Equations (Mathematics and its Applications Vol. 258), Dordrecht – Boston – London: Kluwer Academic Publishers 1993, 431 + si S., Dfl 320.00

In der vorliegenden Monographie beschäftigt sich S. Levendorskii mit der Theorie degenerierter elliptischer Differentialgleichungen der Ordnung $2m$. Die Ausartung kann sowohl im Inneren eines betrachteten Gebiets erfolgen, als auch am Rande. Die Behandlung von (linearen) Problemen bei partiellen Differentialgleichungen benutzt heute üblicherweise Pseudodifferentialoperatoren. Daher wird in Kapitel 1 ein allgemeiner Weyl-Hörmander-Kalkül von Pseudodifferentialoperatoren eingeführt. Um später Randwertprobleme behandeln zu können, müssen auch sogenannte „double symbols“ studiert werden. In Kapitel 2 werden vier Modellklassen von ausgearteten elliptischen Operatoren mit „elementaren“ Methoden studiert, Kapitel 3 und 4 behandelt mit aufwändigeren Mitteln den allgemeinen Fall. Ziel ist es, Fredholm-Sätze und die dazu benötigten a priori Abschätzungen (Gårdingsche Ungleichung, etc.) zu beweisen. In Kapitel 5 wird die L^p -Theorie für derartige Gleichungen andiskutiert, während sich Kapitel 6 mit dem Koerzitivitätsproblem der zugehörigen quadratischen Form beschäftigt. Hypoelliptischen Pseudodifferentialoperatoren auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten ist Kapitel 7 gewidmet, und Kapitel 8 behandelt eine Algebra von pseudodifferentiellen Randwertproblemen. Die Kapitel 9–11 behandeln

Fragen der Spektralasymptotik (Allgemeines in Kap. 9, Spezielles für ausgeartete elliptische Operatoren in Kap. 10 und den Fall von gewissen hypoelliptischen Pseudodifferentialoperatoren in Kap. 11).

Die Ausartung wird typischerweise durch Gewichte in den zugrunde liegenden Sobolev-Räumen „kompensiert“. Diese Räume werden in den einzelnen Kapiteln mit behandelt. Ein fairer Literaturüberblick und eine ausführliche Bibliographie beenden dieses m. E. wichtige Buch.

Erlangen

N. Jacob

Young, R., K., Wavelet Theory and its Applications, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1993, 223 S. US \$ 130.00

Am Ende des 20. Jahrhunderts, das mit einigem Recht als das Zeitalter der Informationstechnik bezeichnet wird, hat sich auch die Mathematik der Informationstheorie und ihrer High-Tech-Anwendungen angenommen. Der Algebra und Kombinatorik sind mit der Kodierungstheorie ein blühender Zweig zugewachsen, die angewandte Mathematik studiert intensiv die Approximationseigenschaften orthogonaler Waveletbasen. Wichtige technische Realisierungen sind die 1982 weltweit in den Markt eingeführte Compact Disc (CD), die auf einer Implementierung des Cross Interleave Reed-Solomon Codes (CIRC-Algorithmus) als Fehlerschutzkode beruht ([2]), sowie die seit etwa 10 Jahren der nicht-invasiven radiologischen Diagnostik zur Verfügung stehenden Magnetresonanztomographen, welche Serien von Quantenhologrammen, die von schnellen Prozessoren der symplektischen Fourier-Transformation ausgelesen werden, routinemäßig als symplektische Spinoren zu erzeugen und mit Hilfe der Echoplanartechnik sogar in Echtzeit aufzunehmen und zu übertragen gestatten ([3]).

Die grundlegende Idee der Theorie der affinen Wavelets besteht darin, aus einem Mutterwavelet durch Hintereinanderausführung von Skalierungs-, Translations-, und Normierungsoperatoren eine sogenannte Multiresolutionsanalysis zu erzeugen. Ausschöpfung der Folge ineinander geschachtelter Funktionenräume erlaubt dann aus schrittweise modifizierten Kopien des Mutterwavelets bestehende Orthogonalbasen zu konstruieren, die beispielsweise zur Datenkompression vor der Einspeisung in Daten-Autobahnen eingesetzt werden können.

Ausgangspunkt der Anwendungen affiner Wavelets war ursprünglich die geophysikalische Exploration, von der sich die Theorie der Wavelets aber bald emanzipiert hat, um zu einer eigenständigen mathematischen Disziplin algorithmischer Prägung heranzuwachsen. Der heute herrschenden Tendenz, die ursprünglich als Ausgangspunkt dienenden, physikalischen Anwendungen in Vergessenheit geraten zu lassen, versucht das vorliegende Buch entgegenzuwirken. Es ist aus einer beim Department of Electrical Engineering der Pennsylvania State University in University Park, PA, eingereichten Ph.D.-Dissertation entstanden und entwickelt unter nur geringen mathematischen Voraussetzungen anhand von Anwendungen, meist aus dem Bereich der Bildgebung ([6]), die Hauptideen der Theorie affiner Wavelets. Weil der Autor, seiner Ausbildung entsprechend, systemtheoretische Methoden bevorzugt, werden die ursprünglich von Alberto P. Calderón für Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen entwickelten subtilen Techniken, ebenso wie der darstellungstheoretische Zugang der Theorie der Lie-Gruppen zur Faltung und den reproduzierenden Kernfunktionen, nicht in Betracht gezogen, sondern die Begriffe der Informationstechnik in den Vordergrund gestellt. Puristen unter den Lesern, die etwa unter einem Filter stets einen mit Hilfe des Zornschen Lemmas zu verfeinernden Ultrafilter verstehen, ohne aber die für die Anwendungen viel bedeutsameren adaptiven und

angepaßten Filter der Informationstechnik, Bildgebung und Photonik würdigen zu können, werden deshalb bei der Lektüre des Buchs keine besondere Freude empfinden. Schwerwiegender aber ist der Einwand, daß das Buch, trotz vieler bestehender Querverbindungen zu den affinen Wavelets ([4]), den phasenkohärenten Wavelets und der Implementierung ihrer Synchronisation nicht die gebührende Behandlung zukommen läßt. Damit ist aber die der praktischen Bedeutung angemessene Behandlung von massiv parallel operierenden Analogrechnern, wie etwa des hochauflösenden konfokalen Abtastmikroskops ([3]), der holographischen Bildgebungsverfahren der Photonik ([5]) und der schon als Paradebeispiele der High-Tech Diagnostik angeführten Magnetresonanztomographen ([3]), die alle auf phasenkohärenten Wavelets und ihren räumlichen oder temporalen Filterbankeigenschaften beruhen, von vornherein ausgeschlossen. Zur Dekade der Hirnforschung, um ein anderes Schlagwort der aktuellen Wissenschaftspolitik zum soeben in Gang gekommenen Dialog zwischen Neurowissenschaften und Mathematik zu nennen ([1]), und zu einer tieferen Einsicht in den neuerdings entwickelten rechnergestützten Mehrkoordinaten-Manipulator (MKM) der stereotaktisch geführten Neuronavigation ([3]), kann damit kein Beitrag geleistet werden.

Zum zwiespältigen Eindruck des Buches trägt noch die unglückliche Wahl des Titels bei, denn das Buch präsentiert eigentlich keine Theorie, sondern illustriert eine Theorie. Auch der sich nicht gerade hoher mathematischer Strenge erfreuende Stil des Buches, der sich wohl an dem im Fernsehzeitalter entwickelten, visuellen Lernverhalten orientiert, dürfte Vorbehalte wecken. Wegen der die informationstechnischen Anwendungen leugnenden Tendenz in der primär algorithmisch ausgerichteten Theorie der Wavelets wird dennoch auch dem Sachkenner von „*theoria cum praxi*“ ein Blick auf die Illustrationen von Nutzen sein können.

- [1] Changeux, J.-P.; Connes, A.: Gedanken-Materie. Berlin, Heidelberg, New York. Springer Verlag 1992
- [2] Pohlmann, K. C.: The compact disc: A handbook of theory and use. Oxford, New York, Toronto: Oxford University Press 1989
- [3] Schempp, W.: Phase coherent wavelets, Fourier transform magnetic resonance imaging, and temporally encoded synchronized neural networks. Manuskript 1995
- [4] Segman, J.; Schempp, W.: On the extension of the Heisenberg group to incorporate multiscale resolution. In: Wavelets and their applications (J. S. Byrnes et al., editors) pp. 347–361, Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers 1994
- [5] Syms, R. R. A.: Practical volume holography. Oxford, New York, Toronto: Clarendon Press 1990
- [6] Wavelet theory and application. A special issue of the Journal of mathematical imaging and vision (A. Laine, editor) Boston, Dordrecht, London: Kluwer Academic Publishers 1993

Golub/Ortega

Scientific Computing

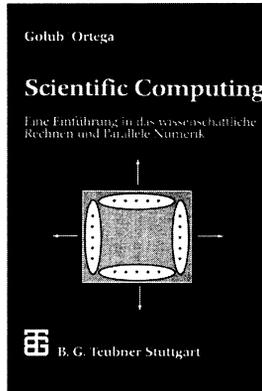
Eine Einführung in das wissenschaftliche Rechnen und die Parallele Numerik

Das vorliegende Buch gibt eine Einführung in die numerischen Methoden des modernen wissenschaftlichen Rechnens; behandelt werden insbesondere auch die zunehmend an Bedeutung gewinnenden numerischen Verfahren für Vektor- und Parallelrechner.

Das Buch befaßt sich mit einer Vielzahl numerischer Fragestellungen: Approximations- und Interpolationsmethoden, direkte und iterative Verfahren für lineare und nichtlineare algebraische Gleichungssysteme, Eigenwertprobleme auf der einen Seite, wobei auch auf Gesichtspunkte wie dünn besetzte Matrizen, Umordnungstechniken zur Reduzierung des Fill-In, konjugierte Gradientenverfahren mit Präkonditionierung eingegangen wird. Auf der anderen Seite wird großes Gewicht auf Methoden für Anfangs- und Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen und partielle Differentialgleichungen gelegt.

Numerische Verfahren für Vektor- und Parallelrechner nehmen einen breiten Raum in diesem Buch ein. Neben einer grundsätzlichen Einführung in die Architektur dieser Rechner werden, wo immer dies möglich und sinnvoll ist, parallele und vektorielle Algorithmen und Verfahren dargestellt, wobei auf die effiziente praktische Durchführbarkeit unter Wahrung der notwendigen mathematischen Eigenschaften großer Wert gelegt wird.

Die Darstellung ist bewußt elementar gehalten mit vielen, die Effekte erläuternden Beispielen. Damit ist das Buch auch ideal für Anwender aus den Ingenieur- und Naturwissenschaften geeignet, die nicht



Von **Gene Golub**
Stanford University
Stanford, California und
James M. Ortega
University of Virginia
Charlottesville, Virginia

Aus dem Englischen übersetzt von Prof. Dr.
Rolf Dieter Grigorieff
und Priv.-Doz. Dr.
Hartmut Schwandt
Technische Universität
Berlin

1996. 534 Seiten.
16,2 x 22,9 cm.
Kart. DM 68,-
ÖS 496,- / SFR 61,-
ISBN 3-519-02969-3

originäre Mathematiker sind, und gleichermaßen als Lehrbuch für Studierende in Richtung Mathematik, Ingenieur- oder Naturwissenschaften, demgemäß also auch für die Dozenten als Grundlage für die entsprechenden Vorlesungen.

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig

Postfach 801069 · 70510 Stuttgart



Maximise your problem-solving power

▶ **Maple V, Release 4** has evolved from over 10 years of top-quality research and has been finely-tuned to satisfy customer needs. It is a product born of vision, commitment and quality, brought to you by the most renowned names in publishing and mathematical software - Springer and Waterloo Maple Inc. respectively.

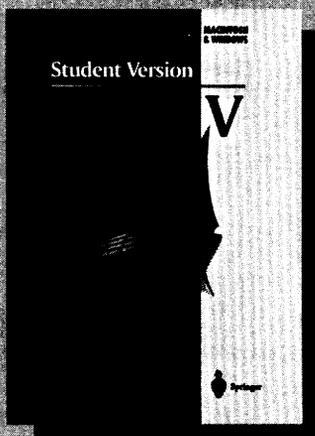
- Learning guide written by developers of Maple.
- Official documentation only available from Springer.

▶ **New additions to the already long and impressive list of features are:**

- The completely redesigned multiple document interface (MDI), allowing real math input and output as well as word-processing facilities.
- A context-sensitive, hypertext-driven help function.
- The very latest symbolic and numeric algorithms for solving the toughest tasks - not even balking at piecewise function-based problems!
- Plus dynamic linking to other applications.

▶ **In short:**
The most productive mathematical computing environment available.
The perfect combination of power and usability for the student user.

Please order by
Fax: +49 30 82787-301
e-mail: orders@springer.de
or through your bookseller



Waterloo Maple Incorporated Maple V Student Version Release 4

Windows Version

1st ed. 1996. 9 diskettes with book, 269 pages,
8 figures in color.

DM 128.60* ISBN 0-387-14229-0

System requirements: Intel 80486 or compatible; 10-20 MB of hard disk space; 8 MB of RAM; Windows 95, Windows NT or Windows 3.1.

Macintosh Version

2nd ed. 1996. 9 diskettes with book, 269 pages,
8 figures in color.

DM 128.60* ISBN 0-387-14230-4

System requirements: Motorola 68030 or compatible, or any Power PC CPU; 16-32 MB of hard disk space; 8 MB of RAM; Mac OS 7.0 or higher.

CD-ROM Version for PC or Mac

DM 128.60* ISBN 0-387-14232-0

German edition

Windows Version: ISBN 3-540-14561-3

Macintosh Version: ISBN 3-540-14560-5

CD-ROM Version: ISBN 3-540-14562-1

*Suggested retail price plus local VAT.



Springer



Walter de Gruyter
Berlin • New York

Functional Analysis

Proceedings of the First International Workshop held at Trier University, Germany, September 26 - October 1, 1994

Editors: S. Dierolf • S. Dineen • P. Domański

1996. 24 x 17 cm. XII, 473 pages. Cloth DM 268,- / öS 1.956,- / sFr 239,- ISBN 3-11-014617-7

The primary idea for the First International Workshop on Functional Analysis held at the University of Trier, Germany, from September 26 to October 1, 1994, was to revive the tradition of the annual Oberwolfach conferences on Functional Analysis. These were organized in the 1970s by G. Köthe, H. König, H. H. Schaefer and H. G. Tillmann.

The workshop followed the line of former meetings in that the global approach to the field was stressed. Topics discussed ranged over almost all branches of functional analysis, which is also reflected by the contributions to this volume. Special emphasis is put on applications of functional analytic tools to problems of classical analysis, in particular to questions related to partial differential operators.

The 37 original and strictly refereed research articles in this volume are addressed to mathematicians working in functional analysis, Banach and Fréchet space theory, and partial differential equations.

T. Runst, W. Sickel

Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations

1996. 24 x 17 cm. X, 547 pages. Cloth DM 268,- / öS 1.956,- / sFr 239,- ISBN 3-11-015113-8

de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, Volume 3

The subject of this book is the theory of nonlinear boundary value problems in function spaces. It focuses on the analysis of semilinear elliptic boundary value problems in Sobolev spaces of fractional order. Here methods from Fourier analysis and the theory of function spaces are used to study existence and multiplicity results in the general framework of Besov-Triebel-Lizorkin spaces.

Topics covered are:

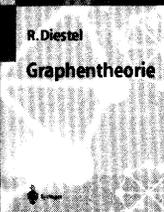
- Function spaces of Besov-Triebel-Lizorkin type
- Regular elliptic boundary value problems
- Pointwise multiplication
- Nemytskij operators in spaces of Besov-Triebel-Lizorkin type
- Applications to semilinear elliptic boundary problems

The book is addressed to mathematicians and physicists working in Nonlinear Analysis. Fundamental knowledge of functional analysis and differential equations is required. Basic properties and known results concerning function spaces are introduced in the course of the text. Each chapter ends with Notes and Comments collecting and explaining detailed references to the relevant literature.

Prices are subject to change

Walter de Gruyter & Co • Berlin • New York • Genthiner Straße 13 • D-10785 Berlin
Phone: (030) 2 60 05-0 • Fax: (030) 2 60 05-2 22
Please visit us in the World Wide Web at <http://www.deGruyter.de>

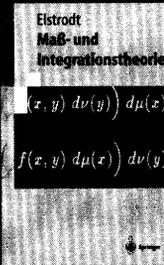
Grundwissen für Fortgeschrittene



R. Diestel
Graphentheorie NEU

1996. XIV, 290 S., 100 Abb. Brosch. **DM 58,-**;
öS 423,40; sFr 51,50 ISBN 3-540-60918-0

Das Buch vermittelt exemplarisch die wichtigsten Methoden der heutigen Graphentheorie, einschließlich neuerer Techniken wie Regularitätslemma, Zufallsgraphen, Baumzerlegungen und Minoren.



J. Elstrodt
Maß- und Integrationstheorie NEU

1996. Etwa 400 S. Brosch. **DM 58,-**; öS 423,40;
sFr 51,50 ISBN 3-540-15307-1

Das vorliegende Lehrbuch der Maß- und Integrationstheorie vermittelt dem Leser ein solides Basiswissen, wie es für weite Bereiche der Mathematik unerlässlich ist, insbesondere für die reelle Analysis, die Funktionalanalysis, Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik.

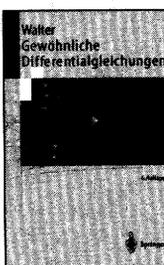


A. Leutbecher
Zahlentheorie NEU

Eine Einführung in die Algebra

1996. XII, 354 S., 9 Abb., 6 Tab. Brosch. **DM 48,-**;
öS 350,40; sFr 43,- ISBN 3-540-58791-8

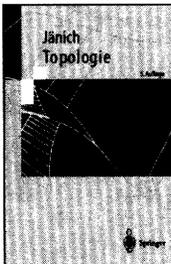
Auf der Grundlage der Mathematikkenntnisse des ersten Studienjahres bietet der Autor eine Einführung in die Zahlentheorie mit Schwerpunkt auf der elementaren und algebraischen Zahlentheorie.



W. Walter
Gewöhnliche Differentialgleichungen

6., korr. Aufl. 1996. XIII, 347 S., 52 Abb. Brosch.
DM 38,-; öS 277,40; sFr 34,- ISBN 3-540-59038-2

Das Buch behandelt neben der klassischen Theorie vor allem solche Themen, die für das Studium dynamischer Systeme und des qualitativen Verhaltens gewöhnlicher Differentialgleichungen unentbehrlich sind.



K. Jänich
Topologie

5., durchges. Aufl.
1996. X, 239 S.
180 Abb. Brosch.
DM 36,-; öS 262,80;
sFr 32,50
ISBN 3-540-61175-4

„Hier wird Mathematik nicht im trockenen Definition-Satz- Beweis-Stil geboten, sondern sie wird dem Leser pointiert und mit viel Humor schmackhaft gemacht...“
Wiss. Zeitschrift der TU Dresden

K. Jänich
Lineare Algebra

6. Aufl. 1996. XII, 272 S. Brosch. **DM 36,-**;
öS 262,80; sFr 32,50 ISBN 3-540-59223-7

„Daß ein Einführungstext zur Linearen Algebra zu diesem weitgehend standardisierten Stoff überhaupt noch Besonderheiten bieten kann, ist gewiß bemerkenswert. Um so erstaunlicher, daß die hier schon beim ersten Durchblättern ins Auge springen...“

Mathematisch-Physikalische Semesterberichte



Springer

Preisänderungen vorbehalten.