E 20577 F
99. Band Heft 2
ausgegeben am 15.04.1997

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

B. G. Teubner Stuttgart 1997

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 148,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner GmbH, Industriestraße 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 80 10 69, D-70510 Stuttgart, Tel. (07 11) 7 89 01-0, Telefax (07 11) 7 89 01-10
e-mail: info@teubner.de
Teubner Home Page http://www.teubner.de

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, 80336 München, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of $ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 $ 1.00 + .20.

© B. G. Teubner GmbH, Stuttgart 1997 – Verlagsnummer 2912/2
Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GdbR, D-68723 Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 99, Heft 2

1. Abteilung

R. Bölling: Georg Cantor – Ausgewählte Aspekte seiner Biographie 49
R. Berndt: Bruno Schoeneberg 1906–1995 83
H. Amann, H.-P. Helfrich, R. Scholz: Joachim A. Nitsche (1926–1996) 90

2. Abteilung

Schiff, J. L., Normal Families (*R. B. Burckel*) *17*
Siegmund-Schultze, R., Mathematische Berichterstattung in Hitlerdeutschland, der Niedergang des Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik (*N. Schappacher*) *18*
Gabbay, D. M., Hogger, C. J., Robinson, J. A. (Hrsg.), Handbook of Logic in Artifical Intelligence and Logic Programming (*M. Kerber, J. Siekmann*) . *19*
Guillemin, V., Moment Maps and Combinatorial Invariants of Hamiltonian T^n-spaces (*K.-H. Neeb*) *21*
Reichenbach, H., Gesammelte Werke in 9 Bänden (*K. Jacobs*) *24*
Kanamori, A., The Higher Infinite (*R. Göbel*) *25*
Snaith, V. P., Galois Module Structure (*J. Ritter*) *27*

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

G. Grubb: Pseudodifferential boundary problems and applications
R. Kühnau: Herbert Grötzsch zum Gedächtnis
M. Rapoport: Analogien zwischen den Modulräumen von Vektorbündeln und von Flaggen
H. Tietz: Herbert Grötzsch in Marburg

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, Templergraben 55, 52056 Aachen

Prof. Dr. Ursula Gather, Fachbereich Statistik, Universität Dortmund, Vogelpothsweg 87, 44221 Dortmund
Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg
Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln
Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1½, 91054 Erlangen
Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität, Ernst-Abbe-Platz 1–4, 07740 Jena

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein. © 1997 B. G. Teubner Stuttgart
99 (1997) 49–82
Mathematics Subject Classification: 01 A 55, 01 A 470

Georg Cantor – Ausgewählte Aspekte seiner Biographie[1]

R. Bölling, Potsdam

Wohl jedem Mathematiker, wie wenig ihm vielleicht auch sonst mengentheoretische Schlußweisen geläufig sein mögen, ist Cantors Diagonalverfahren vertraut, jene bestechend einfache Schlußweise, mit der sich nachweisen läßt, daß die Menge der reellen Zahlen von höherer Mächtigkeit als die der Menge der rationalen Zahlen ist. Mir drängt sich dabei der Vergleich mit der Behauptung aus dem 9. Buch der „Elemente" von Euklid auf, daß es zu jeder gegebenen endlichen Menge von Primzahlen wenigstens eine weitere von den gegebenen verschiedene gibt, oder wie wir sagen, unendlich viele Primzahlen existieren. Hier wie dort wird der Nachweis in überraschend wenigen Schlüssen geführt, deren Reiz sich niemand entziehen kann, der sie einmal nachvollzogen hat; hier wie dort geht es um unendliche Mengen. Cantors Idee stellt – wie der über 2000 Jahre ältere von Euklid wiedergegebene Beweis – ein klassisches Kleinod dar.

So ist es auch einem der großen Physiker unseres Jahrhunderts gegangen, wie wir es einem Briefe D. Hilberts entnehmen können, den er nach Cantors Tod an dessen älteste Tochter Else schrieb.

Gerade vor einigen Tagen hatte ich Gelegenheit zu erfahren, wie stark die Lehren Ihres Vaters auf eine kongeniale Natur wirken. Ich setzte Einstein auf meinem Besuch bei ihm in Berlin das klassische Verfahren auseinander, wie Ihr Vater die Unmöglichkeit bewiesen hat, die irrationalen Zahlen „abzuzählen" usw. Und Einstein, der alles sofort erfaßte, war ganz überwältigt von der Großartigkeit dieser Gedanken.[2]

Es dürfte kaum einen anderen Mathematiker des 19. Jahrhunderts geben, über den so viele biographische Arbeiten existieren wie über Cantor. Schon aus diesem Grund ist es nicht meine Absicht, über Leben und Werk des Begründers der Mengenlehre in der Art eines allgemeinen Überblickes zu sprechen. In meinen Ausführungen wird es inhaltlich um folgendes gehen:

---

[1] Für den Druck überarbeitete Fassung des Eröffnungsvortrages auf dem Cantor-Kolloquium in Halle, gehalten am 12. Juni 1995. Herrn W. Purkert (Leipzig) möchte ich sehr für die Durchsicht des Manuskriptes und einige freundliche Hinweise danken. Selbstverständlich ist der Verf. allein für den Inhalt des vorliegenden Textes verantwortlich.

[2] Zitat in: H. Meschkowski (1967): *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors.* Braunschweig, S. 176.

– Vorstellung zweier Dokumente aus Cantors Schulzeit
– Zur Kontroverse über die Grundlagen der Analysis, die bereits durch Cantors erste Arbeit über trigonometrische Reihen ausgelöst wird
– Was hat Cantor zur Publikation seiner Theorie der reellen Zahlen veranlaßt?
– Zum Verhältnis zwischen Weierstraß und Cantor.

Georg Cantor wurde am 3. März 1845 in St. Petersburg geboren. Die Jahre bis zur Übersiedlung der Familie nach Deutschland (zunächst nach Wiesbaden, dann nach Frankfurt (Main)) 1856 hat er später als „meine 11 ersten, wundervollen Lebensjahre“[3] bezeichnet. Eine Neigung zur Mathematik zeigte sich schon recht bald. Cantor trat Ostern 1859 in die Realschule zu Darmstadt ein. Die Ausbildung wurde an der Gewerbeschule (der späteren Technischen Hochschule) in Darmstadt fortgesetzt, um, dem Wunsch des Vaters entsprechend, eine Ingenieurausbildung anzustreben. Die beiden Schuljahreszeugnisse Cantors aus dieser Zeit sind erhalten geblieben.[4]

Wir wollen mit diesen Dokumenten ein wenig „aus der Schule plaudern“:

Zeugnis für das Schuljahr 1860/61

Merkwürdigerweise ist Cantors Geburtsdatum als 27. Februar 1845 angegeben, was jedenfalls nicht einer Datierung nach dem in Rußland gültigen Julianischen Kalender entspricht (danach hätte der Eintrag auf den 19. Februar 1845 lauten müssen).

Beruf: *unbestimmt*

Weihnachtsferien	
Mathematik:	*Recht fleißig / macht gute Fortschritte*
Physik:	*K[am] Mehrmals zu spät*
Naturgeschichte:	*Sehr zufrieden / zeigt viel Eifer*
Darstellende Geometrie:	*Sehr fleißig, brav und sehr gute Ausarbeitungen*
Betragen:	*ohne Klage*
Osterferien	
Mathematik:	*Arbeitet zu wenig und ist durch seine Vergnügungen außer der Schule abgehalten Fortschritte zu machen*
Chemie:	*Bei der Prüfung gefehlt*
Französisch:	*Ohne genügenden Fleiß u[nd] Eifer. Zu oft abwesend.*

[3] Brief Cantors an A. W. Wassiljew. 4.7.1894. Abgedruckt in: *Georg Cantor / Briefe.* Herausgegeben von H. Meschkowski und W. Nilson (1991). Berlin, Heidelberg, New York u.a.; Brief 140.

[4] Die beiden Zeugnisse hat Herr E. Heil (Darmstadt) im Archiv der TH Darmstadt aufgefunden, was der Verf. durch eine freundliche Mitteilung von Herrn B. Artmann (Darmstadt) erfuhr. Die nachstehend angegebenen Zitate erfolgen mit freundlichem Einverständnis der Genannten und des Archivs der TH Darmstadt (Untere Abteilung 1857-61, Schuljahr 60/61; Obere Allgemeine Abt. 1858-63, Schuljahr 61/62 (Sign.: TH 11/8.1 u. 8.2)). Diese Dokumente hat bereits A. Fraenkel offenbar gekannt (siehe die in der Fußnote 71 genannte Arbeit, S. 192).

Herbstferien

Mathematik:	*Zufr[ieden]*
Geschichte:	*Er könnte und müßte mehr arbeiten; an Talent fehlt es ihm nicht, aber manchmal an der Ruhe. Er ist allzu beweglich.*

Zeugnis für das Schuljahr 1861/62

Das Geburtsdatum ist jetzt korrekt angegeben und im Unterschied zum Vorjahr finden wir nun den Eintrag:

Beruf: *Mathematik und Naturwissenschaft.*

Weiterhin finden wir u.a.:

Weihnachtsferien

Mathematik:	*hat mit sehr gutem Erfolg gearbeitet. Recht zufrieden*
Naturgeschichte:	*Besuchte die Stunden zuerst mit Fleiß, blieb aber später weg*
Geschichte:	*Arbeitet mit Geist und Geschmack; er muß nur sich gleich bleiben.*

Osterferien

Mathematik:	*Faßt die Lehren der Mathematik mit Leichtigkeit gründlich auf. Fortschritte daher sehr gut.*
Deutsch:	*Seine stylistische Bildung ist recht tüchtig und hat eine bestimmte Selbstständigkeit des Ausdrucks erlangt. Seine Arbeiten waren gediegen.*
Französisch:	*Im Ganzen ohne genügenden Fleiß*[5]
Modelliren[6]:	*Treibt öfter Nebendinge in der Stunde.*

Man findet außerdem folgende Beurteilung:

Er zeigte sich als sehr begabter und höchst strebsamer Schüler. Sein Betragen war gut. D[arm]st[adt] d. 21. August 1862

Schließlich war auch Cantors Vater mit der Aufnahme eines Mathematikstudiums einverstanden, so daß sich Cantor im Herbst 1862 an der Universität in Zürich immatrikulierte. Nach dem Tod des Vaters im Frühsommer 1863 siedelte die Mutter nach Berlin über, wo nun auch Cantor nach einsemestriger Unterbrechung sein Studium fortsetzte. Hier wirkten E. E. Kummer, K. Weierstraß und L. Kronekker, durch die sich Berlin in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts zu einem Zentrum der Mathematik von Weltgeltung entwickelte.

Welche Vorlesungen Cantor an der Berliner Universität besucht hat, können wir dem Abgangszeugnis, das erhalten geblieben ist, entnehmen.

---

[5] Dagegen werden die Leistungen im Fach Englisch stets als gut bzw. zufriedenstellend bewertet.

[6] Das Wort ist mit einem Strich (versehentlich?) versehen, so daß der folgende Eintrag sich möglicherweise auf die Rubrik „Betragen“ beziehen könnte.

Vorlesungen, die Cantor in Berlin besucht hat[7]

WS 1863/64:	Psychologie (Trendelenburg)
	Geschichte der Philosophie (Trendelenburg)
	Analytische Mechanik (Kummer)
	Theorie der hypergeometrischen Reihe (Kummer)
	Theorie der analytischen Functionen (Weierstraß)
	Physik (Magnus)
	Theorie der bestimmten Integrale (Arndt)
SS 1864:	Logik (Trendelenburg) („*belegt aber nicht testirt*")
	Synthetische Geometrie (Weierstraß)
WS 1864/65:	Zahlentheorie (Kummer)
	Theorie der elliptischen Functionen (Weierstraß)
SS 1865:	Theorie der krummen Oberflächen (Kummer)
	Variationsrechnung (Weierstraß)
WS 1865/66:	keine Vorlesungen besucht

Im Blick auf Cantors eigene spätere Theorie der reellen Zahlen können wir dieser Aufstellung entnehmen, daß er in der angeführten Vorlesung über analytische Funktionen im WS 1863/64 auch die Theorie der reellen Zahlen kennengelernt haben wird, die Weierstraß entwickelt und in dieser Vorlesung zum ersten Mal vorgetragen hat.[8]

Nach einem Semester in Göttingen reicht Cantor in Berlin seine Dissertation über ein zahlentheoretisches Thema ein (Erstgutachter war Kummer, Zweitgutachter Weierstraß). Die Arbeit schließt an Untersuchungen von J. L. Lagrange, A. M. Legendre und insbesondere C. F. Gauß über die Diophantische Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ an.

Obwohl Cantor wohl von Anfang an daran dachte, eine Universitätslaufbahn einzuschlagen, legte er im November 1868 die Staatsprüfung für das höhere Lehramt ab. Das von der Prüfungskommission ausgefertigte Zeugnis vom 24. November 1868 ist erhalten geblieben und dokumentiert in eindrucksvoller Weise mit seiner strengen und detaillierten Beurteilung, welch hohe Anforderungen an die Allgemeinbildung eines Lehramtskandidaten gestellt wurden. Die Lektüre dieses Dokumentes sei hier nachdrücklich empfohlen. Leider fehlt die Zeit, an dieser Stelle näher darauf einzugehen.[9]

Wechsel nach Halle

Als H. A. Schwarz, der seit 1867 als außerordentlicher Professor in Halle tätig war, einen Ruf nach Zürich erhielt, wurde Cantor durch E. Heine (Ordinarius in Halle

[7] Abgangszeugnis der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin für Georg Cantor. 7.5.1866. Archiv der Humboldt-Universität Berlin.

[8] Vgl. R. Bölling (1994): Karl Weierstraß – Stationen eines Lebens. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 96,* S. 56-75; hier S. 67-68.

[9] Der Text des Zeugnisses ist abgedruckt in: W. Purkert u. H. J. Ilgauds (1987): *Georg Cantor / 1845-1918.* Basel, Boston, Stuttgart; hier S. 183-185.

(es sei an den Überdeckungssatz von Heine-Borel erinnert)) über das vakante Extraordinariat informiert. Im Frühjahr 1869 habilitierte sich Cantor in Halle mit der Behandlung eines zahlentheoretischen Problems.

Aus der Zeit der Eingewöhnung in Halle stammt ein vom 17. Februar 1870 datierter Brief Cantors an Schwarz:

Wie ich Dir schrieb, fange ich an, mich an Halle zu gewöhnen und bekenne, daß ich dies hauptsächlich der freundschaftlichen Zuvorkommenheit des Herrn Professor Heine und seiner anmuthigen Familie zu danken habe. In vieler Hinsicht fiel es mir am Anfang schwer, mich in die neuen Verhältnisse hineinzuleben. Es war vor allem das Lesen, welches zuerst gelernt und erlebt sein mußte [...] das hat manche Ueberwindung gekostet [...].[10] *In wissenschaftlicher Hinsicht glaube ich ebenfalls gewonnen zu haben; der Verkehr mit Herrn Heine regt manche neue Interessen an, welche ich früher nicht gekannt habe. Die Riemannschen Abhandlungen habe ich zum ersten Mal hier in Halle wirklich studirt und verdanke den Anstoß dazu Herrn Heine;"*[11]

Cantor gewöhnt sich nur langsam ein. So schreibt Schwarz am 2. Juli 1870 seinem Freunde:

Es tut mir leid, daß Du Dich in Halle so verlassen fühlst [...].[12]

Noch 4 Jahre später schreibt Cantor am 8. März 1874 an R. Dedekind:

[...] in den Ferien habe ich bis jetzt nie lange hierselbst ausgehalten, denn das einzige, was mich an Halle seit 5 Jahren gewissermassen bindet, ist der einmal gewählte Universitätsberuf.[13]

Die äußeren Bedingungen waren wenig erfreulich: er bekam zunächst gar kein und ab 1873 nur ein sehr geringes Gehalt, das erst mit der 1879 erfolgten Berufung zum Ordinarius ein bescheidenes Auskommen ermöglichte.

Cantor hätte gerne an einer bedeutenderen Universität gewirkt. Seine darauf gerichteten Bemühungen blieben jedoch erfolglos und er ist ein Leben lang in Halle geblieben.

Weg zur Mengenlehre

Wir wollen noch ein wenig bei den Ereignissen des Jahres 1870 verweilen.

Bekanntlich ist Cantor durch die Beschäftigung mit dem Problem der Eindeutigkeit von trigonometrischen Reihendarstellungen auf seine ersten mengen-

[10] Cantor las „Analytische Geometrie des Raumes" und „Synthetische Geometrie".

[11] Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften. Nachlaß Schwarz, Nr. 835, Brief v. 17.2.1870. Der Brieftext ab „In wissenschaftlicher Hinsicht" sowie weitere Zitate aus diesem Brief sind enthalten in: W. Purkert (1987): Cantors Untersuchungen über die Eindeutigkeit der Fourierentwicklung im Lichte seines Briefwechsels mit H. A. Schwarz. In: *NTM-Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin 24 (2)*, S. 19-28; hier S. 21-22.

[12] Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen. Handschriftenabteilung. Cod. Ms. Georg Cantor 10, Brief v. 2.7.1870.

[13] P. Dugac (1976): *Richard Dedekind et les fondaments des mathématiques.* Paris; S. 240.

theoretischen Aussagen geführt worden. Und es war Heine, der den Anstoß dazu gab, wie wir von Cantor selbst erfahren können:

Derselbe [Heine] hat die Güte gehabt, mich mit seinen Untersuchungen über trigonometrische Reihen frühzeitig bekannt zu machen. Aus dem Versuche, seine Resultate in der Richtung zu erweitern, daß jedwede Voraussetzung über die Art der Konvergenz bei den auftretenden Reihen vermieden wird,

seien seine ersten beiden Arbeiten über diesen Gegenstand hervorgegangen.[14]

Sein Hauptresultat ist die Eindeutigkeitsaussage: Wenn eine Funktion $f(x)$ einer reellen Veränderlichen x durch eine für jeden Wert von x konvergente trigonometrische Reihe gegeben ist, so gibt es keine andere Reihe von derselben Form, welche ebenfalls für jeden Wert von x konvergiert und die nämliche Funktion $f(x)$ darstellt.[15]

Dieser Satz läßt noch keine mengentheoretische Komponente ahnen. Die entscheidende Weichenstellung erfolgt, als Cantor die Frage untersucht, ob eine solche Eindeutigkeitsaussage bestehen bleibt, wenn für gewisse Werte von x die trigonometrische Reihe nicht mehr konvergiert oder nicht die gegebene Funktion $f(x)$ darstellt. Cantor entdeckt, daß gewisse *unendliche* Ausnahmemengen von Werten x möglich sind (für die die fortgesetzte Bildung der abgeleiteten Punktmenge (Menge der Häufungspunkte) nach endlich vielen Schritten zur leeren Menge führt). Ein entscheidender Schritt auf dem Weg zur Mengenlehre ist getan. Eine Entwicklung nimmt ihren Anfang, die so neuartige Erkenntnisse bringen wird, wie, daß es verschiedene Arten von Unendlichkeiten gibt bis zu den Erschütterungen, die durch die Antinomien ausgelöst werden.

Das Ringen um die Grundlagen der Analysis – das Jahr 1870

In den erwähnten ersten beiden Arbeiten aus dem Jahr 1870 werden folgende Eigenschaften der Menge R der reellen Zahlen verwendet.

In der ersten Arbeit: Wenn eine beschränkte unendliche Folge in R einen einzigen Häufungspunkt besitzt, so ist sie konvergent.

In der zweiten Arbeit: Eine in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion nimmt ihre obere Grenze an (Cantor referiert diese Aussage als einen in den Vorlesungen des Herrn Weierstraß häufig vorkommenden und bewiesenen Satz[16]).

Die Verwendung dieser uns vertrauten Schlußweisen stellt zu jener Zeit noch ein Novum dar. Man muß bedenken, daß eine fundierte Begründung der Theorie der reellen Zahlen noch nicht Allgemeingut der Mathematiker war, wenngleich Weierstraß und Dedekind und, wie wir sehen werden, auch Cantor damals ihre Konstruktionen in ihren Vorlesungen zwar bereits vortrugen, aber noch nicht publiziert hatten. Jene Schlußweisen sollten in den kommenden Jahrzehnten zu teilweise heftigen Kontroversen Anlaß geben.

---

[14] Beide Arbeiten sind 1870 im 72. Band des *Journals für die reine und angewandte Mathematik* erschienen (S. 130-138 (Zitat: S. 130) und S. 139-142).

[15] Ebenda, S. 142.

[16] Vgl. Fußnote 47.

Von Heine wissen wir, daß Weierstraß und Kronecker 1870 oftmals diese Fragen diskutieren und sich intensiv mit den Arbeiten von Cantor und Heine auseinandersetzen.[17]

Einer der prominentesten Kritiker meldet sich auch sogleich zu Wort. Es ist Kronecker, der am 3. Juni 1870 an Schwarz schreibt:

Geliebter Freund,

[...] Sie sind ja durch Ihre Correspondenz mit Heine und Cantor über deren Arbeiten betreffs der Fourierschen Reihen genau orientirt und ich will dabei auch Ihnen mittheilen, was ich Heine und Cantor persönlich gesagt habe, daß ich an jenen Arbeiten nicht grade Geschmack gefunden habe. [...] Andrerseits beruht die Cantorsche Deduktion auf dem auch von Ihnen angewendeten Weierstraßschen „Beweisverfahren" mit der „oberen oder unteren Grenze", welches ich ebensowenig gelten lasse wie die weit offenbareren Bernard Bolzanoschen Trugschlüsse. [...] Uebrigens habe ich in diesem Unglauben an die Bolzanosche und an die analoge, wenn auch feinere, Schlußweise von Weierstraß [...] auch Heine und Borchardt auf meiner Seite. Ich bin sogar überzeugt, daß man Functionen wird aufstellen können, die so unvernünftig sind, daß sie – trotz des Zutreffens von Weierstraß' Voraussetzungen – keine obere Grenze haben. Alle solche allgemeinen Sätze haben ihre Schlupfwinkel, wo sie nicht mehr gelten. Um dieselben zu beweisen oder um die Beweise anzuführen muß man bis auf die ersten Elemente, muß man bis auf die Erklärung von „Größen" zurückgehn, und da hat man mit den ganzen Schwierigkeiten und Controversen zu thun, welche sich so oft bei der Erneuerung der Fundamente unserer Wissenschaft erhoben haben und welche Jahre von Nachdenken erfordern, um sie mit einigem Anschein zu besiegen. Ich, für mein Theil, bin froh, nachdem ich ein paar Monate daran geklebt habe, wieder davon losgekommen zu sein, und möchte Sie warnen, Ihre jugendliche Frische und Productionskraft an diesen relativ unfruchtbaren Dingen aufzureiben. Mir ist es – wie gesagt – ganz klar geworden, daß die Weierstraßsche Behauptung der Existenz einer „oberen Grenze" in jener Allgemeinheit unbeweisbar (vielleicht auch nicht wahr) [...] ist.[18]

Wenige Tage darauf bringt Kronecker Schwarz gegenüber erneut seine ablehnende Haltung zum Satz von der oberen Grenze und seiner Verwendung durch Cantor zum Ausdruck:

Geliebter Freund,

[...] Es kommt dazu, daß der Cantorsche Versuch den Beweis der Einzigkeit auf beliebige trigonometrische Reihen auszudehnen meines Erachtens nicht geglückt ist [,] denn Cantor stützt sich dabei auf die Existenz eines „Maximums", welche zum Mindesten noch nicht bewiesen ist. Die mannigfachsten Versuche, die Weierstraß [...] gemacht hat, meine Zweifel zu besiegen, sind sämmtlich fehlgeschlagen. Daß jenes Maximum unbeweisbar ist, glaubt (wie ich meine) Weierstraß jetzt selbst, nur hält er

[17] Brief von E. Heine an H. A. Schwarz vom 26.5.1870. In: J. W. Dauben (1979): *Georg Cantor / His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Cambridge (Mass.), London; hier S. 309 (in dem dort wiedergegebenen Satz „Kron. sagt uns (Cant. u. mir) öfter, diesen u. jenen Punct habe ich nun Weierstr. zugegeben, während Weierstr. auf Befragen nichts zugegeben haben wollte." muß es lt. Original „ihm" anstelle von „ich" (das den Sinn sonst umkehren würde) heißen).

[18] Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften. Nachlaß Schwarz, Nr. 973, Brief v. 3.6.1870.

trotzdem dasselbe für existent. Aber Heine [...] glaubt seinerseits weder an die Strenge der Bolzano-Weierstraßschen Methode noch an die Strenge des darauf gegründeten Cantorschen Beweises [...]. [...] ich hätte gewünscht, daß sie [Heine und Cantor] ihre Publikationen zurückgezogen hätten; auch habe ich mich durch Weierstraß bewegen lassen, vorläufig jenen Publikationen nichts entgegenzusetzen; aber später werde ich doch wohl passende Gelegenheit dazu finden.[19]

Wenigstens bezüglich Heine ist festzustellen, daß er wohl doch die Fronten gewechselt haben muß, wenn er überhaupt je im anderen Lager gestanden haben sollte, denn 1872 erscheinen im Crelleschen Journal seine *Elemente der Functionenlehre.* Der vom Oktober 1871 datierte Text beginnt mit den Worten:

Das Fortschreiten der Functionenlehre ist wesentlich durch den Umstand gehemmt, dass gewisse elementare Sätze derselben, obgleich von einem scharfsinnigen Forscher bewiesen, noch immer bezweifelt werden [...].[20]

Nicht nur Kronecker, auch Kummer (der Schwiegervater von Schwarz), spricht zum selben Zeitpunkt Schwarz gegenüber seine Bedenken aus. So schreibt er am 1. Juni 1870:

Ich selbst bemerke nur, daß ich den ganzen Boden auf welchem die Untersuchungen über das Dirichletsche Princip wachsen, nämlich den Boden wo man von ganz unbestimmten Functionen handelt für einen sehr schlüpfrichen halte auf welchem ein solider Bau gar nicht aufzuführen ist, denn Du kennst ja meinen Spruch: „Im Gebiete der transcendenten Functionen ist Alles möglich". Es kann hier jedesmal besondere Fälle geben, in denen die ausgesprochenen Sätze aufhören richtig zu sein. Mir also würde es am liebsten sein, wenn Du diesen schlüpfrichen Boden nicht mit solchem Eifer cultiviren, sondern Dich wieder zu dem wenden möchtest worin grade Deine vorzüglichste Begabung liegt, nämlich zu dem mehr Concreten wo der Erfolg nicht abhängig ist von den Ansichten über Strenge der Methode, welche dieser oder jener Mathematiker haben kann und wo man aus lauter Trieb nach Strenge sich in die allerunfruchtbarsten Untersuch[ung]en vertieft und die absolute Strenge doch nicht erreicht, nämlich nicht in der Allgemeinheit, in welcher man sie sucht.[21]

In jenen Jahren ist an der exakten Begründung der Analysis gearbeitet worden: Weierstraß, Dedekind und Cantor entwickelten ihre Theorie der reellen Zahlen, von denen aber 1870 noch keine im Druck vorlag.[22] Wenige Wochen nach dem zitierten Brief Kummers, am 14. Juli 1870, trug Weierstraß in der Berliner Akademie seine Kritik des Dirichletschen Prinzips vor. Zwei Jahre später (Akademie-Vortrag vom 18. Juli 1872) gab er ein Beispiel einer stetigen nirgends differenzierbaren Funktion.

Es ist nicht das erste Mal, daß Schwarz der ablehnenden Haltung Kroneckers in der betreffenden Frage begegnet. Er schreibt am 1. April 1870 an Cantor:

---

[19] Ebenda, Brief v. 8.6.1870.

[20] *Journal für die reine und angewandte Mathematik 74 (1872)*, S. 172.

[21] Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften. Nachlaß Schwarz, Nr. 977. Brief v. 1.6.1870.

[22] Ch. Méray war der erste, der 1869 eine Theorie der reellen Zahlen publizierte. Sie scheint aber damals kaum Beachtung gefunden zu haben.

Was für Einwendungen in letzter Instanz Herr Professor Kronecker gegen die Bolzano-Weierstraß'sche Schlußweise geltend zu machen hat, weiß ich nicht. Als derselbe im September [1869] hier war, hat Herr Kronecker mir meine Behauptungen schließlich zugegeben, die sich auf die Richtigkeit der Schlußweise bezogen, [...] Gar nicht beschreiben kann ich Dir die Freude darüber, daß Herr Weierstraß die Schlüsse vollkommen richtig gefunden hat. Dein Satz ist ein bedeutsamer Fortschritt in der Theorie der trigonometrischen Reihen [...].[23]

Weierstraß bringt den Satz von Bolzano-Weierstraß nach meiner Kenntnis des Archivmaterials erstmals in seiner Vorlesung zur Theorie der analytischen Funktionen im WS 1863/64. Er nennt ihn dort einen „Hülfssatz, den man bei feineren mathematischen Untersuchungen nicht entbehren kann".[24]

Cantor und Schwarz waren Hörer dieser Vorlesung[25] und somit „von der ersten Stunde an" mit jener Weierstraßschen Deduktion vertraut.

Schwarz kannte die in Prag 1817 erschienene Arbeit „Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege" von B. Bolzano. Als er Cantor darauf hinweist, antwortet dieser am 8. April 1870:

Mein lieber Schwarz!

[...] Du bist so freundlich, mir das Werkchen von Bolzano zum Nachsehen anzubieten; ich danke Dir, es wird aber nicht nöthig sein; ich kenne die darin vorkommende Schlußweise ganz genau, und auf die kommt es ja hauptsächlich an.

Ich glaube, daß die Bedenken gegen dieselbe mit der Zeit überwunden werden; sollte das nicht geschehen, so wird mich das nicht bestimmen können, etwas wovon ich durch klare Gründe überzeugt bin, fallen zu lassen, so wenig wie ich irgend einen anderen richtigen und zugleich allgemein anerkannten Satz fallen lassen könnte. -

Die Pointe in den Einwänden, welche gemacht werden, scheint darauf gelegt zu werden, daß man bei der Form, in welcher die obere oder untere Gränze dargestellt wird, etwa bei der folgenden:

$$g = c\left(\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{4} + \dots\right)$$

(in welcher die λ nur 0 oder 1 sein können, und jedes λ bestimmt ist)[26] *[,] die Kenntniß*

[23] Dieser Brief von Schwarz ist in Auszügen (mit dem vorstehenden Zitat) abgedruckt in: Meschkowski 1967, S. 228-229.

[24] Siehe dazu R. Bölling (1994): Karl Weierstraß – Stationen eines Lebens. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 96,* S. 56-75; hier S. 68.

[25] Für Cantor ist das dem oben angeführten Verzeichnis der von ihm in Berlin besuchten Vorlesungen zu entnehmen; ein Verzeichnis der von Schwarz in Berlin besuchten Vorlesungen hat der Verf. publiziert in: R. Bölling (1994): *Das Fotoalbum für Weierstraß.* Braunschweig, Wiesbaden; hier S. 6.

[26] Die Reihe entsteht auf folgende Art beim Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß für das Intervall [0,c]: beginnend mit dem Intervall [0,c] halbiere man fortgesetzt jeweils ein Intervall, das unendlich viele Punkte enthält; die Summe der ersten n Summanden ist die kleinste Zahl aus dem nach der n-ten Halbierung vorliegenden Intervall. Die Summe der unendlichen Reihe liefert gerade einen Häufungspunkt, dessen Existenz nachzuweisen war.

des Gesetzes, welches in der Reihe:

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$

herrscht, vermißt; daß dies Gesetz im Allgemeinen unbekannt bleibt [;] daß man sogar in den meisten Fällen nicht im Stande ist, die Reihe der λ bis zu einem gewissen Gliede hin aufzustellen, kann nicht geläugnet werden; es ist aber diese ganze Frage eine fremdartige, nicht zur Sache gehörige. Sobald man nur weiß, daß die Reihe der λ auf irgend eine Weise bestimmt ist, so daß sie nur eine und keine andere ist, so ist damit auch eine bestimmte, von jeder anderen verschiedene Zahlengröße g gegeben, als Gränze jener unendlichen Reihe. Auf die Existenz von g kommt es aber bei Bolzano allein an, nicht auf dessen Berechnung. [...] Ich schließe, lieber Schwarz, Dich grüßend, Dein treuer

G.C.[27]

Die Diskussion ist im Fluß. Es scheint, als haben sich Unsicherheiten bei Schwarz eingestellt. Hat Weierstraß vielleicht inzwischen seine Position geändert?

Da erhält Schwarz einen vom 27. Juni 1870 datierten Brief Cantors:

Du fragst, ob unser Weierstrass in irgendeinem Puncte bei der ihm eigenthümlichen Beweismethode mangelnde Strenge zugegeben hat. Dies ist in keiner Weise der Fall. Wenn auch von Seiten der Professoren Kummer, Kronecker und Borchardt die heftigsten Versuche gemacht worden sind, ihn damit in die Enge zu treiben, so habe ich doch gefunden, daß allemal sein Standpunct nicht um ein Haarbreit in dieser Frage verrückt worden ist.

Wenn Dein Schwiegervater den allgemeinen Einwand macht, daß man allgemeine Sätze ohne Einschränkungen nicht aussagen kann, so betont Weierstrass, daß sein Satz von der Existenz und dem Erreichen der oberen Grenze bei einer stetigen Function aber gerade darin seine Stärke und Anwendbarkeit hat, daß er allgemein ist.[28]

Cantors Theorie der reellen Zahlen

1872 erscheint eine Arbeit Cantors mit dem Nachweis, daß die Eindeutigkeitsaussage für trigonometrische Reihen für gewisse *unendliche* Ausnahmemengen (s. oben) bestehen bleibt.[29]

Er beginnt die Abhandlung mit einer gedrängten Darstellung seiner Theorie der reellen Zahlen. Es gibt aber ein Dokument früheren Datums von Cantors Hand, in dem wir diese Theorie auch schon finden:

Cantors Vorlesung im SS 1870 über Differentialrechnung

Cantor hält nämlich im SS 1870 eine Vorlesung über Differentialrechnung, in der er bereits seine Theorie der reellen Zahlen vorträgt. Das läßt sich einem

[27] Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften. Nachlaß Schwarz, Nr. 835, Brief v. 8.4.1870.

[28] Ebenda, Brief v. 27.6.1870.

[29] G. Cantor (1872): Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. In: *Mathematische Annalen 5*, S. 123-132 (auch in: *Acta mathematica 2* (1883), S. 336-348).

eigenhändig geschriebenen Vorlesungsmanuskript entnehmen.[30] Um einen Eindruck von dem Text zu vermitteln, sollen hier einige Auszüge (der besseren Übersichtlichkeit wegen mit Zwischenüberschriften versehen) angeführt werden (Flüchtigkeitsfehler wurden korrigiert und nicht mehr gebräuchliche Bezeichnungen geändert):

1. Ueber den Begriff der Zahlengröße

Der Begriff der Zahlengröße ist für die höhere Analysis, von welcher die Differentialrechnung der erste Theil ist, fundamental; ich werde daher zunächst von ihm zu handeln haben.-[31]

[...]

Wir haben also das Resultat:

Das Ausziehen der Quadratwurzel $\sqrt{D}$ besteht in der Aufstellung eines unendlichen Decimalbruches:

$$a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_\nu \ldots$$

welcher wiederum nichts anderes ist als eine unendliche Reihe von rationalen Zahlen

$$I \qquad a, a_1, a_2, \ldots a_\nu$$

repräsentirt, wo nemlich a_ν der bis zur ν-ten Stelle genommene Decimalbruch ist:

$$a_\nu = a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{10^\nu} .$$

Diese Reihe I von Näherungsbrüchen hat folgende beiden Eigenschaften:

1. Je weiter man je zwei derselben vom Anfang entfernt nimmt, um so kleiner wird ihre Differenz, welche bei gehöriger Entfernung derselben vom Anfang jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreicht.

$$a_{\nu+\mu} - a_\nu$$

wird unendlich klein, wenn ν ins unendliche wächst.[32]

2. Setzt man die Näherungsbrüche I statt x in die linke Seite der Gleichung (1) [$x^2 = D$] ein, d.h. bildet man :

$$D - a_\nu^2$$

so wird diese Größe, welche stets positiv bleibt, unendlich klein, wenn ν ins unendliche wächst.

Diese beiden Eigenschaften sind es, welche uns berechtigen, von $\sqrt{D}$ zu sprechen.[33] *[...]*

---

[30] Ein Hinweis auf dieses Dokument findet sich in: Purkert-Ilgauds 1987, S. 37.

[31] Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen. Handschriftenabteilung. Cod. Ms. Georg Cantor, Nr. 22, 1^r. Die Blätter sind offenbar irgendwann einmal durcheinander geraten, da die vorgefundene Paginierung nicht der inhaltlichen Abfolge entspricht.

[32] Die Vorlesung zeigt, daß Cantor die Termini „unendlich klein werden" und „unendlich wachsen" gegenüber der ε-δ-Terminologie bevorzugt.

[33] Ebenda, 3^r-3^v.

[Definition von Zahlengrößen]

Wenn eine unendliche Reihe rationaler Zahlen:

(A) $a_1, a_2, a_3, \ldots a_\nu$

gegeben ist, welche die Eigenschaft hat, daß:

$$lim\,(a_{\nu+\mu} - a_\nu) = 0$$

(d.h. bei gegebener Größe δ giebt es eine ganze Zahl n_0, so daß:

$$|\, a_{\nu+\mu} - a_\nu \,| < \delta, \text{ für } n > n_0, \text{ was auch } \mu \text{ sein mag.)}$$

so sagt man, daß sich die Brüche (A) einer Gränze nähern; die Berechtigung diese Gränze als eine bestimmte Zahlengröße Ω zu fassen wird darin gefunden, daß man für die so definirten Zahlengrößen die Begriffe des Größer, Kleiner und Gleichseins aufstellen kann.[34] *[...]*

[Definition der Ordnungsrelation]

Zwei Zahlengrößen Ω u. Ω' gegeben durch:

(A) $a_1, a_2, \ldots$

u. (A') $a'_1, a'_2 \ldots$

sind: $\Omega \gtreqless \Omega'$, jenachdem:

$$lim\,(a_\nu - a'_{\nu'}) \gtreqless 0.$$

[Grundoperationen mit Zahlengrößen]

Wenn man zwei Reihen hat:

$$a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots,$$
$$a'_1, a'_2, \ldots, a'_\nu, \ldots$$

so ist auch immer:

$$\ldots, a_\nu \pm a'_\nu, \ldots$$

eine Reihe von derselben Beschaffenheit; ebenso: $a_\nu a'_\nu$ u. a_ν / a'_ν, vorausgesetzt, daß nicht $lim\, a'_\nu = 0$.

Bezeichnet man die diesen Reihen entsprechenden Zahlen mit b, b', b'', so drückt man ihre Beziehung resp. aus durch:

$$b \pm b' = b''; \qquad bb' = b'', \qquad b/b' = b''.$$[35]

[...]

[34] Ebenda, 4[r] (die vorstehende Definition (ohne den in Klammern gesetzten Passus) ist zitiert in: Purkert-Ilgauds 1987, S. 37).

[35] Ebenda, 4[v].

[Einbettung der rationalen Zahlen]

Eine rationale Zahl kann auch als Grenze einer unendlichen Reihe von rationalen Zahlen dargestellt werden, z.B.: die Zahl 1, als Grenze von:

$$1/2, 3/4, 7/8, 15/16, \ldots$$

Allgemein jede rationale Zahl p/q, als Grenze von:

$$p/q, p/q, \ldots$$

Wenn man zeigen kann, daß eine Zahlengröße

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

keiner rationalen Zahl:

$$p/q, p/q, \ldots$$

gleich sein kann, so nennt man sie eine <u>*irrationale*</u> *Zahl, oder auch eine* <u>*incommensurable*</u> *Größe.*[36] *[...]*

Es ist bemerkenswert, daß Cantor zwar auch Fundamentalfolgen betrachtet, die er aus den „neuen Zahlen" bildet, aber nicht, jedenfalls soweit die Blätter vorliegen, auf die Vollständigkeit der von ihm eingeführten Zahlen hinweist.

[Definition der Stetigkeit]

Wenn $f(x_0 + \varepsilon)$ mit unendlich abnehmendem ε (wobei $x_0 + \varepsilon$ stets im Gebiet $[a \ldots b]$ bleibt) gegen $f(x_0)$ convergirt, so sagt man: $f(x)$ ist stetig in der Nähe des Werthes $x = x_0$.

Wenn man aber die Größe ε so gegen Null convergiren lassen kann, daß $f(x_0 + \varepsilon)$ nicht gegen $f(x_0)$ convergirt, so sagt man $f(x)$ sei unstetig in der Nähe von $x = x_0$.[37]

Ohne Beweis wird der Satz von Bolzano-Weierstraß angegeben:

<u>*Lemma.*</u>
Wenn in einem Intervall $[a, b]$ eine unendliche Größenreihe:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu, \ldots$$

gegeben ist, so giebt es zum wenigsten einen Werth x_1 im Intervall, dem Glieder aus der gegebenen Reihe beliebig nahe kommen.[38]

In welchem Zusammenhang tritt dieses Lemma bei Cantor auf? Er zitiert es beim Beweis des folgenden Satzes:

Wenn $f(x)$ für jeden Werth von x im Intervalle $[a \ldots b]$ stetig ist, so werden die obere und untere Grenze von $f(x)$ wirklich erreicht $[\ldots]$.[39]

---

[36] Ebenda, 5^v.
[37] Ebenda, 12^r. Cantors Formulierung könnte mißverstanden werden; gemeint ist Stetigkeit (Unstetigkeit) für $x = x_0$.
[38] Ebenda, 16^v.
[39] Ebenda, 16^r.

[Definition der Ableitung]

Die Differentialrechnung hat es nun eigentlich mit Grenzbestimmungen zu thun. Einer ihrer Hauptbegriffe die Derivirte oder der Differentialquotient ist weiter nichts als eine Grenze, nemlich:

$$lim\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{für} \quad lim\ h = 0\ [.]$$ [40]

Soweit zu dieser Vorlesung.

Vergleicht man die Begründungen des Zahlbegriffs von Dedekind, Weierstraß und Cantor, so hat sich Cantors Ansatz als der verallgemeinerungsfähigste erwiesen.

Wie schon erwähnt, publiziert Cantor seine Begründung des Zahlbegriffs 1872. Da er, wie wir sahen, 1870 (oder früher) im Besitz seiner Theorie war, stellt sich die Frage: Warum gerade hier?

Zunächst seien einige Bemerkungen zum Inhalt der Publikation vorausgeschickt. Nach den Ausführungen zum Zahlbegriff führt Cantor auf der Geraden eine Koordinate ein, so daß jedem Punkt der Geraden eine reelle Zahl entspricht. Zur Herstellung einer eineindeutigen Korrespondenz zwischen Punkten und reellen Zahlen, d.h., daß jeder reellen Zahl umgekehrt auch ein Punkt entspricht, muß er diese Aussage als Axiom (Cantor: „weil es in seiner [dieses Satzes] Natur liegt, nicht allgemein beweisbar zu sein“[41]) formulieren.

In der betreffenden Publikation führt Cantor danach den grundlegenden Begriff der Ableitung[42] einer Punktmenge ein, wobei Punktmengen bei ihm Teilmengen des Linearkontinuums (also Teilmengen der Menge der reellen Zahlen) sind. Hierfür muß er also zunächst den Begriff des Häufungspunktes einführen, der bei ihm noch „Grenzpunkt“ heißt. Er bemerkt: „Darnach ist es leicht zu beweisen, dass eine aus einer unendlichen Anzahl von Punkten bestehende Punktmenge [gemeint sind beschränkte] stets zum wenigsten *einen* Grenzpunkt hat.“[43] Das ist der Satz von Bolzano-Weierstraß und für diesen ist die Eigenschaft der Vollständigkeit der reellen Zahlen das Entscheidende; hier kommt Cantors Theorie ins Spiel.

Es ist wohl Weierstraß gewesen, der als erster solche Punkte betrachtet hat, die in jeder Umgebung Punkte einer gegebenen Menge enthalten, ohne jedoch für diese einen speziellen Terminus zu verwenden. Erst in seinen späteren Vorlesungen findet sich die Bezeichnung „Grenzstelle“.[44]

Cantor kann nun seine Verallgemeinerung so aussprechen, daß die Eindeutigkeitsaussage für die trigonometrischen Reihen auch noch für alle Ausnah-

[40] Ebenda, 19^{v}. Cantor berührt in dem vorliegenden Text (der allerdings möglicherweise unvollständig ist) nirgends die Frage der Existenz der Ableitung.

[41] Cantor 1872, S. 128.

[42] Im Sinne einer *abgeleiteten* Punktmenge (Cantor: weil mit einer Punktmenge „die Menge ihrer Grenzpunkte begrifflich mit gegeben“ ist; ebenda, S. 129).

[43] Ebenda.

[44] So z. B. in der im SS 1886 gehaltenen Vorlesung „Ausgewählte Kapitel aus der Functionenlehre“ (vgl. Fußnote 83), aber der Mitschrift von A. Hurwitz zufolge nicht in der Vorlesung „Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen“ vom SS 1878 (ediert in der Bearbeitung von P. Ullrich. Braunschweig: 1988 (Dokumente zur Geschichte der Mathematik; 4.)).

memengen bestehen bleibt, bei denen die sukzessive Bildung der abgeleiteten Mengen nach endlich vielen Schritten zur leeren Menge führt.

Zurück zur Frage: Was hat Cantor veranlaßt, seine Theorie der reellen Zahlen an dieser Stelle zu publizieren?

In allen seinen vier voraufgegangenen Arbeiten über trigonometrische Reihen verwendet Cantor grundlegende Eigenschaften der reellen Zahlen, so daß jedesmal ein Anlaß bestanden hätte, seine Theorie zu präsentieren. In der ersten Abhandlung „Ueber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz"[45] benötigt Cantor die Vollständigkeit der reellen Zahlen sowie die Aussage, daß eine unendliche beschränkte Folge reeller Zahlen mit nur einem einzigen Häufungspunkt gegen diesen konvergiert; in der im selben Band des Crelleschen Journals enthaltenen Fortsetzung „Beweis, dass eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Function $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt"[46] tritt der Schluß auf, daß eine in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion einer reellen Veränderlichen die obere Grenze annimmt (oder wie Cantor es formuliert: „erreicht"); Cantor bemerkt zu dieser Aussage, daß sie einen in den „Vorlesungen des Herrn Weierstrass häufig vorkommenden und bewiesenen Satz"[47] darstelle. In einer nachfolgenden Notiz[48] gibt Cantor eine Vereinfachung seines Beweises, die auf eine Anregung Kroneckers zurückgeht, und kommt schließlich auf eine in seinem vorigen Aufsatze verwendete Formulierung zurück, wobei er ausdrücklich die Aussage über die Existenz der oberen Grenze explizit ausspricht. In der 4. Arbeit endlich „Ueber trigonometrische Reihen"[49] wird ein weiteres Mal der Satz über die Annahme der oberen Grenze durch stetige Funktionen herangezogen.

In keiner dieser Abhandlungen findet sich ein Hinweis auf Cantors Theorie der reellen Zahlen. Warum aber erfahren wir gerade davon etwas in der chronologisch sich anschließenden 1872 publizierten Arbeit „Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen"[50]?

Es sind meiner Ansicht nach nicht etwaige Mängel oder Lücken des damaligen Standes der Begründung der reellen Zahlen gewesen, die Cantor zur Darstellung seiner Theorie veranlaßt haben.[51] Vielmehr dürfte der Wunsch maßgebend gewesen sein, beim beabsichtigten Übergang zum Studium *unendlicher* Zahlenmengen – der Anschaulichkeit wegen – sich der Vorstellung von Punktmengen auf einer Geraden (anstelle von Mengen reeller Zahlen) zu bedienen.

Es spricht noch ein weiterer Grund dafür: Beim *Beweis* seiner Verallgemeinerung der Eindeutigkeitsaussage über die trigonometrische Reihendarstellung auf bestimmte *unendliche* Ausnahmemengen greift Cantor nirgends auf die vorangestellte Theorie der reellen Zahlen zurück, sondern kommt mit Verweisen auf seine früheren

[45] *Journal für die reine und angewandte Mathematik 72 (1870)*, S. 130-138.
[46] Ebenda, S. 139-142.
[47] Ebenda, S. 141 (Fußnote).
[48] *Journal für die reine und angewandte Mathematik 73 (1871)*, S. 294-296.
[49] *Mathematische Annalen 4 (1871)*, S. 139-143.
[50] Siehe Fußnote 29.
[51] So findet sich in der Literatur als Cantors Motiv die Feststellung, „daß die Theorie der reellen Zahlen noch nicht die exakte arithmetische Form hatte, die für seine [Cantors] Untersuchungen erforderlich war." (Purkert-Ilgauds 1987, S. 36).

Arbeiten aus. Welchen Zweck soll dann seine Theorie an dieser Stelle also erfüllen? Ich beantworte dies dahingehend, daß sie der Beschreibung des Resultates dienen soll, nämlich die Ausnahmemengen als Punktmengen auffassen zu können.

Und noch ein Umstand in Cantors Arbeit scheint dafür zu sprechen. Unmittelbar bevor Cantor mit der Darlegung seiner Theorie der reellen Zahlen beginnt, heißt es bei ihm:

Zu dem Ende [Verallgemeinerung auf unendlich viele Ausnahmepunkte] bin ich aber genöthigt, wenn auch zum grössten Theile nur andeutungsweise, Erörterungen voraufzuschicken, welche dazu dienen mögen, Verhältnisse in ein Licht zu stellen, die stets auftreten, sobald Zahlengrössen in endlicher oder unendlicher Anzahl gegeben sind; [...].[52]

Was soll damit gemeint sein? Es ist darin nicht, wie ich meine, ein Hinweis auf die Theorie der reellen Zahlen zu sehen.[53] Denn *nachdem* Cantor seine Theorie dargestellt hat und bevor er zur Definition des Häufungspunktes übergeht, treffen wir noch einmal auf nahezu die gleiche Formulierung:

Wir wollen nun, unserm eigentlichen Gegenstande näher tretend, Beziehungen betrachten, welche auftreten, sobald Zahlengrössen in endlicher oder unendlicher Anzahl gegeben sind.[54]

Fassen wir zusammen: Es dürfte die Suche nach einer passenden Beschreibung der unendlichen Ausnahmemengen der eigentliche Anlaß gewesen sein, dem wir die Publikation der Cantorschen Theorie der reellen Zahlen an *dieser* Stelle verdanken.

Mit dieser Arbeit haben die Geburtswehen der Mengenlehre eingesetzt. Denn der Prozeß der Bildung der Ableitung ließ sich unbegrenzt wiederholen (solange die auftretenden Mengen nur unendlich bleiben) und trug so den Ansatz in sich, über „unendlich hinaus zu zählen", um dann in Cantors „transfiniten" Ordnungszahlen $\omega, \omega+1, \ldots, \omega^2, \ldots$ seine Ausbildung zu finden.

Abzählbarkeit

Der Briefwechsel zwischen Cantor und Dedekind dokumentiert in eindrucksvoller Weise verschiedene Etappen bis zum Beweis Cantors, daß die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar ist. Das ist bekannt. Ich möchte hier dazu nur einen Aspekt erwähnen, der Weierstraß betrifft.

Cantor und Dedekind hatten sich zufällig 1872 in der Schweiz kennengelernt. In einem Brief an Dedekind vom 29. November 1873 formuliert Cantor die Frage, von der keiner der Briefpartner ahnt, welche Entwicklung sie in Gang setzen sollte:

Gestatten Sie mir, Ihnen eine Frage vorzulegen, die für mich ein gewisses theoretisches Interesse hat, die ich mir aber nicht beantworten kann [...]."[55]

---

[52] Cantor 1872, S. 123.

[53] Im Unterschied zu einer Interpretation in: Purkert-Ilgauds 1987, S. 36.

[54] Cantor 1872, S. 128.

[55] J. Cavaillès, E. Noether [Hrsg.] (1937): *Briefwechsel Cantor – Dedekind.* Paris; hier S. 12.

Es handelte sich darum festzustellen, ob zwischen „dem Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen" und „dem Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrössen" eine bijektive Abbildung existiert. Dedekind antwortet noch am selben Tag (!). Der Brief ist zwar nicht überliefert, jedoch hat sich Dedekind Notizen darüber gemacht, die uns in die Lage versetzen, etwas über seine Antwort zu erfahren. Es heißt in diesen Aufzeichnungen: er habe „umgehend geantwortet", daß er die Frage „nicht entscheiden könnte, zugleich aber den Satz ausgesprochen und vollständig bewiesen [habe], dass sogar der Inbegriff aller algebraischen Zahlen sich dem Inbegriffe (n) der natürlichen Zahlen in der angegebenen Weise zuordnen läßt [...]"[56]

Beide Briefpartner halten die Fragestellung nicht für besonders wichtig, wie Cantor in seiner Antwort (vom 2. Dezember 1873) auf Dedekinds Brief bemerkt:

Übrigens möchte ich hinzufügen, daß ich mich nie ernstlich mit ihr beschäftigt habe, weil sie kein besonders practisches Interesse für mich hat und ich trete Ihnen ganz bei, wenn Sie sagen, daß sie aus diesem Grunde nicht viel Mühe verdient. Es wäre nur schön, wenn sie beantwortet werden könnte; z.B., vorausgesetzt daß sie mit nein beantwortet würde, wäre damit ein neuer Beweis des Liouvilleschen Satzes geliefert, daß es transcendente Zahlen giebt.[57]

Eine Woche, nachdem Cantor seine Frage formuliert hat, teilt er Dedekind am 7. Dezember 1873 den ersten, von ihm soeben gefundenen Beweis mit, daß es keine eineindeutige Abbildung zwischen der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge der reellen Zahlen des Intervalls (0,1) gibt. Dieser Beweis wird noch nicht mit dem bekannten Diagonalverfahren geführt. Schon einen Tag später, in seinem Brief vom 8. Dezember 1873 gratuliert Dedekind Cantor zu diesem schönen Erfolg und schickt ihm eine vereinfachte Fassung des Beweises.

Cantor hatte ein Resultat von grundsätzlicher Bedeutung erzielt: Eineindeutige Zuordnungen erwiesen sich als Mittel, um Unterschiede im Unendlichen festzustellen. Damit war ein Weg zur Klassifizierung unendlicher Mengen eröffnet. Es ist dies als die Geburtsstunde der Mengenlehre bezeichnet worden. Wie schon erwähnt, muß dem aber hinzugefügt werden, daß der von Cantor bei seinen Untersuchungen über trigonometrische Reihen geprägte Begriff der abgeleiteten Punktmenge mit der ihm innewohnenden Tendenz „über unendlich hinauszuzählen" ebenfalls als Geburtshelfer zu nennen ist.

Es wäre interessant, die Reaktion von Schwarz kennenzulernen, aber leider fehlen Briefe aus dieser Zeit (aus den drei Jahren zwischen Mai 1872 und Februar 1875 ist mir kein Brief von Cantor an Schwarz bekannt).

Nun zu Weierstraß in diesem Zusammenhang.

Cantor selbst hatte am 22. Dezember 1873 Weierstraß in Berlin über seine Abzählbarkeits-Resultate berichtet, die Zeit war aber zu knapp gewesen, um nähere Einzelheiten zu besprechen, so daß Weierstraß bereits am Tag darauf persönlich bei Cantor erschien und von ihm auch die Beweise kennenlernte. Daß die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist, war Weierstraß zu dieser Zeit durchaus bekannt (s. unten). Er riet Cantor zur Publikation der Ergebnisse. Und bereits wenige Tage

[56] Ebenda, S. 18.
[57] Ebenda, S. 13.

später, am 27. Dezember, erhielt Cantor von C. W. Borchardt die Mitteilung, daß die Arbeit im Crelleschen Journal publiziert werde.[58] Die Abhandlung erschien 1874 unter dem nach unserem Verständnis unpassenden Titel „Über eine Eigenschaft des Ingebriffs aller reellen algebraischen Zahlen".[59] Als Eigenschaft ist die Abzählbarkeit der Menge der (reellen) algebraischen Zahlen gemeint, die von Cantor in der Abhandlung zunächst bewiesen wird. Als Erklärung für die irreführende Wahl der Überschrift wird in Purkert-Ilgauds 1987 (S. 46) angegeben, daß Weierstraß bei seiner Empfehlung zur Publikation vor allem die genannte Eigenschaft der algebraischen Zahlen vor Augen gehabt hätte, demnach das prinzipiell Neue nicht bemerkt zu haben scheint. Tatsächlich sieht der Verf. aber nicht, wie diese Interpretation zu begründen wäre. Weierstraß hatte Cantor geraten, eine „Bemerkung über den Wesensunterschied der Inbegriffe" nicht in die Publikation aufzunehmen.[60] Cantor befolgt diesen Rat und erklärt Dedekind:

Die Beschränkung, welche ich meinen Untersuchungen bei der Publication gegeben habe liegt zum Theil in den hiesigen Verhältnissen begründet, über welche ich Ihnen vielleicht später einmal mündlich sprechen werde [...]."[61]

J. W. Dauben findet den Grund für die merkwürdige Wahl des Titels in der Rücksichtnahme auf Kronecker, der zu den Herausgebern des Crelleschen Journals gehörte.[62] Diese Auffassung ist auch durchaus mit den vorstehend wiedergegebenen Äußerungen Cantors vereinbar. Von den unterschiedlichen Grundauffassungen bei der Begründung der Analysis zwischen Kronecker und Weierstraß war schon die Rede. Kronecker hatte bereits Heine veranlassen wollen, seine Arbeit „Über trigonometrische Reihen" vom Druck zurückzuziehen.[63] Erst „nach vielen Verhandlungen"[64] mit Kronecker kam es zur Publikation.[65] Für uns klingt es sicher sonderbar, wenn Cantor in seiner Arbeit als Grund für die Aufnahme des Hauptergebnisses (die Nichtabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen) in die Publikation lediglich angibt, eine Anwendung seines ersten Resultates (der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen) geben zu wollen (nämlich einen neuen Beweis der Existenz transzendenter Zahlen zu erbringen).

Es spricht also einiges dafür, daß Weierstraß seine Empfehlungen mit Rücksicht auf Kronecker ausgesprochen hat.

Wie oben erwähnt, war Weierstraß nicht neu, daß die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist. In diesem Zusammenhang hat A. Schoenflies einmal geäußert:

---

[58] Nach einer brieflichen Mitteilung Cantors an Dedekind vom 27.12.1873. Der diesbezügliche Auszug ist publiziert in: I. Grattan-Guiness (1974): The Rediscovery of the Cantor-Dedekind Correspondenz. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 76,* S. 104-139; hier S. 110.

[59] In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik 77 (1874),* S. 258-262.

[60] Mitteilung Cantors in dem in der Fußnote 58 angegebenen Brief. Einzelheiten über die Bemerkung, die von Dedekind stammen könnte, lassen sich aus der Korrespondenz nicht ermitteln.

[61] Brief Cantors an Dedekind vom 27.12.1873. In: Cavaillès-Noether 1937, S. 17.

[62] Dauben 1979, S. 67-69.

[63] Brief von E. Heine an H. A. Schwarz vom 26.5.1870. In: Dauben 1979, S. 308.

[64] Ebenda (dort mit „noch" anstelle von „nach").

[65] In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik 71 (1870),* S. 353-365.

Ich erinnere mich, daß Weierstraß im Winter 1873/74 im Seminar einmal die Frage stellte, wie man alle Brüche in eine fortlaufende Reihe bringen könne, mit dem Bemerken, ein früheres Seminarmitglied habe dies einmal gemacht. Auf das naturgemäß negative Verhalten des Seminars ist meiner Erinnerung nach allerdings weiteres nicht erfolgt."[66]

Wenn es auch nicht so klingt, wäre doch nach der angegebenen zeitlichen Einordnung nicht mit letzter Sicherheit auszuschließen, daß dieses frühere Seminarmitglied vielleicht Cantor selbst gewesen ist oder Weierstraß erst durch den Besuch Cantors zu seiner Frage angeregt worden wäre, falls man gewillt ist, das von Schoenflies verwendete Wort „einmal" nicht auf die Goldwaage zu legen, zumal das Ereignis für ihn fast 50 Jahre zurücklag.

Es läßt sich jedoch ein zweiter Zeuge anführen, dessen Angaben gegen diese Version sprechen.

Es handelt sich dabei um handschriftliche Notizen von G. Mittag-Leffler. Darin heißt es:

Alle rationalen Zahlen, kleiner als 1, können in eine abzählbare Zahlenmenge geordnet werden. Weierstrass hat diese Aufgabe zu lösen im mathematischen Seminar Berlin 1873 gestellt. Aber es war nie Weierstrass' Art, Aufgaben zu stellen, früher als er selbst über die Lösung vollständig klar war. Die Aufgabe einmal gestellt, war der Beweis von Cantor, Berlin 23 XII 1873, „daß der Einbegriff aller reellen algebraischen Zahlen abzählbar ist" [...] nicht schwer zu finden.[67]

Daß diese Einschätzung zutreffend sein dürfte und nicht bloß ein Urteil aus späterer Sicht darstellt, wird dadurch gestützt, daß, wie schon erwähnt, auch Dedekind diese Erweiterung sofort gesehen und bewiesen hat.

Weiterhin hat Mittag-Leffler notiert:

Weierstrass drückte mehrere Male seine Bewunderung für diesen Satz von Cantor aus. Das bedeutete doch keineswegs, daß er nicht im Besitz dieses Satzes war in allgemeinen Zügen, wenn auch nicht ausdrücklich formulirt. Das war eine Seite von seiner rein menschlichen Größe, daß er sich ebensoviel vielleicht auch mehr freute über eine Entdeckung von einem seiner Schüler als wenn er selbst die Entdeckung gemacht hätte.[68]

Cantor verwendet im Titel seiner ersten mengentheoretischen Arbeit über die Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen den Terminus *Inbegriff*, später spricht er von *Mannigfaltigkeiten* (wohl, weil er Mengen von *Punkten* betrachtet). Noch bei der Publikation seines Diagonalverfahrens 1891 ist vom *Inbegriff* und von *Mannigfal-*

---

[66] A. Schoenflies (1922): Zur Erinnerung an Georg Cantor. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 31*, S. 97-106; Zitat: S. 99.

[67] Eigenhändig geschriebener Text (Entwurf) G. Mittag-Lefflers. Undatiert (nicht vor 1922). Institut Mittag-Leffler (Djursholm). Hier mit orthographischen Änderungen wiedergegeben. Mit größter Dankbarkeit möchte ich an dieser Stelle die außerordentliche Unterstützung meiner Arbeit durch das Institut Mittag-Leffler erwähnen.

[68] Eigenhändig geschriebenes Textfragment (Entwurf) G. Mittag-Lefflers. Undatiert (um 1925 (?)). Institut Mittag-Leffler (Djursholm). Hier mit orthographischen Änderungen wiedergegeben. Die Frage der Abhängigkeit der in dieser und der vorangegangenen Fußnote genannten Texte muß hier unentschieden bleiben.

tigkeiten die Rede. Erst in seinen beiden großen Annalen-Arbeiten 1895 und 1897 („Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre") ist Cantor endgültig zum Terminus *Menge* übergegangen.

Die nächste wesentliche Frage

Schon bald legte sich Cantor eine Frage vor, die für die Herausbildung der Mengenlehre von wesentlicher Bedeutung werden sollte. Im Unterschied zur schnellen Bewältigung des Abzählbarkeitsproblems erwies sich die neue Frage allerdings als entschieden hartnäckigerer Fall. Über ein Jahr ist vergangen, als Cantor das Problem in einem Brief an Schwarz schildert:

Vor längerer Zeit[69] *kam ich auf die anscheinend überflüssige Frage: Warum läßt sich eine Fläche (z. B. ein Quadrat mit Einschluß der Begrenzung) nicht eindeutig auf eine Linie (z. B. auf eine gerade Strecke mit Einschluß der Endpuncte) beziehen, so daß jedem Puncte des einen Gebildes ein und nur ein P. des anderen entspricht.*

Da bei diesen Fragen auf jede Voraussetzung über die Form der Zuordnung verzichtet wird, (wie etwa daß die Zuordnung eine stetige sei) so hat ihre Beantwortung Schwierigkeiten auf sich; die Bemerkung daß man es dort mit einem zweifachen, hier mit einer einfachen Unendlichkeit von Puncten zu thun hat, daß dort zwei Unabhängige hier nur eine vorkommen, dient bei einiger Aufmerksamkeit zur Lösung so gut wie gar nicht; immerhin muß ich zugeben, daß die Frage für die erste Betrachtung und besonders im Hinblick auf die gewohnten Anschauungen sehr paradox erscheint. Doch nun Adieu; [...] Dein Georg Cantor[70]

Erst gut drei Jahre später, am 20. Juni 1877, schickt Cantor Dedekind seinen ersten Beweis der Existenz einer bijektiven Abbildung zwischen $[0,1]$ und $[0,1] \times [0,1]$. Dieser Beweis ist unvollständig, worauf Dedekind in seiner Antwort vom 22. Juni aufmerksam macht. Cantor schließt die Lücke und reicht am 12. Juli 1877 das Manuskript zur Veröffentlichung im Crelleschen Journal ein. In diesem Text wird außerdem erstmals die Kontinuumhypothese formuliert. Mit einiger Verzögerung, die ihren Grund im Widerstand Kroneckers gehabt haben soll, erscheint die Arbeit 1878. Später einmal hat Cantor erwähnt, daß sich Weierstraß für die Publikation eingesetzt hat.[71]

Verhältnis Weierstraß – Cantor

Es war schon davon die Rede, daß Cantor den Inhalt seiner ersten mengentheoretischen Arbeit Weierstraß persönlich im Dezember 1873 mitgeteilt

[69] Cantor hatte bereits in einem vom 5.1.1874 datierten Brief Dedekind die entsprechende Frage vorgelegt (s. Cavaillès-Noether 1937, S. 20-21).

[70] Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften. Nachlaß Schwarz, Nr. 835, Brief vom 10.2.1875.

[71] A. Fraenkel (1930): Georg Cantor. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 39*, S. 189-266; hier S. 198.

hat. Was läßt sich zur Rezeption der Cantorschen Ideen durch Weierstraß und zu den persönlichen Beziehungen beider Mathematiker sagen?

Wir wissen, daß Weierstraß Cantors Abzählbarkeitsaussage für die algebraischen Zahlen schon bald (1874) in seine Untersuchungen einbezogen hat. Das läßt sich einem Brief von Weierstraß an P. Du Bois-Reymond vom 15. Dezember 1874 entnehmen:

Was sagen Sie zu einer Function, die bei reellen Werthen des Arguments überall stetig ist, kein Maximum oder Minimum besitzt, und trotz dieses regulären Verhaltens so capriziös ist, keinen bestimmten Differentialquotienten zu haben, wenn das Argument eine algebraische Zahl (d.h. Wurzel einer algebraischen [Gleichung] mit rationalen Zahl-Coefficienten) ist, dagegen ganz vernünftig sich aufführt, sobald das Argument einen transcendenten Werth hat? [...] Die in Rede stehende Function ist aber die folgende. Es sei

$$\varphi(x) = x + \frac{x}{2} \sin\left(\frac{1}{2} \lg (x^2)\right), [\ldots] \ \kappa \text{ eine positive Zahl, kleiner als } 1,$$

und $a_1, a_2, a_3, \ldots$ [72]

eine gegebene unendliche Reihe reeller Größen; so hat die Function

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_n \, \kappa^n \varphi(x - a_n)$$

an keiner der Stellen

$$\pm a_1, \pm a_2, \ldots$$

einen bestimmten D[ifferential-]Q[uotienten], obwohl sie gleichzeitig mit x beständig wächst und nirgends unstetig wird. Der Beweis erfordert einige Vorsicht, ist aber leicht zu führen. Nun hat Cantor (B.77 d.J.) gezeigt, daß sich die pos[itiven] algebraischen Zahlen auf eine gewisse Weise so in eine Reihe ordnen lassen, daß sich von einer ersten, zweiten u.s.w. alg[ebraischen] Zahl sprechen läßt. Nimmt man also für die $a_1, a_2, \ldots$ *die Reihe der dergestalt geordneten alg[ebraischen] Zahlen, so hat man eine Function von der angegebenen Beschaffenheit.*[73]

Der Terminus „abzählbar" fehlt hier noch. Cantor verwendet die Formulierungen „ins Unendliche abzählbare Punktmenge" oder „abzählbar unendlich" erstmals 1879 im 1. Teil seiner Aufsatzfolge „Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten".

Weshalb hat Weierstraß solche „kapriziösen" Funktionen überhaupt betrachtet?

Es waren die immer wieder auftretenden Unklarheiten in den Grundbegriffen der Analysis, die ihn veranlaßt haben, nach entsprechenden Beispielen zu suchen.

---

[72] Im Original: $c_1, c_2, c_3, \ldots$.

[73] K. Weierstraß an P. Du Bois-Reymond. 15.12.1874. Institut Mittag-Leffler (Djursholm). Eigene Transkription des Verf. Der Brief ist abgedruckt in: Briefe von Karl Weierstraß an Paul Du Bois-Reymond. In: *Acta mathematica 39 (1923)*, (S. 199-225) S. 204-207. Vgl. auch die nachfolgende Fußnote.

Weierstraß teilt einen Tag später auch Schwarz diese Ergebnisse mit. Cantors Namen habe ich übrigens in den von Weierstraß an Schwarz geschriebenen Briefen – soweit sie überliefert sind – in den Folgejahren bis 1880 nicht mehr gefunden.

Auf Weierstraß geht nach Cantors eigener Angabe die Anregung zurück, das Konzept der abzählbaren Menge zu nutzen, um eine, gegenüber der von H. Hankel gegebenen, wesentlich einfachere Methode der Kondensation von Singularitäten zu erhalten, wie sie 1882 von Cantor in den Mathematischen Annalen publiziert wurde.[74] Das Prinzip der Konstruktion entspricht demjenigen, wie es Weierstraß in dem oben erwähnten Brief an Du Bois-Reymond beschreibt. Das in dem Brief angeführte Beispiel gibt Cantor in dieser Arbeit „wörtlich, abgesehen von unbedeutenden Vereinfachungen, in der Darlegung des grossen Mathematikers"[75] wieder.

Aus dieser Zeit stammt auch ein Beleg, der zeigt, wie wichtig Cantor das Urteil von Weierstraß war. So finden wir in der Korrespondenz mit Mittag-Leffler vom Dezember 1882 den Hinweis darauf, daß Cantor erst Weierstraß' Ansicht über seine Arbeit erfahren möchte, bevor er den Text zum Druck geben will. Mittag-Leffler weist darauf hin, daß es bei Weierstraß ein halbes Jahr oder länger dauern könnte.

Bei jener Arbeit dürfte es sich um den interessanten 5. Teil seiner Aufsatzfolge über die unendlichen linearen Punktmannigfaltigkeiten handeln, in der Cantor u. a. eine allgemeine Einführung in die Ordinalzahltheorie gibt. Daß Cantor ihr eine besondere Bedeutung zugemessen haben muß, geht daraus hervor, daß die Arbeit auch separat unter dem Titel „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre" 1883 in Leipzig erschien. Danach scheint es so gewesen zu sein, daß Weierstraß tatsächlich ein Manuskript von Cantor erhält. Daß es das Manuskript *dieser* Arbeit war, dafür sprechen Angaben in verschiedenen Briefen aus jenen Tagen. Doch – wie vorausgesagt – verstreicht die Zeit und Cantor entschließt sich, ohne Weierstraß' Antwort abzuwarten, den Text an Mittag-Leffler zu senden. Mittag-Leffler begrüßt diesen Entschluß:

Ich finde Sie thun recht daran nicht auf Weierstrass zu warten. Wer auf ihn warten will muss Monate wenn nicht Jahre lang warten.[76]

Schließlich meldet sich Weierstraß, denn am 6. Februar 1883 schreibt Cantor an Mittag-Leffler:

Weierstrass hat mir vor zwei Wochen das Manuscript zurückgeschickt; mittlerweile bin ich vorige Woche in Familienangelegenheiten in Berlin gewesen; und habe Weierstrass bei dieser Gelegenheit zweimal besucht und mich mit ihm über die Arbeit, von welcher ich ihm eine Correctur übergab, unterhalten. Er hat keinerlei Bedenken gegen meine Einführung überendlicher Zahlen geäussert, sie schien ihn

[74] G. Cantor (1882): Über ein neues und allgemeines Kondensationsprinzip der Singularitäten von Funktionen. In: *Mathematische Annalen 19,* S. 588-594. Vgl. dazu auch Cantors Angaben in einem vom 10.1.1882 datierten Brief an Dedekind in: Meschkowski-Nilson 1991 (Brief 17). Danach war er „vor ein paar Tagen" von Weierstraß darauf aufmerksam gemacht worden. Der Brief enthält in geringfügiger Modifikation die oben von Weierstraß angegebene „kapriziöse" Funktion (vgl. die vorangehende Fußnote).

[75] Ebenda, S. 591.

[76] G. Mittag-Leffler an G. Cantor. 2.1.1883. Institut Mittag-Leffler (Djursholm).

vielmehr zu interessiren; namentlich zeigte er aber auch Interesse für den Abschnitt §9 u. §10., besonders für meine Auffassung des Continuums.[77]

Weierstraß hat sich in seiner Korrespondenz, jedenfalls soweit sie überliefert und mir bekannt ist, nur selten über Cantor bzw. dessen Arbeiten geäußert. In den Briefen an seine Schülerin Sofja Kowalewskaja, geschrieben zwischen 1871 und 1890, tritt Cantors Name nur dreimal auf; die Textstellen stammen alle aus dem Jahr 1885. Dabei wird Cantor als Person nur einmal, in der Aufzählung der Gäste bei der Feier des 70. Geburtstages von Weierstraß am 31. Oktober 1885, erwähnt. Wenige Tage vor dem Geburtstag, am 21. Oktober 1885, schreibt Mittag-Leffler an Cantor: „Sie kommen wohl natürlicherweise nach Berlin".[78] Daraus kann entnommen werden, daß er das Verhältnis zwischen Weierstraß und Cantor als hinreichend gut angesehen hat.

Die beiden anderen Erwähnungen Cantors in den Briefen von Weierstraß an seine Schülerin betreffen Mathematisches:

In seinem Brief vom 24. März 1885 beklagt sich Weierstraß über den zunehmenden Mangel an auf gegenseitiger aufrichtiger Anerkennung beruhendem Zusammenwirken mit den Fachkollegen. Er schreibt:

Mein Freund Kronecker, mit dem ich früher in Betreff der wichtigsten Fragen in Übereinstimmung war, und auch Fuchs arbeiten mir entgegen, der eine mit Bewußtsein und Absicht, der andere, theils der Autorität des ersteren sich unterwerfend, theils aus mangelhafter Kenntniß der Bedeutung der Fragen, um die es sich handelt. So kommt es nicht selten vor, daß ich in einer Vorlesung einen Satz aufstelle und zu beweisen vermeine, der in einer anderen Vorlesung als unhaltbar und trügerisch bezeichnet wird. Während ich sage, daß eine sog[enannte] irrationale Zahl eine so reale Existenz habe wie irgend etwas anderes in der Gedankenwelt, ist es bei Kronecker jetzt ein Axiom, daß es nur Gleichungen zwischen ganzen Zahlen gebe. Während ich klar zu machen [suche], warum Jacobis Ansicht, daß es absurd sei, x als Function von u zu betrachten, wenn zwischen beiden Größen die Gleichung

$$u = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\kappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)}}$$

angenommen wird, eine irrige sei – die zu einem und demselben Werthe von u [wohl irrtümlich statt x] gehörigen Werthe von x [wohl irrtümlich statt u] bilden eine abzählbare Menge, von der Cantor, wie ich überzeugt bin, in unanfechtbarer Weise bewiesen hat, daß es nicht nur unendlich viele Werthe giebt, die nicht nur nicht darin enthalten sind, sondern eine Menge von höherer Mächtigkeit bilden – und damit motivire, daß bei einem analytischen Gebilde zu unterscheiden sei zwischen den Stellen, die dem Gebilde angehören, und denen, die als Grenzstellen sich ihm zugesellen – [...].[79]

[77] Der Brief ist abgedruckt in: Meschkowski-Nilson 1991 (Brief 40).

[78] G. Mittag-Leffler an G. Cantor. 21.10.1885. Institut Mittag-Leffler (Djursholm).

[79] Der Brief ist abgedruckt in: *Briefwechsel zwischen Karl Weierstraß und Sofja Kowalewskaja.* Herausgegeben, eingeleitet und kommentiert von R. Bölling. Berlin 1993. Zitat: S. 329.

Die Erregung hat Weierstraß wohl u und x vertauschen lassen, denn es geht wie bei C. G. J. Jacobi (in dessen Abhandlung aus dem Jahre 1834 über vierfach periodische Funktionen zweier Veränderlicher) um die Umkehrfunktion $x = \lambda(u)$ des hyperelliptischen Integrals, deren Perioden im allgemeinen Fall aus den ganzzahligen Kombinationen von vier (unabhängigen) Perioden bestehen und daher eine abzählbare Menge bilden, dessen Komplement (in $\mathbb{C}$) in der Tat nicht abzählbar ist.

Die zweite Erwähnung findet sich in dem nächsten Brief, den Weierstraß am 16. Mai 1885 an seine Schülerin schreibt. Er berichtet über seine Erweiterung der Riemannschen Definition des bestimmten Integrals einer reellen Funktion, wobei er hervorhebt, daß die Funktion an unendlich vielen Stellen des (endlichen) Intervalls gar nicht definiert zu sein braucht und „Unstetigkeitsstellen in abzählbarer oder unabzählbarer Menge vorhanden sein dürfen." Weierstraß schreibt:

Angenommen wird nur, daß in jedem noch so kleinen Theile des Intervalls a...b Stellen vorhanden sind, an denen die Funktion definirt ist sowie auch, daß der Werth der Function eine angebbare Grenze nirgends übersteigt. Dann läßt sich stets eine Definition von $\int_a^b f(x)dx$ *angeben, bei der alle Eigenschaften des Integrals, die aus der Cauchy'schen und Riemann'schen Definition sich ergeben, bestehen bleiben. Man kann dies sehr einfach aus dem von Cantor im 4ten Band der Acta festgestellten Begriff des* <u>*Inhalts*</u> *einer beliebigen Punktmenge folgern.*[80] *Ich bin aber ursprünglich durch andere weitläufigere Betrachtungen darauf geführt worden.*[81]

Weierstraß' Bemühen, den Begriff des bestimmten Integrals zu erweitern, hatte seinen Grund in der Absicht, den Approximationssatz auf unstetige Funktionen auszudehnen. Die von Weierstraß gegebene Definition liefert das obere Darbouxsche Integral.

Wenige Tage nach diesem Brief schreibt Weierstraß am 28. Mai an Schwarz:

Sie [die Riemannsche Definition] muß vielleicht durch eine ganz andere ersetzt werden, bei deren Begründung mir Cantors neuere Untersuchungen (nicht die auf die transfiniten Zahlen bezüglichen) wesentliche Dienste geleistet haben.[82]

Vielleicht war Weierstraß mit dem Erreichten selbst nicht zufrieden, denn publiziert hat er seinen Ansatz nur für stetige Funktionen in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom Juli 1885. Die dort erklärte Absicht, die Modifikationen für gewisse unstetige Funktionen später auszuführen, hat Weierstraß nicht mehr realisiert.

---

[80] Weierstraß bezieht sich auf den 1884 in den Acta mathematica, Bd.4, S. 381-392, unter dem Titel „De la puissance des ensembles parfaits de points" publizierten Auszug aus einem Brief Cantors an Mittag-Leffler. Cantor hatte in dem sechsten und letzten Teil seiner Aufsatzfolge über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten *(Math. Ann. 23 (1884))* mit dem Aufbau einer Theorie des Inhalts (in heutiger Terminologie als „äußerer Inhalt" zu bezeichnen) begonnen. Es ist aber erst das „Lebesguesche Maß", das sich als Inhaltsbegriff durchsetzt.

[81] Der Brief ist abgedruckt in: Bölling 1993. Zitat: S. 338-339.

[82] Archiv der Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften. Nachlaß Schwarz, Nr. 1175, Brief vom 28.5.1885.

Weierstraß übernimmt den von Cantor 1883 eingeführten Terminus der „abgeschlossenen" Menge und verwendet ihn im SS 1886 in seiner Vorlesung „Ausgewählte Kapitel aus der Functionenlehre".[83]

Wir sehen also, daß Weierstraß Begriffsbildungen, die von Cantor geprägt wurden, übernommen hat. Mir ist aber keine Stellungnahme zur Mengenlehre als solche von ihm bekannt. Dies bedeutet zunächst einmal gar nichts weiter, da Weierstraß auch in der von ihm als außerordentlich belastend empfundenen Kontroverse mit Kronecker, entgegen seinen eigenen wiederholt geäußerten Absichtserklärungen, keine öffentliche Stellungnahme abgegeben hat. Die Gründe dafür dürften am ehesten in seinem Charakter zu suchen sein.

Im September 1884 finden wir kritische Töne über Weierstraß in zwei an Mittag-Leffler gerichteten Briefen Cantors. So schreibt Cantor am 9. September 1884:

[...] auch ihm [Weierstraß] passt es nicht, dass Sie sich mir in Freundschaft angeschlossen haben.[84]

Und nur einige Tage später schreibt Cantor an Mittag-Leffler am 17. September 1884:

Mein lieber Freund. [...] Meine in meinem letzten Briefe ausgesprochene Ansicht, dass Weierstrass nicht unschuldig an dem momentanen Misserfolge Ihrer Arbeit in Frankreich ist, werden Sie mir hoffentlich nicht übel nehmen. Ich habe alle Ursache anzunehmen, dass W. mit meinen Untersuchungen nicht sympathisirt; dies gilt daher auch von den Ihrigen, soweit sie auf die meinigen Bezug nehmen. Sie können dies schon daraus entnehmen, dass er sich über Ihren Beweis des Laurentschen Satzes entzückt ausgesprochen hat, nicht aber von Ihrer grossen, viel wichtigeren Abhandlung.[85]

Schoenflies bringt in seinem Beitrag „Die Krisis in Cantor's mathematischem Schaffen" zum Ausdruck, daß Cantor in seinem Groll und seiner Bitterkeit über die ablehnende Haltung vieler Kollegen seinen wissenschaftlichen Ideen gegenüber auch Weierstraß nicht ausnahm.[86] Eine wirkliche Begründung fehlt, von einer authentischen Äußerung von Weierstraß über Cantor ganz zu schweigen. Es heißt lediglich, „man darf glauben, daß ihn [Cantor] hierin sein Empfinden nicht völlig getäuscht hat."[87]

Es wird nicht deutlich, worauf Schoenflies sein Urteil gegründet haben könnte. In seiner Arbeit geht es um die Vorstellung und Auswertung von Briefen, die Cantor an Mittag-Leffler geschrieben hat. Eine Durchsicht der von Schoenflies wiedergegebenen Brieftexte ergibt, daß drei Zitate aus diesen Briefen Cantors

[83] K. Weierstraß: *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung, gehalten in Berlin 1886.* Herausgegeben, kommentiert und mit einem Anhang versehen von R. Siegmund-Schultze (1988). (Teubner-Archiv zur Mathematik; 9.) Leipzig. Hier: Vorlesung am 22.6.1886.

[84] Meschkowski-Nilson 1991, S. 203.

[85] Vgl. ebenda, S. 203-204. Eigene Transkription des Verf. nach dem Original aus dem Institut Mittag-Leffler (Djursholm).

[86] A. Schoenflies (1927): Die Krisis in Cantor's mathematischem Schaffen. In: *Acta mathematica 50,* S. 1-23; hier S. 21-22.

[87] Ebenda, S. 1.

übrigbleiben, in denen sich überhaupt eine Erwähnung von Weierstraß findet. Sie stammen zudem alle aus demselben Zeitraum des Jahres 1884, nämlich vom 9.9.1884, 17.9.1884 und 9.10.1884. Es handelt sich dabei nur um kurze und allgemein gehaltene Angaben. Die betreffenden Stellen aus den beiden September-Briefen sind vorstehend gerade zitiert worden. Man hat bei alledem zu berücksichtigen, daß es im Frühsommer 1884 zum ersten Ausbruch von Cantors manisch-depressiver Erkrankung gekommen war. Es ist auch auffällig, daß sich in der Zeit vom August 1884 bis zum Jahresende Cantors Handschrift ändert, was durchaus mit der gesundheitlichen Krise in Verbindung stehen könnte.[88]

Es ist im übrigen auch die Zeit der neuerlichen rastlosen zermürbenden Bemühungen um das Kontinuumproblem:

In einem vom 26. August 1884 datierten Brief an Mittag-Leffler kündigt Cantor triumphierend die Lösung des Kontinuumproblems an. Doch am 14. November 1884 teilt er Mittag-Leffler mit, daß das Kontinuum nicht die Mächtigkeit der zweiten Zahlklasse, ja überhaupt keine „durch eine Zahl angebbare Mächtigkeit" besitzt.

Doch schon am Tag darauf schreibt Cantor, daß die Gründe gegen den Satz von der „zweiten Mächtigkeit des Linearcontinuums" widerlegt seien.[89]

Was die von Schoenflies ausgesprochene Ansicht betrifft, möchte ich bemerken, daß mir bislang tatsächlich keine Stelle in Weierstraß' Briefen bekannt ist, wo er sich kritisch oder gar abwertend über Cantors mengentheoretische Arbeiten ausgesprochen hätte. Was die Beurteilung durch Weierstraß betrifft, spiegelt ein vom 30. Dezember 1883 datierter Brief an Mittag-Leffler Cantors Unsicherheit wider. Cantor hatte sich um das durch Kummers Emeritierung vakante Berliner Ordinariat beworben und formuliert in dem Brief einerseits, daß er den Eindruck habe, Weierstraß wolle sich um eine „günstige Aeusserung" dem Minister gegenüber drücken, erklärt dann andererseits wenige Zeilen danach:

Vielleicht aber fährt Herr Weierstrass auch jetzt noch fort, meine Arbeiten durch die trüben Brillen der Herren Kronecker, Helmholtz und Kirchhoff zu betrachten und wird sie dann entsprechend dem Minister gegenüber abgefertigt haben.[90]

Gar so schlecht kann es mit Weierstraß' Urteil nicht bestellt gewesen sein, da sich aus jener Zeit belegen läßt, daß Weierstraß von Cantor etwas zum Abdruck in den Mitteilungen der Berliner Akademie zu erhalten wünscht.[91]

Auch in späteren Jahren findet Cantor gelegentlich bittere Töne. So schreibt er am 26. Dezember 1895 an Ch. Hermite:

Weierstrass hat mir nie genützt, wohl aber dadurch geschadet, daß er diejenigen allein poussirte, welche wie Fuchs, Königsberger, Mittag-Leffler und Schwarz sich ihm direct angeschlossen und untergeordnet haben.[92]

---

[88] Vgl. Purkert-Ilgauds 1987, S. 79-81.

[89] Die Briefe sind abgedruckt in: Meschkowski-Nilson 1991 (Briefe Nr. 80, 85, 86).

[90] Ebenda (Brief 60). Nachfolger von Kummer wurde L. Fuchs.

[91] Eigene Angabe („vor drei Jahren") von Cantor in seinem vom 16. Mai 1887 datierten Brief an Weierstraß. Der Brief ist abgedruckt in: Meschkowski-Nilson 1991 (Brief 113).

[92] Der Brief ist abgedruckt in: Purkert-Ilgauds 1987, Dokumenten-Anhang Nr. 19.

Und nur wenig später heißt es in einem vom 22. Januar 1896 datierten Brief an H. Poincaré:

Schon meine früheren, seit 1870 publicirten Arbeiten hatten sich nicht des Beifalls der Berliner Machthaber Weierstraß, Kummer, Borchardt, Kronecker zu erfreuen gehabt.[93]

In anderer Weise äußert sich Cantor allerdings in seinem vom 20. Juni 1908 datierten Brief an Grace Chisholm-Young als er sich seiner Freundschaft mit Hermite erinnert,

der (ebenso wie auch Weierstrass) von seinen früheren (von Kronecker systematisch angestachelten) Vorurtheilen gegen mich zurückgekommen war.[94]

Das wissenschaftliche Werk von Weierstraß hat Cantor zu jeder Zeit anerkannt. Er nennt Weierstraß den „genialen grossen Functionentheoretiker"[95], der sich „unsterbliche Verdienste"[96] in der Funktionentheorie erworben habe und den er „sehr hoch stelle und verehre"[97]. Darüberhinaus aber finden sich Äußerungen, aus denen hervorgeht, daß Cantor auch in Bezug auf seine eigenen mengentheoretischen Arbeiten das Urteil von Weierstraß gesucht und geschätzt hat. Ein Beispiel dafür ist oben schon erwähnt worden.[98]

Was das persönliche Verhältnis zu Weierstraß betrifft, äußert Cantor zwar 1884:

[...] er [Weierstraß] hat mich eines intimeren Verhältnisses nicht gewürdigt, als ich noch jünger war und jetzt [...] wäre es zu spät dies nachzuholen [...],[99]

doch muß dem hinzugefügt werden, daß Weierstraß in der Kontroverse mit Kronecker Cantor ins Vertrauen gezogen hat.[100]

Jedenfalls hat das persönliche Verhältnis Cantors zu Weierstraß auch in jenem kritischen Jahr 1884 keine wirkliche Beeinträchtigung erfahren. Das wird sehr deutlich bei den Vorbereitungen für den 70. Geburtstag von Weierstraß, die im Herbst eben desselben Jahres anlaufen. Mittag-Leffler hatte vorgeschlagen, von Weierstraß eine Büste anfertigen zu lassen. Cantor hört davon und sichert Mittag-Leffler seine Unterstützung zu. Zur Finanzierung des Projektes versendet L. Fuchs, Kummers Nachfolger an der Berliner Universität, als Vorsitzender eines inzwischen gebildeten Festkomitees im Dezember 1884 einen Spendenaufruf. Auch Sofja Kowalewskaja und Cantor werden um ihre Unterschrift gebeten. Cantor jedoch unterschreibt nicht. Er kritisiert die Form des Aufrufes. Am 30. Dezember 1884 schreibt er an Kowalewskaja:

---

[93] Der Brief ist abgedruckt in: Meschkowski-Nilson 1991 (Brief 151).
[94] Ebenda (Brief 180).
[95] Ebenda (Brief 65; Brief Cantors an Mittag-Leffler vom 26.1.1884).
[96] Ebenda (Brief 92; Brief Cantors an Fuchs vom 30.12.1884).
[97] Ebenda (Brief 44; Brief Cantors an Mittag-Leffler vom 8.4.1883).
[98] Siehe Cantors Briefe an Mittag-Leffler vom 10.11.1882 und 5.10.1883 (ebenda (Briefe 35, 51)).
[99] Ebenda (Brief 84; Brief Cantors an Mittag-Leffler vom 20.10.1884).
[100] Nach Cantors eigenen Angaben in seinen Briefen an Mittag-Leffler vom 26.9.1885 und 30.5.1888; ebenda (Briefe 95 und 124).

Dieser Aufruf ist in meinen Augen so kalt, farblos, wässerig, nichtssagend und misserfolgversprechend abgefasst, dass ich nicht begreifen kann, wie man damit ein solches Ziel glaubt erreichen zu können. Es müsste also m. E. darauf hingewirkt werden, dass ein Aufruf erlassen werde, in welchem die grossen Verdienste des Herrn Weierstrass in der würdigsten, vollständigsten Weise Ausdruck geliehen wird."[101]

Kowalewskaja stimmt im Grunde zu, äußert aber ihre Bedenken gegen die Art, *wie* Cantor Fuchs geantwortet hatte (sie findet den Brief „äußerst ungeschickt und verletzend sowohl für Fuchs als auch für Kronecker").[102]

Sie möchte alles vermeiden, was auch nur den geringsten Anlaß zu Mißverständnissen oder Feindseligkeiten unter den deutschen Mathematikern bieten könnte. Ganz offen hatte Cantor sich Mittag-Leffler gegenüber dahingehend ausgesprochen, daß er es sogar „sehr erfreulich" fände, wenn die Büste ohne Beteiligung der „Berliner Herren Fuchs, Königsberger und [...] des Herrn Chevalier de Méré"[103] zustande käme.[104]

Mit Bitterkeit schreibt er wenig später am 2. Januar 1885 an Mittag-Leffler:

Die Friedensaussichten [„im mathematischen Europa" – wie Cantor sich kurz davor ausdrückt] sind aber noch um so grösser, als ich, wie Sie wissen, degoutirt von dem persönlichen Getriebe der heutigen Mathematik, nur noch mit einem Fusse dieses widerliche Territorium berühre und bald ganz demselben entfremdet werde; dann mögen nach Herzenslust die Herren Geometer von Frankreich, Deutschland, England und Italien um das goldene Kalb unseres Herrn von Méré herumtanzen, ich mache den Zauber seit Jahren schon nicht mit."[105]

Was den Aufruf betrifft, teilt Mittag-Leffler Cantors Ansicht nicht. „Weierstrass sei gross genug, um unsere Empfehlung nicht zu brauchen" schreibt er an Fuchs[106] und sinngemäß auch an Cantor.[107] Schließlich muß Cantor seinen Widerstand aufgegeben haben, denn er unterschreibt den unveränderten Aufruf, wie aus einem Brief von Fuchs an Mittag-Leffler hervorgeht.[108] Er beteiligt sich mit dem ansehnlichen Betrag von 100 Mark an der Geldeinsammlung, veranlaßte, daß die Sitzungen bei dem Bildhauer zustande kamen und war am 31. Oktober 1885 in Berlin, um an der Geburtstagsfeier teilzunehmen. An diesem Tag wird Weierstraß ein Album

---

[101] Bölling 1994, S. 18.

[102] S. Kowalewskaja an G. Mittag-Leffler. 31.12.1884. Institut Mittag-Leffler (Djursholm). (Zitat: Übersetzung des Verf.; russische Übersetzung des Briefes in: P. Ja. Kočina, E. P. Ožigova (Hrsg.) (1984): *Perepiska S. V. Kovalevskoj i G. Mittag-Lefflera.* (Naučnoe nasledstvo; 7.) Moskva; Brief 58.

[103] Gemeint ist Kronecker, den Cantor in seiner Korrespondenz desöfteren mit diesem Namen anführt (hier wohl zum ersten Mal).

[104] Der Brief (datiert vom 17. Dezember 1884) ist abgedruckt in: Meschkowski-Nilson 1991 (Brief 90).

[105] Ein Auszug aus diesem Brief (mit dem Zitat) ist abgedruckt in: Schoenflies 1927, S. 21-22.

[106] Ein Auszug (mit dem Zitat) aus diesem vom 5.1.1885 datierten Brief ist abgedruckt in: Bölling 1994, S. IX.

[107] G. Mittag-Leffler an G. Cantor. 5.1.1885 (Entwurf). Institut Mittag-Leffler (Djursholm).

[108] Der Brief (datiert vom 3.2.[1885]) ist in Auszügen abgedruckt in: Bölling 1994, S. IX.

mit den Fotos seiner Freunde und Schüler übergeben, das auch ein Porträt Cantors enthält.[109] Es ist das gleiche Foto, das kurz zuvor Mittag-Leffler von ihm mit der Widmung „Seinem lieben Freunde G. Mittag-Leffler. d. 25. Dec. 1884." erhalten hatte.[110]

Meine Suche nach Briefen von Cantor im Nachlaß von Weierstraß im Institut Mittag-Leffler ist leider erfolglos geblieben. Nach Cantors eigener Aussage hat er mit Weierstraß zwischen 1876 und 1891 korrespondiert. Es ist durchaus möglich, daß Weierstraß diese Briefe vernichtet hat, so wie er alle Briefe seiner Schülerin Sofja Kowalewskaja kurz nach ihrem Tod verbrannte.

Es sind mir aus den schon erwähnten Briefbüchern Cantors lediglich zwei Entwürfe von Briefen an Weierstraß bekannt. Einer aus dem Jahre 1895, der im wesentlichen die Ankündigung seines Besuches enthält, der andere aus dem Jahre 1887, ein nicht uninteressantes Schriftstück, vom dem unten noch die Rede sein soll.

Was die Briefe *von* Weierstraß betrifft, so sind mir aus dem Nachlaß Cantors drei Originale bekannt, eines vom Dezember 1881, die beiden anderen vom Juli 1882.[111] Vereinzelt finden sich außerdem Zitate aus Weierstraß-Briefen in Cantors Briefen an Dritte.

Die erwähnten Originale vom Juli 1882 betreffen die Weierstraßsche Bearbeitung des Lindemannschen Beweises für die Transzendenz von π ohne jedoch nähere Einzelheiten zu nennen. Zum Hintergrund: Cantor war von F. Klein um ein Gutachten der Lindemannschen Arbeit gebeten worden. Cantor findet Lücken in dem Manuskript, ist aber überzeugt, daß diese sich werden ausfüllen lassen. Das Resultat bezeichnet er im Juni 1882 Klein gegenüber als eines der „schönsten und interessantesten der arithmetischen Analysis".[112] In dieser Angelegenheit muß Cantor sich wohl mit Weierstraß in Verbindung gesetzt haben, denn dieser zeigt sich „im höchsten Grade interessirt"[113] und bittet Cantor, F. Lindemann zu einer Mitteilung für die Berichte der Akademie zu bewegen. Tatsächlich gelangt eine solche noch im Juni in der Akademie zum Vortrag und wird sogleich gedruckt. Weierstraß hat selber über die Lindemannsche Arbeit nachgedacht und schickt am 30. Juli 1882 Cantor ein Manuskript zu, das – so Cantor wörtlich zu Klein – „einen meisterhaften durch Kürze, Einfachheit und vollkommene Strenge ausgezeichneten Beweis" enthält, den Weierstraß jedoch zunächst nicht publizieren möchte, um Lindemann Zeit zu lassen, die Lücken selbst auszufüllen.[114] Cantor ist der Ansicht, daß eine solche Publikation keinen Nachteil für Lindemann darstelle und möchte, daß der Aufsatz recht bald in den Mathematischen Annalen erscheine. Es dauert dann aber doch bis zum Dezember 1885, bis der Weierstraßsche Artikel in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie erscheint.

---

[109] Das Fotoalbum ist ediert: Bölling 1994 (Fußnote 25).

[110] Das Porträt hat I. Grattan-Guinness publiziert in: *Acta mathematica 124 (1970)*, S. 65.

[111] Vgl. Fußnote 129.

[112] So in einem Brief vom 10. Juni 1882 an F. Klein; der Brief ist wiedergegeben in: Meschkowski-Nilson 1991 (Brief 26).

[113] Von G. Cantor in einem Brief vom 13. Juni 1882 an F. Klein als wörtliches Zitat von Weierstraß wiedergegeben; ebenda (Brief 27).

[114] Das ist einem Brief von G. Cantor an F. Klein vom 1. Oktober 1882 zu entnehmen; ebenda (Brief 31).

Den letzten an ihn gerichteten Brief von Weierstraß vom 26. September 1891 hat Cantor selbst publiziert;[115] er hatte ihn gegen Ende der Zusammenkunft der Deutschen Naturforscherversammlung im September 1891 in Halle erhalten, auf welcher die DMV formell konstituiert wurde. Weierstraß geht in diesem Brief auf die anläßlich des 60. Geburtstages von König Oscar II. von Schweden und Norwegen veranstaltete Preisfrage und den (wohl indirekt erhobenen) Vorwurf ein, er hätte mit der von ihm formulierten Aufgabe Unmögliches verlangt.

Nun zu dem schon erwähnten erhalten gebliebenen Entwurf eines Briefes von Cantor an Weierstraß aus dem Jahre 1887.

Hochzuverehrender Herr Professor.

Gestatten Sie mir das, was ich bei meinem jüngsten kurzen Berliner Aufenthalt Ihnen flüchtig und andeutungsweise über das sogenannte „Archimedische Axiom" sagte, deutlicher auseinanderzusetzen.

Ich beweise den Satz:

„Von Null verschiedene lineare Zahlgrössen ζ [...] welche kleiner wären, als jede noch so kleine endliche Zahlgrösse, giebt es nicht; d.h. sie widersprechen dem Begriff der linearen Zahlgrösse.[116]

Aus dem Brief geht hervor, daß Cantor seine Behauptung, es könne keine aktual unendlich kleinen Zahlen geben, für so wichtig hält, daß er Weierstraß anbietet, einen Beitrag hierüber für die Mitteilungen der Berliner Akademie anfertigen zu wollen. Im Dezember 1884 hatte er noch an K. Laßwitz geschrieben, daß nicht auszuschließen sei, „dass in einem späteren Zustand der Analysis Mittel gefunden werden können, verschiedene Grössen zu definiren, die den Namen: unendlichkleine Grössen verdienen, weil sie kleiner wären, als jede der bisher gebrauchten Grössen;".[117]

Seltsamerweise gerät Cantor mit seiner Argumentation gegen die Existenz unendlich kleiner Zahlen unerwartet quasi auf die Seite seiner Kritiker des Transfiniten. Es hatte damals Versuche gegeben, allein aus dem Verzicht auf das Archimedische Axiom schon die Existenz unendlich kleiner Zahlen begründen zu wollen. Diese sind zu Recht von Cantor kritisiert worden. Er spricht vom „infinitären Cholera-Bazillus der Mathematik".[118] Wir wissen heute, daß Cantor in dieser Frage irrte. Die historische Entwicklung führte zur Nichtstandard-Analysis, in der infinitesimale Zahlen eingeführt werden. Was Weierstraß betrifft, so wissen wir leider nicht, welchen Standpunkt er in dieser Frage eingenommen hat. Jedenfalls ist es nie zu einer Publikation in den Schriften der Berliner Akademie gekommen.

---

[115] Unter dem Titel: „Brief von Carl Weierstraß über das Dreikörperproblem". In: *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo 19 (1905)*, S. 305-308.

[116] Der in Fußnote 91 erwähnte Brief.

[117] Der vom 27. Dezember 1884 datierte Brief Cantors an K. Laßwitz ist abgedruckt in: W. Eccarius (1985): Georg Cantor und Kurd Laßwitz: Briefe zur Philosophie des Unendlichen. In: *NTM-Schriftenreihe 22 (1)*, S. 7-28 (Zitat: S. 22).

[118] In einem Brief an G. Vivanti vom 13. Dezember 1893 (abgedruckt in: H. Meschkowski: Aus den Briefbüchern Georg Cantors. In: *Archive for History of Exact Sciences 2 (1962/66)*, S. 503-519 (Zitat: S. 505)).

Persönliche Begegnungen zwischen Weierstraß und Cantor hat es immer wieder gegeben. Ein günstiger Begleitumstand für die Pflege des Kontaktes zu seinem alten Lehrer war, daß Cantors Mutter in Berlin lebte. Cantor gehörte (wie auch G. Hettner, A. Hurwitz, Kowalewskaja, Mittag-Leffler, Schwarz und V. Volterra) zu den Teilnehmern des Treffens mit Weierstraß im Harz im Sommer 1888. Es ging darum, die eingegangenen Bewerbungsschriften für den Preis des Königs Oscar II. von Schweden und Norwegen zu prüfen und zu beurteilen, eine Arbeit, die Weierstraß, der der Jury angehörte, allein nicht bewältigen konnte.[119]

Im Rahmen dieses Vortrages muß ich es mir leider versagen, näher auf die Beziehung von Cantor zu anderen Mathematikern einzugehen. Es soll hier wenigstens Mittag-Leffler genannt werden, zu dem Cantor in den 80er Jahren in freundschaftlicher Beziehung stand. Für den vorliegenden Text sind zahlreiche der an Mittag-Leffler gerichteten Briefe Cantors verwendet worden. Beide lernten sich auch persönlich kennen; man tauschte Fotos aus[120] und nahm gegenseitig an den familiären Sorgen und Nöten Anteil. Mittag-Leffler war einer der wenigen, die zur damaligen Zeit von Beginn an Verständnis für Cantors Ideen gezeigt haben. Er hat als einer der ersten Resultate von Cantor in seinen eigenen Arbeiten zur Funktionentheorie verwendet.

Cantors Lehrtätigkeit

Cantors akademische Lehrtätigkeit erstreckt sich über einen Zeitraum von 44 Jahren (von 1869 bis 1913). Die Vielfalt seiner Vorlesungsthemen ist beeindruckend: u. a. Zahlentheorie, Abelsche Gleichungen, quadratische Formen, Theorie der algebraischen Zahlen, elliptische Funktionen, Fourierreihen, Wahrscheinlichkeitsrechnung, analytische Mechanik, Hydrodynamik, Potentialtheorie, Variationsrechnung, Differentialgeometrie, Methodik des Mathematikunterrichts. Besonders fällt auf, daß Cantor offenbar nie eine Vorlesung über Mengenlehre gehalten zu haben scheint. Vielleicht bildet die für das SS 1885 angekündigte Vorlesung „Zahlentheorie als Einleitung in die Theorie der Ordnungstypen" eine Ausnahme.[121]

Cantors Vorlesungen scheinen den Hörern einiges abverlangt zu haben. Denn in einem Antrag der Hallenser Universität aus dem Jahre 1889 findet sich die Bemerkung, daß „die Vorlesungen des Professor Cantor für Anfänger wenig geeignet sind".[122]

Im kritischen Jahr 1884 äußert sich Cantor am 20. Oktober in einem Brief an Mittag-Leffler über seine Lehrtätigkeit:

Vermuthlich werde ich in einigen Semestern die mathematischen Vorlesungen hier ganz aufgeben, weil mir der Unterricht in den für das Lehrfach nothwendigen Vorlesungen, wie Differential und Integralrechnung, anal. Geomtrie und Mechanik etc

[119] Siehe dazu Bölling 1993, Brief 151 ff.

[120] Vgl. das in der Fußnote 110 erwähnte Porträt (mit der oben wiedergegebenen Widmung).

[121] Cantors eigene Angabe in einem vom 21. Februar 1885 datierten Brief an Mittag-Leffler. Der Brief ist abgedruckt in: Meschkowski-Nilson 1991 (Brief 93).

[122] Zitiert nach Purkert-Ilgauds 1987, S. 103.

auf die Dauer nicht mehr zusagt; ich werde statt dessen philosophische Vorlesungen halten, was mir bei meinen Interessen nicht schwer fallen soll und worin ich mit grösserem Nutzen für die Studenten glaube wirksam sein zu können; die hier erforderlichen mathematischen Vorlesungen können andere ebenso gut übernehmen als ich.[123]

Cantor geht an die Realisierung dieser Absicht, doch das Leben hat seine eigenen Gesetze, wie einem Brief von Kowalewskaja an Mittag-Leffler vom 21. Mai 1885 zu entnehmen ist:

Eneström hat auch Cantor aufgesucht. Derselbe hat im vorigen Semester angefangen, Vorlesungen über Leibniz Philosophie zu halten. Zu Anfang hatte er 25 Zuhörer, aber allmählich schrumpfte die Zuhörerzahl auf 4, danach auf 3, dann auf 2 und schließlich auf einen einzigen. Cantor hielt trotzdem durch mit seinen Vorlesungen. Aber oh weh! Eines schönen Tages kam der letzte der Mohikaner, sich etwas genierend, dankte dem Professor sehr, erklärte aber, daß er so viele andere Beschäftigungen habe und es nicht mehr schaffte, den Vorlesungen des Professors zu folgen. Da endlich gab Cantor, zur unaussprechlichen Freude seiner Gattin, das feierliche Versprechen, nie wieder Vorlesungen über Philosophie zu halten.[124]

Soviel zur Wissensvermittlung. Was die Wissensaneignung betrifft, hat A. Fraenkel einmal über Cantor geäußert: „es lag ihm nicht, unmittelbar vorgetragene fremde Ideen sogleich aufzufassen".[125]

Welche bedeutenden Schüler hat Cantor gehabt?

In den vielen Jahren seiner Lehrtätigkeit in Halle waren die Hörer der Cantorschen Vorlesungen fast ausschließlich Lehramtskandidaten. F. Bernstein, der schon als Gymnasiast das Seminar bei Cantor besuchte, ist wohl sein einziger Schüler von Rang. Es ist möglich, daß für die spätere Hinwendung von F. Hausdorff zur Mengenlehre der Kontakt zu Cantor eine Rolle gespielt hat.[126]

Späte Anerkennung

Es hat lange gebraucht, ehe Mißtrauen und Unverständnis gegenüber Cantors mengentheoretischen Arbeiten allmählich verschwanden. Cantor hat mit dieser isolierten Stellung gerade in den produktivsten Phasen leben müssen. Dazu hat sicherlich auch die provinzielle Abgeschiedenheit der Hallenser Wirkungsstätte beigetragen. Unter den Mathematikern war sein wichtigster Gesprächspartner in den 70er Jahren Dedekind und in den 80er Jahren Mittag-Leffler. Auf Mittag-Lefflers Initiative erscheinen in den von ihm herausgegebenen *Acta mathematica* bereits im

[123] Der Brief ist abgedruckt in: Meschkowski-Nilson 1991 (Brief 84).

[124] Übersetzung des Verf. nach dem schwedischen Originaltext (der Brief befindet sich im Institut Mittag-Leffler (Djursholm)). Vgl. Meschkowski-Nilson 1991, S. 218.

[125] Fraenkel 1930, S. 218.

[126] Purkert-Ilgauds 1987, S. 105.

Band 2 von 1883 auf über 100 Druckseiten französische Übersetzungen früherer Arbeiten Cantors, was nicht unwesentlich zur weiteren Verbreitung seiner Ergebnisse beigetragen haben dürfte. Ab 1883 erscheinen Arbeiten von I. Bendixson und E. Phragmén über Punktmengen. Mittag-Leffler und Poincaré gehören ab 1883/84 zu den ersten, die in ihren funktionentheoretischen Arbeiten Cantors Resultate verwenden. In dieser Zeit setzt ganz allmählich die Anerkennung der Cantorschen Ideen ein. Ab 1892 erscheinen die ersten Lehrbücher der Analysis, in denen mengentheoretische Begriffe auftreten. In Deutschland sind, wie Fraenkel bemerkt, „Hilbert, Hurwitz, Minkowski wohl die ersten [...], die die Originalität C.s und die Bedeutung seiner Mengenlehre erkannten und zur Geltung zu bringen suchten ‚zu einer Zeit, als in damals maßgebenden mathematischen Kreisen der Name Cantor geradezu verpönt war und man in C.s transfiniten Zahlen lediglich schädliche Hirngespinste erblickte'."[127]

Eine öffentliche Würdigung und Anerkennung erfuhren Cantors Arbeiten in dem Hauptvortrag von Hurwitz auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Zürich 1897. Und Hilbert stellte in seinem berühmten Vortrag auf dem internationalen Mathematikerkongreß 1900 in Paris das Kontinuumproblem an die Spitze seiner 23 Probleme (und wies auch auf den ausstehenden Beweis des Wohlordnungssatzes hin). Nach der Jahrhundertwende erschienen die ersten Monographien zur Mengenlehre. Unruhe und Unsicherheit traten noch einmal zu Beginn unseres Jahrhunderts im Zusammenhang mit der Entdeckung der mengentheoretischen Antinomien auf. Und es fällt auch auf, daß die Mengenlehre in Kleins „Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert" noch keine Rolle spielt.[128] Wie lange und stark trotz aller schon vorhandenen Anerkennung bittere Empfindungen in Cantor lebendig waren, wird deutlich aus einer noch 1908 anzutreffenden Formulierung: Cantor spricht von „den Deutschen, die mich nicht kennen, obwohl ich seit 52 Jahren unter ihnen lebe"[129].

Cantor über sich selbst

Eine bemerkenswerte Selbsteinschätzung gibt Cantor in einem Brief an J. Langbehn:

Ihre Mißverständniße beruhen der Hauptsache nach auf einem Fehler meinerseits, daß wenn ich etwas nicht verstehe und den Grund nicht sehe, ich oft eine sarkastische Bemerkung oder einen guten oder selbst schlechten Witz nicht unterdrücke.

[127] Fraenkel 1930, S. 213.

[128] Beiläufig wird Cantor als „Schöpfer der Mengenlehre" bezeichnet und die Theorie der transfiniten Ordinalzahlen einmal namentlich erwähnt. Man muß dabei sicherlich berücksichtigen, daß Klein selbst davon spricht, in seinen Vorlesungen (gehalten zwischen 1914 und 1919) „nur ausgewählte Skizzen aneinanderfügen" zu wollen.

[129] Brief Cantors an G. Chisholm-Young vom 20.6.1908; s. Fußnote 94. Es sei in diesem Zusammenhang hinzugefügt, daß Cantor 1905 gegenüber Ph. Jourdain die Absicht äußerte, die Briefe, die Weierstraß ihm geschrieben hatte, dem Trinity College (Cambridge) „zu freiem Gebrauch zu schenken" (I. Grattan-Guinness (1971): The Correspondence between Georg Cantor and Philip Jourdain. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 73*, S. 111-130; hier S. 125).

Dies geschieht bei mir aber nicht in der Absicht den andern zu verletzen, sondern hängt mit meiner Natürlichkeit und vielleicht manchmal zu weit gehenden Offenheit zusammen, einen lustigen oder sonstigen Gedanken, den ich gerade habe meinen Freunden gegenüber gerade herauszusagen. Ich habe überhaupt große Fehler und werde Ihnen immer dankbar sein, wenn Sie mich derselben halber schelten wollten. Ich schreibe an meine Freunde nie berechnet, sondern wie es mein Gefühl mir eingiebt. Ich bin überhaupt mehr Gefühlsmensch und Sanguiniker als Verstandesmensch;[130]

Schlußwort

Wir haben uns anläßlich des 150. Geburtstages des Begründers der Mengenlehre hier versammelt. Von Cantors Einstellung zu einem Jubiläum dieser Art erfahren wir etwas aus einem Brief von ihm an Schwarz vom 20. April 1877:

Lieber Schwarz!

Für die freundliche Einladung, welche Du als Mitglied der Göttinger Societät zum Gauss-jubiläum an mich gerichtet, sage ich Dir meinen besten Dank und hoffe, Du wirst es mir nicht übel deuten, daß ich dieselbe nicht annehme.-

Ich bin der Ansicht, daß von auswärtigen Mathematikern nur diejenigen an dieser officiellen Feier theilzunehmen den Beruf haben, welche wegen ihrer Verdienste eine bevorzugte Stellung in der Wissenschaft einnehmen und ihrerseits durch ihr Erscheinen zum Glanz des Festes beitragen können.

Wenn am 30ten April ausgezeichnete Gelehrte von Nah und fern zu Ehren des größten Meisters in Göttingen sich versammeln werden, will ich in stiller Feier einen Abschnitt der diquisitiones arithmeticae oder der theoria motus vornehmen und dankbar ihres Schöpfers dabei eingedenk sein.-

Mit bestem Gruß Dein G. Cantor.[131]

Gegen die 1. Bedingung ist schon gesündigt worden, was mein Auftritt Ihnen beweist; mit der 2. steht es nicht ganz so schlecht: haben wir doch wenigstens begonnen, den einen oder anderen Aspekt im Leben und Werk Cantors zu erwähnen und dürfen gewiß sein, auf diesem Kolloquium noch manches weitere darüber zu hören. Wir können uns aber damit trösten, daß auch Cantor seiner Absicht nicht treu geblieben ist: die stille Feier fand nicht statt, zumindestens nicht am 30. April 1877, da er sich doch noch hat überreden lassen und nach Göttingen gereist ist.

Reinhard Bölling
Universität Potsdam
Institut für Mathematik
Postfach 60 15 53
D-14415 Potsdam

(*Eingegangen 24. 6. 1996*)

[130] Zitiert nach dem in Meschkowski-Nilson 1991, S. 342-343, wiedergegebenen Auszug aus dem Brief Cantors an J. Langbehn vom 11. September 1891. Cantor hatte ein Buch Langbehns über Rembrandt mit Randbemerkungen versehen, die zum Anlaß für den Abbruch des Briefwechsels zwischen C. und L. wurden.

[131] Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften. Nachlaß Schwarz, Nr. 835, Brief vom 20.4.1877.

Jber. d. Dt. Math.-Verein. © 1997 B. G. Teubner Stuttgart
99 (1997) 83–89
Mathematics Subject Classification: 11 F 11

Bruno Schoeneberg 1906–1995

R. Berndt, Hamburg

Am 25. Juni 1995 starb im Alter von 88 Jahren Bruno Schoeneberg, Professor an der Universität Hamburg. Er ist eines der – heutzutage raren – Beispiele dafür, daß es gelingen kann, wesentliche Beiträge zur Förderung seiner Wissenschaft, in diesem Falle der Zahlentheorie, einzubringen, ohne durchgängig im Bereich der Universität oder eines Forschungsinstituts angestellt zu sein:

Am 8.12.1906 in Altona geboren, studierte Schoeneberg von 1925–30 Mathematik, Physik und Astronomie in Hamburg und Göttingen. Er legte sein Staatsexamen ab und wurde 1931 auf Antrag von Erich Hecke mit einer Arbeit zum Thema „Berechnung irreduzibler Darstellungen endlicher Gruppen" in Hamburg promoviert. Während und nach seiner Studienzeit – unter anderem mit Petersson und Zorn – erlebte er sehr bewußt die Blütezeit des Mathematischen Seminars der Universität Hamburg, an dem, im Zeichen des Triumvirats Artin, Blaschke und Hecke, fast alle

bedeutenden Mathematiker ihrer Zeit als Gäste und Vortragende vorbeikamen. Es entstanden damals und auch später noch Bekanntschaften und Beziehungen mannigfacher Art, und zwar mit seinen Lehrern Artin und Hecke sowie auch u.a. mit Behnke, Kähler, Maak, Maaß und Witt, die lebenslang hielten und prägend wirkten.

1937 heiratete Schoeneberg Gertrud Moldt, die auch Mathematik studiert hatte. Aus der Ehe gingen zwei Kinder hervor, Christa und Thomas. Mit Unterbrechung für den Militärdienst in den Jahren 1936 und 1937 sowie 1939–1945 (bei der Marine) war Schoeneberg von 1933 bis 1951 im regulären Schuldienst tätig. Einer seiner Schüler war Jürgen Ehlers, jetzt im Direktorium des MPI für Gravitationsphysik in Potsdam. 1950, also erst im Alter von 43 Jahren, habilitierte sich Bruno Schoeneberg mit dem Thema „*Beiträge zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen*". Er nahm daraufhin am Mathematischen Seminar seine Lehrtätigkeit auf, wobei ihm ab 1951 zunächst acht Stunden (und später noch weitere) seines Schuldienstes erlassen wurden. 1957 wurde er zum außerplanmäßigen Professor ernannt, 1966 zum Wissenschaftlichen Rat und Professor und schließlich 1970 zum Universitätsprofessor. Seit 1966 war er hauptamtlich an der Universität, wo er bis 1975 lehrte. Unterbrochen wurde diese Tätigkeit durch Gastaufenthalte an der Universität Karlsruhe im akademischen Jahr 1969/70 und in Taipeh auf Taiwan im Winter 1971. In die Zeit dieser Gastaufenthalte fiel auch die Hauptarbeit an seinem Buch „*Elliptic Modular Functions*" [21], das 1974 erschien und dank seiner ausführlichen und präzisen Beweise alsbald eine Standardreferenz für einen Einstieg in das Gebiet der Modulfunktionen wurde. Zusammen mit 17 einschlägigen Publikationen und der (unter Mitwirkung von Deuring, Maak und Siegel) überaus gewissenhaft gestalteten Herausgabe der gesammelten Werke Erich Heckes (1959 in erster, 1970 in zweiter und 1983 in dritter Auflage) erwies dies Schoeneberg als einen der sachkundigsten Kenner und Förderer der Modulfunktionen und ihres Umfelds. Ein Zeichen für die Anerkennung dieser Arbeit ist im Jahre 1970 seine Aufnahme als korrespondierendes Mitglied in die Akademie der Wissenschaft in Göttingen.

Als zentralen Begriff in Schoenebergs wissenschaftlichem Werk sehe ich den der elliptischen Modulform, bei der sich die Operation der Gruppe $SL_2(\mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene

$$\mathfrak{H} = \{\tau = x + iy \in \mathbb{C},\ y = \operatorname{Im} \tau > 0\}$$

durch gebrochen lineare Transformationen

$$\tau \longmapsto M(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{für} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sowie auf Funktionen f auf $\mathfrak{H}$ durch

$$f \longmapsto f\Big|_k[M] \quad \text{mit} \quad f\Big|_k[M](\tau) := f\Big(M(\tau)\Big)(c\tau + d)^{-k}$$

zu folgender Definition materialisiert: f heißt elliptische Modulform der Stufe N vom Gewicht k, wenn f auf $\mathfrak{H}$ holomorph ist (dies kann auch abgeschwächt werden), bezüglich der Hauptkongruenzgruppe N-ter Stufe

$$\Gamma(N) = \{M \in SL_2(\mathbb{Z}),\ M \equiv 1 \bmod N\}$$

die Invarianzbedingung

$$f\Big|_k[M] = f \quad \text{für alle} \quad M \in \Gamma(N)$$

erfüllt und „in allen Spitzen holomorph" ist, d.h. für jedes $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ eine Fourierentwicklung

$$f\Big|_k[M](\tau) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} c^M(n)\, q^{n/N},\ c^M(n) \in \mathbb{C},\ q = e(\tau) = e^{2\pi i \tau}$$

hat. $\mathfrak{M}_k(N)$ bezeichne den Vektorraum dieser Modulformen f und $\mathcal{S}_k(N)$ den der Spitzenformen f, bei denen noch zusätzlich $c^M(0) = 0$ gefordert wird.

Diese Funktionen gewinnen ihre Bedeutung durch mannigfache Bezüge zur

– algebraischen Geometrie: der Bahnenraum $\mathfrak{X} = \Gamma \setminus \mathfrak{H}$ bei der Operation von Γ auf $\mathfrak{H}$ ist eine algebraische Kurve und kann in naheliegender Weise durch Hinzunahme von „Spitzen" zu $\mathfrak{X}^*$ kompaktifiziert werden. Und mit Hilfe von Basen können für genügend reichhaltige $\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ Einbettungen von $\mathfrak{X}^*$ in einen projektiven Raum gewonnen werden.
– Funktionentheorie: $\mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{X}^*$ können als Riemannsche Flächen ausgedeutet werden. Der Körper der meromorphen Funktionen auf $\mathfrak{X}^*$ ist ein Körper vom Transzendenzgrad 1 und damit durch zwei Funktionen erzeugbar, die aus Modulformen aufgebaut werden können (s. hierzu [6]).
– algebraischen Zahlentheorie: Gewisse in den Fixpunkten der Operation von Γ auf $\mathfrak{H}$ definierte „arithmetische" Modulfunktionen sind geeignet zur Erzeugung von Klassenkörpern.
– analytischen Zahlentheorie: Die Fourierkoeffizienten $c(n)$ von wieder in bestimmter Weise arithmetisch ausgezeichneten Modulformen haben zahlentheoretische und kombinatorische Bedeutung, so etwa für die Bestimmung der Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl n durch eine vorgegebene quadratische Form. (Hier lag ein besonderes Interesse Schoenebergs, s. etwa [17]).
– Darstellungstheorie endlicher Gruppen: die Operation von $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ führt zu expliziten Realisierungen von Darstellungen von $\Gamma(1)/\Gamma(N)$ und damit zu Beiträgen zur Darstellungstheorie endlicher Gruppen, wie sie in Schoenebergs Dissertation [2] behandelt wurden.
– Darstellungstheorie kontinuierlicher Gruppen: Spitzenformen können gedeutet werden als Vektoren niedrigsten Gewichts für Realisierungen von Darstellungen π_k der diskreten Serie von $SL_2(\mathbb{R})$ und $\dim \mathcal{S}_k(N)$ ist gleich der Multiplizität von π_k in einem „cuspidalen" Unterraum von $L^2(\Gamma(N) \setminus SL_2(\mathbb{R}))$.

Über diese klassischen Bezüge hinaus haben sich unterdes neue ergeben, wurden doch die Modulformen in letzter Zeit im Rahmen der „string theory" auch von den Physikern vereinnahmt, und werden spezielle Modulformen – insbesondere die Dedekindsche η-Funktion für „Nennerformeln" der (auch physikalisch) interessanten Kac-Moody Algebren bedeutungsvoll, ebenso wie die Fourierkoeffizienten der j-Funktionen bei der Aufzählung der Darstellungen der Monstergruppen. Die oben genannte Definition der Modulformen hat Verallgemeinerungen und Umdeutungen erfahren. Jetzt, da dieser Umsetzungsprozeß in der adelischen Definition einer auto-

morphen Form oder Darstellung (im Rahmen der Langlands-Theorie) zum Abschluß oder wenigstens Stillstand gekommen zu sein scheint, ist es sicher erlaubt und sinnvoll, an die folgenden Details der klassischen Fragen zu erinnern.

Das Fundament für die Theorie der Modulfunktionen wird gelegt durch Bearbeitung der folgenden Aufgaben

- Konstruktion von Modulformen
- Bestimmung von Basen für die Modulformenräume $\mathfrak{M}_k$ bzw $\mathcal{S}_k$.

Mit letzterer in Verflechtung steht die Aufgabe

- Untersuchung der Relationen zwischen Modulformen,

die dann unmittelbar in die Frage nach geometrischen oder zahlentheoretischen Ausdeutungen dieser Relationen einläuft.

Diesen Aufgaben widmen sich in der Mehrzahl Schoenebergs Arbeiten:

Die praktizierten Konstruktionsmethoden für Modulformen bestehen in der Bildung von Poincaré- resp. Eisensteinreihen, bei denen die Funktionen mit den gewünschten Invarianzeigenschaften durch einen direkten Mittelungsprozeß gewonnen werden, sowie in der Bildung von Thetareihen, bei denen die gewünschte Invarianz erst durch einen Rückgriff auf tiefer liegende zusätzliche Information sichtbar wird. Zu beiden Methoden hat Schoeneberg Beiträge geliefert, und zwar seine bedeutungsvollsten zu der zweitgenannten, indem er Anstöße in zwei Richtungen gab:

i) Für eine positiv definite quadratische Form

$$Q(x_1, \ldots, x_{2k})$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten stellt die Thetareihe

$$\vartheta(\tau, Q) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^{2k}} e(\tau Q(m)) \text{ mit } e(u) = e^{2\pi i u}$$

eine Modulform vom Gewicht k und einer Stufe N dar, die von der Diskriminante D der Form Q abhängt, und deren Fourierkoeffizienten $c(n)$ die Darstellungsanzahlen von n durch die quadratische Form Q messen. In seiner Arbeit „*Indefinite Quaternionen und Modulfunktionen*" [3] erweiterte Schoeneberg 1936 diese Bildung, indem er die Verwendung indefiniter quadratischer Formen zur Konstruktion von Modulformen initiiert. Seine Idee ist hier, daß die von Käthe Hey auf Artins Anregung untersuchten Zetafunktionen nullteilerfreier hyperkomplexer Systeme via Mellintransformation in Thetafunktionen verwandelt werden können, bei denen sich dann ebenso, wie im Falle der vorher betrachteten Thetareihen aufgrund der Funktionalgleichung der Zetafunktionen, das modulare Transformationsverhalten einstellt. (Eine alternative Begründung der Heyschen Resultate – fußend auf einem Ansatz von Hasse – gab Schoeneberg übrigens 1938 in der 1940 erschienenen Note „*Über die ζ-Funktion einfacher hyperkomplexer Systeme*" [5]). Diese Wechselwirkung zwischen Zeta- resp. L-Reihen und Modulformen, auch eines der Leitmotive des Werkes von Hecke, scheint mir eines der tiefsten Geheimnisse der Zahlentheorie zu enthalten und wird auch heute noch im Zuge der Langlands-Theorie verfolgt.

ii) In seiner Arbeit „*Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen*" [4] gab Schoeneberg 1939 einen zweiten neuen Beitrag zur Konstruktion von Modulformen, indem er durch wiederholte Anwendung eines linearen Differen-

tialoperators auf Thetareihen neue Thetafunktionen mit Kugelfunktionen als Koeffizienten gewinnt. Diese Arbeit mit Differentialoperatoren erwies sich hier und auch in verwandten Bereichen als überaus fruchtbar. Sie wurde u.a. von Maaß weitergeführt, wobei dann die nicht-holomorphen Maaßschen Wellenformen entstanden.

iii) Das in i) genannte Motiv der Verwendung der Quaternionen verfolgte Schoeneberg 1954 weiter in der Arbeit „*Über Quaternionen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen*“ [9]. Hier werden lineare Relationen zwischen ϑ-Reihen zu Quaternionenschiefkörpern und $\wp$-Teilwerten studiert. Als Folgerung ergibt sich eine Formel für die Klassenzahl definiter Quaternionen.

iv) Das Thema der Bildung von Modulformen via Eisensteinreihen tritt hervor in den Aufsätzen „*Über die Eisensteinreihen von Primzahlstufe*“ [12] von 1964 und „*Bemerkungen zu den Eisensteinschen Reihen und ihre Anwendungen in der Arithmetik*“ [17] von 1978.

v) Die Mehrzahl der übrigen Arbeiten Schoenebergs kann unter dem Gesichtspunkt gesehen werden, Relationen zwischen den Modulformen aufzufinden und spezielle Modulformen zu studieren, insbesondere die Δ-Funktion

$$\Delta(\tau) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = (2\pi)^{12}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$$

und deren Wurzeln bis hin zur Dedekindschen η-Funktion (s. insbesondere [10] und [16]).

vi) Von anderer Natur, aber unbedingt wert hervorgehoben zu werden, ist die 1951 entstandene Arbeit „*Über Weierstraß-Punkte in den Körpern der elliptischen Modulfunktionen*“ [7]. Hier wird das in Funktionentheorie und algebraischer Geometrie wichtige Thema der Weierstraßpunkte ganz konkret dadurch, daß sich die zu $i, \rho = e(1/3)$ und $i\infty$ äquivalenten Punkte – mit Ausnahme einiger niedriger Stufen – als Weierstraß-Punkte für den Körper der Modulfunktionen zu $\Gamma(N)$ erweisen.

Auch nachdem Schoeneberg vom Schuldienst vollständig an die Universität übergewechselt war, hat er seine pädagogische Komponente nicht vergessen und war bemüht, Teile der Mathematik herauszupräparieren, die an der Schule lehrbar sind, die Ausbildung der Lehrer im Blick zu haben und Kontakt mit den Lehrern zu halten. Zeugnis davon legen ab etwa die 1973 erschienene Überarbeitung der „*Einführung in die Zahlentheorie*“ von A. Scholz [20] sowie seine Arbeit für die Mathematische Gesellschaft in Hamburg, deren Jahrverwalter er in den Jahren 1962/3 bis 1965/6 war, und die ihn 1973 zu ihrem Ehrenmitglied ernannte.

Ausdruck eines beständigen Interesses an der Entwicklungs- und Entstehungsgeschichte der Mathematik ist Schoenebergs Mitarbeit am Dictionary of Scientific Biography, wobei er die Einträge zu E. Artin, E. Hecke, F. Klein (gemeinsam mit W. Burau), E. Landau, G. Landsberg, R. Lipschitz, E. Steinitz und H. Weber beitrug.

1987 bei dem Festkolloqium zum 100. Geburtstag von E. Hecke hielt Schoeneberg den Eröffnungsvortrag mit einer Würdigung vom Werk und Leben von Hecke. Dieser Vortrag erschien 1989 unter dem Titel „*Erich Hecke 1887–1947*“ [19].

Schoeneberg war ein „Anhänger des strengen Stils“, wie der Sprecher des Fachbereichs Mathematik, Kurt Legrady, bei dessen Verabschiedung aus dem Uni-

versitätsdienst 1975 formulierte. Er gehörte zur Klasse derer, die zu ihren Veröffentlichungen nur Arbeiten benutzen und zitieren, die selbst gelesen und für richtig befunden wurden. Eine Ausnahme gestattete er sich allerdings in seinem Buch „*Elliptic Modular Functions*" [21], wo er auf der letzten Seite (p. 226) auf Delignes Beweis der Ramanujan-Vermutung (nämlich, daß für die Fourier-Koeffizienten $\tau(n)$ der Δ-Funktion für alle Primzahlen p $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$ gilt) hinwies, was ihm auch prompt bei seinem nächsten Aufenthalt in Göttingen einen Tadel von Siegel eintrug, wie Schoeneberg gern zu erzählen wußte. Er nahm nämlich großen Anteil nicht nur am Leben der Universität in Hamburg, sondern auch an dem der Universität und im besonderen der Akademie in Göttingen, an deren Sitzungen er teilnahm, solange es ihm gesundheitlich möglich war. Bis zuletzt war er ein kundiger und verständnisvoller, interessanter und an Geschichte, Zeitgeschehen und Literatur interessierter Gesprächspartner. Es las und sprach gern über Paul Valéry und dieser Nachruf mag deshalb ausklingen mit den letzten beiden Zeilen des Gedichts „*le vin perdu*" von Paul Valéry

„*J'ai vu bondir dans l'air amer*
les figures les plus profondes".

Veröffentlichungen von B. Schoeneberg

[1] *Zur Theorie der automorphen Formen.* Math. Ann. **104** (1930) 150–154
[2] *Berechnung irreduzibler Darstellungen endlicher Gruppen.* Dissertation Hamburg 1931 und Abh. Math. Sem. d. Hamburgischen Univ. **9** (1933) 1–14
[3] *Indefinite Quaternionen und Modulfunktionen.* Math. Ann. **113** (1936) 380–391
[4] *Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen.* Math. Ann. **116** (1939) 511–523
[5] *Über die ζ-Funktion einfacher hyperkomplexer Systeme.* Math. Ann. **117** (1940) 85–88
[6] *Multiplikative Gruppen algebraischer Funktionen.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **10** (1949) 136–139
[7] *Über die Weierstraß-Punkte in den Körpern der elliptischen Modulfunktionen.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **17** (1951) 104–111
[8] *Über den Zusammenhang der Eisensteinschen Reihen und Thetareihen mit der Diskriminante der elliptischen Funktionen.* Math. Ann. **126** (1953) 177–184
[9] *Über die Quaternionen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen.* J. reine angew. Math. **193** (1954) 84–93
[10] *Über die Diskriminante der elliptischen Funktionen und ihre Quadratwurzel.* Math Z. **65** (1956) 16–24
[11] *Emil Artin zum Gedächtnis.* Math. phys. Semesterberichte **10** (1963) 1–10
[12] *Über die Eisensteinreihen von Primzahlstufe.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **26** (1964) 145–154
[13] *Bemerkungen über einige Klassen von Modulformen.* Indag. Math. **29** (1967) 177–182
[14] *Verhalten von speziellen Integralen 3. Gattung bei Modultransformationen und verallgemeinerte Dedekindsche Summen.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **30** (1967) 1–10
[15] *Über das unendliche Produkt* $\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$. Mitteilungen der Math. Ges. Hamburg **IX** (1968) 4–11
[16] *Zur Theorie der verallgemeinerten Dedekindschen Modulfunktionen.* Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Jahrgang 1969, 119–128
[17] *Bemerkungen zu den Eisensteinschen Reihen und ihren Anwendungen in der Arithmetik.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **47** (1978) 201–209

[18] *Zusammenhang von Dirichletschen Reihen mit Funktionalgleichung, Integralen 3. Gattung und Thetareihen in der Theorie der Modulfunktionen.* Math. Ann. **299** (1979) 149–164
[19] *Erich Hecke 1887–1947.* Jber. d. Dt. Math. Verein. **91** (1989) 168–190
[20] *Einführung in die Zahlentheorie* (gem. mit A. Scholz). 5. ed. Berlin–New York, de Gruyter, 1973
[21] *Elliptic Modular Functions.* Springer Verlag, Berlin 1974

Rolf Berndt
Mathematisches Seminar der Universität Hamburg
Bundesstraße 55
D-20146 Hamburg

(*Eingegangen 4. 3. 1996*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
99 (1997) 90–100
© 1997 B. G. Teubner Stuttgart

Joachim A. Nitsche (1926–1996)

H. Amann, Zürich, H.-P. Helfrich, Bonn, R. Scholz, Freiburg (Brsg.)

Nach schwerer Krankheit, die ihn für die letzten fünf Jahre seines Lebens an den Rollstuhl fesselte, verstarb Joachim A. Nitsche am 12. Januar 1996 in seinem Haus in Freiburg.

1 Lebenslauf

Joachim Nitsche wurde am 2. September 1926 in Nossen/Sachsen geboren, wo seine Eltern als Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik tätig waren. Mit siebzehn Jahren wurde er zur Wehrmacht einberufen und erlebte dann das Kriegsende in Gefangenschaft. Im Jahre 1946 machte er in Bischofswerda das Abitur und immatrikulierte sich im Sommersemester 1947 für das Studium der Mathematik an der Universität Göttingen. Nach nur sechs Semestern erwarb er das Diplom. Für die

unter Anleitung von F. Rellich abgefaßte Diplomarbeit wurde ihm eine Auszeichnung verliehen.

In Göttingen erhielt er eine erste Einführung in die Differentialgeometrie durch eine Vorlesung von W. Haak, welche dieser im Rahmen einer Gastprofessur gab. Angezogen von diesem Gebiet folgte er nach seinem Diplom Haak an die Technische Hochschule Berlin-Charlottenburg, die spätere TU Berlin. Bereits 1951 wurde er zum Dr. rer. nat. promoviert aufgrund der von ihm vorgelegten Arbeit „Integralrelationen für Systeme quasilinearer Differentialgleichungen 1. Ordnung vom elliptischen Typus in zwei Variablen mit einer Anwendung auf die Einbettung von Flächen bei gegebenem Linienelement positiver Krümmung", für die ihm wieder eine Auszeichnung verliehen wurde.

Einbettungs- und Starrheitssätze, sowie damit zusammenhängende Probleme aus dem Bereich der partiellen Differentialgleichungen, definierten während der nächsten sechs bis sieben Jahre das Hauptarbeitsgebiet von J. Nitsche. Nach der Promotion wechselte er auf eine Assistentenstelle an der Freien Universität Berlin. Dort wurde ihm 1953 für seine Habilitationsschrift „Randwertprobleme für die Einbettung und Verbiegung positiv gekrümmter berandeter Flächenstücke" die Venia Legendi verliehen. Diese Arbeit entstand unter dem Einfluß von W. Blaschke, den er als seinen „inoffiziellen" Lehrer und Betreuer ansah, während sein „formeller" Betreuer F.W. Levi war.

Im Jahr 1952 verheiratete sich Joachim Nitsche mit Gisela Lange. Aus der Ehe gingen drei Kinder hervor.

Von 1955 bis 1957 hatte Nitsche eine Diätendozentur an der Freien Universität inne, die er dann zugunsten einer Tätigkeit bei IBM in Böblingen aufgab. Dort wurde er mit Fragestellungen der Angewandten Mathematik vertraut, insbesondere mit Problemen, die sich beim Einsatz moderner Rechenanlagen zur praktischen Lösung konkreter Aufgaben ergeben. Dies führte zu einer weitgehenden Neuorientierung seiner wissenschaftlichen Interessen. Von nun an bildeten theoretische Untersuchungen zur Numerischen Mathematik sein Hauptforschungsgebiet. Hierbei verband er seine alte Liebe zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen mit dem neuen Aspekt der effektiven numerischen Bestimmung von Lösungen solcher Gleichungen. Mit seinen Arbeiten über die Methode der finiten Elemente, die in den folgenden Jahren entstanden, eroberte er sich einen Platz in der ersten Reihe der Angewandten Mathematiker.

Von Böblingen wurde J. Nitsche 1958 durch H. Görtler auf eine apl. Professur an die Universität Freiburg geholt. Dort erreichte ihn 1962 ein Ruf auf die Lehrkanzel „Moderne Rechentechnik" an der Technischen Universität Wien. Der Universität Freiburg gelang es jedoch, ihn zu halten, indem sie ihn im selben Jahr auf einen Lehrstuhl für Angewandte Mathematik berief. Nitsche blieb Freiburg bis zu seiner Emeritierung im Jahr 1991 treu, auch als das Land Nordrhein-Westfalen ihm 1975 eine Stelle als Leiter des Instituts für Mathematik bei der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung in Verbindung mit einem Lehrstuhl an der Universität Bonn offerierte.

Wie bereits erwähnt, bildeten während der Freiburger Zeit Fragestellungen aus dem Bereich der Numerischen Mathematik das Hauptarbeitsgebiet J. Nitsches. Neben Approximationsaussagen im Bereich der Spline-Funktionen widmete er sich

eingehend der Theorie der finiten Elemente zur Lösung elliptischer und parabolischer Differentialgleichungen. Auf diesem Gebiet gehörte er zu den weltweit führenden Forschern. Er hatte engen Kontakt zu zahlreichen Fachkollegen und war häufig eingeladener Redner auf einschlägigen Kongressen. International sehr beachtet wurden die beiden von ihm 1977 und 1980 am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach veranstalteten Tagungen über finite Elemente.

Joachim Nitsche war ein engagierter Lehrer. Neben Anfängervorlesungen über Analysis und Lineare Algebra, sowie den Standardvorlesungen über Numerische Mathematik, bot er immer wieder Spezialvorlesungen und Seminare über Gegenstände der aktuellen Forschung an, welche die Hörer zu eigener wissenschaftlicher Tätigkeit anregten. In den ersten Freiburger Jahren gehörten auch Kurse über Spieltheorie und Unternehmensforschung zu seinem Vorlesungsrepertoire.

Zusätzlich zu den üblichen Tätigkeiten in der akademischen Selbstverwaltung – in den Jahren 1971 und 1972 bekleidete er das Amt des Dekans der Mathematischen Fakultät – übernahm er auch Aufgaben im Bereich der wissenschaftlichen Selbstverwaltung. So war er Mitherausgeber der Zeitschriften „Numerical Functional Analysis and Optimization", „Japan Journal of Applied Mathematics" und „RAIRO – Analyse Numérique", sowie der Reihe „Pitman Research Notes in Mathematics" und der im selben Verlag erscheinenden Buchreihe „Monographs and Studies in Mathematics".

2 Das wissenschaftliche Werk

Wie bereits oben festgestellt, können die Publikationen Joachim Nitsches im Wesentlichen in zwei Kategorien eingeteilt werden: in Arbeiten rein analytischer Natur und in theoretische Untersuchungen von Fragestellungen, welche die Numerische Mathematik betreffen. Darüber hinaus gibt es vereinzelte Beiträge zur Spieltheorie ([22]) und zu Optimierungsfragen ([14, 21]).

2.a Die analytischen Arbeiten

Die Mehrzahl der analytischen Arbeiten entstand in der Berliner Zeit und behandelt Fragen der Flächenverbiegung und damit zusammenhängende Aufgaben aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ([1–13, 16, 19]), wobei einige der späteren Arbeiten aus dieser Zeit gemeinsam mit dem Bruder Johannes C.C. Nitsche abgefaßt sind.

Berandete Flächenstücke mit vorgegebener Metrik lassen isometrische Deformationen zu. Nitsche untersucht die Frage, durch welche Eigenschaften sich die verschiedenen Verbiegungen unterscheiden, bzw. wie sich die möglichen Einbettungen realisieren lassen. Die Bestimmung von Biegeflächen ist äquivalent zum Auffinden von Lösungen der Gauß-Codazzi Gleichungen, welche er durch geeignete Elimination in ein quasilineares System zweier partieller Differentialgleichungen in zwei Variablen überführt. Dieses System ist elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem ob die Gaußsche Krümmung der Fläche positiv, null oder negativ ist. Nitsche studiert vor allem den Fall positiver Krümmung. Er leitet Integralrelationen her, welchen die Lösungen des Problems genügen müssen, und die geometrische Größen,

wie z.B. die Krümmung der Randkurve, enthalten. Dann zeigt er, daß einfach zusammenhängende Flächenstücke mit vorgegebener Metrik durch die Krümmung der Randkurve eindeutig bestimmt sind. Durch geschickte Transformationen kann er das zugehörige quasilineare elliptische System auf ein semilineares in Normalform reduzieren, das dann mittels Iteration gelöst wird. Auf diese Weise gewinnt er unter geeigneten Kleinheitsbedingungen auch Existenzsätze.

In [8] zeigt er, daß im Fall zweifach zusammenhängender Flächenstücke die Eindeutigkeit nicht mehr gewährleistet sein muß. Im Fall der isometrischen Verbiegung einer Kugelzone kann er mittels Bifurkationsmethoden nachweisen, daß die dem Problem zugeordnete Integrodifferentialgleichung in der Nachbarschaft der unverbogenen Kugelzone unter gewissen geometrischen Bedingungen genau zwei Lösungen besitzt.

Während seiner Freiburger Jahre hat Joachim Nitsche noch zwei rein analytische Arbeiten publiziert. In [66] gibt er einen einfachen und eleganten Beweis für die zweite Kornsche Ungleichung. Hierbei handelt es sich um eine Koerzivitätsungleichung für den Dehnungstensor der linearen Elastizitätstheorie, wobei keinerlei Randbedingungen auferlegt werden. Durch eine elementare Spiegelungsmethode führt er die allgemeine Situation auf den Fall Dirichletscher Nullrandbedingungen zurück.

Auch in seiner letzten analytischen Publikation [73] ist es sein Anliegen, elementare Beweise für bekannte Regularitätsaussagen zu geben.

2.b Arbeiten zur Numerik

Die ersten Arbeiten [15, 20] von Joachim Nitsche zur Numerik sind wohl im Zusammenhang mit seiner Tätigkeit bei IBM in Böblingen zu sehen und behandeln Fehlerabschätzungen zu Eigenwertproblemen bei Matrizen.

Etwa zur gleichen Zeit verfaßte er mit Johannes C.C. Nitsche einen Artikel [17] zu Konvergenzabschätzungen für Differenzenverfahren bei partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typ in zwei Raumdimensionen. Die Differenzenlösung zur Maschenweite h wird durch geeignete trigonometrische Interpolation auf einen Teilraum der Dimension $n = O(h^2)$ fortgesetzt. Mit Hilfe von Einbettungssätzen für Sobolevräume mit gebrochenem Index kann unter sehr schwachen Voraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen Konvergenz in der Maximumnorm gezeigt werden. Für die rechte Seite f wird dabei nur Quadratintegrierbarkeit vorausgesetzt. Dies bedingt, daß zur Diskretisierung die Funktionswerte durch Integralmittelwerte ersetzt werden müssen. Die numerische Berechnung der Integrale wird in [18] diskutiert.

Einige Jahre später kommt Joachim Nitsche auf diesen Fragenkreis unter dem neuen Gesichtspunkt zurück, die Konvergenzordnung im Zusammenhang mit Regularität und Approximierbarkeit der Lösungen der Differentialgleichungen zu sehen. Insbesondere ist die Frage nach quasi-optimalen Fehlerabschätzungen eines der zentralen Themen in seinen Arbeiten der nächsten Jahre. Fehlerabschätzungen für eine Folge u_n von numerischen Lösungen in Teilräumen der Dimension n haben im allgemeinen die Form $\|u_n - u\| \leq c_n \|f\|$ für lineare Gleichungen $Au = f$. Der n-dimensionale Durchmesser d_n der Menge $\{u \mid \|Au\| \leq 1\}$ ist eine untere Schranke für die Fehlerfaktoren c_n. Ein Verfahren heißt *quasi-optimal*, wenn $c_n = O(d_n)$ gilt.

Joachim Nitsche [25, 26, 32] kann das frühere Ergebnis [17] für die Fehlerordnung von $O(h^{2/5})$ auf $O(h^2)$ verbessern und zeigen, daß diese Abschätzung bezüglich der L_2-Norm quasi-optimal ist, wenn über die rechte Seite nur $f \in L_2$ vorausgesetzt wird.

Nach den Differenzenverfahren geht Joachim Nitsche in [24, 28, 30, 31] dazu über, das Problem der Quasi-Optimalität für projektive Verfahren (Ritz-, Galerkin- und Fehlerquadratmethode) zunächst für den abstrakten Fall eines selbstadjungierten Operators A im Hilbertraum zu behandeln. Neben der Optimalität geht es um Fragen der Stabilität, der Defektkonvergenz und des Vergleichs der verschiedenen Methoden. In diesem Zusammenhang entsteht auch die ebenso berühmte wie kurze Arbeit [27], in der in abstrakter Weise gezeigt wird, daß die Quasi-Optimalität der Ritz-Methode in der Energienorm auch diejenige in der ursprünglichen Norm impliziert. Diese Beweistechnik wird später als *Nitsche-Trick* bezeichnet. Für finite Elemente folgt hiermit, daß Konvergenz in der L_2-Norm um eine h-Potenz besser ist als in der H^1-Norm. J. Nitsche kann in [40] zeigen, daß Quasi-Optimalität in der L_2-Norm diese auch in stärkeren Normen impliziert, falls die Teilräume geeigneten inversen Abschätzungen genügen, wie sie aus der klassischen Approximationstheorie für trigonometrische Funktionen bekannt sind.

In diese Zeit fallen auch einige Untersuchungen über die Frage, wie die Approximationsgüte von Splinefunktionen [33, 35, 36, 37] mit der Regularität der zu approximierenden Funktionen zusammenhängt sowie eine Arbeit [38] zur Konvergenz des Galerkinverfahrens bei nichtlinearen Gleichungen.

Über weitere Arbeiten zu Splinefunktionen [29, 34] gelangt J. Nitsche zu seinem Hauptarbeitsgebiet der nächsten zwanzig Jahre, nämlich zu seinen Untersuchungen von Konvergenzeigenschaften finiter Elemente, durch die er international berühmt wird. In [39] findet sich erstmals der Beweis, daß für lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fehler von der Größenordnung $O(h^2)$ in der L_2-Norm und $O(h)$ in der L_∞-Norm ist. Diese L_∞-Abschätzung wird unter Verwendung von inversen Abschätzungen aus der L_2-Abschätzung hergeleitet. Alle Abschätzungen erweisen sich unter der Vorausetzung, daß die rechte Seite in L_2 liegt, als quasi-optimal.

Die anschließenden Arbeiten sind der Frage gewidmet, wie Randbedingungen bei projektiven Verfahren zu berücksichtigen sind, wenn die Ansatzräume diesen Bedingungen nicht genügen. Durch Einbeziehung der Randbedingungen in den Variationsansatz und geschickte Wahl von gewichteten Randintegralen kann J. Nitsche in [41] zeigen, daß die Konvergenzordnung $O(h^2)$ für lineare Splines erhalten bleibt. Erweiterungen dieser Untersuchungen finden sich in [42, 44, 47] und in einer mit J.H. Bramble verfaßten Arbeit über die Fehlerquadratmethode [42]. In einer späteren Arbeit [57] greift Nitsche die Behandlung der Randbedingungen, diesmal für das Plattenproblem, wieder auf.

Zusammen mit A.H. Schatz, und später mit J.H. Bramble, behandelt er in [43, 45, 46] dann die Frage, ob lokal bessere Regularitätseigenschaften der Lösung auch lokal bessere Konvergenzeigenschaften bedingen. Es zeigt sich, daß die Situation bei finiten Elementen im allgemeinen günstiger als im klassischen Fall der Fourierapproximation ist, bei der eine Singularität Einfluß auf das globale Konvergenzverhalten hat. Lokal höhere Regularität bedingt bei elliptischen und parabolischen Differen-

tialgleichungen, wie J. Nitsche [64] später zeigt, ein lokal besseres Approximationsverhalten.

Anders sieht die Situation bei Differentialgleichungen mit Singularitäten in den Koeffizientenfunktionen oder in Gebieten mit Ecken aus. In [48, 55] kann er zeigen, daß in solchen Fällen auch das globale Konvergenzverhalten verschlechtert wird. Für nichtlineare Probleme werden solche Untersuchungen in [71] durchgeführt.

Etwas später wendet sich Joachim Nitsche L_∞-Abschätzungen für parabolische Gleichungen [58,70] zu. Einen breiteren Raum nehmen dabei zeitabhängige Probleme für freie Ränder, wie sie beim Stefan-Problem auftreten, ein. Fehlerabschätzungen für den ein- und den zweidimensionalen Fall [60, 61, 62, 63, 65, 67, 69, 72] werden durch Transformation auf den Fall fester Ränder zurückgeführt, wonach dann eine nichtlineare parabolische Differentialgleichung zu behandeln ist. Auch hier treten Singularitäten auf, deren Auswirkungen auf das Konvergenzverhalten sorgfältig analysiert werden.

2.c L_∞-Abschätzungen

Ein Schwerpunkt der Forschung von Joachim Nitsche im Bereich der Finite-Elemente-Methoden sind Konvergenzuntersuchungen in L_∞-Normen.

Projektionsverfahren, wie die Methode von Ritz für elliptische Randwertprobleme oder das Galerkin-Verfahren für parabolische Anfangs-Randwertprobleme, sind im Rahmen der Theorie partieller Differentialgleichungen in natürlicher Weise mittels L_2-Normen formuliert. Aus diesem Grund ergeben sich Konvergenzaussagen zunächst in den entsprechenden L_2-Normen, während das Konvergenzverhalten in L_p-Normen, speziell in der L_∞-Norm, gesondert untersucht werden muß.

Bis in die Mitte der siebziger Jahre wurde die Konvergenz finiter Elemente in mehreren Raumdimensionen hauptsächlich in der L_2- und in den H^k-Normen untersucht. Abgesehen von dem vergleichsweise einfachen eindimensionalen Fall werden L_∞-Abschätzungen durch Anwendung von Einbettungssätzen und inversen Abschätzungen für die Ansatzräume gewonnen. Wie bereits erwähnt, liefern diese Methoden quasi-optimale Abschätzungen für den Fall, daß die rechte Seite in L_2 bzw. die Lösung in H^2 liegt. Die mit J.H. Bramble und A.H. Schatz abgefaßte Arbeit [50] über „innere" L_∞-Abschätzungen lieferte erste Ansätze für die Behandlung des Falles, daß die Lösung im Raum W^2_∞ liegt. Die Frage nach optimalen Abschätzungen in der L_∞-Norm unter dieser Voraussetzung galt als sehr schwierig und spornte zu jenem Zeitpunkt viele Mathematiker an.

Um quasi-optimale Konvergenzordnungen zu beweisen, haben sich, zumindest für elliptische Randwertprobleme zweiter Ordnung, etwa zeitgleich zwei Methoden herausgeschält: die der Regularisierung der Greenschen Funktion und das Verfahren der gewichteten L_2-Normen. Die letztere Methode wird von Nitsche ausgebaut, verfeinert und auf andere Fragestellungen übertragen.

In einer Reihe von Arbeiten werden zunächst Konvergenzaussagen für die Ritz-Näherung der Lösung der Laplace-Gleichung bewiesen. In [49] wird gezeigt, daß für finite Elemente der Ordnung $r \geq 3$ die asymptotische Konvergenz der Ritz-Näherung quasi-optimal ist. Der Fall linearer finiter Elemente ist schwieriger zu behandeln.

In [52] beweist Nitsche, daß für $r = 2$, bis auf einen logarithmischen Faktor, ebenfalls Quasi-Optimalität gilt, und leitet eine entsprechende Abschätzung für Variationsungleichungen her. In [56] wird das Ergebnis für die Laplace-Gleichung dahingehend verbessert, daß in der Fehlerabschätzung die L_∞-Normen der zweiten Ableitungen der Lösung durch die L_∞-Norm der rechten Seite der Differentialgleichung ersetzt wird.

Diese Abschätzungen waren technisch so aufwendig, daß Ciarlet für sein Buch über Finite Elemente Nitsche um eine vereinfachte Version bat, die dort niedergeschrieben ist.

In [51] werden Fehlerabschätzungen für die Elastizitätsgleichungen bewiesen, und in [54] werden die Ergebnisse für das lineare elliptische Problem zweiter Ordnung auf nichtlineare elliptische Randwertprobleme in Divergenzform übertragen. Schließlich zeigt Nitsche in [68], daß aus seinen Resultaten folgt, daß der Ritz-Operator (bis auf einen logarithmischen Term im Falle linearer finiter Elemente) in der L_∞-Norm und in Hölder- bzw. Lipschitz-Normen beschränkt ist, ein Resultat, das teilweise zuvor mit anderen Methoden bewiesen worden war.

In [58, 59] und in der gemeinsam mit mit M.F. Wheeler abgefaßten Arbeit [70] widmet sich Nitsche der Frage asymptotischer Fehlerabschätzungen in der $L_\infty(L_\infty)$-Norm (d.h. in der Supremumsnorm bzgl. der Zeit und des Raums) für die Galerkin-Approximationen der Lösungen linearer parabolischer Anfangs-Randwertprobleme. Hierbei werden die Methoden der gewichteten L_2-Normen geeignet übertragen. Schließlich behandelt er in einigen Arbeiten das Stefan-Problem in einer Raumdimension und beweist u.a. in [60] auch L_∞-Abschätzungen für die Galerkin-Näherung der Lösung dieses Problems.

In [74] diskutiert er die Anwendung von Methoden der finiten Elemente auf singuläre Integraloperatoren, wie sie in der Theorie der konformen Abbildungen auftreten. Solche Gleichungen passen nicht in die gängige Theorie der finiten Elemente, da weder Ungleichungen vom Gårdingschen Typ noch die üblichen Shifttheoreme für partielle Differentialgleichungen gelten. Nitsche zeigt auf, wie diese Gleichungen mit der abstrakten Theorie der finiten Elemente behandelt werden können. Mittels des Verfahrens der gewichteten Normen beweist er, daß der Galerkin-Operator in der L_∞-Norm beschränkt ist, und überträgt dieses Ergebnis mit Methoden von Arbeit [40] auf Hölder-Normen.

2.d Bei J. A. Nitsche entstandene Dissertationen

1. Herbert Amann, Monte-Carlo-Methoden zur Lösung des Dirichlet-Problems, Freiburg, WS 1965/66.
2. Hans-Peter Helfrich, Optimale lineare Approximation beschränkter Mengen in normierten Räumen, Freiburg, SS 1969.
3. Albrecht von Plehwe, Über das Galerkin-Verfahren zur genäherten Lösung von Anfangswertproblemen für Differentialgleichungen erster Ordnung im Hilbertraum, Freiburg, SS 1970.
4. Reinhard Scholz, Approximation mit Spline-Funktionen in gewichteten Lebesgue-Räumen über dem Intervall $(0, \infty)$, Freiburg, WS 1971/72.
5. Reinhardt Link, Asymptotische Fehlerdarstellungen bei Approximationsverfahren mit Spline-Funktionen, Freiburg, WS 1974/75.
6. Jürgen Schormann, Vergleich der Normen von Galerkin- und Ritz-Operatoren, Freiburg, SS 1975.

7. Fritz Grenacher, Über die Konvergenz bei Regularisierungsverfahren für nicht sachgemäß gestellte Anfangswertprobleme, Freiburg, WS 1976/77.
8. Dieter Brandt, Pollution-Effekte bei der Anwendung des Galerkinverfahrens auf singuläre nichtlineare Dirchlet-Randwertprobleme, Freiburg, WS 1978/79.
9. Klaus Braun, Lokale Konvergenz der Ritz-Projektion auf Finite Elemente für Pseudo-Differentialgleichungen negativer Ordnung, Freiburg, SS 1985.
10. Sigrid Lang, L_∞-Konvergenz der Finite-Element-Methode für das Kapillarflächenproblem, Freiburg, WS 1991/92 (abgeschlossen unter G. Dziuk).

Publikationen von Joachim A. Nitsche

[1] Bestimmung der Flächen, deren Bogenelement negativer Krümmung als Quadratsumme zweier Pfaffscher Formen gegeben ist. *Archiv d. Math.*, 3:50–59, 1952.

[2] Beiträge zum Randwertproblem quasilinearer elliptischer Differentialgleichungssysteme. *Math. Nachr.*, 7:35–54, 1952.

[3] Das erste Randwertproblem eines linearen elliptischen Differentialgleichungssystems. *Math. Nachr.*, 7:31–33, 1952.

[4] Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem. *Archiv d. Math.*, 4:331–336, 1953.

[5] Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem. II. *Archiv d. Math.*, 6:13–17, 1954.

[6] Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem. III. *Archiv d. Math.*, 6:145–150, 1955.

[7] Randwertprobleme für die Verbiegung positiv gekrümmter Flächenstücke. *Math. Z.*, 60:353–366, 1954.

[8] Beiträge zur Verbiegung zweifach zusammenhängender Flächenstücke. *Math. Z.*, 62:388–399, 1955.

[9] Gemeinsam mit J.C.C. Nitsche: Ein Satz über die Normalen der Niveauflächen einer Potentialfunktion. *J. Rat. Mech. Analysis*, 2:115–124, 1953.

[10] Gemeinsam mit J.C.C. Nitsche: Allgemeine Randwertprobleme für Systeme elliptischer Differentialgleichungen; die Zurückführung auf eine von F. Noether untersuchte Klasse singulärer Integralgleichungen. *Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser.*, 2:40–45, 1953.

[11] Gemeinsam mit J.C.C. Nitsche: Bemerkungen zum zweiten Randwertproblem der Differentialgleichung $\Delta\varphi = \varphi_x^2 + \varphi_y^2$. *Math. Ann.*, 126:69–74, 1953.

[12] Gemeinsam mit J.C.C. Nitsche: Das zweite Randwertproblem der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. *Archiv d. Math.*, 3:460–464, 1952.

[13] Gemeinsam mit J.C.C. Nitsche: Fachgebiet: Partielle Differentialgleichungen. In Hermann Ludwig Naas und Josef Schmid, Hrsg., *Mathematisches Wörterbuch*. Akademie Verlag, Berlin, 1961.

[14] Gemeinsam mit E.F. Liebel: Optimale Produktionsprogramme. *Unternehmensforsch.*, 2:70–84, 1958.

[15] Einfache Fehlerschranken beim Eigenwertproblem symmetrischer Matrizen. *Z. Angew. Math. Mech.*, 39:322–325, 1959.

[16] Gemeinsam mit J.C.C. Nitsche: Ein Kriterium für die Existenz nicht-linearer ganzer Lösungen elliptischer Differentialgleichungen. *Archiv d. Math.*, 10:294–297, 1959.

[17] Gemeinsam mit J.C.C. Nitsche: Error estimates for the numerical solution of elliptic differential equations. *Arch. Rat. Mech. Analysis*, 5:293–306, 1960.

[18] Gemeinsam mit J.C.C. Nitsche: Fehlerabschätzung für die numerische Berechnung von Integralen, die Lösungen elliptischer Differentialgleichungen enthalten. *Arch. Rat. Mech. Analysis*, 5:307–314, 1960.

[19] Gemeinsam mit J.C.C. Nitsche: Über reguläre Variationsprobleme. *Rend. Circ. Mat. Palermo, II Ser.*, 8:346–353, 1960.

[20] Fehlerschranken bei Eigenwertproblemen normalisierbarer Matrizen. *Z. Angew. Math. Mech.*, 41:320–324, 1961.

[21] Über Optimalisierungsprobleme aus dem Bereich der Statik II. *Unternehmensforsch.*, 6:67–78, 1962.
[22] Das Problem der Dominanz bei Zwei-Personen-Spielen. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb.*, 6:119–124, 1966.
[23] *Praktische Mathematik*. B.I.-Hochschulskripten 812. Bibliographisches Institut, Mannheim-Zürich, 1968.
[24] Zur Konvergenz des Ritzschen Verfahrens und der Fehlerquadratmethode. I. In *Numerische Mathematik. Differentialgleichungen. Approximationstheorie (Tagungen, Oberwolfach, 1966)*, volume 9 of *Internat. Series Numer. Math.*, pages 97–103, Basel, 1968. Birkhäuser Verlag.
[25] Zur Frage optimaler Fehlerschranken bei Differenzenverfahren. I. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 16:69–80, 1967.
[26] Zur Frage optimaler Fehlerschranken bei Differenzenverfahren. In *Funktionalanalytische Methoden der numerischen Mathematik*, volume 12 of *Internat. Series Numer. Math.*, pages 127–129, Basel, 1969. Birkhäuser Verlag.
[27] Ein Kriterium für die Quasi-Optimalität des Ritzschen Verfahrens. *Numer. Math.*, 11:346–348, 1968.
[28] Bemerkungen zur Approximationsgüte bei projektiven Verfahren. *Math. Z.*, 106:327–331, 1968.
[29] Verfahren von Ritz und Spline-Interpolation bei Sturm-Liouville-Problemen. *Numer. Math.*, 13:260–265, 1969.
[30] Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeit des Ritzschen Verfahrens und der Fehlerquadratmethode. *Z. Angew. Math. Mech.*, 49:591–596, 1969.
[31] Defekt- und Fehlerkonvergenz bei Differenzenapproximationen. *Z. Angew. Math. Mech.*, 49:302–303, 1969.
[32] Zur Frage optimaler Fehlerschranken bei Differenzenverfahren. II. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 16:233–238, 1967.
[33] Sätze vom Jackson-Bernstein-Typ für die Approximation mit Spline-Funktionen. *Math. Z.*, 109:97–106, 1969.
[34] Interpolation in Sobolevschen Funktionenräumen. *Numer. Math.*, 13:334–343, 1969.
[35] Orthogonalreihenentwicklung nach linearen Spline-Funktionen. *J. Appr. Theory*, 2:66–78, 1969.
[36] Eine Bemerkung zur kubischen Spline-Interpolation. In *Abstract Spaces and Approximation (Proc. Conf., Oberwolfach, 1968)*, volume 10 of *Internat. Series Numer. Math.*, pages 367–372, Basel, 1969. Birkhäuser Verlag.
[37] Umkehrsätze für Spline-Approximationen. *Comp. Math.*, 21:400–416, 1969.
[38] Konvergenz des Ritz-Galerkinschen Verfahrens bei nichtlinearen Operatorgleichungen. In *Iterationsverfahren, Numerische Mathematik, Approximationstheorie (Tagung Nichtlineare Aufgaben Numer. Math., Oberwolfach, 1968)*, volume 15 of *Internat. Series Numer. Math.*, pages 75–81, Basel, 1970. Birkhäuser Verlag.
[39] Lineare Spline-Funktionen und die Methoden von Ritz für elliptische Randwertprobleme. *Arch. Rat. Mech. Analysis*, 36:348–355, 1970.
[40] Zur Konvergenz von Näherungsverfahren bezüglich verschiedener Normen. *Numer. Math.*, 15:224–228, 1970.
[41] Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 36:9–15., 1971.
[42] Gemeinsam mit J.H. Bramble: A generalized Ritz-least-squares method for Dirichlet problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10:81–93, 1973.
[43] Gemeinsam mit A.H. Schatz: On local approximation properties of L_2-projection on spline-subspaces. *Appl. Anal.*, 2:161–168, 1972.
[44] On Dirichlet problems using subspaces with nearly zero boundary conditions. In *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations (Proc. Sympos., Univ. Maryland, Baltimore, Md., 1972)*, pages 603–627, New York, 1972. Academic Press.

[45] Interior error estimates of projection methods. In *Proceedings of Equadiff III (Third Czechoslovak Conf. Differential Equations and their Applications, Brno, 1972)*, volume 1 of *Folia Fac. Sci. Natur. Univ. Purkynianae Brunensis, Ser. Monograph.*, pages 235–239, Brno, 1974. Purkyne Univ.

[46] Gemeinsam mit A.H. Schatz: Interior estimates for Ritz-Galerkin methods. *Math. Comp.*, 28:937–958, 1974.

[47] Convergence of nonconforming methods. In *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wisc., 1974)*, pages 15–53, New York, 1974. Academic Press.

[48] Der Einfluß von Randsingularitäten beim Ritzschen Verfahren. *Numer. Math.*, 25:263–278, 1976.

[49] L_∞-convergence of finite element approximation. In *Journées „Elements Finis" (Rennes, 1975), 18 pp.*, Rennes, 1975. Univ. Rennes.

[50] Gemeinsam mit J.H. Bramble und A.H. Schatz: Maximum-norm interior estimates for Ritz-Galerkin methods. *Math. Comp.*, 29:677–688, 1975.

[51] Finite element approximations for solving the elastic problem. In *Computing methods in applied sciences and engineering (Second Internat. Sympos., Versailles, 1975), Part 1.*, volume 134 of *Lecture Notes in Econom. and Math. Systems*, pages 154–167, Berlin, 1976. Springer Verlag.

[52] L_∞-convergence of finite element approximations. In *Mathematical aspects of finite element methods (Proc. Conf., Consiglio Naz. delle Ricerche (C.N.R.), Rome, 1975), Lecture Notes in Math.*, volume 606, pages 261–274, Berlin, 1977. Springer Verlag.

[53] Über L_∞-Abschätzungen von Projektionen auf finite Elemente. In *Finite Elemente (Tagung, Inst. Angew. Math., Univ. Bonn, Bonn, 1975), Bonn. Math. Schrift.*, 89:13–30, 1976.

[54] On L_∞-convergence of finite element approximations to the solution of a nonlinear boundary value problem. In *Topics in numerical analysis, III (Proc. Roy. Irish Acad. Conf., Trinity Coll., Dublin, 1976)*, pages 317–325, London, 1977. Academic Press.

[55] Zur lokalen Konvergenz von Projektionen auf finite Elemente. In *Approximation theory (Proc. Internat. Colloq., Inst. Angew. Math., Univ. Bonn, Bonn), Lecture Notes in Math.*, volume 556, pages 329–346, Berlin, 1976. Springer Verlag.

[56] L_∞-convergence of the Ritz-method with linear finite elements for second-order elliptic boundary value problems. In *Complex analysis and its applications (Russian)*, pages 430–437, 670, Moscow, 1978. „Nauka".

[57] On projection methods for the plate problem. In *Numerical analysis (Proc. Colloq., Lausanne, 1976)*, volume 37 of *Internat. Series Numer. Math.*, pages 49–61, Basel, 1977. Birkhäuser Verlag.

[58] L_∞-convergence of finite element Galerkin approximations for parabolic problems. *RAIRO Anal. Numér.*, 13:31–54, 1979.

[59] L_∞-error analysis for finite elements. In *Mathematics of finite elements and applications, III (Proc. Third MAFELAP Conf., Brunel Univ., Uxbridge, 1978)*, pages 173–186, London, 1979. Academic Press.

[60] Finite element approximations to the one-dimensional Stefan problem. In *Recent advances in numerical analysis (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wisc., 1978)*, volume 41 of *Publ. Math. Res. Center Univ. Wisconsin*, pages 119–142, New York, 1978. Academic Press.

[61] Approximation des eindimensionalen Stefan-Problems durch finite Elemente. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*, pages 923–928, Helsinki, 1980. Acad. Sci. Fennica.

[62] Finite element approximations for free boundary problems. In *Computational methods in nonlinear mechanics (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Texas, Austin, Tex., 1979)*, pages 341–360, Amsterdam, New York, 1980. North-Holland.

[63] A finite element method for parabolic free boundary problems. In *Free boundary problems, Vol. I (Pavia, 1979)*, pages 277–318, Rome, 1980. Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi.

[64] Interior error estimates for semidiscrete Galerkin approximations for parabolic equations. *RAIRO Anal. Numér.*, 15:171–176, 1981.
[65] The flow of two immiscible fluids in a one-dimensional porous medium and finite elements. In S.Y. Wang, C.V. Alonso, C.A.Brebbia, W.G. Gray, and G.F. Pinder, editors, *Proceedings of the Third International Conference on Finite Elements in Water Resources*, pages 2.270–2.281. University of Mississipi, 1980.
[66] On Korn's second inequality. *RAIRO Anal. Numér.*, 15:237–248, 1981.
[67] Moving boundary problems and finite elements. In *Numerical treatment of free boundary value problems, Workshop Oberwolfach 1980*, volume 58 of *Internat. Series Numer. Math.*, pages 224–232, Basel, 1982. Birkhäuser Verlag.
[68] Schauder estimates for finite element approximations on second order elliptic boundary value problems. In I. Babuška, J. Osborn, and T.P. Liu, editors, *Proceedings of the Special Year*, volume 20 of *Lecture Notes University of Maryland*, pages 290–343, 1982.
[69] Finite element approximation to the one-phase Stefan problem. In *Free boundary problems: theory and applications, Vol. II (Montecatini, 1981)*, volume 79 of *Research Notes in Mathematics*, pages 601–605, Boston 1983. Pitman Advanced Publishing Program.
[70] Gemeinsam mit Mary F. Wheeler: L_∞-boundedness of the finite element Galerkin operator for parabolic problems. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 4:325–353, 1981/82.
[71] Zur lokalen Konvergenz von Ritz- und Galerkin-Verfahren bei nichtlinearen Problemen. In *Seminar über Finite Elemente bei instationären Problemen, Mitt. Forschungsschwerpunkt Simulation Optimierung Deterministischer Stochastischer Dyn. Syst.*, Band 33, pp. 1–12. 1986.
[72] Free boundary problems for Stokes' flows and finite element methods. In *Differential equations and their applications, Equadiff 6, Proc. 6th Int. Conf., Brno/Czech., 1985*, volume 1192 of *Lect. Notes Math.*, pages 327–332, Berlin, 1986. Springer Verlag.
[73] Direct proofs of some unusual shift-theorems. In *Analyse mathématique et applications, Contrib. Honneur Jacques-Louis Lions*, pages 383–400, Paris, 1988, Gauthier-Villars.
[74] Finite-element methods for conformal mappings. *SIAM J. Numer. Anal.*, 26:1525–1533, 1989.

H. Amann
Mathematisches Institut der Universität Zürich
Winterthurer Strasse 190
CH-8057 Zürich
e-mail: amann@math.unizh.ch

H.-P. Helfrich
Mathematisches Seminar der Landwirtschaftlichen Fakultät der Universität Bonn
Nußallee 15
D-53115 Bonn
e-mail: helfrich@uni-bonn.de

R. Scholz
Institut für Angewandte Mathematik der Universität Freiburg (Brsg.)
Hermann-Herder-Straße 10
D-79104 Freiburg
e-mail: scholz@mathematik.uni-freiburg.de

(*Eingegangen 20. 11. 1996*)

Buchbesprechungen

Schiff, J. L., Normal Families (Universitext), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1993, 236 S., softcover, DM 58,–

Sometimes we mathematicians are linguistically creative (cf. the clever terminology "amenable" group and "Anschmiegungssatz"), but more often we're lazy. How many "regular" and "normal" things do you know of in the mathematical universe? The subject of this book dates from the early part of this century, from the important work of the long-lived Paul Montel (1876–1975); the book is dedicated to him and contains a wonderful photo of him. The concept of compactness, especially in an abstract environment, had not yet evolved. After it did, the concept of normal family was recognized (by A. Ostrowski) to be just an instance of compactness, but is was too late to legislate a world-wide change in terminology. [Maybe someday these sets will be shown to predominate in the sense of measure or Baire category, and thereby earn their designation "normal".] Anyway, here is the definition. One considers meromorphic functions as maps of open subsets Ω of $\hat{\mathbb{C}}$ into $\hat{\mathbb{C}}$, the (Riemann) sphere equipped with its euclidean (= chordal) metric. Denote this set $M(\Omega)$. It is a $\mathbb{C}$-algebra (after the usual precautions regarding algebraic operations on ∞). Adjoin to it the constant function ∞ and give this set $M_\infty(\Omega)$ the topology of local uniform convergence (= uniform convergence on each compact subset of Ω). It is easy to construct a complete metric ρ that generates this topology. [Since $\rho \leq 2$, there is no meaningful boundedness concept with respect to ρ: boundedness for $\mathbb{C}$-valued functions always means boundedness in $\mathbb{C}$.] A *normal* family is simply a pre-compact subset $\mathscr{F}$ of $M_\infty(\Omega)$, that is, a subset $\mathscr{F}$ whose closure is compact. When we deal with $\Omega \subset \mathbb{C}$ and the smaller class $H(\Omega)$ of holomorphic functions, the definition assumes the traditional form: Every sequence in $\mathscr{F}$ contains a subsequence $\{f_n\}$ such that either f_n converges locally uniformly to an $f \in H(\Omega)$ or $|f_n| \to +\infty$ locally uniformly. If $\mathscr{F}$ is *equicontinuous* on each compact $K \subset \Omega$ (meaning that for each $\varepsilon > 0$, one $\delta = \delta(\varepsilon)$ works for all $f \in \mathscr{F}$), then normality is assured if we can find a subsequence $\{f_n\}$ which converges on a countable dense subset of Ω, and that can usually be accomplished with a diagonal argument. This idea had been used earlier by G. Ascoli and C. Arzela in providing a compactness criterion in $C[0, 1]$. In turn, Cauchy's integral formula shows easily that $\mathscr{F} \subset H(\Omega)$ is equicontinuous on a compact set if it is bounded on a neighborhood of that set. And conversely, equicontinuity on a compact set K together with boundedness of the orbit $\mathscr{F}(k) := \{f(k) : f \in \mathscr{F}\}$ of at least one point $k \in K$ implies boundedness of $\mathscr{F}$ on K. The appropriate boundedness condition equivalent to normality for a family $\mathscr{F} \subset M(\Omega)$ is that the set $\{f^\# : f \in \mathscr{F}\}$ of spherical derivatives $f^\# := |f'|/(1 + |f|^2)$ be locally bounded. But as a sufficient condition, boundedness can be dramatically weakened. Various avatars of the following 1912 theorem of Montel's are called by the author the Fundamental Normality Test (FNT): $\mathscr{F} \subset H(\Omega)$ is normal if there exist two distinct complex numbers a, b which each function in $\mathscr{F}$ "omits", that is, all orbits lie in $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$. Initially this was reduced to the local boundedness condition by a covering-space argument, the disk $\mathbb{D}$ covering $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ under a modular function; the same modular function that E. Picard had earlier used to prove his great theorem. For meromorphic functions with ∞ an allowed value the corresponding hypothesis is the omission of three values. Altogether the author gives five proofs of this seminal theorem, from five different points of view. The search for an elementary proof of Picard's theorem culminated in F. Schottky's theorem, which provides universal constants $c\ (a,\ r) < +\infty$ such that $|f(z)| \leq c(a, r)$ whenever $f \in H(\mathbb{D}), f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, f(0) = a$ and $|z| \leq r < 1$. In the same way that it simplifies Picard, this theorem trivialized the proof of Montel's FNT,

and pointed the way to a deeper version. In 1935 C. Miranda produced for each $n \in \mathbb{N}$ universal constants $c_n(a,r) < +\infty$ such that $|f(z)| \leq c_n(a,r)$ whenever $f \in H(\mathbb{D})$, $0 \notin f(\mathbb{D})$, $1 \notin f^{(n)}(\mathbb{D})$, $f(0) = a$ and $|z| \leq r < 1$. The next FNT is an easy consequence: If $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, then the set $\{f \in H(\Omega) : a \notin f(\Omega),\ b \notin f^{(n)}(\Omega)\}$ is a normal family. Contemporaneous with these discoveries R. Nevanlinna was developing his famous techniques for studying the value distribution of an entire function. All these matters are explored in this excellent book, along with mention of the precursors of Montel (W. F. Osgood, G. Vitali, M. B. Porter) and the role normality played in the proofs of Picard's and Julia's theorems and in the final slick proof (by L. Fejér and F. Riesz) of the Riemann mapping theorem. A whole chapter is devoted to the fecund *Bloch's Principle,* which says that if P is a property which forces an entire function to be constant, then any family of meromorphic functions enjoying property P is probably normal. Of course, Montel's first theorem (local boundedness implies normality) illustrates this principle, when we recall Liouville's theorem that a bounded entire function is constant. There are counterexamples and there are precise formulations of this principle (A. Robinson, L. Zalcman) that lead to theorems. Following pre-revolutionary work of King-lai Hiong (who had studied in France, with G. Valiron) a strong Chinese school of function theorem has developed and their work, especially that of Lo Yang, Xue-cheng Pang and Chi-tai Chuang is treated in this book. In fact, shortly after Schiff's book appeared, another one on this subject by Chuang (in English) also appeared – see **MR** 95d:30065.

Nobody needs to be convinced of the central position and importance of compactness in analysis, but just to mention on active area of current research that normal families essentially undergird, take complex dynamics (iteration theory), beginning already with the fundamental long memoirs of P. Fatou and G. Julia, 1917–1920. The last chapter of the book looks briefly at this and other applications. Schiff's book is thorough, up to date, contains a bibliography of over 15 pages and is very readable. It's an important addition to the literature and really the first monographic treatment since Montel's own book in 1927.

Manhattan, Kansas, USA R. B. Burckel

Siegmund-Schultze, R., Mathematische Berichterstattung in Hitlerdeutschland, der Niedergang des Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik (Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik 9), Göttingen: Vandenhoeck Ruprecht 1993, 263 S., brosch., DM 70,–

Der Autor dieses Buches ist vielleicht der beste Kenner überhaupt aller einschlägigen Quellen zum Themenkreis „Mathematik im Nationalsozialismus" (oder „Faschismus", wie er sagen würde). Entsprechend stellen besonders die Kapitel 5, 7, 8 und 9, in denen der Titel des Bandes eingelöst wird, beispielhafte Studien zu einem aufschlußreichen Aspekt der Geschichte mathematischer Institutionen im NS-Staat dar – beispielhaft besonders deshalb, weil nicht nur die Rollen einzelner Personen mit größtem Detailwissen geschildert werden, sondern die Einordnung der Gesamtentwicklung ebenfalls nie aus dem historisch geschulten Blick gerät. So erfährt der Leser etwa anhand der vergeblichen Versuche der Zusammenlegung des *Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik* mit dem *Zentralblatt* ab 1939 viel grundsätzlich Wichtiges über die Perspektiven der deutschen Wissenschaftsplanung im Zweiten Weltkrieg. Für jeden, den solche Problematik interessiert, ist das Buch eine hochwillkommene Ergänzung der vorhandenen Literatur.

Auch die ganze Anlage des Buches (bis hin zu den Originaldokumenten im Anhang) verrät den professionellen Wissenschaftshistoriker. So beginnt er mit einem Abriß

der Entwicklung des mathematischen Referatewesens und untersucht im Folgenden z. B. sehr eingehend die Übernahme des *Jahrbuchs* durch die Berliner Akademie im Rahmen von Bieberbachs antimoderner „Weltanschauung" (Kapitel 4).

In der Einleitung formuliert der Autor (S. 11 f.) seine „Hauptthese": daß die Fortführung des *Jahrbuchs* in den 30er Jahren (und nicht erst sein Ende 1945) das eigentliche Symptom des Niedergangs desjenigen Teils der Mathematik in Deutschland sei, der sich nach 1934 vor allem um Bieberbach scharte. Diese These wird besonders durch eine Betrachtung der Fachpolitik Bieberbachs in den 30er Jahren nahegelegt. Allerdings kontrastiert sie eigentümlich mit dem inhaltlichen Befund (Kapitel 6), den der Autor bei einigen Querschnitten durch die große Menge der Referate in den *Jahrbüchern* jener Zeit gewinnt: Hier findet Siegmund-Schultze fast durchweg nur das erfolgreiche Bemühen, der veröffentlichten Literatur möglichst umfassend und sachlich gerecht zu werden. Dieses Ergebnis kann ihn, geleitet von seiner Hauptthese, offenbar nicht zufriedenstellen, und schließlich (S. 142 oben) wundert er sich gar darüber, daß die „wissenschaftliche ... Verwendbarkeit und ... Verkäuflichkeit" (naiv gesagt: die Qualität) des *Jahrbuchs* für die Mitarbeiter Vorrang haben konnte vor politischen Prämissen. Man könnte sich über diesen Befund natürlich auch freuen.

Erstaunt hat mich die (freilich recht vage und zwei verschiedene Modernitätsbegriffe vermischende) Fußnote 5 auf S. 6, in der Siegmund-Schultze seine Affinität zur neokonservativen Belebung von Dahrendorfs Modernitätsthese über die NS-Gesellschaft (Buch von Prinz und Zittelmann) zu Protokoll gibt, während der Text ihn doch sonst völlig konträr dazu erscheinen läßt – die Gründung des Instituts in Oberwolfach etwa faßt er (S. 184) keineswegs im Sinne der Modernitätstheorie auf.

Eine kürzere, englische Darstellung desselben Themenkomplexes mit stärkerer Beachtung der Entwicklung in den USA (Gründung der *Mathematical Reviews*) hat Siegmund-Schultze vor kurzem in *Historia Mathematica* **21** (1994) 306–329 veröffentlicht.

Strasbourg N. Schappacher

Gabbay, D. M., Hogger, C. J., Robinson, J. A. (Hrsg.), **Handbook of Logic in Artifical Intelligence and Logic Programming** Band 1–5, hier Band 1 (Logical Foundations), Band 2 (Deduction methodologies) und Band 3 (Nonmonotonic Reasoning and Uncertain Reasoning), Oxford University Press 1993 und 1994, 518 und 528 S., £ 60 pro Band

Die Untersuchung logischer Schlußweisen und die Entwicklung entsprechender Logiken hat eine zweieinhalbtausendjährige Geschichte – wenn auch der qualitative und quantitative Umfang des heutigen Wissens über Logik vor allem in diesem Jahrhundert erarbeitet wurde. Die kaum noch überschaubare Fülle des Materials – soweit es sich im weiteren Sinne auf die Künstliche Intelligenz und die Informatik bezieht – wurde und wird von Dov Gabbay als Hauptherausgeber in fast zehn Handbuchreihen mit insgesamt über einhundert Bänden von renommierten Autoren der ganzen Welt zusammengetragen. Die bisher erschienenen Bände sind von Oxford University Press veröffentlicht worden.

Eine dieser Reihen umfaßt das sechsbändige „Handbook of Logic in Artifical Intelligence and Logic Programming", im folgenden kurz Handbuch KI genannt, eine zweite Reihe besteht aus dem „Handbook of Logic in Computer Science". Das Handbuch KI enthält die Bände I: Logical Foundations, II: Deduction methodologies, III: Nonmonotonic reasoning and uncertain reasoning, IV: Epistemic and temporal reasoning, V & VI: Logic programming. Bislang sind die Bände I bis IV erschienen. Hier sollen die uns vorliegenden ersten drei Bände besprochen werden.

Seit der Entstehung des Gebietes „Künstliche Intelligenz" (kurz KI) gibt es eine Grundsatzdiskussion, ob Logik und logikbasierte Verfahren die geeigneten Mittel zum Verständnis von Denken und Intelligenz sind und sich zur Repräsentation und Verarbeitung von Wissen eignen. Diese Frage hat nicht nur die Wissenschaftler zu engagierten Diskussionen angeregt, sondern auch eine starke Weiterentwicklung der Gebiete Logik und Deduktion nach sich gezogen, zum einen mit dem Ziel die Logik zu mechanisieren, zum anderen sie so zu erweitern, daß sie sich zur Repräsentation und Verarbeitung von Wissen eignet und letztlich zur logischen Behandlung typisch menschlicher Schlußweisen – der ursprünglichen Motivation der Logik.

Das Handbuch KI hat sich zum Ziel gesetzt, diese Entwicklung zu beschreiben. Dabei ist natürlich zwischen etabliertem Wissen und sehr neuen Entwicklungen zu unterscheiden. In dieser Besprechung können wir nur einen sehr knappen Eindruck vermitteln.

Der erste Band behandelt die logischen Grundlagen der Künstlichen Intelligenz. Im ersten Beitrag von David J. Israel wird die kontroverse Rolle der Logik in der KI diskutiert, zum einen als Mittel zum Spezifizieren und Analysieren intelligenter Systeme, zum anderen als formales System, innerhalb derer KI-Agenten schließen können. In diesem Diskussionsbeitrag wird auch auf die Rolle sogenannter nicht-monotoner Logiken eingegangen (siehe unten).

Die restlichen Beiträge des ersten Bandes sind allesamt exzellente Darstellungen etablierten Wissens, die man als eine prägnante und in sich geschlossene Darstellung der jeweiligen Teilgebiete ansehen kann. Im einzelnen handelt es sich um die Beträge, *First order logic* (Martin Davis), *Methods and calculi for deduction* (W. Bibel & E. Eder), *Deduction systems based on resolution* (Norbert Eisinger & Hans Jürgen Ohlbach), *Equational reasoning and term rewriting systems* (David A. Plaisted), *Basic modal logic* (Melvin Fitting) und *Logical features of Horn clauses* (Wilfried Hodges), allesamt also Teilgebiete des durch diese etablierten Fachgebietes der Deduktionssysteme.

Der zweite Band trägt den Titel „Deduction Methodologies". Im ersten Beitrag *Logical basis for the automation of reasoning: Case studies* (Larry Works & Robert Veroff) wird an Beispielen die Stärke heutiger automatischer Beweiser demonstriert. Im nächsten Beitrag *Unification Theory* (Frans Baader & Jörg Siekmann) wird die Theorie der zentralen Prozedur automatischer Deduktionssysteme, nämlich die Unifikation, vorgestellt, das heißt ob und wie Terme durch allgemeinste Substitutionen gleich gemacht werden können. Dieser Beitrag ist wie die nächsten beiden über *Mathematical induction* (Christoph Walther) und *Higher order logic* (Daniel Leivant) eine Beschreibung etablierten Wissens. Dies trifft an sich weitgehend auch auf den Beitrag *Meta-languages, reflection principles, and self-reference* (Donald Perlis & V. S. Subrahmanian) zu, allerdings ist dieser Beitrag etwas kurz geraten und in einigen Teilen nicht in sich geschlossen. Der letzte Beitrag *Classical vs non-classical logics (the universality of classical logic)* (D. M. Gabbay) ist ein (sehr technisch ausgerichteter) Diskussionsbeitrag mit sehr vielen interessanten Ideen, in dem insbesondere die Frage beantwortet wird, wie man ein logisches System formal definieren kann, und darauf eingegangen wird, wie Logik und Berechnung zusammenfinden können. Gabbay geht auch auf seine Entwicklung der deduktiven Systeme zur Behandlung annotierter Formeln ein (labeled deductive systems, kurz LDS), mit denen man verschiedene deduktive Systeme einfach modellieren kann.

Im dritten Band wird die Behandlung unsicheren Wissens vorgestellt. Eine der spannendsten Logikentwicklungen der letzten Jahre, die noch andauert, betrifft das sogenannte nicht-monotone Schließen. Formal bedeutet nicht-monotones Schließen, daß (im Gegensatz zum sicheren Schließen in der Mathematik) durch die Erweiterung des Wissensbasis gewisse Fakten nicht mehr abegleitet werden können, die vorher ableitbar waren ($\Gamma \vdash A$, aber $\Gamma \cup \Delta \nvdash A$). Diese Art des Schließens ist für das Alltagsschließen, das praktisch immer mit unvollständiger Information auskommen muß, von großer Bedeu-

tung. Diese wird im ersten Beitrag *AI and Nonmonotonic Reasoning* (Matthew L. Ginsberg) diskutiert. Im nächsten Beitrag *General Patterns in Nonmonotonic Reasoning* (David Makinson) wird ein Überblick und eine Beziehung zwischen verschiedenen Ansätzen des nicht-monotonen Schließens gegeben. In den weiteren Beiträgen zu diesem Thema *Some Direct Theories of Nonmonotocis Inheritance* (John F. Horty), *Default Logic* (David Poole), *Autoepistemic Logic* (Kurt Konolige), *Circumscription* (Vladimir Lifschitz) und *Defeasible Logic* (Donald Nute) werden die verschiedene Hauptansätze des nicht-monotonen Schließens vorgestellt. Die letzten beiden Beiträge *Uncertainty Logics* (Henry E. Kyburg, Jr.) und *Possibilistic Logic* (D. Dubois, J. Lang & H. Parade) behandeln Aussagen und Schlüsse, die nicht nur auf den Wahrheitswerten 0 für falsch und 1 für wahr aufbauen, sondern das ganze Intervall [0, 1] als statistische Werte (oder aber als Werte, die den Grad des Zutreffens einer Eigenschaft angegeben) behandeln.

Abschließend ist zu den drei Bänden zu sagen, daß es den Herausgebern gelungen ist, zu den wichtigsten Bereichen im Grenzbereich zwischen Logik und Künstlicher Intelligenz führende Wissenschaftler zu gewinnen, die durchgängig erstklassige den heutigen Forschungsstand repräsentierende Übersichtsbeiträge geschrieben haben: In einer über mehrere Jahre dauernden Zusammenarbeit der Autoren aller Bände wurde versucht, den für einen einzelnen Wissenschaftler nicht mehr überschaubaren Rahmen der Gebiete abzustecken, im Dialog zu strukturieren und durch geeignete Autoren für das jeweilige Spezialgebiet zu repräsentieren. Wenn man die Informationsflut von einigen zigtausend Einzelveröffentlichungen in jedem einzelnen Spezialgebiet und die enorme Breite und Diversifikation des Gesamtbereiches, der heute auf über hundert Spezialkonferenzen verteilt ist, berücksichtigt, wird die Dimension des Versuchten deutlich.

Um einige wenige negative Kritikpunkte anzumerken: An einigen Stellen würde man wünschen, daß Punkte vertiefter behandelt würden (zum Beispiel sortierte Logiken), ebenso daß einige Beiträge besseren Bezug auf die andere Beiträge nähmen. Es wäre auch gut, dem unbedarften Leser zu helfen, Diskussionsbeiträge von denjenigen zu unterscheiden, die gesichertes, allgemein akzeptiertes Wissen vermitteln.

Das Werk ist sicherlich nicht gedacht, daß man es von der ersten bis zur letzten Seite liest. Will man sich aber über ein Teilgebiet im Bereich Logik und KI einen umfassenden, prägnanten und kompetenten Überblick verschaffen, so wird man schwerlich eine bessere Quelle als das Handbuch KI finden.

Saarbrücken M. Kerber, J. Siekmann

Guillemin, V., Moment Maps and Combinatorial Invariants of Hamiltonian T^n-spaces (Progress in Mathematics 122), Basel u. a.: Birkhäuser 1994, 150 S., DM 78,–

Gegenstand des vorliegenden Buches sind hamiltonsche Wirkungen des n-dimensionalen Torus $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ auf, meist als kompakt vorausgesetzten, symplektischen Mannigfaltigkeiten. Möchte man solche Wirkungen klassifizieren, so hat man ihnen Daten zuzuordnen, die unter der geeigneten Klasse von Isomorphismen invariant sind. Um diese Invarianten zu beschreiben, müssen wir uns etwas genauer anschauen, was eine hamiltonsche Wirkung ist.

Hierzu sei (M, Ω) eine zusammenhängende symplektische Mannigfaltigkeit. Einer glatten Funktion $f \in C^\infty(M)$ ordnen wir ihr Hamiltonsches Vektorfeld $\mathscr{X}_f$ zu, das durch $i_{\mathscr{X}_f}\Omega = -df$ eindeutig bestimmt ist. Durch die Poisson-Klammer $\{f, g\} := \Omega(\mathscr{X}_f, \mathscr{X}_g)$ wird so auf $C^\infty(M)$ die Struktur einer Lie-Algebra definiert. Eine glatte Wirkung $\sigma : G \times M \to M$ einer zusammenhängenden Lie-Gruppe G mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auf M nennen wir hamiltonsch, wenn ein Homomorphismus von Lie-Algebren

$\varphi : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ so existiert, daß

$$\mathscr{X}_{\varphi(X)}(p) = -\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(tX) \cdot p$$

für alle $p \in M$ und $X \in \mathfrak{g}$ gilt. Für jede hamiltonsche Wirkung erhalten wir eine Impulsabbildung (engl.: moment map)

$$\Phi : M \to \mathfrak{g}^* \quad \text{mit} \quad \Phi(p)(X) = \varphi(X)(p).$$

Eine wichtige Eigenschaft der Impulsabbildung ist ihre Äquivarianz bzgl. der Wirkung auf M und der durch $g \cdot f := f \circ \mathrm{Ad}(g)^{-1}$ definierten koadjungierten Wirkung auf $\mathfrak{g}^*$.

In der Impulsabbildung sind im Prinzip die wesentlichen Daten der gesamten Wirkung kodiert, ihre Geometrie ist daher der Schlüssel zum Verständnis hamiltonscher Wirkungen. Sie liefert uns insbesondere zwei wichtige Invarianten: das Bild $\Phi(M)$ der Impulsabbildung und das Duistermaat-Heckman-Maß $\mathfrak{m}_{DH} := \Phi^* \mathfrak{m}_M$ auf $\mathfrak{g}^*$, das man als Bild des Liouville-Maßes $\mathfrak{m}_M$ auf M, d. h. des Maßes, das für $\dim M = 2n$ durch die $2n$-Form $\frac{\Omega^n}{n!}$ gegeben ist, erhält. Für $G = \mathbb{T}^n$ und den Fall einer kompakten Mannigfaltigkeit bilden die Geometrie und Kombinatorik des Bildes $\Phi(M)$ und des Duistermaat-Heckman-Maßes ein zentrales Thema des vorliegenden Buches.

In vielen Fällen kommt es vor, daß man einer durch die Daten (M, Ω, φ) gegebenen hamiltonschen Wirkung eine unitäre Darstellung der Gruppe G auf einem Hilbertraum $\mathscr{H}(M)$ zuordnen kann. Ist G kompakt, so stelle sich die Frage nach den Vielfachheiten mit denen die irreduziblen Darstellungen von G in $\mathscr{H}(M)$ auftreten. Unter geeigneten einschränkenden Voraussetzungen kann man diese Vielfachheiten ebenfalls als Invarianten der hamiltonschen Wirkung betrachten. Diese Invarianten bilden das Hauptthema des vorliegenden Buches.

Das Buch ist erwachsen aus einer Reihe von Vorlesungen des Autors im Rahmen einer Herbstschule zum Thema „Geometry of Hamiltonian Systems" in Woudschoten im Jahr 1992. Es ist daher in einem informellen Stil geschrieben, der sehr nahe an dem eines Vorlesungsskriptes ist. Trotzdem ist die Anzahl der Druckfehler und insbesondere der sinnentstellenden Druckfehler sehr gering.

Der Hauptteil des Buches gliedert sich in 4 Kapitel. Jedes dieser Kapitel beginnt zunächst mit dem ausgearbeiteten Skript der jeweiligen Vorlesung. Daran schließt sich jeweils eine umfangreiche Sammlung von Aufgaben an. Diese Aufgaben sind meist in Blökke aufgeteilt, in denen Themen der zugehörigen Vorlesungen aufgegriffen werden und der Leser schrittweise an die Beweise von einigen schwierigen Sätzen herangeführt wird. Weiter werden hier Themen aufgegriffen, für die in den Vorlesungen keine Zeit mehr blieb. Mir scheinen diese Aufgabensammlungen sehr gut gelungen zu sein, allerdings wird der Leser in einigen Aufgaben eine sehr profunde Vertrautheit mit gewissen Techniken aus Differentialgeometrie und symplektischer Geometrie mitbringen müssen, um die Aufgaben erfolgreich lösen zu können. Jedes Kapitel schließt mit einer umfangreichen Sammlung bibliographischer Bemerkungen, die sich sowohl auf historische Entwicklung als auch auf neuere Entwicklungen und aktuelle Arbeiten beziehen. An die vier Kapitel des Hauptteils schließen sich zwei ausführliche Anhänge über Torus-Varietäten und Kähler-Strukturen auf Torusvarietäten an.

Von nun an sei G immer ein Torus und M kompakt und zusammenhängend. Im ersten Kapitel werden zunächst die grundlegenden Begriffe und Konstruktionen aus dem Bereich der hamiltonschen Gruppenwirkungen erklärt. Insbesondere wird festgestellt, daß $\dim M \geq 2 \dim G$ eine notwendige Bedingung für die Effektivität der Wirkung von G auf M ist. Die einfachste Klasse solcher hamiltonscher Wirkungen sind also die mit $\dim M = 2 \dim G$. Das erste Kapitel befaßt sich mit der Delzantschen Klassifikation dieser Wirkungen. Das Ergebnis dieser Klassifikation ist denkbar einfach: Für jede solche

Wirkung ist das Bild $\Delta := \Phi(M) \subseteq \mathfrak{g}^*$ der Impulsabbildung ein Polytop im Dualraum $\mathfrak{g}^*$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G, das gewisse zusätzliche geometrische Eigenschaften hat. Polytope mit diesen Eigenschaften werden Delzant-Polytope genannt, und Delzant hat gezeigt, daß es bis auf Isomorphie zu jedem Delzant-Polytop genau einen hamiltonschen G-Raum M_Δ mit $\Delta = \Phi(M_\Delta)$ gibt. Die Räume M_Δ nennen wir Delzant-Räume, sie sind Beispiele für glatte Torusvarietäten. Man konstruiert sie als Reduktionen von $\mathbb{C}^n$ bezüglich einer geeigneten linearen Wirkung von G in $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. Untersucht man das Verhalten dieser Räume in Abhängigkeit von λ an einer Stelle λ_0, die ein singulärer Wert der Impulsabbildung ist, so benötigt man Gromovs Begriff der Aufblasungen symplektischer Mannigfaltikeiten um die Veränderungen zu beschreiben.

Das zweite Kapitel behandelt die Sätze von Duistermaat und Heckman. Die Schlüsselsituation ist hier eine hamiltonsche Wirkung σ von $G \cong S^1$ auf M, wobei die Fixpunktmenge M_G von G auf M endlich ist. In diesem Fall ist die Impulsabbildung $\Phi : M \to \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}$ lediglich eine reellwertige Funktion. Die Resultate von Duistermaat und Heckman liefern nun zum einen das „Lemma der exakten stationären Phase", das besagt, daß sich die Fourier-Transformierte $t \mapsto \int_M e^{it\Phi}\frac{\Omega^n}{n!}$ des Duistermaat-Heckman-Maßes als eine Summe $t^{-n/2} \sum_{p \in M_G} m_p$ schreiben läßt, und zum anderen betreffen sie die Variation der symplektischen Struktur auf den Quotienten $M_s := \Phi^{-1}(s)/G$, wobei s ein regulärer Wert von Φ ist. Natürlich sind beide Aspekte wegen $\int_M e^{it\Phi}\frac{\Omega^n}{n!} = \int_{\mathbb{R}} e^{its} \operatorname{vol}(M_s)\, ds$ gekoppelt. Die Duistermaat-Heckman-Theorie wird im zweiten Kapitel in erster Linie für die Delzant-Räume diskutiert, für die man sehr explizite Rechnungen machen kann. Insbesondere läßt sich in diesem Fall zeigen, daß das Duistermaat-Heckman-Maß $\mathfrak{m}_{DH}$ durch die Einschränkung eines Lebesgueschen Maßes auf das Polytop Δ gegeben ist. Der zweite Teil dieses Kapitels beschäftigt sich mit der Variation der Quotienten $(M_\Delta)_s$ für gewisse Kreis-Untergruppen von G. In den Übungen zu diesem Kapitel werden insbesondere die Atiyah-Bott-Berline-Vergne-Versionen der Duistermaat-Heckman-Sätze, sowie einige neuere Verallgemeinerungen von Witten, Kalkmann und Jeffrey-Kirwan diskutiert.

Im dritten Kapitel werden die schon oben erwähnten Vielfachheiten irreduzibler Darstellungen einer kompakten Gruppe G in $\mathcal{O}(M)$ behandelt. Zur Berechnung dieser Vielfachheiten identifiziert man zunächst eine Äquivalenzklasse irreduzibler unitärer Darstellungen von G mit der koadjungierten Bahn $\mathcal{O}$ des zugehörigen höchsten Gewichts α, reduziert M bzgl. $\mathcal{O}$, und identifiziert die gesuchte Vielfachheit als eine Art Riemann-Roch-Invariante $R.R.(M_{\mathcal{O}})$ des induzierten Raumes $M_{\mathcal{O}}$ (Abschnitt 3.1). Für den Delzant-Fall wird in Abschnitt 3.2 eine Formel abgeleitet, die es erlaubt, $R.R.(M_\Delta)$ direkt durch die Geometrie des Polytops Δ zu berechnen. Verfolgt man andererseits die Konstruktion der Delzanträume in Kapitel 1 als Reduktionen $\mathbb{C}^n_\lambda$, so läßt sich die zu $-\lambda \in \mathfrak{g}^*$ gehörende Vielfachheit auch als die Anzahl der Gitterpunkte in dem Polytyp Δ ausdrükken (Abschnitt 3.3), wobei das Gitter in $\mathfrak{g}^*$ durch diejenigen Funktionale gegeben ist, die Charaktere der Torusgruppe G liefern. Damit hat man für die Delzanträume sowohl die Riemann-Roch-Invariante als auch die entsprechenden Vielfachheiten durch die Geometrie von Δ beschrieben.

Um den Beweis der Gleichheit von $R.R.(M_\Delta)$ mit der Anzahl der Gitterpunkte geht es nun in Kapitel 4. Der allgemeine Hintergrund für diese Fragen besteht darin, daß für den Fall, daß die Fixpunktmenge M_G des Torus G in M endlich ist, eine Methode zur Berechnung der gesuchten Vielfachheiten darin besteht, sie als eine Summe der Gestalt $\sum_{p \in M_G}(-1)^{w_p} N_p(\alpha)$ auszudrücken, wobei w_p ein gewisser Orientierungsindex und N_p eine „Partitionsfunktion" ist. Andererseits besagt ein Resultat von Guillemin-Lerman-Sternberg, daß man das Duistermaat-Heckman-Maß in diesem Fall schreiben kann als

$$\mathfrak{m}_{DH} = \sum_{p \in M_G} (-1)^{w_p} \mathfrak{m}_p,$$

wobei $\mathfrak{m}_p$ Lebesgue-Maße auf gewissen Kegeln sind, deren Spitze in $\Phi(p)$ liegt. Der Beweis der gesuchten Identität besteht nun darin, eine Brücke zwischen dieser „kontinuierlichen" Formel und der „diskreten" Version von oben zu schlagen. Für den Delzant-Fall wird dieser Beweis in Kapitel 4 ausgeführt.

Wie schon oben erwähnt besteht der Anhang aus zwei Teilen. Im ersten Teil wird bewiesen, daß die Delzanträume sich als Kählermannigfaltigkeiten realisieren lassen. Hierbei verwendet man deren Konstruktion in Kapitel 1, erhält so eine Realisierung als glatte komplexe Torusvarietät und damit auch die Kählerstruktur. Das Hauptergebnis des zweiten Teils ist eine explizite Formel für die Kählerstruktur, die nur die Daten verwendet, die durch das Polytop Δ gegeben sind. Als Folgerung erhält man die Verschärfung des Delzantschen Satzes, daß nicht nur die symplektische Struktur durch das Polytop bis auf Isomorphie bestimmt ist, sondern, in einem gewissen Sinn, auch die Kählerstruktur.

In meinen Augen liefert das Buch einen sehr guten Einblick in das hochinteressante Gebiet der Zusammenhänge zwischen der kombinatorischen Konvexgeometrie gewisser Polytope und Impulsabbildungen hamiltonscher Toruswirkungen. Es werden, insbesondere auch in den Übungsaufgaben, viele allgemeine Resultate vorgestellt, die zwar nicht in voller Allgemeinheit bewiesen, aber für den Spezialfall der Delzanträume detailliert diskutiert werden. In diesem Sinn durchziehen die Delzanträume als wichtige Beispielklasse das Buch wie einen roten Faden. Ähnlich wie die Torusvarietäten in der algebraischen Geometrie kann man die Delzanträume als eine Beispielklasse betrachten, an der sich allgemeine Phänomene sehr gut veranschaulichen lassen, die andererseits aber auch erlaubt, Sätze zu finden, deren allgemeiner Gültigkeitsbereich noch gar nicht klar ist.

Das Buch ist jedem, der sich für die Zusämmenhänge zwischen symplektischer Geometrie und Konvexgeometrie interessiert, wärmstens zu empfehlen.

Erlangen K.-H. Neeb

Reichenbach, H., Gesammelte Werke in 9 Bänden, Band 7: Wahrscheinlichkeitslehre, Eine Untersuchung über die logischen und mathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Mit Erläuterungen von Andreas Kamlah; hrsg. von Andreas Kamlah und Maria Reichenbach; auf der Grundlage der erweiterten amerikanischen Ausgabe bearbeitet und herausgegeben von Godehard Link), Wiesbaden u. a.: Vieweg 1994, 588 Seiten, DM 198,–

Hans Reichenbach (1898–1953), geb. in Hamburg, promovierte 1915 in Erlangen über das Thema „Der Begriff der Wahrscheinlichkeit für die mathematische Darstellung der Wirklichkeit" (Referenten: Hensel (Philosophie), Max Noether (Mathematik)). Er lehrte 1920/26 an der TH Stuttgart, 1926/33 an der Universität Berlin, 1933/38 an der Universität Istanbul und ab 1938 an der University of California. Er starb in Los Angeles.

Praktisch jeder Mathematiker, der heute Wahrscheinlichkeitstheorie betreibt, tut dies auf der von Kolmogorov 1933 bereitgestellten maßtheoretischen Grundlage. Daß dies kurz vor dem II. Weltkrieg noch keineswegs selbstverständlich war, ist heute weithin in Vergessenheit geraten – der maßtheoretische Ansatz hat durch seinen – verdienten – Erfolg alle konkurrierenden Ideen aus dem Felde geschlagen. Zwei Ausnahmen bestätigen die Regel: einer finit-additiven Wahrscheinlichkeitstheorie hat das in solchem Rahmen abgefaßte geistvolle Buch „How to gamble if you must?" von Dubins-Savage nach 1965 vorübergehend respektvolle Aufmerksamkeit unter Mathematikern verschafft, und

um dieselbe Zeit wurde dem von R. v. Mises 1919 aufgestellten Kollektiv-Begriff durch eine von Kolmogorov initiierte und durch P. Martin-Löf und C. P. Schnorr zu brilliantem Abschluß gebrachte Forschungsentwicklung eine neuartige Gestalt gegeben und ein von einstigen Unklarheiten gereinigter Platz im Archiv grundlegender Ideen gesichert.

Ein mathematisch arbeitender Stochastiker – und an ihn hat sich diese Rezension wohl zu wenden – wird sich, wenn er heute den hier zu besprechenden, auf der Grundlage der Erstauflage von 1935 und einer erweiterten amerikanischen Ausgabe von 1949 edierten deutschen Text zur Hand nimmt, sicherlich zunächst mit der Vorfrage beschäftigen, ob er mit der Lektüre dieses durch die fachliche Entwicklung hoffnungslos ins Abseits gedrängten Werks Ernst machen solle. Dies umso mehr, als das von dem einen der Herausgeber, A. Kamlah, angefügte ausführliche Nachwort mit gebotener Rückhaltlosigkeit schildert und belegt, wie Reichenbach im Verlaufe seiner durch vielfältige Beachtung seitens bedeutender Wissenschaftler und Wissenschaftsphilosophen gekennzeichneten Laufbahn – die neunbändige Gesamtausgabe, deren 7. Band ich hier zu rezensieren habe, belegt diese Tatsache eindrucksvoll – immer wieder mit Schwierigkeiten zu kämpfen hatte, die er sich durch unklare Darlegung, Änderung der eigenen Auffassung und eng-dogmatisches Reagieren selbst bereitet hatte.

Dem steht gegenüber, daß das vorliegende Buch auch dem heutigen Stochastiker eine beachtliche Vielfalt an konkretem Beispielmaterial – besonders entzückt hat mich eine Ergebniskurve des von E. Kappler angestellten Drehspiegel-Experiments zur Brownschen Bewegung (Ann. d. Phys. 11 (1931)) – und ein weites Feld an heute üblicherweise vernächlässigten, weil für Mathematiker forschungsirrelevant gewordenen Diskussionsgegenständen anzubieten hat. Ich möchte meinen, daß die Lektüre für einen mathematischen Stochastiker von heute vor allem dann lohnend werden könnte, wenn er sich speziell für die Geschichte seines Fachs in der Zeit zwischen den beiden Weltkriegen interessiert und, was gewiß zu loben wäre, das Bedürfnis verspürt, das ihm selbstverständlich Gewordene noch einmal der Prüfung im Lichte damaliger Vorbringungen zu unterziehen.

Das Kapitelverzeichnis – 1. Einleitende Betrachtungen. 2. Einführung in die symbolische Logik. 3. Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung. 4. Theorie der Ordnung der Wahrscheinlichkeitsfolgen. 5. Wahrscheinlichkeitsfolgen mit zugeordneten Betragsstufen. 6. Stetige Erweiterungen des Begriffs der Wahrscheinlichkeitsfolge. 7. Die Häufigkeitseigenschaften der Wahrscheinlichkeitsfolgen. 8. Theorie der Wahrscheinlichkeiten höherer Stufe. 9. Das Anwendungsproblem. 10. Wahrscheinlichkeitslogik. 11. Induktion. Anhang: 21 S. Erläuterungen: 26 S. – läßt die starke Verquickung von Reichenbachs Ansatz mit Fragen der formalen Logik einerseits und der Häufigkeitsdeutung im Sinne von z. B. v. Mises andererseits erkennen. Den üblichen logischen Ausdrucksmitteln wird z. B. die Wendung „gilt A, so gilt B mit Wahrscheinlichkeit p" hinzugefügt. Die Häufigkeitsdeutung liefert ein Modell der so erweiterten Logik-Aufbaus.

Eingeschränkte Empfehlung für speziell, insbesondere historisch Interessierte.

Erlangen K. Jacobs

Kanamori, A., The Higher Infinite, Large Cardinals in Set Theory from the Beginnings, (Ω-Perspectives in Mathematical Logic), Berlin u. a.: Springer 1994, 536 S., DM 178,–

„Beginnings" im Untertitel dieses Buches sollten Sie keinesfalls mit „Beginners" verwechseln. Dieses erstaunliche Buch, im Konzept der Ω-Gruppe geboren, soll den Leser mit der Entwicklung und dem Stand der Forschung über große Kardinalzahlen vertraut machen, einem brodelnden Forschungsgebiet, zu dessen „Arithmetik" auch Shelah kürzlich einen Band hinzugefügt hat.

In leider knappen 15 Seiten werden die mengentheoretischen Grundlagen ohne Beweisansätze aufgearbeitet, wozu andere Bücher etwa der Autoren Devlin, Jech, Kunen, Levy einige hundert Seiten benötigen. Wer diese Kröte geschluckt hat, oder die Grundlagen kennt oder auf einen der anderen Autoren ausgewichen ist – bei trotzdem nahezu 550 Seiten zum eigentlichen Thema kann man dem Autor diese Abkürzung vielleicht verzeihen – findet ab „Chapter 1, Beginnings" ein faszinierendes Buch, das viele historische Fakten aufarbeitet, Ursprünge richtig stellt oder klärt und Resultate im Zusammenhang mit knappen aber verständlichen Beweisen untermauert.

Der Leitgedanke für diesen Band ist die seit Cantor, Zermelo und Hausdorff in Gang gesetzte Hierarchie der großen Kardinalzahlen, ihre Rolle bei der Weiterentwicklung der Mengenlehre, ihre Wechselwirkung zur Analysis, Maßtheorie und ihre Rolle bei der Beschreibung von Konsistenzaussagen. Ich fühlte mich immer wieder ertappt, die begleitenden, interessanten, historischen Bemerkungen zu lesen, denen Sie mehr Zeit gönnen sollten, als Sie vermutlich opfern wollten, aber es lohnt sich.

Da Forcing-Methoden und Aspekte über innere Modelle einem eigenen Band der Ω-Reihe gewidmet sein werden, dürfen sie hier knapp wegkommen, ohne die Zielsetzung zu vernachlässigen.

Der Autor hatte 1978 gemeinsam mit Menachem Magidor einen sehr ausführlichen Übersichtsartikel über die Entwicklung von Kardinalzahlen geschrieben – er ist also ein Fachmann und leitet den Leser von (schwach) unerreichbaren Kardinalzahlen über schwach kompakte Kardinalzahlen, $0^{\#}, \ldots$, Jonsson, Rowbottom, Ramsey über meßbare, stark kompakte zu den riesigen (huge) Kardinalzahlen, bis zur Grenze der Inkonsistenz, die sich in Kunens berühmten Satz widerspiegelt: Es gibt keine elementare Einbettung von L (dem Gödelschen Universum) in sich.

Lassen Sie mich in wenigen Abschnitten etwas mehr zum Inhalt der sechs Kapitel dieses Buches sagen, eines Buches, das ich gern als Nachschlagewerk, oder als ein Lesebuch zum Kardinalzahlaspekt empfehlen möchte. Es ist wegen seiner Einmaligkeit eine Bereicherung der mathematischen Literatur, die nicht nur einen Mengentheoretiker, sondern auch einen offenen, interessierten Mathematiker anderen Couleurs ansprechen sollte.

Einer der Drehpunkte zur Entwicklung eines besseren Verständnisses großer Kardinalzahlen war 30 Jahre lang die Frage, ob unerreichbare Kardinalzahlen (die man nicht durch 2er-Potenz erhalten kann) meßbar sind, also (als Menge) ein nicht-triviales 0-1-Maß zulassen. Über die Untersuchung von Sprachen höherer Ordnung, kompakten Kardinalzahlen von Tarski fand sein Schüler Hanf u. a. zahlreiche Gegenbeispiele, ein Thema, das in Kapitel 1 zusammen mit Kunens Satz untersucht wird. Allein dieses Kapitel enthält (folgerichtig) als Korollare viele der Resultate, die uns verraten, in welchen Universen welche der großen Kardinalzahlen verboten sind, exemplarisch sei Scotts bekannter, über Ultrapotenzen bewiesener Satz genannt, daß meßbare Kardinalzahlen in Gödels Universum L nicht zu finden sind. Die „richtige Formulierung" der Frage über die Existenz meßbarer Kardinalzahlen mittels elementarer Einbettungen in innere Modelle schließt Kapitel 1.

Scotts Satz führt direkt zu Kapitel 2. Es enthält viele Verallgemeinerungen des kombinatorischen Satzes von Ramsey über Zerlegungsverhalten von Kardinalzahl-(paar)en, ein Resultat, das in vielen Gebieten der Mathematik, in Statistik wie in der Algebra nutzbringend angewandt werden kann. Hierzu gehören die Stichworte Rowbottom-, Jónsson-Kardinalzahlen und Silvers Menge der „indiscernibles".

Im Kontrast zu Universen nahe L werden in Kapitel 3 mit „forcing" Methoden – auf Cohens berühmter Konsistenzaussage zu $\neg CH$ aufbauend, primär Solovay folgend, Modelle untersucht, in denen alle Teilmengen von R Lebesgue meßbar sind, Speckers Satz über perfekte Mengen und $\aleph_1$ erscheint im neuen Licht und weitere Konsistenzaussagen bilden das zentrale Thema dieses Abschnitts.

Kapitel 4 greift diese Fragestellung in verfeinerter Form auf, iterierte Ultrapotenzkonstruktionen und Gaifman-Kunens Struktursätze über innere Modelle der Meßbarkeit werden detailliert hergeleitet und diskutiert. Kunens vielzitierter Satz über die Existenz von $0^{\#}$ und Solovays Analogon über $0^{\dagger}$ bilden den Höhepunkt.

Kapitel 5 ist der Theorie sehr großer Kardinalzahlen und z. B. dem Vopenka-Prinzip (Existenz beliebig großer starrer Systeme, was die Radikaltheorie der Algebra beeinflußt) gewidmet. Die Grenze zur Inkonsistenz wird ausgeleuchtet. Das abschließende Kapitel ist ein interessanter Exkurs über Determiniertheit (von Spielen), wo viele Publikationen des letzten Jahrzehnts aufgearbeitet werden.

Auch wenn man bei der Planung der Ω-Gruppe den naheliegenden Verdacht eines Bourbaki-Konzeptes haben mag, so spricht die Wahl der Autoren und hier die Anlage des Buches dagegen. Es wird kein starres, autobahnähnliches Prinzip verkauft, es bleiben genug „loose ends" und schmale Wege, die ein interessierter Leser und Forscher weiter ausbauen kann. Ein Bild eines lebendigen Forschungsgebietes wird realitätsnah vermittelt.

Essen R. Göbel

Snaith, V. P., Galois Module Structure (Fields Institute Monographs), Providence: AMS 1994, 208 S., $ 39.–

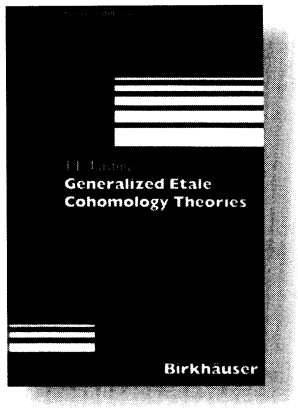
Mit der Aufdeckung von Galoisstrukturen ausgezeichneter arithmetischer Objekte beschäftigen sich Zahlentheoretiker schon seit geraumer Zeit und ganz besonders intensiv seit nunmehr ca. 25 Jahren. Im Mittelpunkt des Interesses stehen dabei die $\mathbb{Z}G$-Moduln *Klassengruppe* cl_K, *Einheiten* E_K *und Ganzheitsring* $\mathfrak{o}_K$ einer endlichen galoisschen Zahlkörpererweiterung K/k mit Gruppe G. So resultieren etwa aus den Arbeiten im Zusammenhang mit der Hauptvermutung Beziehungen der beiden Moduln cl_K und E_K zueinander und darüber hinaus zu analytischen Daten, wie zu L-Werten. Eines der schönsten gegenwärtigen Ergebnisse hinsichtlich der Galoisstruktur-Beschreibung von $\mathfrak{o}_K$ ist das von Fröhlich und Taylor, welches im Fall einer höchstens zahm verzweigten Erweiterung K/k den dann lokal freien $\mathbb{Z}G$-Modul $\mathfrak{o}_K$ (E. Noether) als frei ausweist, falls die Artinschen Wurzelzahlen W_χ aller symplektischen Charaktere χ von G trivial sind.

Das vorliegende Buch von V. Snaith ist die zweite Monographie zum angesprochenen Themenkreis, nach Fröhlichs *Galois Module Structure of Algebraic Integers* (Springer-Verlag, 1983). Wie dieses behandelt es in der Hauptsache die additive Theorie, also $\mathfrak{o}_K$; für die multiplikative Theorie, die sich mit dem Studium der Einheiten befaßt, muß man entweder auf Tates Buch *Les Conjectures de Stark sur les Fonctions L d'Artin en* $s=0$ (Birkhäuser-Verlag, 1984) oder auf Chinburgs Bericht *The analytic theory of multiplicative Galois structure* (Memoirs of the AMS, 1989) zurückgreifen oder auf das im Druck befindliche Buch von Weiss *Multiplicative Galois module structure* (AMS) warten. Vom potentiellen Leser werden Grundkenntnisse aus der algebraischen Zahlentheorie erwartet, so Teile der Klassenkörpertheorie, sowie solche aus der Darstellungstheorie endlicher Gruppen; es ist aber bezüglich der eigentlich zur Diskussion stehenden Theorie, eben der der Galoisstrukturen, im wesentlichen voraussetzungsfrei geschrieben. *Im wesentlichen* heißt, daß nicht alles und jedes bis in Einzelheiten hinein präsentiert und bewiesen wird, sondern oft nur angedeutet oder zitiert ist; dennoch sind die wichtigsten der bis zum Erscheinen des Buches vorhandenen Ergebnisse aufgenommen und, zumindest in signifikanten Spezialfällen, mit vielfach neuen Beweisen vorgestellt. Das trifft insbesondere auf das bereits erwähnte Theorem von Fröhlich und Taylor zu und genauso auf die von Holland stammende Teilverifikation einer von Chinburgs Vermutungen, nämlich daß die

Wurzelklasse W mit der über die lokalen Fundamentalklassen von K/k definierten zweiten Chinburg-Invariante Ω_2 jedenfalls modulo der Kerngruppe $D(\mathbb{Z}G)$ übereinstimmt. Der Autor macht dabei in seiner Argumentation wiederholt Gebrauch von der sogenannten *expliziten Brauer-Induktion von Charakteren,* die auf ihn und Boltje zurückgeht. Mit Bezug auf die Lesbarkeit der Beweise muß ich allerdings einschränkend bemerken, daß mir die Notationen meist überladen und deshalb selten auf Anhieb verständlich erscheinen. Das zweite Kapitel mit der Bestätigung von $\Omega_2 = W$ im Falle $k = \mathbb{Q}, K \subset \mathbb{Q}\ (\zeta_{p^{s+1}})^+$, $[K:\mathbb{Q}] = p^s, p \geq 3$ gefällt mir am besten; es zeigt auch auf schöne Weise die für den Autor in dieser Theorie typische Vorgehensweise an. Kapitel 1 stellt Grundbegriffe zur Verfügung und erinnert dabei an relevante Hilfsmittel wie Tate-Kohomologie, lokale Körper samt Reziprozitätsgesetz, explizite Brauer-Induktion von Gruppencharakteren, Artinsche und p-adische L-Funktionen, Führer, Wurzelzahlen und Gaußsummen. Kapitel 2 beginnt mit der Wiederholung von Fröhlichs sogenannter Hom-Beschreibung der Klassengruppe einer arithmetischen Ordnung, hier insbesondere der von $\mathbb{Z}G$ und der einer Maximalordnung $\mathfrak{M}$ der rationalen Gruppenalgebra $\mathbb{Q}G$, und schließt mit obengenannter Anwendung auf Kreiskörper. Das dritte Kapitel behandelt Determinanten-Kongruenzen mit Folgerungen für den auf Taylor zurückgehenden Gruppenring-Logarithmus, dem eine entscheidende Rolle im Beweis des Satzes von Fröhlich und Taylor zukommt. Der selbst wird im folgenden Kapitel für den Fall einer zahmen Erweiterung von Primzahlpotenzgrad durchgeführt. Kapitel 5 greift die in Arbeiten von Fröhlich, Holland und Wilson vorgestellte Theorie der kanonischen Faktorisierbarkeit auf, mit welcher man repräsentierende Galoishomomorphismen der Elemente der Klassengruppe einer Maximalordnung $\mathfrak{M}$ finden kann, und endet mit dem Beweis von Hollands bereits genannten Ergebnis hinsichtlich des Zusammenhangs von Ω_2 und W in $cl(\mathfrak{M})$, in nahezu allgemeiner Situation. Das sechste Kapitel ist ebenfalls mit Ω_2 und W beschäftigt, jetzt aber in der Klassengruppe $cl(\mathbb{Z}G)$ selbst und nur für gewisse Quaternionenerweiterungen K vom Grad 8 über $\mathbb{Q}$; es baut zu einem gewissen Teil auf Arbeiten von Kim aus dem Jahr 1991 auf. Die vielen mühsamen Rechnungen haben den Referenten sehr bald zum schnellen Weiterblättern verleitet. Das letzte Kapitel verallgemeinert von den bekannten Chinburg-Invarianten Ω_2, Ω_3 weg zu ähnlich definierten Invarianten für höhere K-Gruppen von Ringen ganzer Zahlen (Ω_2, Ω_3 gehören zu K_0 beziehungsweise K_1); eine solche wird mit Hilfe der Birch-Tate-Vermutung in $cl(\mathfrak{M})$ für reelles K berechnet. Weitere Ergebnisse werden nicht mehr vorgestellt; solche von Bedeutung sind tatsächlich auch erst seit Erscheinen des Buches (vom Autor zusammen mit Chinburg, Pappas und Kolster und auch von Burns) erzielt worden. Es sei noch angemerkt, daß inzwischen von Greither die Gleichheit $\Omega_2 = W$ in $cl(\mathbb{Z}G)$ für nahezu alle Teilkörper von Kreiskörpern bewiesen wurde und daß seit Erscheinen dieses Buches einige neue Resultate zur Galoisstruktur von S-Einheiten vorliegen, die ja hier, wie schon erwähnt, fast gänzlich übergegangen sind (so von Burns, Fröhlich, Greither und Holland, Ritter und Weiss, Gruenberg und Weiss).

Augsburg J. Ritter

Mathematik bei Birkhäuser



Progress in Mathematics

Edited by
***Hyman Bass**, Columbia University New York, NY, USA*
***Joseph Oesterlé**, Institut Henri Poincaré, Université Paris VI, France*
***Alan Weinstein**, University of California, Berkeley, CA, USA*

Progress in Mathematics is a series of books intended for professional mathematicians and scientists, encompassing all areas of pure mathematics. This distinguished series, which began in 1979, includes research level monographs, polished notes arising from seminars or lecture series, graduate level textbooks, and proceedings of focused and refereed conferences. It is designed as a vehicle for reporting ongoing research as well as expositions of particular subject areas.

Kürzlich erschienene Titel in dieser Reihe

PM 149
J.-M. Souriau, Université de Provence (Ed.)

Structure of Dynamical Systems
A Symplectic View of Physics

Translated & Edited by C.H. Cushman and G.M. Tuynman
1997. tent. 400 pages. Hardcover
tent. DM 148.–/öS 1081.–/sFr.128.–
ISBN 3-7643-3695-1

PM 148
Y.Z. Huang, Rutgers University, New Brunswick, NJ, USA

Two-Dimensional Conformal Geometry and Vertex Operator Algebras

1997. tent. 285 pages. Hardcover
tent. DM 94.–/öS 686.–/sFr. 78.–
ISBN 3-7643-3829-6

PM 146
J.F. Jardine, University of Western Ontario, Canada

Generalized Etale Cohomology Theories

1997. 328 pages. Hardcover
DM 118.–/öS 862.–/sFr. 98.–
ISBN 3-7643-5494-1

PM 145
C. Albert / R. Brouzet / J.P. Dufour, Université Montpellier II, France (Eds)

Integrable Systems and Foliations
Feuilletages et Systemes Integrables

1997. 218 pages. Hardcover
DM 138.–/öS 1008.–/sFr. 118.–
ISBN 3-7643-3894-6

PM 144
A. Bellaïche, Université de Paris VII-Denis Diderot, France / **J.-J. Risler**, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France (Eds)

Sub-Riemannian Geometry

1996. 396 pages. Hardcover
DM 108.–/öS 789.–/sFr. 88.–
ISBN 3-7643-5476-3

PM 143
L. González-Vega / T. Recio, Facultad de Ciencias, Santander, Spain (Eds)

Algorithms in Algebraic Geometry and Applications

1996. 416 pages. Hardcover
DM 128.–/öS 934.40/sFr. 108.–
ISBN 3-7643-5274-4

PM 142
J.D. Monk, University of Colorado, CO, USA

Cardinal Invariants on Boolean Algebras

1996. 298 pages. Hardcover
DM 78.–/öS 569.40/sFr. 68.–
ISBN 3-7643-5402-X

Bitte bestellen Sie bei Ihrer Buchhandlung oder direkt bei:
Birkhäuser Verlag AG
Postfach 133
CH-4010 Basel / Schweiz
FAX: +41/61/205 07 92
e-mail:farnik@birkhauser.ch

Birkhäuser
Birkhäuser Verlag AG
Basel · Boston · Berlin

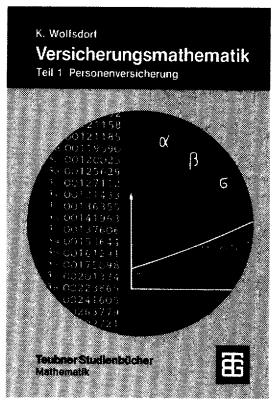
Preisänderungen / -irrtum vorbehalten. 3/97

Besuchen Sie uns im Internet unter **http//www.birkhauser.ch**

Wolfsdorf

Versicherungs-mathematik

Teil 1 Personenversicherung



Im ersten Teil der *Versicherungsmathematik* wird die Mathematik der Personenversicherung dargestellt. Ausgehend von den Kenntnissen, über die ein Mathematikstudent zum Ende des Grundstudiums verfügt, werden in dem klassischen Aufbau der Versicherungsmathematik die einzelnen Gebiete vorgestellt. Es wurden auch Darstellungsweisen zugelassen, die aus heutiger Sicht als nicht zeitgemäß gelten. Dies ist an den Stellen der Fall, an denen herkömmliche Darstellungsformen heute noch weit verbreitet sind und möglicherweise einer Vorstellung entsprechen, die der heute gängigen mathematischen Denkweise widerspricht, aber dennoch zu den gleichen Resultaten führt, wie eine Darstellungsform, die den oben genannten Disziplinen adäquat ist. Die Anwendung der EDV in der Versicherungsmathematik ist ein Schwerpunkt dieses Buches. Den Veränderungen der rechtlichen Rahmenbedingungen für die Personenversicherer wurde in der zweiten Auflage Rechnung getragen

Von Prof. Dr.
Kurt Wolfsdorf
Hamburg-Mannheimer Versicherungs-AG, Hamburg

2., überarbeitete und erweiterte Auflage.
1997. 415 Seiten mit zahlreichen Bildern, Tabellen und Aufgaben.
13,7 x 20,5 cm.
Kart. DM 54,80
ÖS 400,–/ SFr 49,–
ISBN 3-519-12072-0

Teil 2 Theoretische Grundlagen, Risikotheorie, Sachversicherung

1988. VIII, 399 Seiten mit zahlreichen Bildern, Tabellen und Aufgaben.
Kart. DM 42,80
ÖS 312,–/SFr 39,–
ISBN 3-519-02073-4

(Teubner Studienbücher)

Preisänderungen vorbehalten.

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig
Postfach 80 10 69 · 70510 Stuttgart

de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications

Editors:
A. Bensoussan, Paris, France • R. Conti, Florence, Italy • A. Friedman, Minneapolis, USA • K.-H. Hoffmann, Munich, Germany • L. Nirenberg, New York, USA • Managing Editors: J. Appell, Würzburg, Germany • V. Lakshmikantham, Melbourne, USA

4 TOMÁŠ ROUBÍČEK

Relaxation in Optimization Theory and Variational Calculus

1997. 24 x 17 cm. XIV, 474 pages. Cloth DM 298,–/öS 2.175,–/sFr 265,–
• ISBN 3-11014542-1

Introduces the reader to a relaxation method based on a continuous extension of various optimization problems on so-called convex compactifications, which proves useful when dealing particularly with problems in optimal control theory, calculus of variations, and non-cooperative game theory.

3 THOMAS RUNST • WINFRIED SICKEL

Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations

1996. 24 x 17 cm. X, 547 pages. Cloth DM 268,–/öS 1.956,–/sFr 239,–
• ISBN 3-11-015113-8

Concerns the theory of nonlinear boundary value problems in function spaces. Focus is on the analysis of semilinear elliptic boundary value problems in Sobolev spaces of fractional order. Here methods from Fourier analysis and the theory of function spaces are used to study existence and multiplicity results in the general framework of Besov–Triebel–Lizorkin spaces.

2 NIKOLAI A. BOBYLEV • YURI M. BURMAN • SERGEY K. KOROVIN

Approximation Procedures in Nonlinear Oscillation Theory

1994. 24 x 17 cm. XI, 272 pages. Cloth DM 158,–/öS 1.153,–/sFr 141,–
• ISBN 3-11-014132-9

"This is an excellent book on nonlinear analysis, approximate methods, and applications to oscillation theory. The book is written on the highest mathematical level, but also in such a way that engineers can enjoy it. A mathematician will find vivid models of oscillation theory; an engineer will find ways to apply deep mathematical analysis to engineering problems; both will see how approximate methods can be developed to meet the needs of concrete problems ..." *SIAM Reviews*

1 KLAUS DEIMLING

Multivalued Differential Equations

1992. 24 x 17 cm. XI, 257 pages. Cloth DM 158,–/öS 1.153,–/sFr 141,–
• ISBN 3-11-013212-5

"This new book is a comprehensive monograph on differential inclusions. Thanks to its lively expository style and well-balanced selection of topics, it can make an excellent text for an introductory course on the subject, primarily addressed to graduate students in mathematics with a basic knowledge of Banach spaces and Lebesgue measure theory. On the other hand, researchers will find it a valuable reference because many of its sections represent the current state of the art... I believe this work will remain a basic reference for whomever is interested in differential inclusion in years to come." *SIAM Reviews*

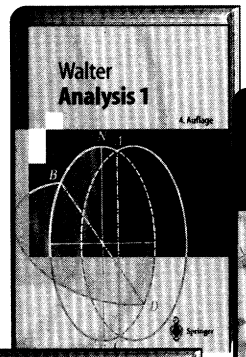
Prices are subject to change

WALTER DE GRUYTER & CO
Genthiner Straße 13 · D–10785 Berlin
Tel. +49 (0)30 2 60 05–0
Fax +49 (0)30 2 60 05–251
Internet: http://www.deGruyter.de

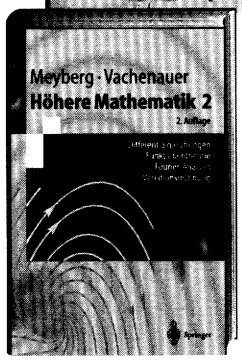
W DE G de Gruyter
Berlin · New York

Wissen, was zählt!

W. Walter,
Universität Karlsruhe
Analysis 1
4., korr. Aufl. 1997.
Etwa 388 S. 145 Abb.
Brosch. **DM 49,90**;
öS 364,30; sFr 44,50
ISBN 3-540-62062-1

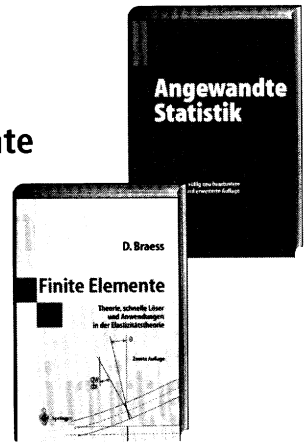


K. Meyberg, P. Vachenauer,
TU München
Höhere Mathematik 2
Differentialgleichungen, Funktionentheorie Fourier-Analysis, Variationsrechnung
2., stark überarb. Aufl. 1997.
Etwa 460 S. 496 Abb. Brosch.
DM 54,-; öS 394,20; sFr 48,-
ISBN 3-540-62398-1



H. Kurzweil, Universität Erlangen-Nürnberg;
B. Stellmacher, Universität Kiel
Theorie der endlichen Gruppen
Eine Einführung
1997. Etwa 250 S. Brosch.
DM 44,-; öS 321,20; sFr 39,50
ISBN 3-540-60331-X

D. Braess,
Universität Bochum
Finite Elemente
Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie
2., überarb. Aufl. 1997.
Etwa 318 S. 47 Abb.
Brosch. **DM 69,-**;
öS 503,70; sFr 61,-
ISBN 3-540-61905-4



L. Sachs
Angewandte Statistik
Anwendung statistischer Methoden
8., völlig neubearb. u. erw. Aufl. 1997. XXXII,
846 S. 91 Abb. u. grafische Darstellung. Brosch.
DM 98,-; öS 715,40; sFr 86,50
ISBN 3-540-60494-4
Der „Sachs" ist *das* Standardwerk zum Lernen, Anwenden und Nachschlagen statistischer Methoden.

Besuchen Sie unsere Homepage mit dem kompletten Lehrbuchverzeichnis auf dem World Wide Web: httpp://www.springer.de

Springer

Preisänderungen vorbehalten • d&p.4160.MNTL/E/1

Springer-Verlag · Postfach 31 13 40 · D-10643 Berlin
Tel.: 030 / 82 787 - 0 · http://www.springer.de
Bücherbestellung
Fax 0 30 / 82 787 - 3 01
e-mail: orders@springer.de