

D 20577

102. Band Heft 2

ausgegeben am 11.9.2000

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel



B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte:

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Bilddaten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

<http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html>

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Verlag:

GWV Fachverlage
B. G. Teubner GmbH Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden
Postfach 15 46, 65173 Wiesbaden
Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden
<http://www.teubner.de>
<http://www.gvv-fachverlage.de>

Geschäftsführer: Dr. Hans-Dieter Haenel
Verlagsleitung: Dr. Heinz Weinheimer
Gesamtleitung Anzeigen: Thomas Werner
Gesamtleitung Produktion: Reinhard van den Hövel
Gesamtleitung Vertrieb: Heinz Detering

Abo-/Leserservice:

Tatjana Hellwig
Telefon: (06 11) 78 78-1 51
Fax: (06 11) 78 78-4 23
E-Mail: tatjana.hellwig@bertelsmann.de

Marketing/Sonderdrucke:

Stefanie Hoffmann
Telefon: (06 11) 78 78-3 79
Fax: (06 11) 78 78-4 39
E-Mail: stefanie.hoffmann@bertelsmann.de

Abonnenentenverwaltung:

(Änderung von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung) VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6/Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,
Postfach 7777, 33310 Gütersloh
Ursula Müller
Telefon: (0 52 41) 80-19 65
Fax: (0 52 41) 80-96 20
E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

Bezugsbedingungen:

Die Zeitschrift erscheint 4 mal jährlich zum Jahresabonnementspreis von DM 178 (1299 öS; 158 sFr) inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Copyright ©

B. G. Teubner GmbH, Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden 2000. Printed in Germany. Der Verlag Teubner ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer. Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil dieser Zeitschrift darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages vervielfältigt oder verbreitet werden. Unter dieses Verbot fällt insbesondere die gewerbliche Vervielfältigung per Kopie, die Aufnahme in elektronischen Datenbanken und die Vervielfältigung auf CD-ROM und allen anderen elektronischen Datenträgern.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

ISSN 0012-0456

Aktuelle Darstellung zur Stochastischen Geometrie

Rolf Schneider

Stochastische Geometrie

2000. VIII, 359 S. (Teubner Skripten zur Mathematischen Stochastik)

Br. DM 84,00

ISBN 3-519-02740-2

Der Inhalt:

Zufällige Mengen im euklidischen Raum - Punktprozesse -
Geometrische Modelle - Funktionaldichten und Stereologie - Zufällige
Mosaïke

Ziel dieses Buches ist die Beschreibung zufälliger geometrischer
Strukturen durch geeignete mathematische Modelle. Es werden zwei
Grundmodelle, die Punktprozesse von Mengen, eingeführt und unter-
sucht. Sie werden spezialisiert auf die für Anwendungen wichtigsten
Strukturen, wie das Boolesche Modell, Geraden- und Ebenenprozesse,
zufällige Mosaïke. Gestützt auf integralgeometrische Ergebnisse, wer-
den die grundlegenden Formeln der Stereologie bereitgestellt.
Besonderer Wert wird auf vollständige und ausführliche Beweise
sowie auf die Verwendung möglichst einfacher geometrischer Objekte
gelegt, die dennoch für Anwendungen hinreichend allgemein sind.

Die Autoren / Herausgeber:

Professor Dr. phil. nat. Rolf Schneider, Albert-Ludwigs-Universität
Freiburg i.Br., Professor Dr. phil. nat. Wolfgang Weil, Universität
Karlsruhe



Abraham-Lincoln-Str. 46
65189 Wiesbaden
Fax: 06 11.78 78-400

Stand: August 2000
Änderungen vorbehalten

Mathematik als Teil der Kultur

Martin Aigner und Ehrhard Behrends (Hrsg.)

Alles Mathematik

Von Pythagoras zum CD-Player

2000. VIII, 296 S. Geb. ca. DM 49,00

ISBN 3-528-03131-X

An der Berliner Urania, der traditionsreichen Bildungsstätte mit einer großen Breite von Themen für ein interessiertes allgemeines Publikum, gibt es seit einiger Zeit auch Vorträge, in denen die Bedeutung der Mathematik in Technik, Kunst, Philosophie und im Alltagsleben dargestellt wird. Im vorliegenden Buch ist eine Auswahl dieser Urania-Vorträge dokumentiert, etwa zwanzig sorgfältig ausgearbeitete Beiträge renommierter Referenten, die mit den gängigen Vorurteilen "Mathematik ist zu schwer, zu trocken, zu abstrakt, zu abgehoben" aufräumen. Denn Mathematik ist überall in den Anwendungen gefragt, weil sie das oft einzige Mittel ist, praktische Probleme zu analysieren und zu verstehen. Vom CD-Player zur Börse, von der Computertomographie zur Verkehrsplanung, alles ist (auch) Mathematik. Wer hätte gedacht, dass die Primzahlen, die schon seit der Antike die Mathematiker beschäftigen, heute ganz wesentlich zu unserer Datensicherheit beitragen? Es ist die Hoffnung der Herausgeber, dass zwei wesentliche Aspekte der Mathematik deutlich werden: Einmal ist sie die reinste Wissenschaft - Denken als Kunst -, und andererseits ist sie durch eine Vielzahl von Anwendungen in allen Lebensbereichen gegenwärtig.

Mathematiker: Ein Beruf mit Zukunft

Vieweg Berufs- und Karriere-Planer: Mathematik - Schlüsselqualifikation für Wirtschaft, Technik, IT

Für Studenten und Hochschulabsolventen. Mit ca. 150 Firmenprofilen

2000. ca. XIV, 530 S. Br. ca. DM 29,80

ISBN 3-528-03157-3

Der Inhalt: Warum Mathematik studieren? - Wahl der Hochschule und des Studiengangs - Aufbau und Inhalt des Mathematik-Studiums an Universitäten - Das Mathematik-Studium an Fachhochschulen - Organisation des Studiums - Finanzierung des Studiums - Weiterbildung nach dem Studium - Bewerbung und Vorstellung - Arbeitsvertrag und Berufsstart - Branchen und Unternehmensbereiche - Beispiele für berufliche Tätigkeitsfelder von Mathematikern - Interviews mit Praktikern - Unternehmensprofile - Existenzgründung: Tipps zur Selbständigkeit - Kontaktadressen - Literatur



Abraham-Lincoln-Str. 46
65189 Wiesbaden
Fax: 06 11.78 78-400

Stand: August 2000
Änderungen vorbehalten

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 102, Heft 2

1. Abteilung

M. Aigner: Die Ideen von Penrose zum 4-Farbenproblem	43
R. Thiele: Felix Klein in Leipzig	69

2. Abteilung

Chung, F., Graham, R.: Erdős on Graphs, His Legacy of unsolved Problems (<i>R. Diestel</i>)	23
Goldman, J. R.: The Queen of Mathematics: a historically motivated guide to number theory (<i>J. Köhn</i>)	24
Koecher, M., Krieg, A.: Elliptische Funktionen und Modulformen (<i>M. Peters</i>)	25
Braess, D.: Finite Elements Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics (<i>H. Blum</i>)	26
Killing, W.: Briefwechsel mit Friedrich Engel zur Theorie der Lie-Algebren (<i>B. Fritzsche</i>)	28
Goldstern, M., Judah, H.: The Incompleteness Phenomenon, A New Course in Mathematical Logic (<i>S. Koppelberg</i>)	31
Polyanin, A. D., Manzhirov, A. V.: Handbook of Integral Equations (<i>B. Silbermann</i>)	32

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

M. Aschbacher: The classification of finite simple groups

A. Grevén: Interacting stochastic systems: Longtime behavior and its renormalization analysis

B. Carl, C. Schiebold: Ein direkter Ansatz zur Untersuchung von Solitonengleichungen

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, 52056 Aachen
E-Mail: krieg@mathA.rwth-aachen.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund
E-Mail: gather@statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg
E-Mail: heintze@math.uni-augsburg.de

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln
E-Mail: kawohl@mi.uni-koeln.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1 1/2, 91054 Erlangen
E-Mail: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität, Ernst-Abbe-Platz 1–4, 07740 Jena
E-Mail: triebel@minet.uni-jena.de

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Die Ideen von Penrose zum 4-Farbenproblem

M. Aigner, Berlin

1 Einleitung

Im Jahre 1971 veröffentlichte Roger Penrose in einem Tagungsband eine Arbeit mit dem Titel „Applications of negative dimensional tensors“. Vielleicht trug dieser etwas kryptische Titel dazu bei, daß die Arbeit zunächst weitgehend unbeachtet blieb – doch, wie bei Penrose nicht anders zu erwarten, verbargen sich dahinter einige ungewöhnliche und originelle Ideen zur Theorie ebener Graphen. Studiert man die Arbeit genau, so stellt man fest, daß es sich um das Abzählen gewisser Färbungen ebener Graphen handelt, und es wird schließlich klar, daß Penrose eigentlich das 4-Farbenproblem lösen wollte.¹ Damals war es ja noch ein Problem, der 4-Farbensatz wurde erst 1976 bewiesen!

Penrose definiert in seiner Arbeit implizit ein Polynom für ebene 3-reguläre Graphen, heute Penrose Polynom genannt, und leitet dann vier äquivalente Formulierungen zum 4-Farbensatz ab. Seine Ideen wurden in den 80'er Jahren von mehreren Autoren aufgegriffen – vor allem der kürzlich verstorbene Francois Jaeger ist hier zu nennen – und in mehrere Richtungen erweitert. Dabei stellten sich Verbindungen nicht nur zum 4-Farbensatz heraus, sondern auch zu anderen berühmten Vermutungen der Graphentheorie, zu binären Codes, Hopfalgebren und Polynomvarianten in der Knotentheorie. Genau darüber will diese Arbeit berichten.

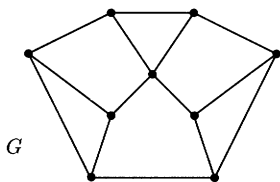
2 Das Penrose Polynom

Es sei $G = (V, E, L)$ ein ebener zusammenhängender Graph mit Eckenmenge V , Kantenmenge E und Ländermenge L . Um Trivialitäten aus dem Weg zu gehen, setzen wir immer voraus, daß G mindestens eine Kante enthält.

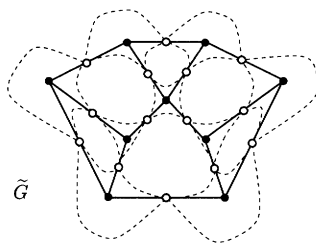
Figur 1 zeigt ein Beispiel.

Wir zeichnen nun in jedes Land (inklusive dem äußeren) einen gestrichelten Kreis nahe dem Rand, der jede Randkante einmal berührt, wobei wir die zwei Berührungspunkte in einer Kante (von den beiden angrenzenden Ländern) identifizieren, siehe Figur 2. Der dadurch entstehende neue Graph $\tilde{G}$ mit den Berührungs-

¹ In einem kürzlichen Interview mit der Süddeutschen Zeitung hat Penrose dies bestätigt.



Figur 1

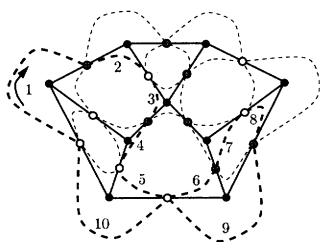


Figur 2

punkten als Ecken und den gestrichelten Kanten heißt der *Medialgraph* $\tilde{G} = (E, K)$ von G , wobei wir die Eckenmenge von $\tilde{G}$ mit den Kanten von G identifizieren. $\tilde{G}$ ist offenbar wieder eben und 4-regulär; jede Ecke von $\tilde{G}$ ist als Kante von G mit den 4 Nachbarkanten verbunden (je zwei Randkanten der angrenzenden Länder).

Wir kommen zur Definition des Penrose Polynoms. Betrachten wir $\tilde{G} = (E, K)$ und eine beliebige Untermenge $A \subseteq E$; A heißen die *Kreuzungsecken* und $E \setminus A$ die *Nicht-Kreuzungsecken*. Wir durchlaufen nun K auf folgende Weise: Wir beginnen mit irgendeiner Kante k und geben ihr eine Richtung. Ist die Endecke von k in A , so *kreuzen* wir zur gegenüberliegenden Kante, ist die Endecke in $E \setminus A$, so laufen wir innerhalb des Landes weiter. Fahren wir nach dieser Regel fort, so wird sich irgendwann der Kantenzug schließen. Ist noch eine Kante übrig (das heißt: nicht durchlaufen), so starten wir einen weiteren Kantenzug, bis schließlich alle Kanten K erfaßt sind. Es ist leicht zu sehen, daß es gleichgültig ist, mit welcher Kante und mit welcher Orientierung wir beginnen, wir erhalten immer dieselbe Zerlegung von K in disjunkte Kantenzüge. Insbesondere ist also die Anzahl $c(A)$ der Kantenzüge eindeutig durch A bestimmt.

Zur Illustration sind in der folgenden Figur die Kreuzungsecken A ausgefüllt gezeichnet. Wir beginnen mit der Kante mit Nummer 1 und erhalten einen Kantenzug mit 10 Kanten. Insgesamt ergibt sich $c(A) = 3$.

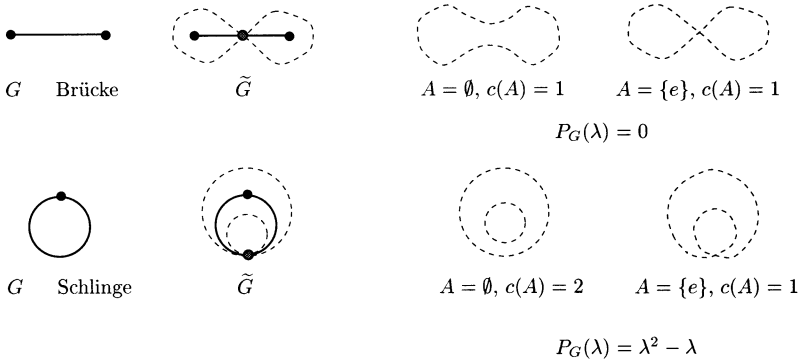


Figur 3

Definition. Das *Penrose Polynom* $P_G(\lambda)$ eines ebenen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E, L)$ ist

$$P_G(\lambda) = \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} \lambda^{c(A)}.$$

Betrachten wir die beiden kleinsten Beispiele mit $|E| = 1$: Brücke und Schlinge.



Figur 4

Als erste (leichte) Ergebnisse notiert man:

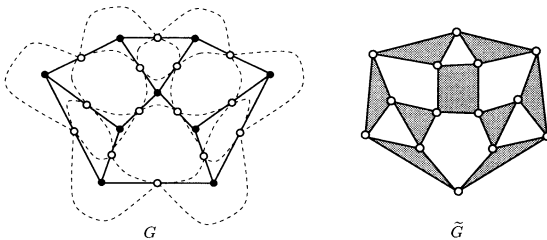
- (2.1) $P_G(\lambda) = 0 \iff G$ enthält eine Brücke (das heißt eine Kante, deren Entfernung den Graphen trennt).
- (2.2) Ist $G = (V, E, L)$ ein brückenloser Graph, so hat $P_G(\lambda)$ Grad $|L|$.

Ist G nicht zusammenhängend, so setzen wir $P_G(\lambda) = \prod_{i=1}^t P_{G_i}(\lambda)$, wobei G_i die Komponenten sind.

Im folgenden werden wir das Polynom $P_G(\lambda)$ aus zwei verschiedenen Sichtweisen studieren, einer geometrischen und einer algebraischen, und dann im letzten Abschnitt auf einige offene Probleme und Vermutungen eingehen.

3 Geometrie des Penrose Polynoms

Es sei wiederum $G = (V, E, L)$ ein zusammenhängender ebener Graph und $\tilde{G} = (E, K)$ der Medialgraph von G . Da $\tilde{G}$ eben und 4-regulär ist, so können wir nach einem bekannten Satz der Graphentheorie die Länder von $\tilde{G}$ mit zwei Farben, weiß und schwarz, färben, so daß Länder mit einer gemeinsamen Randkante verschiedene Farben erhalten. Wir färben das äußere Land von $\tilde{G}$ stets weiß, die weitere Färbung ist dann festgelegt. Figur 5 zeigt unser Beispiel:



Figur 5

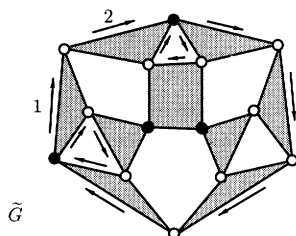
Wir stellen folgendes fest:

- (3.1) Die *schwarzen* Länder von $\tilde{G}$ korrespondieren zu den *Ecken* von G , wobei die Anzahl der Randkanten eines schwarzen Landes gleich dem Grad der zugehörigen Ecke ist.
- (3.2) Die *weißen* Länder von $\tilde{G}$ entsprechen den *Ländern* von G (mit jeweils derselben Anzahl von Randkanten).
- (3.3) Jede Ecke von $\tilde{G}$ ist inzident zu zwei weißen und zwei schwarzen Ländern.
- (3.4) Zwei Ecken von G sind genau dann benachbart, wenn die korrespondierenden schwarzen Länder eine Ecke gemeinsam haben, und dual dazu haben zwei Länder von G genau dann eine gemeinsame Randkante, wenn die entsprechenden weißen Länder eine Ecke gemeinsam haben.

Der 2-gefärbte Medialgraph $\tilde{G}$ entspricht also eineindeutig dem Ausgangsgraphen G . Damit können wir auch die Kantenzüge in der Definition von $P_G(\lambda)$ innerhalb $\tilde{G}$ erklären. Sei $A \subseteq E$:

- Kommen wir an eine Ecke $e \in A$, so *kreuzen* wir.
- Kommen wir an eine Ecke $e \notin A$, so laufen wir entlang des weißen Landes weiter.
- Wir gehen niemals entlang eines schwarzen Landes.

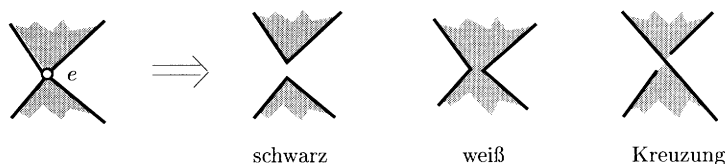
Nochmals ein Beispiel, in dem die Kreuzungsecken fett gezeichnet sind:



Figur 6

Wir können also und werden von nun an den 2-gefärbten Medialgraph zugrundelegen und die Ergebnisse dann mittels (3.1)–(3.4) für den Ausgangsgraphen interpretieren.

Wir verallgemeinern nun die Idee der Kantenzüge auf zweifache Weise. Betrachten wir eine Ecke e in $\tilde{G}$. Wir haben drei Möglichkeiten, die Ecke in zwei Ecken vom Grad 2 zu zerlegen:



Figur 7

Wir sprechen dann jeweils von einem *Übergang* $p(e)$ von *schwarzem*, *weißem* oder *Kreuzungstyp*. Wählen wir an jeder Ecke e einen Übergang $p(e)$, so heißt $p = \{p(e) : e \in E\}$ ein *Übergangssystem*; es gibt also $3^{|E|}$ verschiedene solche Systeme. Jedes Übergangssystem p zerlegt offenbar die Kanten K von $\tilde{G}$ in eine Anzahl von Kreisen, die wir mit $c(p)$ bezeichnen.

Als zweite Verallgemeinerung geben wir jedem Übergangstyp ein Gewicht (in einem Körper der Charakteristik 0):

$$W(p(e)) = \begin{cases} \alpha & \text{falls } p(e) \text{ schwarz} \\ \beta & \text{falls } p(e) \text{ weiß} \\ \gamma & \text{falls } p(e) \text{ Kreuzung} \end{cases}$$

und setzen

$$W(p) = \prod_{e \in E} W(p(e)).$$

Definition. Das *Übergangspolynom* $Q(\tilde{G}, W, \lambda)$ von $\tilde{G}$ bezüglich der Gewichtung W ist

$$Q(\tilde{G}, W, \lambda) = \sum_p W(p) \lambda^{c(p)}.$$

Nach unseren Eingangsbemerkungen ist klar, daß die Gewichtung $\alpha = 0$ (keine schwarzen Übergänge), $\beta = 1$, $\gamma = -1$ genau das Penrose Polynom ergibt:

$$(3.5) \quad P_G(\lambda) = Q(\tilde{G}, W_{\alpha=0, \beta=1, \gamma=-1}, \lambda).$$

Die Idee des Übergangspolynoms hat sich als außerordentlich nützlich in den verschiedensten Bereichen erwiesen; für einen ausgezeichneten Überblick sei [17] empfohlen. Wir geben nun drei Anwendungen.

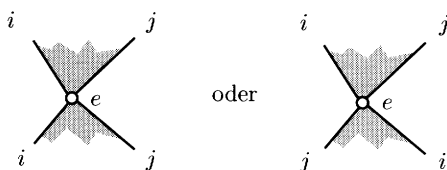
3.1 Auswertung von $P_G(\lambda)$ für $\lambda = k \in \mathbb{N}$

Als erste Anwendung wollen wir zeigen, daß $P_G(k)$ für positive ganze Zahlen etwas *zählt*, also insbesondere ≥ 0 ist. Die Idee einer Zählfunktion ist in der Kombinatorik natürlich gang und gäbe. Ein wichtiges Beispiel ist die Anzahl der Eckenfärbungen eines beliebigen Graphen $G = (V, E)$ (das heißt, benachbarte Ecken erhalten verschiedene Farben). Ein klassischer Satz der Graphentheorie besagt, daß die Zählfunktion $\chi_G(k) = \#(k\text{-Färbungen von } G)$ ein Polynom $\chi_G(\lambda)$ vom Grad $|V|$ ist. Ist insbesondere $G = (V, E, L)$ ein ebener Graph und G^* der duale Graph, so ist $\chi_{G^*}(\lambda)$ ein Polynom vom Grad $|L|$. Der 4-Farbensatz ist somit äquivalent zur Behauptung: $\chi_{G^*}(4) > 0$ für alle ebenen brückenlosen Graphen G . Wir werden auf dieses Beispiel noch zurückkommen.

Ein Unterschied zwischen $\chi_{G^*}(\lambda)$ und $P_G(\lambda)$ fällt sofort auf: Während $\chi_{G^*}(\lambda)$ als *Zählfunktion* definiert ist und dann als Polynom erkannt wird, so ist $P_G(\lambda)$ umgekehrt als *Polynom* definiert, und wir weisen nun nach, daß $P_G(\lambda)$ für $\lambda = k$ etwas zählt.

Es sei wie immer $G = (V, E, L)$ ebener Graph und $\tilde{G} = (E, K)$ der Medialgraph. Eine k -Bewertung von $\tilde{G}$ ist eine Abbildung $f : K \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ mit der

Eigenschaft, daß an jeder Ecke e genau zwei verschiedene Zahlen $i \neq j$ auftreten, und zwar entweder



Figur 8

Im ersten Fall sagen wir, e ist eine *weiße* Ecke bezüglich f , im anderen Fall, e ist eine *Kreuzungsecke*.

Aus der Gestalt $P_G(\lambda) = \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} \chi^c(A)$ wird man vermuten, daß ein Inklusions-Exklusionsschluß zum Beweis des folgenden Satzes verwendet wird (siehe z. B. [17, 24]).

Satz 1. Sei $G = (V, E, L)$ ebener Graph, dann ist für $k \in \mathbb{N}$

$$P_G(k) = \#(k - \text{Bewertungen von } \tilde{G}).$$

Insbesondere gilt also $P_G(k) \geq 0$ für alle $k \geq 0$.

Aus der Definition einer Bewertung können wir zwei unmittelbare Folgerungen angeben:

$$(3.6) \quad 0 \leq P_G(1) \leq P_G(2) \leq P_G(3) \leq \dots$$

Jede k -Bewertung ist offensichtlich auch $(k+1)$ -Bewertung.

$$(3.7) \quad P_G(k) \geq \chi_{G^*}(k).$$

Die k -Bewertungen, welche nur weiße Ecken haben, entsprechen den k -Färbungen der Länder L von G .

Sehen wir uns nun die ersten Werte $\lambda = k$ näher an. Nach Definition einer Bewertung gilt sicherlich

$$(3.8) \quad P_G(0) = P_G(1) = 0.$$

Ein Graph G heißt *Eulersch*, falls alle Ecken geraden Grad haben.

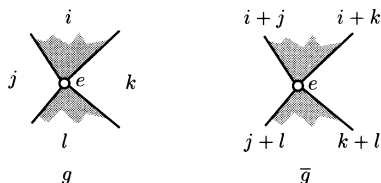
$$(3.9) \quad P_G(2) = \begin{cases} 2^{|V|} & \text{falls } G \text{ Eulersch ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zum Beweis erkennen wir aus Figur 8, daß eine 2-Bewertung rund um ein schwarzes Land abwechselnd die Werte 1 und 2 annehmen muß. Das ist nur möglich, wenn alle schwarzen Länder eine *gerade* Anzahl von Randkanten haben, oder was nach (3.1) dasselbe ist, wenn G Eulersch ist. Da wir für jedes schwarze Land zwei Möglichkeiten haben, folgt in diesem Fall $P_G(2) = 2^{|V|}$.

Der nächste Wert $\lambda = 3$ ergibt das erste Resultat von Penrose. Wir nennen $g: V \cup L \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ eine *spezielle* 4-Färbung von G , falls benachbarte Länder verschieden gefärbt sind und ebenso inzidente Ecken und Länder.

Satz 2. $P_G(3) = \#$ (Spezielle 4-Färbungen von G , wobei das äußere Land stets mit 0 gefärbt ist).

Zum Beweis nehmen wir als Farbmenge die Kleinsche Viergruppe $\{0, a, b, c\}$ und als Bewertungsmenge $\{a, b, c\}$. Sei $g : V \cup L \rightarrow \{0, a, b, c\}$ eine spezielle 4-Färbung wie im Satz. Für den Medialgraphen $\tilde{G}$ bedeutet dies, daß an jeder Ecke e die Situation in der Figur links vorliegt:



Figur 9

Wir erklären nun $\bar{g} : K \rightarrow \{0, a, b, c\}$ wie in Figur 9 rechts, wobei wegen $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq l$, $k \neq l$ alle Elemente $\neq 0$ sind. Ist $i = l$, so haben wir $i + j = j + l \neq i + k = k + l$, also ist $\bar{g}$ weiß bei e . Ist aber $i \neq l$, so haben wir $i + j + k + l = 0$, und wir erhalten $i + j = k + l \neq i + k = j + l$, das heißt $\bar{g}$ hat bei e eine Kreuzungsecke. Insgesamt ist $\bar{g}$ also 3-Bewertung von $\tilde{G}$. Man sieht nun leicht, daß $g \rightarrow \bar{g}$ eine Bijektion ist, woraus die Behauptung folgt.

Eine spezielle 4-Färbung ergibt natürlich (eingeschränkt auf L) eine 4-Länderfärbung von G . Ist nun G 3-regulär, so kann umgekehrt eine 4-Länderfärbung (immer mit 0 als Farbe des äußeren Landes) auf genau eine spezielle 4-Färbung erweitert werden, da jede Ecke die vierte, von den Farben der inzidenten Länder verschiedene, Farbe erhalten muß. Nun besagt einer der ersten Färbungssätze der Graphentheorie (Satz von Tait), daß für 3-reguläre ebene Graphen die Anzahl der 4-Länderfärbungen (äußeres Land mit Farbe 0) gleich der Anzahl der 3-Kantenfärbungen ist (inzidente Kanten erhalten verschiedene Farben), und dies ist genau das erste Resultat von Penrose.

Satz 3. Ist der ebene Graph 3-regulär, so gilt

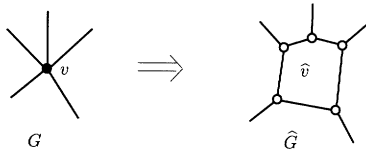
$$P_G(3) = \# (3\text{-Kantenfärbungen von } G).$$

Wie sieht es nun mit beliebigen, nicht notwendig 3-regulären, Graphen aus? Da wie gesagt jede spezielle 4-Färbung auch 4-Länderfärbung ist, so haben wir jedenfalls

$$P_G(3) > 0 \implies G \text{ ist 4-Länder färbbar,}$$

oder mit anderen Worten: $P_G(3) > 0$ für *alle* brückenlosen ebenen Graphen impliziert den 4-Farbensatz. Setzen wir nun umgekehrt den 4-Farbensatz voraus. Wir ordnen G einen 3-regulären Graphen $\hat{G}$ zu, indem wir für jede Ecke die folgende Ersetzung vornehmen (siehe Figure 10).

$\hat{G}$ ist offenbar wieder eben, und eine 4-Länderfärbung von $\hat{G}$ (die nach dem 4-FS existiert) entspricht ersichtlich genau einer speziellen 4-Färbung von G , woraus die folgende Äquivalenz resultiert.



Figur 10

Satz 4. Der 4-Farbensatz ist äquivalent zur Aussage: $P_G(3) > 0$ für alle brückenlosen ebenen Graphen G .

Das zweite Resultat von Penrose:

$$(3.10) \quad P_G(4) > 0 \iff G \text{ ist 4-Länder färbbar}$$

werden wir in Abschnitt 4 in allgemeinerem Rahmen beweisen (Satz 9). In Zusammenfassung erhalten wir somit die Äquivalenzen:

$$(3.11) \quad 4\text{-Farbensatz} \iff P_G(3) > 0 \iff P_G(4) > 0$$

jeweils für alle brückenlosen ebenen Graphen.

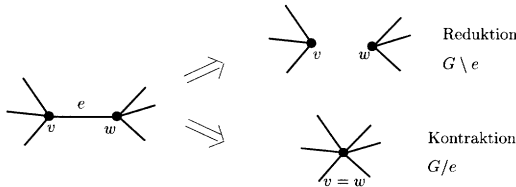
3.2 Zusammenhang zum Tutte Polynom und $\lambda = -2$

Wir kommen zum erstaunlichsten Ergebnis von Penrose, dem Fall $\lambda = -2$. Es gilt eine weitere Äquivalenz zum 4-Farbensatz:

$$P_G(-2) \neq 0 \iff G \text{ 4-Länder färbbar.}$$

Daß dies sehr elegant mit Hilfe des Tutte Polynoms bewiesen werden kann, wurde in [14] bemerkt. Im letzten Abschnitt werden wir auf eine weitere überraschende Folgerung stoßen.

Zunächst benötigen wir die Begriffe *Reduktion* und *Kontraktion*. Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger Graph, $e \in E$. Die Figur verdeutlicht die Operationen:

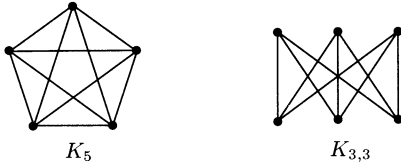


Figur 11

Im ersten Fall löschen wir die Kante, im zweiten Fall kontrahieren wir sie auf eine Ecke, wobei der Restgraph unverändert bleibt. Ein Minor H von G entsteht aus einer Folge von Reduktionen und Kontraktionen. Wir schreiben dann kurz $H < G$; die Relation $<$ ist offenbar transitiv. Der Begriff des Minors (der im wesentlichen auf Whitney [42] und Tutte [39] zurückgeht) ist eines der fundamentalen Konzepte der Graphentheorie.

Betrachten wir als Beispiel die Klasse $\mathcal{P}$ der plättbaren Graphen (das heißt jener Graphen, die ohne Kantenkreuzungen in die Ebene eingebettet werden kön-

nen). Nach Figur 11 ist jede Reduktion und Kontraktion eines plättbaren Graphen, und damit jeder Minor, wieder plättbar. Wir sagen, die Klasse $\mathcal{P}$ ist *minoren-abgeschlossen*. Wir können also $\mathcal{P}$ durch Angabe der Liste der *minoren-minimalen* nicht-plättbaren Graphen (der sogenannten *Obstruktionen*) charakterisieren – und der berühmte Satz von Kuratowski [20] in der Version von Wagner besagt, daß diese Liste genau zwei Graphen enthält: K_5 und $K_{3,3}$.



Figur 12

Also: $G \in \mathcal{P} \iff K_5 \not\leq G, K_{3,3} \not\leq G$.

In einer monumentalen Arbeit haben Robertson und Seymour gezeigt, daß in jeder *unendlichen* Familie von Graphen es immer zwei Graphen G, H gibt, von denen einer ein echter Minor des anderen ist. Ohne Zweifel gehört dieses Ergebnis (von dem bisher rund 20 Teilarbeiten vorliegen (siehe etwa [28]) zu den bedeutendsten mathematischen Leistungen der letzten 20 Jahre. Insbesondere wird also jede minoren-abgeschlossene Klasse von Graphen durch *endlich* viele Obstruktionen charakterisiert.

Nun zum Tutte Polynom eines beliebigen Graphen $G = (V, E)$. Es ist ein Polynom $T_G(x, y)$ in zwei Variablen, rekursiv definiert wie folgt:

- (3.12) i) Ist $E = \emptyset$, so ist $T_G(x, y) = 1$.
 ii) Ist $e \in E(G)$ Brücke bzw. Schlinge, so ist $T_G(x, y) = xT_{G \setminus e}(x, y)$ bzw. $T_G(x, y) = yT_{G/e}(x, y)$.
 iii) Ist $e \in E$ weder Brücke noch Schlinge, so gilt
 $T_G(x, y) = T_{G \setminus e}(x, y) + T_{G/e}(x, y)$.

Tutte hat nun in [40] gezeigt, daß diese Definition nicht von der rekursiven Wahl der Kanten e abhängt, wir also jedesmal dasselbe Polynom erhalten: $T_G(x, y)$ ist somit durch (3.12) eindeutig definiert.

Beispiel. Betrachten wir das Dreieck $G = K_3$, so erhalten wir rekursiv

$$\begin{aligned} T(\triangle) &= T(\text{Zwei Punkte verbunden}) + T(\text{Ein Punkt mit Schlinge}) \\ &= x^2 + T(\text{Zwei Punkte}) + T(\text{Ein Punkt mit Schlinge}) \\ &= x^2 + x + y. \end{aligned}$$

Die Bedeutung des Tutte Polynoms liegt (unter anderem) in folgender universeller Eigenschaft. Es sei f eine Funktion, die jedem Graphen ein Element in einem Körper K zuordnet; f heißt (verallgemeinerte) *Tutte-Grothendieck Invariante* (kurz T-G Invariante), falls es Elemente $a, b \neq 0$ in K gibt, so daß folgendes gilt:

Sei $A = f(\text{Brücke})$, $B = f(\text{Schlinge})$:

- (3.13) i) Ist $e \in E$ Brücke oder Schlinge, so ist $f(G) = Af(G \setminus e)$ bzw. $f(G) = Bf(G \setminus e)$.
 ii) Ist $e \in E$ weder Brücke noch Schlinge, so gilt $f(G) = af(G \setminus e) + bf(G/e)$.

Es gilt nun der Satz:

- (3.14) Ist f T-G Invariante mit $f(\text{Brücke}) = A$, $f(\text{Schlinge}) = B$ und $a, b \neq 0$ wie in (3.13), so gilt für jeden zusammenhängenden Graphen G

$$f(G) = a^{|E|-|V|+1} b^{|V|-1} T_G\left(\frac{A}{b}, \frac{B}{a}\right).$$

Das klassische Beispiel einer T-G Invariante ist wieder das chromatische Polynom $\chi_G(\lambda)$. Man überzeugt sich leicht, daß $\frac{\chi_G(\lambda)}{\lambda}$ die Bedingungen (3.13) mit $A = \lambda - 1$, $B = 0$, $a = 1$, $b = -1$ erfüllt, woraus mit (3.14) sofort

$$(3.15) \quad \chi_G(\lambda) = (-1)^{|V|-1} \lambda T_G(1 - \lambda, 0)$$

folgt.

Ist nun $G = (V, E, L)$ eben, so haben wir für das Polynom $\chi_{G^*}(\lambda)$ der Länderfärbungen

$$(3.16) \quad \chi_{G^*}(\lambda) = (-1)^{|L|-1} \lambda T_G(0, 1 - \lambda).$$

Insbesondere gilt also (wenn wir den Faktor λ berücksichtigen):

- (3.17) # (4-Länderfärbungen von $G = (V, E, L)$, wobei das äußere Land mit 0 gefärbt ist) $= (-1)^{|L|-1} T_G(0, -3)$.

Was hat nun das Tutte Polynom mit dem Penrose Polynom zu tun? Es sei wie gewohnt $G = (V, E, L)$ gegeben und $\widetilde{G} = (E, K)$ der Medialgraph. Nun betrachten wir das Übergangspolynom $Q(\widetilde{G}, W, \lambda)$ mit der Gewichtung

$$W_{\text{schwarz}} = \alpha \neq 0, W_{\text{weiß}} = \beta \neq 0, W_{\text{Kreuzung}} = \gamma = 0.$$

Mit dieser Gewichtung erhalten wir

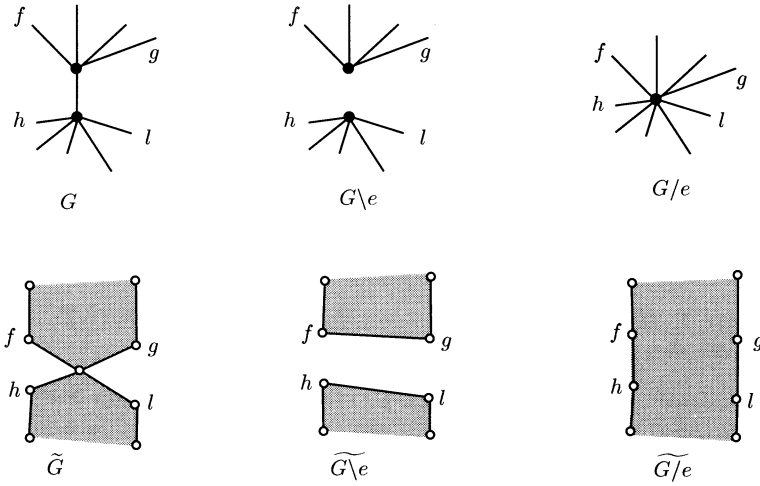
$$Q(\widetilde{\text{Brücke}}) = \alpha \lambda^2 + \beta \lambda, \quad Q(\widetilde{\text{Schlinge}}) = \alpha \lambda + \beta \lambda^2.$$

Es sei nun $e \in E$ weder Brücke und Schlinge. Die folgende Figur 13 zeigt die Operationen $G \setminus e$ bzw. G/e .

Wir erkennen, daß die Reduktion genau dem *schwarzen* Übergang bei e entspricht, und die Kontraktion dem *weißen*. Somit ist

$$Q(\widetilde{G}, W, \lambda) = \alpha Q(\widetilde{G \setminus e}, W, \lambda) + \beta Q(\widetilde{G/e}, W, \lambda).$$

Unter Berücksichtigung von (3.13i) sieht man nun leicht, daß $\frac{1}{\lambda} Q(\widetilde{G}, W, \lambda)$ eine T-G Invariante ist, und wir erhalten aus (3.14) und der Euler Formel $|L| = |E| - |V| + 2$ den wichtigen Satz [14]:



Figur 13

Satz 5. Sei $G = (V, E, L)$ ebener Graph und $\tilde{G}$ der Medialgraph, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Dann gilt

$$Q(\tilde{G}, W_{\alpha, \beta, \gamma=0}, \lambda) = \alpha^{|L|-1} \beta^{|V|-1} \lambda T_G\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \lambda, 1 + \frac{\beta}{\alpha} \lambda\right).$$

Noch sehen wir nicht den Zusammenhang zum Penrose Polynom, aber hier kommt er. Wenn wir zwei verschiedene Gewichtungen W und $\overline{W}$ betrachten, so sind die Übergangspolynome im allgemeinen natürlich verschieden. Angenommen, W und $\overline{W}$ unterscheiden sich nur um eine additive Konstante m , daß heißt

$$\overline{\alpha} = \alpha + m, \quad \overline{\beta} = \beta + m, \quad \overline{\gamma} = \gamma + m.$$

Dann gilt wiederum $Q(\tilde{G}, W, \lambda) \neq Q(\tilde{G}, \overline{W}, \lambda)$, aber, wie Penrose gezeigt hat, stimmen die beiden Polynome in diesem Fall stets im Punkt $\lambda = -2$ überein.

(3.18) Falls für die Gewichtungen $\overline{W} = W + m$ gilt, so ist

$$Q(\tilde{G}, W, -2) = Q(\tilde{G}, \overline{W}, -2).$$

Und hier ist die Punchline. Wir betrachten die Gewichtungen

$$W : \alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1$$

$$\overline{W} : \alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 0$$

also $\overline{W} = W + 1$. Das Übergangspolynom der ersten Gewichtung ist, wie wir aus (3.5) wissen, genau das Penrose Polynom. Und für die Gewichtung $\overline{W}$ brauchen wir nur in Satz 5 einzusetzen. Nach (3.18) ergibt sich somit

$$P_G(-2) = Q(\tilde{G}, W_{\alpha=1, \beta=2, \gamma=0}, -2) = -2^{|V|} T_G(0, -3).$$

Berücksichtigen wir noch (3.17), so ergibt sich

Satz 6. Für einen ebenen Graphen $G = (V, E, L)$ gilt

$P_G(-2) = (-1)^{|L|} 2^{|V|} \cdot \#$ (4-Länderfärbungen von G mit äußerem Land stets mit Farbe 0).

Für 3-reguläre Graphen G erhalten wir daraus mit $2|E| = 3|V|$ und der Euler Formel das dritte Resultat von Penrose:

(3.19) Ist $G = (V, E, L)$ 3-regulär, so gilt $P_G(-2) = (-4)^{\frac{|V|}{2}} \cdot \#$ (3-Kantenfärbungen von G).

Satz 6 impliziert also die angekündigte Äquivalenz:

Satz 7. Der 4-Farbensatz ist äquivalent zur Aussage: $P_G(-2) \neq 0$ für alle brückenlosen ebenen Graphen G .

Vielleicht ist an dieser Stelle ein kurzer Kommentar zum Stellenwert des 4-Farbensatzes angebracht. Die Meinungen zu diesem Satz sind ja traditionell geteilt: Die einen finden, daß das ursprüngliche Problem attraktiv ist, daß die Bemühungen um eine Lösung eine ganze Theorie, eben die Graphentheorie, hervorgebracht haben, und daß auch die bisherigen Beweise [6, 27] mit ihrem massiven Computereinsatz zukunftsweisend sein könnten. Es gibt aber auch jene, welche den Satz als topologische Kuriosität abtun und die Beweise nicht überzeugend, ja sogar monströs finden. Die Arbeit von Penrose weist auf einen dritten Aspekt hin: Wir haben den Gehalt des 4-Farbensatzes noch nicht wirklich verstanden, aber er scheint jedenfalls ein Fokuspunkt der ebenen Topologie zu sein. Wenn wir die vorgelegte Argumentationskette bis Satz 7 nochmals Revue passieren lassen, so fällt dreierlei auf:

- Nur im Fall der Gewichtung $\gamma = 0$ führt das Übergangspolynom auf das Tutte Polynom.
- Das Ergebnis von Penrose bezüglich zweier Gewichtungen $\overline{W} = W + m$ gilt nur für $\lambda = -2$.
- Die Verbindung der Polynome T_G und P_G funktioniert nur für den angegebenen Wert $T_G(0, -3)$, und dieser Wert zählt genau die 4-Länderfärbungen.

Daß der 4-Farbensatz genau im Durchschnitt dieser drei Aussagen liegt, sollte einem tiefen, noch unentdeckten topologischen Zusammenhang zu verdanken sein.

Penrose hat noch eine vierte Äquivalenz bewiesen. Schränken wir das Penrose Polynom auf die Cozyklen $A \in \mathcal{K}$ ein (siehe Abschnitt 4), so ergibt sich das Polynom

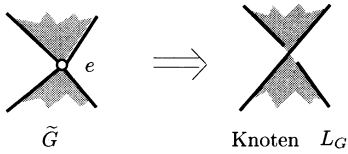
$$R_G(\lambda) = \sum_{A \in \mathcal{K}} (-1)^{|A|} \lambda^{c(A)}.$$

Penrose hat nun für 3-reguläre ebene Graphen gezeigt (es gilt aber allgemein):

(3.20) 4-Farbensatz $\iff R_G(2) > 0$ für alle brückenlosen ebenen Graphen G .

3.3 Verbindung zu Knoteninvarianten

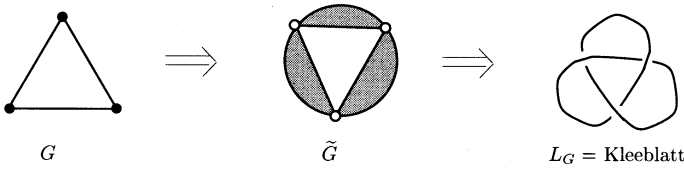
Sei wieder $G = (V, E, L)$ ebener Graph und $\tilde{G} = (E, K)$ der 2-gefärbte Medialgraph. $\tilde{G}$ kann, als 4-regulärer ebener Graph, als Diagramm eines Knotens



Figur 14

(oder allgemein einer Verschlingung) aufgefaßt werden, indem wir die Konvention „links über rechts“, vom schwarzen Land aus gesehen, befolgen.

Beispiel.



Figur 15

Auf diese Weise erhalten wir alle *alternierenden* Knoten oder Verschlingungen, das heißt wir passieren die Kreuzungspunkte abwechselnd darüber und darunter.

In den letzten Jahren wurden zahlreiche Polynom invarianten vorgeschlagen (die also für äquivalente Knoten denselben Wert annehmen). Ein besonders interessantes Beispiel ist das Kauffmansche Klammerpolynom $\langle L \rangle$. Es ist ein Laurentpolynom in der Variablen A , definiert rekursiv wie folgt [19]:

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \rangle &= 1 \\ \langle L \cup \bigcirc \rangle &= -(A^2 + A^{-2}) \langle L \rangle \\ \langle \text{X} \rangle &= A^{-1} \langle \text{X} \rangle + A \langle \text{X} \rangle \end{aligned}$$

Die Auflösung einer Überkreuzung in einen schwarzen und weißen Anteil zeigt sofort, daß $\langle L \rangle$ eine T-G Invariante ist. Mit (3.14) berechnet man für $G = (V, E, L)$

$$\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & \tilde{G} & \longrightarrow & L_G \\ \text{Graph} & & \text{Medial} & & \text{Knoten} \end{array}$$

sofort

$$\langle L_G \rangle = A^{|V|-|L|} T_G(-A^{-4}, -A^4).$$

Wir wissen schon $T_{K_3}(x, y) = x^2 + x + y$. Also erhalten wir für das Kleeblatt aus Figur 15

$$\langle \text{Kleeblatt} \rangle = -A^5 - A^{-3} + A^{-7}.$$

Das Klammerpolynom ist invariant unter den Reidemeisterbewegungen II und III. Führen wir noch einen Verwindungsfaktor $\bar{\omega}(L)$ für orientierte Verschlingungen K ein (siehe [13, 22]), so ist das Polynom

$$f_K(A) = (-A^3)^{-\bar{\omega}(L)} \langle L \rangle$$

auch invariant unter der Reidemeister Bewegung I, somit eine Knoteninvariante. Schließlich ergibt die Ersetzung $A = x^{-1/4}$ das Jones Polynom [18]

$$V_K(x) = f_K(x^{-1/4}).$$

Für beliebige Knoten und Verschlingungen liefert eine Theorie der ebenen 4-regulären *signierten* Graphen den geeigneten Rahmen, wobei das Signum +1 ist für „links über rechts“ bzw. -1 für „rechts über links“. Den entsprechenden Zusammenhang zum *signierten* Tutte Polynom kann man z. B. in [35] nachlesen. Für andere faszinierende Zusammenhänge zu kombinatorischen Fragestellungen sei auf [3] verwiesen.

4 Algebra des Penrose Polynoms

Wir haben in Abschnitt 2 das Penrose Polynom auf geometrische Weise erklärt. Es gibt aber auch einen rein algebraischen Zugang, und dieser eröffnet den Weg zur Definition des Penrose Polynoms beliebiger Graphen und allgemein binärer Matroide.

Betrachten wir zunächst einen beliebigen zusammenhängenden Graph $G = (V, E)$. Es sei 2^E der Vektorraum über $GF(2)$ aller Untermengen $A \subseteq E$, wobei wir A mit dem charakteristischen Vektor identifizieren. Das heißt, für $A, B \subseteq E$ ist

$A + B$ = symmetrische Differenz von A und B

$$A \cdot B = \begin{cases} 1 & \text{falls } |A \cap B| \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } |A \cap B| \text{ gerade.} \end{cases}$$

Wir erklären zwei Unterräume $\mathcal{C}$ und $\mathcal{K}$ von 2^E , den *Zyklusraum* bzw. *Cozyklusraum*. Wir nennen $C \subseteq E$ einen *Zyklus* von G , falls der Untergraph (V, C) *Eulersch* ist (zur Erinnerung: alle Ecken haben geraden Grad). Eine Menge $K \subseteq E$ heißt *Cozyklus*, falls (V, K) eine *Bipartition* ist. Das heißt, es existiert eine disjunkte Zerlegung $V = V_1 \cup V_2$, so daß K genau aus den Kanten von E zwischen V_1 und V_2 besteht.

Es ist leicht zu sehen, daß $\mathcal{C}$ und $\mathcal{K}$ Unterräume von 2^E der Dimension

$$(4.1) \quad \dim \mathcal{C} = |E| - |V| + 1, \quad \dim \mathcal{K} = |V| - 1$$

sind, und ein klassischer Satz der Graphentheorie (der bis auf Veblen [43] zurückgeht) besagt, daß $\mathcal{C}$ und $\mathcal{K}$ orthogonale Komplemente sind, also

$$\mathcal{C}^\perp = \mathcal{K}, \quad \mathcal{K}^\perp = \mathcal{C}.$$

Nun sei $G = (V, E, L)$ ein ebener Graph. Da ersichtlich Zyklen und Cozyklen duale Begriffe sind, erhalten wir (mit Identifizierung der Kanten von G und G^*)

$$\mathcal{C}(G^*) = \mathcal{K}(G), \quad \mathcal{K}(G^*) = \mathcal{C}(G),$$

und somit insbesondere $\dim \mathcal{C} = |L| - 1$, woraus mit (4.1) die Euler Formel $|V| - |E| + |L| = 2$ resultiert.

Es wurde nun von mehreren Autoren bemerkt [4, 15], daß die Theorie der „links-rechts Wege“ (siehe dazu [29, 30, 37]) in ebenen Graphen zum Beweis des folgenden Zusammenhanges verwendet werden kann.

Sei $G = (V, E, L)$ gegeben. Für $A \subseteq E$ definieren wir

$$\mathcal{B}_G(A) = \{C \in \mathcal{C} : C \cap A \in \mathcal{K}\} \subseteq 2^E.$$

$\mathcal{B}_G(A)$ ist ein Unterraum, genannt der *Bizyklenraum* von A . Ist nun $c(A)$ die Anzahl der Kantenzüge mit den Kreuzungskanten A wie in der ursprünglichen Definition von $P_G(\lambda)$, so gilt für $A \subseteq E$

$$(4.2) \quad c(A) = \dim \mathcal{B}_G(A) + 1.$$

Daraus erhalten wir die folgende rein algebraische Beschreibung:

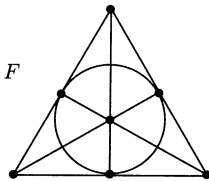
Satz 8. Für einen ebenen Graphen $G = (V, E, L)$ gilt

$$(4.3) \quad P_G(\lambda) = \lambda \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} \lambda^{\dim \mathcal{B}_G(A)}.$$

Dieser Satz eröffnet nun die Möglichkeit, das Penrose Polynom für beliebige Graphen zu erklären, und allgemein für beliebige binäre Matroide (siehe [25]). Wir gehen dabei wie folgt vor.

Es sei E eine (endliche) Grundmenge und $\mathcal{C} \subseteq 2^E$ ein Unterraum, genannt der „Zyklusraum“; das orthogonale Komplement $\mathcal{K} = \mathcal{C}^\perp$ heißt der „Cozyklusraum“. Das Paar $M = (E, \mathcal{C})$ nennen wir ein *binäres Matroid*, und $M^* = (E, \mathcal{K})$ das dazu *duale Matroid*. Das heißt, der Zyklusraum von M^* ist genau der Cozyklusraum von M und umgekehrt.

Betrachten wir als Beispiel die *Fano Ebene* F .



Figur 16

Die Grundmenge von F sind die 7 Punkte der Konfiguration, und die Zyklen sind die leere Menge, die 7 drei-Punkte „Geraden“ und die 8 Komplemente hiervon. Wie man sofort nachprüft, sind die Cozyklen von F die leere Menge und die 7 Komplemente der 3-Punkte Geraden. Insbesondere ist also

$$(4.4) \quad \mathcal{K}(F) \subseteq \mathcal{C}(F) \text{ und somit } \mathcal{C}(F^*) \subseteq \mathcal{K}(F^*).$$

Sei nun $M = (E, \mathcal{C})$ ein binäres Matroid. Wie im Fall der Graphen erklären wir für $A \subseteq E$ den Bizyklusraum

$$\mathcal{B}_M(A) = \{C \in \mathcal{C} : C \cap A \in \mathcal{K}\}.$$

Definition. Das *Penrose Polynom* des binären Matroides $M = (E, \mathcal{C})$ ist

$$(4.5) \quad P_M(\lambda) = \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} \lambda^{\dim \mathcal{B}_M(A)}.$$

(Es ist vorteilhaft, den Faktor λ wegzulassen.)

Als nächstes übertragen wir die Operationen Reduktion und Kontraktion für Matroide. Sei $M = (E, \mathcal{C})$ binäres Matroid, $A \subseteq E$. Dann ist die *Reduktion* $M|A = (A, \mathcal{C}|A)$ auf A gegeben durch

$$(4.6) \quad \mathcal{C}|A = \{C \subseteq A : C \in \mathcal{C}\},$$

und die *Kontraktion* $M \cdot A = (A, \mathcal{C} \cdot A)$ auf A durch

$$(4.7) \quad \mathcal{C} \cdot A = \{C \cap A : C \in \mathcal{C}\}.$$

Für die Cozyklenräume gilt dann

$$\mathcal{K}|A = \{K \cap A : K \in \mathcal{K}\}, \mathcal{K} \cdot A = \{K \subseteq A : K \in \mathcal{K}\}.$$

Ein *Minor* N von M geht durch eine Folge von Reduktionen und Kontraktionen aus M hervor. Es ist leicht zu sehen, daß diese Begriffe im Graphenfall mit der ursprünglichen Definition aus Abschnitt 3.2 übereinstimmen (siehe z. B. [25]).

4.1 Auswertung von $P_M(\lambda)$

Sei das binäre Matroid $M = (E, \mathcal{C})$ mit $\mathcal{K} = \mathcal{C}^\perp$ gegeben, und $P_M(\lambda)$ das Penrose Polynom aus (4.3). Betrachten wir nun $\lambda = 2^k$. Aus (4.3) folgt

$$P_M(2^k) = \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} 2^{k \dim \mathcal{B}_M(A)}.$$

Setzen wir für $(C_1, \dots, C_k) \in \mathcal{C}^k$

$$\mathcal{K}(C_1, \dots, C_k) = \{A \subseteq E : A \cap C_1 \in \mathcal{K}, \dots, A \cap C_k \in \mathcal{K}\},$$

so erhalten wir

$$P_M(2^k) = \sum_{(C_1, \dots, C_k) \in \mathcal{C}^k} \sum_{A \in \mathcal{K}(C_1, \dots, C_k)} (-1)^{|A|}.$$

$\mathcal{K}(C_1, \dots, C_k)$ ist Unterraum, enthält also entweder gleich viele Mengen gerader und ungerader Mächtigkeit (in welchem Fall die innere Summe 0 ist), oder alle Mengen haben gerade Mächtigkeit. Setzen wir also

$$\tilde{\mathcal{C}}_k = \{(C_1, \dots, C_k) \in \mathcal{C}^k : (A \in \mathcal{K}(C_1, \dots, C_k) \implies |A| \text{ gerade})\}$$

so erhalten wir

$$P_M(2^k) = \sum_{(C_1, \dots, C_k) \in \tilde{\mathcal{C}}_k} |\mathcal{K}(C_1, \dots, C_k)|.$$

Mit anderen Worten: $P_M(2^k)$ ist stets ≥ 0 , und > 0 genau dann, wenn $\tilde{\mathcal{C}}_k$ nicht leer ist. Aus der Definition von $\tilde{\mathcal{C}}_k$ ersehen wir unmittelbar

$$(4.8) \quad (C_1, \dots, C_k) \in \tilde{\mathcal{C}}_k \implies C_1 \cup \dots \cup C_k = E.$$

Denn ist $e \in E \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_k)$, so liegt e im Unterraum $\mathcal{K}(C_1, \dots, C_k)$, aber $|\{e\}| = 1$ ist ungerade.

$$(4.9) \quad P_M(2) = \begin{cases} |\mathcal{K}| & \text{falls } E \in \mathcal{C} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie eben gesehen ist

$$P_M(2) > 0 \iff \tilde{C}_1 = \{E\} \iff E \in \mathcal{C},$$

und in diesem Fall ist ersichtlich $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}$.

Insbesondere erhalten wir (bis auf den Faktor 2) unser Graphenresultat (3.9).

Wir kommen zum wichtigsten Fall $\lambda = 4 = 2^2$. Hier gilt nun [5]:

$$(C_1, C_2) \in \tilde{\mathcal{C}}_2 \iff C_1 \cup C_2 = E,$$

und somit

Satz 9. *Sei $M = (E, \mathcal{C})$ binäres Matroid. Dann gilt*

$$P_M(4) > 0 \iff E = C_1 \cup C_2 \text{ mit } C_1, C_2 \in \mathcal{C}.$$

Nun besagt ein weiterer klassischer Satz der Graphentheorie (siehe z. B. [2]), daß ein brückenloser ebener Graph $G = (V, E, L)$ genau dann 4-Länder färbbar ist, wenn die Kantenmenge E durch zwei Eulersche Untergraphen überdeckt werden kann – und dies ist genau die Bedingung $E = C_1 \cup C_2$. Wir erhalten somit die schon früher angesprochene Äquivalenz (3.10).

Auch die am Ende von Abschnitt 3.2 besprochene äquivalente Formulierung kann direkt auf Matroide übertragen werden.

Es sei $M = (E, \mathcal{C})$ ein binäres Matroid, $\mathcal{K} = \mathcal{C}^\perp$, und

$$R_M(\lambda) = \sum_{A \in \mathcal{K}} (-1)^{|A|} \lambda^{\dim \mathcal{B}_M(A)}.$$

Dann gilt

$$R_M(2) > 0 \iff E = C_1 \cup C_2 \text{ mit } C_1, C_2 \in \mathcal{C},$$

was für ebene Graphen genau zur 4-Länder Färbung äquivalent ist.

4.2 Wann ist $P_M(\lambda) = 0$?

Für ebene Graphen haben wir in (2.1) notiert, daß

$$P_G(\lambda) = 0 \iff G \text{ enthält Brücke.}$$

In einem binären Matroid $M = (E, \mathcal{C})$ entspricht eine Brücke einem Element $e \in E$, das in *keinem* Zyklus enthalten ist. Enthält M eine Brücke, so sieht man sofort, daß $P_M(\lambda) = 0$ ist. Angenommen, M enthält keine Brücke, ist dann $P_M(\lambda) \neq 0$? Wir werden sehen, daß dies nicht mehr richtig ist, daß sich aber die Matroide M mit $P_M(\lambda) = 0$ elegant beschreiben lassen (siehe [5] für Details).

Aus der Definition (4.3) folgt $\text{Grad} P_M(\lambda) \leq \dim \mathcal{C}$, da alle Bizyklusräume in $\mathcal{C}$ liegen. Der folgende Satz charakterisiert die Matroide mit verschwindendem Penrose Polynom durch die echte Ungleichung.

Satz 10. *Die folgenden Bedingungen sind für $M = (E, \mathcal{C})$ äquivalent:*

- a) $P_M(\lambda) = 0$
- b) $\text{Grad} P_M(\lambda) < \dim \mathcal{C}$
- c) *Es existiert $A_0 \subseteq E$, $|A_0|$ ungerade, mit $A_0 \cap C \in \mathcal{C}$ für alle $C \in \mathcal{C}$.*

Beispiel. Angenommen $M = (E, \mathcal{C})$ erfüllt $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K} = \mathcal{C}^\perp$ mit $|E|$ ungerade, dann genügt E offenbar der Bedingung c) des Satzes, und wir erhalten $P_M(\lambda) = 0$. Das kleinste derartige Beispiel (abgesehen von einer einzelnen Brücke) ist die duale Fano Ebene F^* : Wir wissen aus (4.4) bereits $\mathcal{C}(F^*) \subseteq \mathcal{K}(F^*)$, woraus wegen $|E| = 7$ sofort $P_{F^*}(\lambda) = 0$ resultiert.

Satz 11. *Sei $M = (E, \mathcal{C})$ ein brückenloses Matroid mit $P_M(\lambda) = 0$, dann enthält M die duale Fano Ebene F^* als Minor.*

Da ein graphisches Matroid $M_G = (E, \mathcal{C}_G)$ niemals F^* als Minor enthält (siehe [2]) und ebensowenig ein cographisches Matroid $M_G^* = (E, \mathcal{K}_G)$, so erhalten wir insbesondere, daß das Penrose Polynom eines beliebigen brückenlosen Graphen stets $\neq 0$ ist, und dual dazu jedes brückenlosen cographischen Matroides. Wir werden auf Satz 11 im letzten Abschnitt zurückkommen.

4.3 Isotrope Systeme und $\lambda = -2$

Wir haben in Abschnitt 3.2 die interessanteste Formel von Penrose besprochen, die Auswertung von $P_G(\lambda)$ an der Stelle $\lambda = -2$. Der Beweisgang führte über das Tutte Polynom $T_G(x, y)$ und das Übergangspolynom $Q(\tilde{G}, W, \lambda)$. Das Tutte Polynom $T_M(x, y)$ wird für (beliebige) Matroide völlig analog durch die Rekursion (siehe [11])

$$(4.10) \quad T_M(x, y) = T_{M \setminus e}(x, y) + T_{M/e}(x, y)$$

erklärt. Zur Definition von $Q(\tilde{G})$ benötigten wir aber die geometrische Struktur des Medialgraphen $\tilde{G}$, und die steht uns für beliebige binäre Matroide nicht zur Verfügung.

Um hier weiterzukommen, bedienen wir uns der interessanten Theorie der isotropen Systeme, wie sie von Bouchet [7, 8] in den 80er Jahren entwickelt wurde (für Details siehe [24]). Wir wollen die Grundbegriffe dieser Theorie zusammenstellen.

Es bezeichne $K = \{0, x, y, z\}$ die *Kleinsche Viergruppe*, die wir als 2-dimensionalen Vektorraum über $GF(2)$ auffassen; es sei $K' = K \setminus \{0\}$. Für $a, b \in K$ sei das innere Produkt $\langle a, b \rangle = 1$, falls $0 \neq a \neq b \neq 0$, und $= 0$ sonst. (K ist zusammen mit dieser symplektischen Form die binäre hyperbolische Ebene.) Für eine endliche Menge E fassen wir K^E als Vektorraum der Dimension $2|E|$ über $GF(2)$ auf. Dies bedeutet für $A = (A_e), B = (B_e) \in K^E$

$$A \perp B \iff |\{e \in E : 0 \neq A_e \neq B_e \neq 0\}| \text{ gerade.}$$

Insbesondere steht jeder Vektor $A \in K^E$ senkrecht auf sich selbst. Ein Unterraum $\mathcal{L} \subseteq K^E$ heißt *total isotrop*, falls $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^\perp$ ist.

Definition. Ein *isotropes System* ist ein Paar $S = (E, \mathcal{L})$, wobei $\mathcal{L} \subseteq K^E$ ein total isotroper Unterraum der Dimension $|E|$ über $GF(2)$ ist.

Wir zeigen nun, daß ein Paar von dualen binären Matroiden ein isotropes System ergibt. Dazu benötigen wir noch ein paar Begriffe. Für $X \in K^E$ und $P \subseteq E$ sei $X(P)$ die *Restriktion* von X auf P , das heißt

$$(X(P))_e = \begin{cases} X_e & \text{falls } e \in P \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\hat{X} = \{X(P) : P \subseteq E\}$ ist ein total isotroper Unterraum von K^E . Der Vektor $X \in K^E$ heißt *vollständig*, falls $X_e \neq 0$ für alle $e \in E$ ist, und zwei Vektoren $X, Y \in K^E$ sind *supplementär*, falls $0 \neq X_e \neq Y_e \neq 0$ für alle $e \in E$; wir schreiben dann $X \# Y$.

Für zwei Vektoren $A = (A_e), B = (B_e) \in K^E$ und $P, Q \subseteq E$ sieht man sofort

$$(4.11) \quad \langle A(P), B(Q) \rangle = P \cdot Q \quad (= |P \cap Q| \pmod{2})$$

und

$$(4.12) \quad \dim(\hat{A} \cap \hat{B}) = |\{e \in E : A_e = B_e\}|.$$

Sind insbesondere X und Y supplementäre Vektoren, so haben wir $\hat{X} \cap \hat{Y} = \{0\}$.

Für einen vollständigen Vektor $X \in K^E$ und einen beliebigen Unterraum $\mathcal{U} \subseteq 2^E$ setzen wir

$$X(\mathcal{U}) = \{X(U) : U \in \mathcal{U}\}.$$

$X(\mathcal{U})$ ist offenbar isomorph zu $\mathcal{U}$ unter der kanonischen Abbildung $U \rightarrow X(U)$.

Der folgende Satz zeigt, wie ein Matroid M und sein Dual M^* ein isotropes System ergeben.

Satz 12. Sei $M = (E, \mathcal{C})$ ein binäres Matroid, $\mathcal{K} = \mathcal{C}^\perp$, und $X \# Y \in K^E$. Dann bildet $S = (E, \mathcal{L})$ mit

$$\mathcal{L} = X(\mathcal{K}) + Y(\mathcal{C})$$

ein isotropes System.

Daß $\mathcal{L}$ total isotrop ist, folgt unmittelbar aus (4.11), und für die Dimension berechnen wir wegen (4.12)

$$\dim(X(\mathcal{K}) + Y(\mathcal{C})) = \dim \mathcal{K} + \dim \mathcal{C} = |E|.$$

Bouchet hat noch eine Reihe weiterer Beispiele isotroper Systeme gegeben und die Theorie auf sogenannte Multimatroide erweitert [9].

Im weiteren fixieren wir die Notation. In $K = \{0, x, y, z\}$ sei $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$, $z = (1, 1)$, und $X = (x, \dots, x) \in K^E$, $Y = (y, \dots, y) \in K^E$, $Z = (z, \dots, z)$, also $Z = X + Y$. Die Elemente x, y, z übernehmen nun die Rolle der drei *Übergänge* in der geometrischen Definition des Übergangspolynoms. Das heißt, zu jedem Paar (i, e) , $i \in K'$, $e \in E$ wählen wir ein Gewicht

$$W(i, e) = \begin{cases} \alpha & i = x \\ \beta & \text{falls } i = y \\ \gamma & i = z, \end{cases}$$

und setzen für einen vollständigen Vektor $A = (A_e) \in K'^E$

$$W(A) = \prod_{e \in E} W(A_e, e).$$

Definition. Sei $M = (E, \mathcal{C})$ binäres Matroid und $S = (E, \mathcal{L} = X(\mathcal{K}) + Y(\mathcal{C}))$ das zugehörige isotrope System. Dann heißt

$$(4.13) \quad Q(S, W, \lambda) = \sum_{A \in K'^E} W(A) \lambda^{\dim(\mathcal{L} \cap \widehat{A})}$$

das *Übergangspolynom* von S bezüglich der Gewichtung W .

Die Zahl $\dim(\mathcal{L} \cap \widehat{A})$ wurde von Bouchet allgemein im Rahmen von Multi-matroiden untersucht. Spezielle Fälle des Übergangspolynoms sind unter anderem die Martin Polynome (siehe dazu [12, 21, 23]).

Die folgende Formel stellt nun den Bezug zu den Bizyklusräumen her. Es sei $M = (E, \mathcal{C})$, $\mathcal{L} = X(\mathcal{K}) + Y(\mathcal{C})$ und $A \subseteq E$. Dann gilt

$$(4.14) \quad \dim \mathcal{B}_M(A) = \dim(\mathcal{L} \cap Z(\widehat{A}) + Y(E \setminus A)).$$

Zum Beweis prüft man nach, daß die Abbildung $\varphi : \mathcal{B}_M(A) \rightarrow \mathcal{L} \cap (Z(\widehat{A}) + Y(E \setminus A))$ mit $\varphi(C) = Z(C \cap A) + Y(C \cap (E \setminus A))$ eine Bijektion ist.

Um schließlich den Zusammenhang zum Tutte Polynom herzustellen, benötigen wir noch eine Rekursion isotroper Systeme in bezug auf Reduktion und Kontraktion.

Es sei $S = (E, \mathcal{L})$ ein beliebiges isotropes System, $e \in E$. Mit $\mathcal{L}_i^e$ ($i \in K'$) bezeichnen wir $\mathcal{L}_i^e = \{A \in \mathcal{L} : A_e = i\}$, und wir setzen

$$\mathcal{L}_i^e = p_e(\mathcal{L}_0^e \cup \mathcal{L}_i^e),$$

wobei $p_e : K^E \rightarrow K^{E \setminus e}$ die kanonische Projektion ist. Wir nennen $S_i^e = (E \setminus e, \mathcal{L}_i^e)$ einen *elementaren Minor* von S ; S_i^e ist wieder isotropes System.

Ist nun $M = (E, \mathcal{C})$ gegeben und $S = (E, \mathcal{L} = X(\mathcal{K}) + Y(\mathcal{C}))$ das zugeordnete isotrope System, so überlegt man sich sofort, daß die Reduktion $M \setminus e$ dem System S_x^e entspricht und die Kontraktion M/e dem System S_y^e .

Nun ist es ein leichtes, Satz 5 aus Abschnitt 3.2 zu übertragen.

Satz 13. Sei $M = (E, \mathcal{C})$ binäres Matroid und $S = (E, X(\mathcal{K}) + Y(\mathcal{C}))$ das zugeordnete isotrope System. Dann gilt für $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

$$Q(S, W_{\alpha, \beta, \gamma=0}, \lambda) = \alpha^{\dim \mathcal{C}} \beta^{\dim \mathcal{K}} T_M \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \lambda, 1 + \frac{\beta}{\alpha} \lambda \right).$$

Auch Penrose's „binor case“ gilt in dieser Situation (siehe [24]).

(4.15) Sind $W, \overline{W}$ zwei Gewichtungen mit $\overline{W} = W + m$, so gilt

$$Q(S, \overline{W}, -2) = Q(S, W, -2).$$

Schließlich betrachten wir die Gewichtung $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = -1$. Laut Definition (4.13) liefert $A = (A_e) \in K'^E$ nur dann einen Beitrag zu $Q(S, W, \lambda)$, wenn $A_e \in \{y, z\}$ ist für alle $e \in E$. Es sei $B = \{e \in E : A_e = z\}$, das heißt $A = Z(B) + Y(E \setminus B)$. Nach 4.14 erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}
Q(S, W_{\alpha=0, \beta=1, \gamma=-1}, \lambda) &= \sum_{B \subseteq E} (-1)^{|B|} \lambda^{\dim(\mathcal{L} \cap Z(B) + \widehat{Y(E \setminus B)})} \\
&= \sum_{B \subseteq E} (-1)^{|B|} \lambda^{\dim \mathcal{B}_M(B)} = P_M(\lambda).
\end{aligned}$$

In Zusammenfassung ergibt sich mit Satz 13 (für die Gewichtung $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$) und (4.15)

$$P_M(-2) = |\mathcal{K}| T_M(0, -3).$$

Nun ist wohlbekannt (siehe [10]), daß

$$(-1)^{\dim \mathcal{C}} T_M(0, -3) = |\{(C, D) \in \mathcal{C}^2 : C \cup D = E\}|$$

gilt, woraus genau die Verallgemeinerung von Satz 6 resultiert.

Satz 14. *Es sei $M = (E, \mathcal{C})$ ein binäres Matroid. Dann gilt*

$$P_M(-2) = (-1)^{\dim \mathcal{C}} |\mathcal{K}| \cdot \#\{(C, D) \in \mathcal{C}^2 : C \cup D = E\}.$$

Insbesondere gilt also für jedes binäre Matroid

$$(4.16) \quad P_M(4) = 0 \iff P_M(-2) = 0.$$

Die geschilderte Vorgehensweise erlaubt nun, ein Penrose Polynom bzw. Übergangspolynom für beliebige isotrope Systeme zu definieren, siehe dazu [24]. Außerdem liegt es nahe, statt $GF(2)$ beliebige endliche Körper zu betrachten. Mehrere interessante Ergebnisse zu q -linearen Matroiden findet man in [16].

4.4 Hopf Algebra und Penrose Polynom

Kehren wir noch einmal zum Penrose Polynom $P_G(\lambda)$ eines ebenen Graphen $G = (V, E, L)$ zurück. Wir haben in den Abschnitten 3.1 und 3.2 eine Interpretation von $P_G(\lambda)$ für positive $\lambda = k$ gesehen und für den singulären Wert $\lambda = -2$. Was aber zählt, wenn überhaupt, $P_G(\lambda)$ für negative ganze Zahlen?

Betrachten wir als ein Beispiel das chromatische Polynom $\chi_G(\lambda)$ eines beliebigen Graphen G . Stanley hat in [38] das erstaunliche Ergebnis gezeigt, daß $|\chi_G(-1)|$ gleich der Anzahl der *azyklischen Orientierungen* (d. h. ohne gerichtete Kreise) ist. Auch für beliebige negative Zahlen $\lambda = -k$ hat er eine Interpretation mittels Orientierungen gefunden.

Es war wohl Gian-Carlo Rota, der als erster vorschlug, die Technik der Hopf Algebra zu verwenden. Stellen wir zunächst die nötigen Begriffe zusammen (siehe [1]).

Eine *Hopf Algebra* über $\mathbb{C}$ ist eine Bialgebra $\mathcal{A}$ mit zwei Operationen, dem Produkt $\mu_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, dem Coprodukt $\Delta_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, und zwei linearen (unitären) Abbildungen $\eta_{\mathcal{A}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$, $\varepsilon_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, wobei die üblichen Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind. Zusätzlich besitzt $\mathcal{A}$ eine sogenannte *antipodale* Abbildung $S_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, für die gilt

$$\mu_{\mathcal{A}} \circ (S_{\mathcal{A}} \otimes \text{id}_{\mathcal{A}}) \circ \Delta_{\mathcal{A}} = \eta_{\mathcal{A}} \circ \varepsilon_{\mathcal{A}} = \mu_{\mathcal{A}} \circ (\text{id}_{\mathcal{A}} \otimes S_{\mathcal{A}}) \circ \Delta_{\mathcal{A}}.$$

Ein Standardbeispiel einer Hopf Algebra ist der Polynomring $\mathbb{C}[x]$ mit

$$\begin{aligned}\mu : \quad x^i \otimes x^j &= x^{i+j} \\ \Delta : \quad x^n &\longrightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \otimes x^{n-k} \\ \eta : \quad c &\longrightarrow c \cdot 1 \\ \varepsilon : \quad x^n &\longrightarrow \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}\end{aligned}$$

und der antipodalen Abbildung $S : f(x) \longrightarrow f(-x)$.

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Hopf Algebren über $\mathbb{C}$, mit den antipodalen Abbildungen $S_{\mathcal{A}}$ und $S_{\mathcal{B}}$, so heißt der Morphismus $H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ eine *Hopf Abbildung*, falls

$$(4.17) \quad S_{\mathcal{B}} \circ H = H \circ S_{\mathcal{A}}.$$

Die Grundidee ist nun die folgende:

- (1) Wir definieren eine Hopf Algebra $\mathcal{A}$, frei erzeugt von den ebenen Graphen G (oder äquivalent den 2-gefärbten Medialgraphen $\tilde{G}$).
- (2) Wir interpretieren die antipodale Abbildung $S_{\mathcal{A}}$ in graphentheoretischen Begriffen.
- (3) Wir zeigen, daß die Abbildung $P : G \longrightarrow P_G(\lambda)$, die jedem Graphen G das Penrose Polynom zuordnet, eine Hopf Abbildung von $\mathcal{A}$ nach $\mathbb{C}[\lambda]$ ist.

Dann folgt aus (4.17)

$$P_G(-\lambda) = P_{S_{\mathcal{A}}(G)}(\lambda)$$

und wir erhalten eine Formel für negative Werte $-k$, da wir $P_{S_{\mathcal{A}}(G)}(\lambda)$ für positives k kennen (Satz 1 aus Abschnitt 3.1).

Eine sehr interessante Konstruktion solch einer Hopf Algebra $\mathcal{A}$, welche (1) bis (3) genügt, wurde in [31] beschrieben. Für die Details sei auf [31] verwiesen, wir geben hier nur ein Hauptergebnis, das für unsere Fragen besonders relevant ist.

Es sei $G = (V, E, L)$ eben und $\tilde{G} = (E, K)$ der 2-gefärbte Medialgraph. Eine Partition $\pi = A_1|A_2|\dots|A_{s(\pi)}$ der Kantenmenge K heißt eine *Penrose Partition*, falls alle Untergraphen $\tilde{G}|A_i$ Eulersch sind, wobei für Ecken in $\tilde{G}|A_i$ vom Grad 2 die inzidenten Kanten stets einen weißen oder Kreuzungsübergang bilden. $\Pi(\tilde{G})$ sei die Menge der Penrose Partitionen.

Ist nun π eine Penrose Partition von K , so nennen wir $f : K \longrightarrow \{1, \dots, k\}$ eine *k-Bewertung* von π , falls f in $\tilde{G}|A_i$ auf Ecken vom Grad 4 eine *k-Bewertung* im bisherigen Sinn ist und auf Ecken vom Grad 2 gleiche Werte auf den inzidenten Kanten annimmt.

Satz 15. Für einen ebenen Graphen G mit Medialgraph $\tilde{G}$ gilt

$$P_G(-k) = \sum_{\pi \in \Pi(\tilde{G})} (-1)^{s(\pi)} (s(\pi))! (\#k - \text{Bewertungen von } \pi).$$

Für $k = 1$ haben alle Ecken in $\tilde{G}|A_i$ Grad 2, und wir erhalten

$$P_G(-1) = \sum_{A \subseteq E} (-1)^{c(A)} (c(A))!,$$

wobei A alle Mengen durchläuft, deren Kantenzüge *Kreise* sind.

Die Idee der Hopf Algebra wurde auch auf andere kombinatorische Fragestellungen angewandt [32, 33, 34], das Potential dieser Technik scheint jedenfalls noch nicht annähernd ausgeschöpft.

5 Nochmals der 4-Farbensatz

Wir wissen, daß das Penrose Polynom $P_G(\lambda) = \sum a_i \lambda^i$ eines ebenen brückenlosen Graphen $G = (V, E, L)$ Grad $|L|$ hat, aber wie sehen die Koeffizienten a_i aus? Haben sie insbesondere eine kombinatorische Bedeutung?

Betrachten wir das verwandte chromatische Polynom $\chi_G(\lambda) = \sum b_i \lambda^i$ eines beliebigen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$. Aus der Rekursion

$$\chi_G(\lambda) = \chi_{G \setminus e}(\lambda) - \chi_{G/e}(\lambda)$$

folgt sofort, daß $\chi_G(\lambda)$ Grad $|V|$ hat, und daß die Koeffizienten $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1$ eine *alternierende Folge* bilden, das heißt

$$b_n = 1, b_{n-1} < 0, b_{n-2} > 0, b_{n-3} < 0, \dots$$

Ist $G = (V, E, L)$ also eben, so gilt das analoge Resultat für $\chi_{G^*}(\lambda)$: $\chi_{G^*}(\lambda)$ hat Grad $|L|$ mit alternierenden Koeffizienten.

Und wie sieht es mit $P_G(\lambda) = \sum a_i \lambda^i$ aus? Zunächst einmal ist $a_0 = 0$, da 0 Nullstelle von $P_G(\lambda)$ ist. Hat $G = (V, E, L)$ zwei Länder R_1, R_2 mit zwei gemeinsamen Randkanten e, f (wir sagen G hat *mehrfache Ländernachbarschaften*), so wurde in [4] gezeigt, daß $P_G(\lambda) = 2P_{G/e}(\lambda)$ gilt. Wir können also annehmen, daß G keine mehrfachen Ländernachbarschaften besitzt (im dualen Graph entspricht dies parallelen Kanten).

Für brückenlose ebene Graphen $G = (V, E, L)$ ohne mehrfache Ländernachbarschaften gilt nun [4]:

$$(5.1) \quad a_r = 1 \quad (r = |L|)$$

$$(5.2) \quad a_{r-1} = -|E| + k_4^* < 0, \text{ wobei } k_4^* = \# (\text{Untergraphen } K_4 \text{ in } G^*).$$

Es gilt auch $a_{r-2} > 0$, und alle durchgerechneten Beispiele weisen stets die Eigenschaft „alternierende Koeffizienten“ auf. Warum sollte es so viel schwieriger sein, diese Eigenschaft allgemein für $P_G(\lambda)$ zu beweisen, wenn der analoge Satz für $\chi_{G^*}(\lambda)$ nahezu trivial ist? Hier ist der Grund [4]:

Satz 16. *Wenn für einen ebenen Graph G das Penrose Polynom $P_G(\lambda)$ alternierende Koeffizienten hat, dann ist G 4-Länder färbbar.*

Es ist nicht klar, ob dies äquivalente Aussagen sind, das heißt, ob unter Annahme des 4-Farbensatzes die Eigenschaft „alternierend“ gefolgert werden kann. Bekannt ist die Eigenschaft „alternierend“ für

- Eulersche Graphen
- Serien-parallele Graphen und damit insbesondere

- außerplanare Graphen (alle Ecken liegen am Rand des äußeren Gebietes), siehe hierzu [24].

Wenn wir zu beliebigen Graphen bzw. binären Matroiden übergehen (wie immer ohne Brücken), so muß die Eigenschaft „alternierend“ natürlich nicht mehr gelten. Ein Beispiel liefert, wie in Abschnitt 4.2 gesehen, die duale Fano Ebene F^* , deren Penrose Polynom 0 ist. Zwei weitere (minoren-minimale) Beispiele sind der *Petersen Graph* Pet (der nicht plättbar ist) und das duale Matroid K_5^* des vollständigen Graphen auf 5 Ecken. Man berechnet (ohne den Faktor λ):

$$\begin{aligned} P_{Pet}(\lambda) &= \lambda^6 - 15\lambda^5 + 94\lambda^4 - 200\lambda^3 - 216\lambda^2 + 1040\lambda - 704 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda + 2)(\lambda^2 - 10\lambda + 44) \\ P_{K_5^*}(\lambda) &= \lambda^4 - 5\lambda^3 + 0 \cdot \lambda^2 + 20\lambda - 16 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Die drei Matroide F^* , Pet , K_5^* führen nun geradewegs zu einer der berühmtesten Vermutungen von Tutte, ausgedrückt in unserer Terminologie:

- (5.3) *Sei $M = (E, C)$ ein brückenloses binäres Matroid. Gilt $P_M(4) = 0$, dann enthält M entweder F^* , Pet oder K_5^* als Minor.*

Tutte hat in [41] diese Vermutung geometrisch formuliert (seine sogenannte „tangential 2-block conjecture“). Insbesondere würde (5.3) für ebene Graphen den 4-Farbensatz implizieren (da K_5 nicht plättbar ist) und den kürzlich (mit ebenfalls massivem Computereinsatz) von Robertson, Seymour und Thomas bewiesenen Satz: *Besitzt ein 3-regulärer brückenloser Graph G keine 3-Kantenfärbung, so enthält G den Petersengraph als Minor.*

Der bedeutendste Fortschritt zum Beweis von (5.3) stammt (unter Verwendung des 4-Farbensatzes) von Seymour [36]: Die einzigen möglichen weiteren Obstruktionen (neben F^* , Pet , K_5^*) sind *graphisch*, das heißt Matroide $M = (E, C_G)$, G Graph.

Und so wollen wir schließen mit einer weitergehenden Frage, die, als Vermutung zu äußern, wohl zu verwegen wäre:

Sind die einzigen brückenlosen minoren-minimalen binären Matroide, deren Penrose Polynome nicht-alternierende Koeffizienten haben, F^ , Pet und K_5^* ?*

Eine positive Antwort würde alle obigen Vermutungen und somit auch den 4-Farbensatz implizieren.

References

- [1] E. Abe: Hopf Algebras. Cambridge Univ. Press 1977.
- [2] M. Aigner: Combinatorial Theory. Springer 1979. Reprinted in Classics of Mathematics 1997.
- [3] M. Aigner, J. Seidel: Knoten, Spinmodelle und Graphen. Jber. Dt. Math. Verein. 97 (1995), 75–96.
- [4] M. Aigner: The Penrose polynomial of a plane graph. Math. Annalen 307 (1997), 173–189.
- [5] M. Aigner, H. Mielke: The Penrose polynomial of a binary matroid. Erscheint in Monatsh. Math.
- [6] K. Appel, W. Haken: Every planar map is four-colorable. Bull. Amer. Math. Soc. 82(1976), 711–12.

- [7] *A. Bouchet*: Isotropic Systems. *Europ. J. Combinatorics* 8(1987), 231–244.
- [8] *A. Bouchet*: Tutte-Martin polynomials and orienting vectors of isotropic systems. *Graphs and Combinatorics* 7(1991), 235–252.
- [9] *A. Bouchet*: Multimatroïds I: *SIAM J. Discrete Math.* 10 (1997), 626–646.
- [10] *T. Brylawski, J. Oxley*: The Tutte polynomial and its applications. In: *Matroid Applications* (White ed.) Cambridge Univ. Press (1992), 123–225.
- [11] *H. Crapo*: The Tutte polynomial, *Aequationes Math.* 3(1969), 211–229.
- [12] *J. Ellis-Monaghan*: New results for the Martin polynomial. *J. Combinatorial Theory B* 74 (1998), 326–352.
- [13] *F. Jaeger*: On Tutte polynomial and link polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.* 103 (1988), 647–654.
- [14] *F. Jaeger*: On Tutte polynomials and cycles of planar graphs. *J. Combinatorial Theory B* 44 (1988), 127–146.
- [15] *F. Jaeger*: On edge-colorings of cubic graphs and a formula of Roger Penrose. *Annals Discrete Math.* 41(1989).
- [16] *F. Jaeger*: On Tutte polynomials of matroids representable over $GF(q)$. *Europ. J. Combinatorics* 10 (1989), 247–255.
- [17] *F. Jaeger*: On transition polynomials of 4-regular graphs. In: *Cycles and Rays* (Hahn et al. eds.). Kluwer (1990), 123–150.
- [18] *V. Jones*: A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.* 12 (1985), 103–111.
- [19] *L. Kauffman*: State models and the Jones polynomial. *Topology* 26 (1987), 297–309.
- [20] *C. Kuratowski*: Sur le probleme de courbes gauches en topologie. *Fundamenta Math.* 15 (1930), 271–283.
- [21] *M. Las Vergnas*: Le polynôme de Martin d'un graph Eulerien. *Annals of Discrete Math.* 17 (1983), 397–411.
- [22] *W. Lickorish*: Polynomials for links. *Bull. London Math. Soc.* 20 (1988), 558–588.
- [23] *P. Martin*: Enumeration eulérienne dans les multigraphes et invariants de Tutte-Grothendieck. Thesis, Univ. Grenoble 1977.
- [24] *H. Mielke*: The Penrose Polynomial. Diss. Freie Universität Berlin.
- [25] *J. Oxley*: *Matroid Theory*. Oxford Univ. Press. 1992.
- [26] *R. Penrose*: Applications of negative dimensional tensors. In: *Combinatorial Mathematics and its Applications*. (Welsh ed.) Academic Press (1971), 221–244.
- [27] *N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, R. Thomas*: The four-colour theorem. *J. Combinatorial Theory B* 70 (1997), 2–44.
- [28] *N. Robertson, P. Seymour*: Graph minors XX, Wagner's conjecture. Preprint 1988.
- [29] *P. Rosenstiehl*: Bicycles et diagonales des graphes planaires. *Cahiers de C.E.R.O.* 17 (1975), 365–383.
- [30] *P. Rosenstiehl, R. Reed*: On the principal edge tripartition of a graph. *Annals Discrete Math.* 3 (1978), 195–226.
- [31] *I. Sarmiento*: Hopf algebras and the Penrose polynomial. Preprint.
- [32] *W. Schmitt*: Antipodes and incidence Coalgebras. *J. Combinatorial Theory A* 46 (1987), 264–290.
- [33] *W. Schmitt*: Incidence Hopf algebras. *J. Pure Applied Algebra* 96 (1994), 299–330.
- [34] *W. Schmitt*: Hopf algebra methods in graph theory. *J. Pure Applied Algebra* 101 (1995), 77–90.
- [35] *W. Schwärzler, D. Welsh*: Knots, matroids and the Ising model. *Math. Proc. Camb. Phil. Society* 113 (1993), 107–139.
- [36] *P. Seymour*: On Tutte's extension of the four-colour problem. *J. Combinatorial Theory B* 31 (1981), 82–94.
- [37] *H. Shank*: The theory of left-right paths. In: *Combinatorial Mathematics III*. Lecture Notes Math. 452. Springer 1975, 42–54.
- [38] *R. Stanley*: Acyclic orientations of graphs. *Discrete Math.* 5 (1973), 171–178.
- [39] *W. Tutte*: A ring in graph theory. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 43 (1947), 26–40.
- [40] *W. Tutte*: A contribution to the theory of chromatic polynomials. *Canad. J. Math.* 6 (1954), 80–91.

- [41] *W. Tutte*: On the algebraic theory of graph colorings. J. Combinatorial Theory 1 (1966), 15–50.
- [42] *O. Veblen*: An application of modular equations in Analysis Situs. Ann. Math. (2) 14 (1912), 86–94.
- [43] *H. Whitney*: A set of topological invariants for graphs. Amer. J. Math. 55 (1933), 231–235.

Martin Aigner
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Mathematik II (WE 2)
Arnimallee 3, D-14195 Berlin
aigner@math.fu-berlin.de

(Eingegangen 28.12.1999)

Felix Klein in Leipzig¹

1880–1886

Rüdiger Thiele

Dir werf' ich's zu – weißt du, wie das wird?
Die Nornen im „Ring des Nibelungen“ (UA 1876) von
Richard Wagner (Leipzig 1813–Venedig 1883)

1 Einleitung

„Prorector magnifice! Collegen, Commilitonen! Hochgeehrte Versammlung!“ Mit dieser feierlichen Anrede begrüßte am Montag, dem 25. Oktober 1880, hier in Leipzig ein neu berufener 31jähriger Professor der Geometrie die akademische Hörschar, die sich zu der nach altem akademischen Brauch fälligen festlichen Antrittsvorlesung *Über die Beziehung der neueren Mathematik zu den Anwendungen* eingefunden hatte.² Traditionsgemäß entwickelte der Vortragende Vorstellungen für sein künftiges Wirken und schloß so: „Ein umfassendes Programm, wie das von mir vorgelegte, läßt sich jedenfalls nur allmählich durchführen. ... Haben Sie damit alle Nachsicht, und messen Sie ... nach dem Plan und der Absicht, die dem Ganzen zu Grunde liegt.“ Die im Vortrag genannten Ziele sollten bald in Leipzig in Angriff genommen und weitgehend verwirklicht werden. Tags darauf, im üblichen Vorlesungsbetrieb, konnte sich der neue Dozent bescheidener fassen, nicht nur weil er seine 74 Hörer in der Vorlesung *Funktionentheorie in geometrischer Behandlungsweise* einfach mit „Meine Herren“ anreden durfte, sondern auch dadurch, daß er sich auf seine konkreten Arbeitsaufgaben bezog. In der vorletzten Vorlesung versah der selbst unentwegt tätige Hochschullehrer seine Hörer vorsorglich mit Studienaufgaben, um in den bevorstehenden Semesterferien Stillstand zu vermeiden, und er bedachte vorgerückte Studenten dabei besonders.

Der Professor der Geometrie war natürlich, wie Sie erwartet haben, kein anderer als Felix Christian Klein (25. April 1849 – 22. Juni 1925). *Wie und warum*

¹ Die Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Leipzig veranstaltete anlässlich des 150. Geburtstages von Felix Klein am 4. November 1999 ein Festkolloquium, auf dem der nachstehende, für den Druck leicht überarbeitete historische Vortrag gehalten wurde.

² In der Regel hörte auch der sächsische König *Albert* sich die Antrittsvorlesungen an, wie etwa bei *S. Lie* (1886) und *O. Hölder* (1899). Bei Klein war das nicht der Fall gewesen, jedoch hatte Albert Klein bei Dienstantritt in Dresden empfangen und später eine Vorlesung von Klein besucht.



Felix Klein vor seiner Leipziger Zeit (etwa 1872). Universitätsbibliothek Erlangen-Nürnberg, Porträtsammlung der Handschriftenabteilung, Bild aus dem Album des Philomatischen Vereins.



Felix Klein am Ende seiner Leipziger Zeit (1885). Archiv der Deutschen Akademie der Naturforscher, Leopoldina, Halle, Mitgliederalbum Nr. 6 (Matrikel 2581).

war der 31jährige hier in Leipzig ordentlicher Professor der Geometrie geworden? *Wie* es zu der Gründung der ersten deutschen Professur für Geometrie kam, das ist leichter zu berichten als das *Warum* zu begründen, und daher wollen wir mit dem *Wie* beginnen.

2 Die Berufung Kleins

Leipzig besaß zwar in den 70er Jahren des vorigen Jahrhunderts eine der am meisten besuchten Universitäten Deutschlands,³ aber diese Jahre waren für die Mathematik in Leipzig schwierig gewesen, denn 1868 war der bedeutende Geometer August Ferdinand Möbius (1790–1868) gestorben und im gleichen Jahr hatte Moritz Drobisch (1802–1896) seine mathematische Professur zugunsten einer philosophischen aufgegeben.

Zwar waren Wilhelm Scheibner (1826–1908) und Carl Neumann (1832–1925) als ordentliche Professoren an deren Stellen getreten, aber damit war eine

³ Studentenzahlen für die Universität Leipzig (in Klammern Studenten der Mathematik) im Wintersemester 1870: 1726 (36); 1875: 2925 (150); 1880: 3326 (197); 1885: 3288 (100); 1890: 3458 (26).

starke Betonung der Analysis verbunden gewesen, so daß sich Scheibner um eine erneute Vertretung der Geometrie bemühte.⁴ Zunächst agierte Scheibner noch vorsichtig, um durch die Berufung eines ordentlichen Professors nicht die beiden verdienstvollen Kollegen Adolph Mayer (1839–1908)⁵ und Karl von der Mühl (1841–1912) zurückzusetzen, die lediglich außerordentliche Professoren waren. „Wir würden ... ohne Mayer geradezu bankrott sein“, hatte Scheibner 1879 unverblümt dem Dekan mitgeteilt. Als jedoch auf der „unteren Ebene“ der Versuch fehlgeschlug, die Geometrie durch einen Privatdozenten, nämlich durch Axel Harnack (1851–1888), einen Doktoranden Kleins, vertreten zu lassen, da Harnack die schlechte soziale Stellung eines Privatdozenten in Leipzig mit der sichereren Lage eines außerordentlichen Professors in Darmstadt vertauschte, wurden Scheibners Bemühungen dringlicher.

In einem Schreiben an den Dekan Gustav Wiedemann (1826–1899) vom 17. Mai 1879 bezeichnete Scheibner nun das Fehlen eines Geometers als „unerhört“, und er monierte sich über die Zumutung des Kultusministers, der offenbar davon ausgegangen war, daß ein a. o. Professor in der Mathematik jedem Mangel abhelfen könne, ein Ansinnen, das Scheibner mit der Erwartung verglich, ein klassischer Philologe könne über Sanskrit lesen oder ein Romanist über deutsches Privatrecht vortragen.

Eine Rede des Leipziger Rektors, der der Mathematik zubilligte, zwar den Verstand, aber nicht das Herz und Gemüt auszubilden, und der daher zu der Schlußfolgerung kam, daß die Mathematik in Bezug auf eine allseitige Ausbildung nicht mit den historisch-philologischen Fächern konkurrieren könne, brachte das Faß schließlich zum Überlaufen. Scheibner betrachtete diese Einstellung als *testimonium paupertatis*, weniger akademisch und auf deutsch ausgedrückt redete Scheibner hier vom Armutszeugnis. In dem Schreiben vom 15. Dezember 1880 an den Dekan hielt er nun der Auffassung des Rektors demonstrativ jene Passage aus dem Landtagsbericht des sächsischen Kultusministers entgegen, in der der Minister sich bemüht zeigte, den „Bedürfnissen [der Leipziger Mathematiker] Rechnung zu tragen“. Diplomatisch verglich Scheibner noch die Situation der Philologen mit der der Mathematiker und benutzte geschickt das bis heute wirksam gebliebene Argument der Studentenzahlen: für 399 Studenten der Philologie gäbe es 13 Ordinariate, 8 Extraordinariate sowie einen Honorarprofessor; den 186 für Mathematik immatrikulierten Studenten ständen jedoch nur jeweils zwei Ordinariate und Extraordinariate gegenüber, selbst auf die 117 Göttinger Mathematikstudenten kämen 4 Ordinariate sowie ein Extraordinarius.

Nun hatte Scheibner in der Fakultätssitzung Erfolg: am 21. Dezember 1879 beschloß diese, beim Ministerium einen entsprechenden Antrag zu stellen. In der Tat lag bald ein Entwurf des Antrags vor und wurde zügig diskutiert, so daß am 5. Februar 1880 ein ausführlicher Bericht von 18 Seiten nach Dresden gehen konn-

⁴ Alle folgenden und nicht weiter nachgewiesenen Zitate dieses Abschnitts sind der Personalakte Klein des Universitätsarchivs Leipzig entnommen.

⁵ Rüdiger Thiele, *Adolph Mayer*. In: *Sächsische Lebensbilder*, Bd. 4. Hrg. R. Groß und G. Wiemers. Leipzig / Stuttgart: Sächsische Akademie der Wissenschaften/Franz Steiner 1999, S. 211–227.

te. Der Bericht führte u. a. das Leipziger Lehrangebot in Mathematik an und zählte gleichzeitig etwa ein Dutzend geometrischer Fächer auf, die nicht gelesen werden konnten, darunter waren beispielsweise die deskriptive (also darstellende) Geometrie, die Geometrie der Lage, die Geometrie der algebraischen Kurven und Flächen oder die nichteuklidische Geometrie. Die Antragsteller argumentierten auch mit den Studentenzahlen, und sie hatten dabei durch einen statistischen Trick, indem sie sich nur auf die Inländer (sprich Sachsen) bezogen, das Zahlenverhältnis von Philologie- und Mathematikstudenten auf die wesentlich günstigere Relation 117 zu 97 gebracht; die restlichen deutschen Stämme wurden dabei gemeinsam mit den Ausländern erfaßt. (Zur Information: um 1880 gab es knapp 3 Millionen Sachsen und das Deutsche Reich wurde von 42 Millionen Menschen bewohnt.) Die eingereichte Berufungsliste nannte Klein an erster Stelle, nach ihm seine Doktoranden Axel Harnack und Ferdinand Lindemann (1852–1939).

Am 3. März 1880 teilte Adolph Mayer Klein brieflich mit, daß sich die Fakultät „endlich ermannt“ habe, eine Professur für Geometrie zu gründen, und daß Klein dafür vorgesehen sei, und er bat diskret um Kleins Bedingungen, um diese beim Ministerium durchzusetzen. Dort wurde Mayer unmittelbar nach Kleins Antwort vorstellig. Man versprach eine Entscheidung, zu der Mayer wieder bestellt wurde. Der zweite Besuch war jedoch niederschmetternd, denn Mayer hatte, wie er Klein am 24. April 1880 schrieb, mit Annahme, Ablehnen oder Verschieben gerechnet (also mit einer logisch vollständigen Trichotomie), jedoch nicht mit den vielfältigeren Möglichkeiten des politischen Geschäfts, nämlich damit, daß „der Minister die Frechheit haben würde, so zu thun, als ob er gar nicht wisse, weshalb ich käme“. Aber erfreulicherweise verharnte das Dresdner Ministerium nicht in dieser Vogel-Strauß-Politik, sondern berief überraschend kurz darauf Klein, der aus München am 28. Mai 1880 erfreut zusagte: „Es sind die großen *inneren* Vorzüge der neuen Stellung gewesen, die mir eine Annahme der Berufung vom ersten Augenblick an unzweifelhaft erschienen ließen.“⁶ Schon am Tage des Eingangs von Kleins Schreiben, am 31. Mai, unterrichtete das Ministerium die Leipziger Fakultät, daß nunmehr seine königliche Majestät Klein zum ordentlichen Professor für Geometrie mit Sitz und Stimme in der philosophischen Fakultät ernannt hatte.

Beenden wir damit den Überblick über das Prozedere und fragen, warum es in Leipzig zu einer Geometrie Professur gekommen war und weshalb die Wahl auf Klein gefallen war.

Entscheidend für Kleins Hinwendung zur Mathematik war der Einfluß des Geometers Julius Plücker (1801–1868) gewesen, wenn auch zwischen Kleins Immatrikulation im WS 1865 und Plückers Tod im Mai des Jahres 1868 nur eine kurze Zeitspanne lag. Obwohl Klein ab seinem zweiten Semester Plücker lediglich in den physikalischen Vorlesungen assistieren sollte, unterstützte er diesen so sachkundig bei Untersuchungen über Liniengeometrie, daß nach Plückers Tod Klein als 19-jähriger von Alfred Clebsch (1833–1872) betraut wurde, den geometrischen Nachlaß Plückers aufzubereiten und herauszugeben. Damit kam es zu einer Zusammenarbeit mit Clebsch, die gleichfalls nur kurz währte, denn auch Kleins zweiter Mentor starb, erst 39-jährig, aber Clebsch hatte noch in seinem Todesjahr 1872 Klein er-

⁶ Zitiert nach der Leipziger *Dissertation* (1982) von Fritz König, S. 93. S. Fußnote 13.

folgreich für eine Erlanger Professur empfohlen. Klein rückte 1872 für den verstorbenen Clebsch in die Redaktion der *Mathematischen Annalen* nach, die unter Kleins Ägide eine der wichtigsten mathematischen Zeitschriften wurde.

Klein begann nun, das während seines kurzen Pariser Aufenthalts im Jahre 1870 erworbene Wissen zu entfalten. Der deutsch-französische Krieg 1870/71 hatte ihn zwar zur vorzeitigen Rückkehr gezwungen, aber er war – wie Richard Courant (1888–1972) es ausdrückte – mit dem „Stein der Weisen“ im Gepäck in die Heimat gereist, nämlich mit Kenntnissen der seinerzeit noch wenig verbreiteten Galoisschen Gruppentheorie.⁷

Geometrische Transformationen bilden Gruppen. Klein hat als erster erkannt, daß Gruppen und ihre Invarianten ein fruchtbares Mittel bilden, um geometrische Sachverhalte zu ordnen. Man kann bei jeder geometrischen Größe, bei jedem geometrischen Begriff, allgemeiner bei jedem geometrischen Sachverhalt nach derjenigen Gruppe von Transformationen fragen, gegenüber der er invariant bleibt, und umgekehrt bei einer gegebenen Gruppe deren Invarianten suchen. Klein brachte so Geometrie und Gruppentheorie zusammen, wobei diese Verbindung einen physikalischen Hintergrund aufweist: geometrische Figuren „bewegen“ sich im mathematischen Raum wie materielle Körper im Wahrnehmungsraum der Mechanik.⁸

In Erlangen war es üblich, daß ein neu berufener Professor ein Programm entwarf. In Kleins Schrift, die als das *Erlanger Programm* in die Geschichte eingegangen ist, stellte sich Geometrie im beschriebenen Sinn als besonderer Fall eines allgemeinen Problems so dar:

Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörenden Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden.⁹

Die Vielfalt der bislang entwickelten Geometrien – wie euklidische Geometrie, projektive Geometrie, Kugelgeometrie oder die nichteuklidischen Geometrien – war übersichtlich geordnet worden. Das Erlanger Programm hat unser Verständnis vom Wesen der Geometrie nachhaltig verändert. Der algebraische Geometer William Hodge (1903–1975) sprach noch um die Mitte dieses Jahrhunderts von der Tyrannei des Erlanger Programms, aber Riemannsche Räume mit nicht konstanter Krümmung (die beispielsweise als Raum-Zeit-Kontinuum in der allgemeinen Relativitätstheorie auftreten) haben zu wenige Automorphismen, um sich anhand von Gruppen klassifizieren zu lassen. Das gruppentheoretische Konzept ist jedoch von

⁷ 1870 war in Paris von Camille Jordan der *Traité des substitutions et des équations algébriques* erschienen, der für den Rest des 19. Jahrhunderts die „Bibel der Gruppentheoretiker“ (J. Dieudonné) gewesen war.

⁸ Es ist erwähnenswert, daß Klein im Nachhinein bemerkte, daß er im Erlanger Programm den Möbiusschen Ordnungsbegriff der „geometrischen Verwandtschaft von Figuren“ aus dessen Buch *Der barycentrische Calcul: ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie* (1827) verallgemeinert hatte.

⁹ F. Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. Berlin: Springer 1921. Bd. 1, S. 460–497, Zitat S. 463. Die Transformationsgruppen sind bei Klein stets solche, die heute als Liesche Gruppen bezeichnet werden.

Klein (zumindest ursprünglich) weder dogmatisch als *das* fundamentale Prinzip, als ultima ratio, verstanden worden (der Titel des Programms lautete bezeichnenderweise: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*), noch ist es das einzige Konzept des Programms, denn ebenso zentral und ganz in Plücker-scher Tradition behandelte Klein den Wechsel der Raumelemente bei geometrischen Untersuchungen.

Das Programm zeigt überdies exemplarisch zwei Seiten von Kleins mathematischem Denken: die Suche nach Einheit in der Mathematik, allgemeiner nach dem verbindenden Band in Wissenschaft und Kultur, sowie seine außerordentliche Fähigkeit, die ihm dabei zustatten kam, entlegene mathematische Dinge verbinden zu können. Solches Streben nach Einheit der Mathematik, das – wie David Hilbert (1862–1943) sagte – von Klein in der Geometrie gesucht wurde, während er selbst, Hilbert, dem verbindenden Element in der Analysis nachspüre, erscheint uns selbstverständlich, aber ich erinnere daran, daß die damaligen Berliner Schulen, die Karl Weierstraß (1815–1897) oder Leopold Kronecker (1823–1891) repräsentierten, die Mathematik viel einseitiger auffaßten. Klein nannte die vom Weierstraß-Schüler Lazarus Fuchs (1833–1902) vertretene Richtung „ein typisches Beispiel einer eng begrenzten ‚Schule‘, wie sie sich durch geregelten Vorlesungsbetrieb, sobald er einseitig wird, herausbilden kann.“¹⁰

3 Kleins Wirken in Leipzig

Unser kleiner geschichtlicher Überblick hat die angewachsene Tragweite der Geometrie in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts deutlich gemacht und damit auch die Bedeutung eines Lehrstuhls für diese Disziplin gezeigt. Felix Klein war also eine ausgezeichnete Wahl für Leipzig gewesen. Klein notierte: „Mein Lehrauftrag in Leipzig war ausdrücklich auf Geometrie beschränkt. So hatte es die Regierung verfügt.“¹¹ Wie konnte dann aber der Professor der Geometrie – „trotz mannigfachen Widerspruchs“ wie er sich zudem erinnerte – seine Lehrtätigkeit mit einer zweisemestrigen Vorlesung über Funktionentheorie beginnen? Ehe ich diese Frage eingehender untersuche, wollen wir Kleins elfsemestriges Wirken in Leipzig kurz mit etwas Statistik Revue passieren lassen und dabei seinen Arbeitsaufgaben nachgehen.

In Leipzig hatte Klein mit Hilfe von Mayer nahe dem Bayerischen Bahnhof und unweit der Universität in der Sophienstraße 10 (heute Shakespearestraße) in der zweiten Etage eines fünfgeschossigen Hauses eine Wohnung gefunden. Das Gebäude steht nicht mehr. Mathematische Kollegen des 31jährigen Klein in Leipzig waren von der Mühl (39 Jahre), Mayer (41 Jahre), C. Neumann (48 Jahre) und Scheibner (54 Jahre). Klein ist sofort tätig geworden und „warf sich mit voller Kraft auf die Aufgaben des mathematischen Universitätsunterrichts“ (Courant), um die ihn kennzeichnenden Einrichtungen Modellsammlung, Lesezimmer und

¹⁰ *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. Band 1. S. 270.

¹¹ Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabt., Cod. Ms. Klein 22 L:4.

Mathematisches Seminar (im Sinne eines Instituts verstanden) zu schaffen.¹² Diese Dinge sind als seine Markenzeichen allgemein bekannt, für Leipzig hat Fritz König (geb. 1949) die Details zusammengetragen und Kleins Wirken an dieser Universität ausführlich dokumentiert.¹³

In den *Autobiographischen Notizen* von 1913, die sich in der Handschriftenabteilung der Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen befinden und von denen es eine von Konrad Jacobs (geb. 1928) transkribierte Fassung gibt, notierte sich Klein u. a.:

- „1880 nun erst recht Arbeit, sofort Kolloquium und höhere Seminare [Lehrveranstaltung],
- 1881 Ostern Czermakaion bezogen, Modellsammlung, Lesezimmer, Zyklus der geometrischen Kursvorlesungen begonnen,
- 1883 [inmitten seiner Rekonvaleszenzphase] zum Herbst Seminar und Lesezimmer auf die Ritterstraße verlegt.“ (Diesen Umzug hatte Klein sofort nach seinem Urlaub, am Dienstag, dem 9. Oktober, für den Nachmittag des folgenden Freitag festgelegt; denn in der nächsten Woche, am Montag, dem 15. 10., begann schon das Wintersemester.)

Hierzu einige Erläuterungen: Ab SS 1881 wurden die mathematischen Vorlesungen nicht mehr im Augusteum abgehalten (im 2. Weltkrieg zerstört und danach abgerissen), sondern sie wurden in Czermaks Spektatorium gelesen, einem Hörsaalgebäude, das in der Talstraße neben dem späteren Mathematischen Institut gestanden hat und Platz für etwa 400 Hörer bot, das aber 1900 abgetragen wurde. Die nach Kleins Vorstellungen umgebauten Nebenräume des Czermakaions nahmen ab 20. April 1881 die Modellsammlung und die mathematische Bibliothek auf: *Leipzig hatte damit ein Mathematisches Seminar*. Direktoren waren Klein, Mayer und von der Mühlh; Neumann scheute grundsätzlich Verwaltungsaufgaben.

Jedoch reichten diese Räumlichkeiten bald nicht mehr, so daß die Mathematik, wiederum auf Antrag Kleins, die zweite Etage des „Kleinen Fürstenkollegs“ erhielt, heute ist das die Ritterstr. 24. Dort gab es ein Lese-, Arbeits-, Seminar- und Sprechzimmer sowie einen Bibliotheksraum. Klein hatte sich um alle Details gekümmert, beispielsweise auch um die 66 von mir auf der Inventarliste gezählten Stühle. Vorlesungen hielt man weiterhin im Czermakaion, in dem auch die Modellsammlung verblieb. Durch den Abriß des Czermakschen Spektatoriums übernahmen die Mathematiker schließlich im SS 1905 das frühere Physikalische Institut in der Talstraße, im WS 1971 gab man das traditionsreiche Gebäude auf, in dem u. a.

¹² „Wir halten uns nicht für zu vornehm, um beim Unterricht und auch bei der eigenen Forschung, Zeichnungen und Modelle in ausgiebiger Zahl zu verwerten. Wir tun dies in dem Umfange, daß wir eigene Sammlungen organisieren. ... Ist es nicht eine ebenso würdige Aufgabe der Mathematik, richtig zu zeichnen, wie die richtig zu rechnen?“ (Antrittsrede)

¹³ Ich beziehe mich auf seine Arbeiten und danke Herrn Dr. König für seine freundlichen Auskünfte; ich verweise weiter auf Königs Beiträge in der Festschrift *100 Jahre Mathematisches Seminar* aus dem Jahre 1981, auf die von ihm herausgegebenen Kleinschen Vorlesungen (*Funktionentheorie in geometrischer Behandlung*, Leipzig 1987, und *Einleitung in die analytische Mechanik*, Leipzig 1991) und schließlich auf seine Leipziger Dissertation „Die Entstehung des Mathematischen Seminars an der Universität Leipzig“, Universität Leipzig 1982.

Adolph Mayer, Carl Neumann, Sophus Lie (1842–1899), Gerhard Kowalewski (1876–1950), Eduard Study (1862–1930), Felix Hausdorff (1868–1942), Heinrich Liebmann (1874–1932), Wilhelm Blaschke (1885–1962), Leon Lichtenstein (1878–1933), beide Hölder (1859–1937 bzw. 1901–1990), Gustav Herglotz (1881–1953), Bartel van der Waerden (1903–1996), Paul Koebe (1882–1945), Eberhard Hopf (1902–1983) oder Paul Günther (1926–1996) gelehrt hatten, und wechselte an den zentralen Augustusplatz, der damals in Karl-Marx-Platz umbenannt worden war.

Klein hatte in seinen Erlanger und besonders in seinen Münchener Jahren den Grund zu den meisten seiner späteren Untersuchungen gelegt. Die „Leipziger Schule“ Kleins kann daher als direkte Fortsetzung der Münchener angesehen werden. Klein bot während seiner 11 Semester 17 verschiedene Vorlesungen mit 2 oder 4 Wochenstunden an und hielt stets ein zweistündiges Forschungsseminar; seine Stundenzahl schwankte in den Semestern zwischen sechs und zehn pro Woche. Die Vorlesungen hatten bis über 100 Hörer, und in seinen höheren Seminarübungen zählte Klein ca. 150 Mitglieder, die wenigstens ein Semester lang geblieben waren. Als Assistenten hatte Klein zunächst Walther Dyck (1856–1934), der ihm aus München gefolgt war, und danach Friedrich Schur (1856–1932) sowie jährlich einen Famulus, der aus den Doktoranden ausgesucht wurde. In den Leipziger Jahren gab es 17 Dissertationen bei Klein, darunter die von Adolf Hurwitz (1859–1919), Henry Burchard Fine (1858–1928) oder Robert Fricke (1861–1930), sowie vier Habilitationen, 1881 Friedrich Schur, 1882 Walther Dyck, 1885 Friedrich Engel (1861–1941) und Eduard Study. Zum Vergleich: bei Klein selbst hatte es vor Leipzig 9 und danach in Göttingen 22 Dissertationen gegeben; in Leipzig gab es in der Mathematik in den Dezennien 1870–80 und 1880–90 insgesamt je 11 und 52 Dissertationen bzw. je 3 und 5 Habilitationen, von 1880–85 (etwa Kleins Leipziger Zeitraum) waren es 23 Dissertationen und 5 Habilitationen gewesen. Neben der aufwendigen Lehre hat Klein in Leipzig 18 mathematische Arbeiten verfaßt (7 bzw. 6 über elliptische bzw. automorphe Funktionen, 3 über Geometrie, 2 zur mathematischen Physik), 2 Bücher geschrieben und mit der Herausgabe der *Autographierten Vorlesungen* begonnen. Ein respekteinflößendes Pensum! 1885, im Bewerbungsschreiben für den Wechsel nach Göttingen, konnte der 36jährige Klein anführen, daß von seinen Schülern bereits 4 Ordinariate, 3 Extraordinariate und 6 Privatdozenturen besetzt¹⁴ sowie 17 Teilnehmer an seinen Seminaren inzwischen ausländische Dozenten geworden seien.

Die zurückgestellte Frage, warum Klein mit einer funktionentheoretischen Vorlesung begonnen hatte, führt uns tiefer in das Wesen von Kleins mathematischem Denken. Klein hat Geometrie nicht im engen Sinn des Wortes aufgefaßt, sondern als eine mathematische Denkweise schlechthin begriffen. Er hat übrigens drei mathematische Typen unterschieden: den *philosophisch* begründenden, den *analytisch* folgernden und den *geometrisch* veranschaulichenden. Hellmuth Kneser

¹⁴ Dyck in München, Harnack in Dresden, Lindemann in Königsberg, Wedekind in Karlsruhe/Hurwitz in Königsberg, Franz Meyer in Tübingen, Rohn in Dresden/Engel und Study in Leipzig, Krazer in Würzburg, Staude in Breslau, Wiener in Halle, O. Hölder vorübergehend in Göttingen.

(1898–1973) hat 1949 in einer Göttinger Gedenkrede Kleins geometrisches Wesen meisterhaft in folgenden Worten erfaßt: „Jeder mathematische Gegenstand wird ihm zum räumlichen Bild und seine besondere Kunst ist es, durch geometrische Transformationen von einem Bild zum anderen zu wechseln.“ In der Tat, weit über die Hälfte von Kleins Buch *Vorlesungen über höhere Geometrie* handelt von solchen Transformationen. Bei der Veranschaulichung algebraischer Funktionen etwa bemerkte Klein, daß der Übergang zwischen „verschiedenen anschauungsmäßigen Hilfsmitteln“ nicht nur wünschenswert, sondern „vom rein geometrischen Standpunkt geradezu gefordert werden muß, wenn die Sätze ... zu einem unmittelbaren Verständnis gebracht werden sollen.“¹⁵ Kneser gab einige Beispiele, ich wähle als Kostproben:

Die geraden Linien des Raumes werden zu Punkten im fünfdimensionalen Raum.

Die kanonischen Transformationen der Mechanik sieht er als Berührungstransformationen von Flächenelementen zu Flächenelementen an, und die Bewegungsgleichungen drücken aus, wie sich eine solche Berührungstransformation im Laufe der Zeit entfaltet.

Heute wären prominente Vertreter dieser Richtung beispielsweise Roger Penrose (geb. 1931) und sein Schüler Stephen Hawking (geb. 1942). Allerdings erfaßt ein solches puristisches Schubkastendenken Kleins Auffassungen nur unvollkommen, da er auch für die sogenannte *Arithmetisierung* der Mathematik steht:

Bei Gauß wird die Raumanschauung, insbesondere die Anschauung von der Stetigkeit des Raumes noch unbedenklich als Beweisgrund benutzt. Da zeigte die nähere Untersuchung ... , daß die Raumanschauung dazu geführt hatte, in übereilter Weise Sätze als allgemeingültig anzusehen, die es nicht sind. Daher die Forderung ausschließlicher arithmetischer Beweisführung.¹⁶

In seiner Leipziger Antrittsrede sprach sich Klein deutlich gegen den Geometer Jakob Steiner (1796–1863) aus, der „die einzige Quelle seiner Beweise in der unmittelbaren Anschauung“ erblickte. Gleichzeitig legte Klein dort die Wurzeln der später von ihm als Arithmetisierung bezeichneten Auffassung frei, die offenbar auf seinen Lehrer Plücker zurückgeht, für den die abstrakte Größenlehre, die Analysis, die eigentliche Wissenschaft darstellte, zu der die Geometrie lediglich ein Gegenbild war. Halten wir dem das auf abstrakter Anschauung fußende berühmte Staunen von Georg Cantor (1845–1918) über die Gleichmächtigkeit von Mengen unterschiedlicher Dimensionen entgegen, bei dem Cantor sogar zögerte, die Fassungslosigkeit in seiner Muttersprache auszudrücken: „Je le vois, mais je ne le crois pas!“ (Brief an Richard Dedekind (1831–1916) vom 20. Juni 1877)

Kleins geometrische Vorstellungskraft zeitigte auch tragikomische Folgen. Er hatte bemerkt, daß ein in eine geschlossene Kurve geknüpfter Knoten, wenn

¹⁵ *Über eine neue Art der Riemannschen Flächen*. 1. Mitteilung. In: *Mathematische Annalen* 7 (1874).

¹⁶ *Über Arithmetisierung der Mathematik*. Vortrag 1895. In: *Ges. math. Abhandlungen*, Band 2, S. 233–240, Zitat S. 234. Eine interessante Bemerkung hierzu hat J. Hadamard gemacht: „Such visual pictures are more naturally vague ... in order to lead me without misleading me.“ (*The psychology of invention*. Princeton 1945, p. 79)

man die Kurve aus dem dreidimensionalen Raum in den vierdimensionalen hinaufhob, nicht mehr gegen Verzerrungen invariant war, sondern sich lösen ließ. Zufällig hatte Klein dieses Ergebnis seinem späteren Leipziger Kollegen Johann Karl Friedrich Zöllner (1834–1882) mitgeteilt, der als ein Bahnbrecher der Astrophysik gilt, der aber auch ausgesprochene metaphysische Neigungen entwickelt hatte. Zöllner war schlechterdings von der vierten Dimension fasziniert. Da er sowohl Riemanns naturphilosophische Arbeiten als auch Kleins Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie gut kannte, konnte er die volle Tragweite seiner Spekulationen erfassen und gewann hieraus (leider) metaphysischen Auftrieb.¹⁷ Die Möglichkeit, auf dem von Klein gewiesenen Weg sich experimentell der Existenz der vierten Dimension des Raumes versichern zu können und zudem sogar einen Zugang zu dieser gewinnen zu können, heizte Zöllner derart an, daß er in zu diesem Zwecke durchgeführten Séances einem betrügerischen Taschenspieler aufsaß. Zöllner verlor damit unter Fachkollegen zunehmend an Ansehen und isolierte sich weitgehend. Es spricht für Klein, daß er auch unter diesen Umständen weiterhin bemüht war, dem verdientem Astrophysiker auch als persona non grata gerecht zu werden. Ähnliche Großzügigkeit hat er später gegenüber Lie gezeigt, der als kranker, paranoider Mann scharf und ungerecht beispielsweise „Kleins Oberflächlichkeit und Leichtsin“ in der Funktionentheorie attackierte.

Courant sagte über Klein, daß er so tief wie kein anderer Riemanns funktionentheoretische Gedanken erfaßt habe und daß die Selbstverständlichkeit, mit der wir heute auf Bernhard Riemann (1826–1866) aufbauen, wesentlich ihm geschuldet sei.¹⁸ Klein, ich folge Courant, zog die zugrunde liegende physikalische Vorstellung aus dem Dunkel hervor und machte sie zu seinem Leitgedanken. Damit schuf er etwas, was als *physikalische Mathematik* zu bezeichnen sei. Courant wörtlich:

Klein erzeugte sich Funktionen, indem er ein Stück der Ebene oder einer beliebigen Fläche mit einer leitenden Schicht bedeckt denkt und an einzelnen Stellen Pole ... aufsetzt. Der Strömungszustand ... repräsentiert dann eine ganz bestimmte Funktion. ... Alle Existenztheoreme, der berühmte Riemannsche Abbildungssatz ... und weiter mehr wird von diesem Gesichtspunkt unmittelbar verständlich und durchsichtig; alles tritt in einen zwangsläufigen Zusammenhang.

Klein selbst:

Ich suche durch physikalische Erwägungen zu einer wirklichen Beherrschung der Grundgedanken der Riemannschen Theorie zu gelangen. ... Ich halte es für ein Unrecht, wenn die meisten Mathematiker ihre intuitiven Überlegungen ganz unterdrücken und nur die allerdings notwendigen strengen ... Beweise veröffent-

¹⁷ Arbeiten Zöllners hierzu sind im Band 3 seiner *Wissenschaftlichen Abhandlungen*, Leipzig: Staackmann 1879, zu finden. In den 70er Jahren des vorigen Jahrhunderts gab es starkes Interesse sowohl an der vierten Dimension des Raumes als auch an einschlägigen spiritistischen „Theorien“, man denke etwa an die Experimente von Crookes oder Abbots *Flatland*. Für mathematische Details bei einem solchen Knoten siehe z. B. *Grunerts Archiv* 64 (1879), S. 224.

¹⁸ Siehe auch die neuere Darstellung von E. Neuenschwander, *Documenting Riemann's impact on the theory of complex functions*, in: *The Math. Intelligencer* 20, 3 (1998), p. 19–25.

lichen. ... Ich habe keine Bedenken getragen, diese physikalischen Anschauungen geradezu zum Ausgangspunkt meiner Darstellung zu machen.¹⁹

Der letzte Satz zeigt, daß Klein natürlich die Grenzen eines solche Analogiedenkens bewußt gewesen sind. Allerdings hat er zur mathematischen Logik oder Axiomatik keine Arbeiten geschrieben; dafür brachte er kein tieferes Interesse auf, sondern sprach von der formalen Methode als von einem Gegenstand, „der mir persönlich ferner liegt“. Im Hinblick auf diese Haltung hat der in Göttingen geborene Laurence Chisholm Young (geb. 1905) erklärt, daß Klein nicht verstanden habe, was ein moderner Beweis sei: „Weierstrass had not been far wrong in saying that what Klein did was not mathematics at all. Felix Klein had, by the account of many who knew him, including my teacher Carathéodory, no notion how to *prove* things – he could just *see* they were true.“²⁰

Aber Klein ging es gerade darum, ein Problem durch ein Maximum an Einsicht mit einem Minimum von Rechnung zu bewältigen. Diese Geisteshaltung, die einerseits auf Riemanns Auffassung der Funktionentheorie, andererseits auch auf den abstrakten Begriffsbildungen Dedekinds fußt und die die Rechenhaftigkeit des 19. Jahrhunderts begrifflich überwinden will, ist später in Göttinger Mathematikerkreisen das *allgemeine* Dirichletsche Prinzip genannt worden. Aus einer solchen Einstellung heraus werden Kleins Zitate verständlich:

Wenn ein Mathematiker keine Ideen mehr hat, treibt er Axiomatik.

So ist die Mathematik von denen am meisten gefördert worden, die mehr durch Intuition als durch strenge Beweisführung sich auszeichneten.

Hier trifft sich Klein mit der Anschauung von Jacques Hadamard (1865–1963): „Logic merely sanctions the conquest of mathematics.“

Ganz anders, aber sehr einflußreich argumentierten Karl Weierstraß und auch Hermann Amandus Schwarz (1843–1921): abstrakt und kritisch. Sie verlangten stets strenge Beweise anstelle von genial, aber nur intuitiv hingestellten Existenzsätzen. Hilbert, der sich durch seinen Leitbegriff Axiomatik tiefgehend von Kleins Auffassung unterschied, betonte später nachdrücklich den logischen Zirkel bei Analogieschlüssen: ein mathematisches Modell müsse alle einschlägigen Fragen aus sich selbst heraus, also intern, beantworten können, Rechtfertigungen können nicht – wie in der Physik üblich – durch externe Mittel erfolgen; Klein aber wolle die Mathematik zur Herrscherin in der Wirklichkeit und nicht im Idealen machen. Der Physiker Max Born (1882–1970), der bei Klein Vorlesungen gehört hatte, sprach bei derartigen Beispielen Kleins sogar vom Verlust der physikalischen Natur auf einer „Spielwiese für mathematische Zaubertricks“, und er klagte zudem über Kleins

¹⁹ Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. Bd. 3: *Kleins Vorbemerkung* (1923), S. 478; *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale* (1882), S. 502 (hier wird auch die bekannte Kleinsche Flasche eingeführt). Seine Stellung zu Riemann hat Klein ausführlich in dem Wiener Vortrag *Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik*, in: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 4 (1894–95), S. 71–87, dargestellt.

²⁰ L.C. Young, *Mathematicians and their times*. Amsterdam: North Holland 1981. Zitat p. 215. Ähnlich schon S. Lie im Band 3 seiner *Theorie der Transformationsgruppen* (Leipzig: B.G. Teubner 1893, Vorrede, S. XVII).

Beweisskizzen, deren Lücken zu schließen ihm als Student schwer gefallen war. Rückblickend, im Alter, schätzte Born jedoch Kleins Darlegung der tragenden Ideen in den auf Gesamtschau angelegten Vorlesungen mehr als andere Darstellungen. Constantin Carathéodory (1873–1950), der unmittelbare Nachfolger Kleins in Göttingen, zählte Felix Klein zu den brillantesten und gründlichsten Vortragenden aller Zeiten.

Das beschriebene Denken konnte Klein in der geometrischen Funktionentheorie verwirklichen, die somit ganz exemplarisch für Kleins Schaffen ist. Gegenüber dem Weierstraßschen Vorgehen, das durch die Potenzreihe bestimmt ist und im analytischen Gebilde endet, veranschaulichte sich Klein im Geiste Riemanns analytische Funktionen als konforme Abbildungen, und das Pendant zum analytischen Gebilde ist die Riemannsche Fläche, die im Kleinschen Sinne jedoch nicht nur zur Veranschaulichung dient, sondern die als unverzichtbarer Bestandteil des Funktionskonzepts begriffen wird, „als der Mutterboden, auf dem die Funktionen allererst wachsen und gedeihen können“ (Hermann Weyl, 1885–1955), wie wir es sehen werden. Klein war stets um den Ausgleich der Riemannschen und Weierstraßschen Auffassungen bemüht gewesen. Er hat daher die Absicht des jungen Weyl, beide Theorien zu verschmelzen, nicht nur begrüßt, sondern er hat um 1910 trotz seines abermals sehr angegriffenen Gesundheitszustandes dieses Vorhaben diskutierend begleitet, das 1913 zur *Idee der Riemannschen Fläche*, jenem wegweisenden funktionentheoretischen Markstein, führte.

Es war jenes tiefe geometrische Eindringen in den funktionentheoretischen Stoff, das am Beginn von Kleins Leipziger Lehrtätigkeit zu einer zweisemestrigen Vorlesung über „Funktionentheorie in geometrischer Behandlungsweise“ geführt hatte. Das kleine Beiwort „geometrisch“ im Titel verweist auf die etwas andere Auffassung dieser Disziplin durch Klein. Nach dieser die Leipziger Lehrtätigkeit eröffnenden funktionentheoretischen Vorlesung (WS 1880, SS 1881) begann Klein einen Zyklus von vier aufeinander abgestimmten Vorlesungen über „Analytische Geometrie“ (SS 1881), „Projektive Geometrie“, I und II, (WS 1881 und SS 1882) sowie „Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie“ (WS 1882). Nach seinem gesundheitlichen Zusammenbruch Ende 1882 hat er vor allem über spezielle Themen aus der Funktionentheorie wie „Elliptische Funktionen“, I und II, (WS 1883 und SS 1884) und „Hyperelliptische Funktionen“, I und II, (SS 1885 und WS 1886) gelesen. Entsprechende Themen dominieren bei den Dissertationen in der zweiten Hälfte von Kleins Leipziger Zeit.

Klein hielt gleich im WS 1880 mit Mayer ein Seminar ab, aber Mayers formale Strenge mag Klein von einer weiteren Zusammenarbeit abgehalten haben, zumal es zu engeren Kontakten mit C. Neumann gekommen war, die zu ersten physikalisch orientierten Arbeiten führten. Aber auch diese Beziehung hatte keinen Bestand, so daß Klein sich in seiner depressiven Phase nach dem Zusammenbruch vereinsamt im Leipziger Kollegium vorkam.

4 Der Höhepunkt des mathematischen Schaffens

Kleins Beiträge zur geometrischen Funktionentheorie sind nicht nur mathematisch bedeutend, sondern auch charakteristisch für sein Denken, so daß ich versuchen sollte, diese Ideenwelt kurz zu skizzieren, und ich werde dabei aus Zeitgründen nicht historisch vorgehen.

Der Riemannsche Abbildungssatz (1851) besagt, daß jedes einfach zusammenhängende Gebiet, das von der Ebene verschieden ist, durch eine analytische Funktion $w = f(z)$ umkehrbar eindeutig (also biholomorph) auf einen Kreis und damit auch auf eine Halbebene abgebildet werden kann. Für Klein ist dieser Sachverhalt übrigens ein geometrisches Prinzip zur Erzeugung analytischer Funktionen $f(z)$. Aber von solchen Abbildungsfunktionen läßt sich bei dieser Auffassung über die bloße Existenz hinaus zunächst wenig sagen. Jedoch bei einfachen Figuren, die etwa durch Geraden- oder Kreisbogenstücke begrenzt werden, gewann Klein bereits aus den geometrischen Beziehungen wesentliche Eigenschaften für die zugehörige Abbildungsfunktion.

Sehen wir uns hierzu in der z -Ebene ein gleichseitiges nullwinkliges Kreisbogendreieck G mit dem Umkreis K als einfaches Beispiel an. Es gibt eine im Innern von G definierte meromorphe Funktion, die G auf die obere w -Halbebene abbildet. Wir können es so einrichten, daß den drei Eckpunkten A , B und C von G die Bildpunkte 0 , 1 und ∞ entsprechen, so daß die Dreiecksseite AB als Bild die Strecke 01 hat. In der w -Ebene läßt sich nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip die inverse Abbildungsfunktion aus der oberen Halbebene über die Strecke 01 in die untere fortsetzen, wobei das ursprüngliche und das gespiegelte Definitionsgebiet längs 01 verbunden sind. In der z -Ebene entspricht dieser Prozedur die Fortsetzung der Funktion in ein weiteres nullwinkliges Kreisbogendreieck, das sich durch Spiegeln von G längs der Seite AB ergibt und dessen neuer Eckpunkt C' auf dem Kreis K liegt. In dieser Weise kann man fortfahren, Kreisbogendreiecke an ihren Seiten zu spiegeln, bis der dem Ausgangsdreieck G umschriebene Kreis K ausgefüllt ist. Es ist geometrisch einleuchtend, daß dieser Kreis so ganz ausgeschöpft wird und daß er die entstandene, sogenannte *Modulfigur* als Grenzkreis berandet. In der w -Ebene entsprechen den gespiegelten Dreiecken stets Halbebenen, die jeweils mit der anderen Halbebene längs einer der Strecken 01 , 1∞ , $\infty 0$ verbunden sind und die sich dabei in natürlicher Weise als Blätter einer unendlichblättrigen *Riemannschen Fläche* aufschichten. Die Funktion, die vom Ausgangsdreieck auf die Modulfigur fortgesetzt wurde, bildet diese Modulfigur konform auf die Riemannsche Fläche (*Modulfläche*) ab.

Für Klein korrespondieren in diesem Beispiel wie auch im allgemeinen Fall die vorhandenen *geometrischen Symmetrien* der gespiegelten Dreiecke bzw. Halbebenen mit gewissen Gruppen. Die Gruppe der Automorphismen der oberen Halbebene bzw. des Einheitskreises enthält als Elemente gewisse gebrochen lineare Funktionen $l(z)$ (Möbiustransformationen) und keine weiteren. Solche Funktionen können als Verallgemeinerungen von periodischen oder von Modulfunktionen aufgefaßt werden, wobei an die Stelle der periodischen Verschiebungen eine Möbiustransformation tritt. Henri Poincaré (1854–1912) brachte einen fruchtbaren geometrischen Gesichtspunkt ins Spiel, nämlich die Idee, solche Gruppen in der hyper-

bolischen Geometrie zu deuten.²¹ Zwei im euklidischen Sinn verschiedene Dreiecke der Modulfigur mit Grenzkreis K erweisen sich dann unter nichteuklidischen Bewegungen als deckungsgleich, und die Gesamtheit der Transformationen, die die Modulfigur in sich abbilden, die also jedes Dreieck in ein anderes überführen, bildet eine Untergruppe (die sogenannte Fuchssche Gruppe) der Automorphismengruppe (bzw. der Gruppe der hyperbolischen Isometrien). Analytisch gesehen entspricht dem nichteuklidischen Verschieben von Dreiecken ein Verallgemeinern der üblichen Periodizität einer Funktion, genauer die Invarianz einer Funktion gegenüber gewissen gebrochen linearen Transformationen $f(z) = f(l(z)) = f\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$. Solche Funktionen nannte Klein seit 1890 *automorphe Funktionen* mit Grenzkreis.

Es gibt übrigens einen Bericht Kleins über die Entdeckung dieses Satzes. Den Namen Grenzkreistheorem prägte 1912 Fricke (1861–1930). Ostern 1882 hatte sich Klein zur Erholung auf die Insel Norderney begeben. Das Wetter war jedoch so schlecht, daß Klein beschloß abzureisen.

In der letzten Nacht vom 22. zum 23. März, die ich wegen Asthmas auf dem Sofa sitzend zubrachte, stand plötzlich um 2 1/2 Uhr das Grenzkreistheorem, wie es durch die Figur des Vierzehnecks vorgebildet war, vor mir. Am folgenden Vormittag im Postwagen ... durchdachte ich das, was ich gefunden hatte noch einmal bis in alle Einzelheiten. Jetzt wußte ich, daß ich ein großes Theorem hatte. In Düsseldorf angekommen, schrieb ich es gleich zusammen, datierte es vom 27. März, schickte es an Teubner [den Verlag der *Annalen*] und ließ Abzüge der Korrekturen an Poincaré und Schwarz ... gehen.²²

Der Satz zeigt einen geometrischen Sachverhalt von beeindruckender Schönheit, von dem Courant sagt, daß Klein hier zu einem der „schönsten und merkwürdigsten Zusammenhänge der Funktionentheorie“ gelangte. Das ist bei Maurits Cornelius Escher (1898–1972) auch Gegenstand künstlerischer Betrachtungen geworden, nämlich in den vier Holzschnitten „Grenzkreise“ (Cirkellimiet) I–IV (1958–1960). Aber damit erschöpft sich die Rolle der automorphen Funktionen mit Grenzkreis nicht, denn sie lösen das *Uniformisierungsproblem*: Besteht zwischen den komplexen Variablen z und w eine algebraische Gleichung $F(z, w) = 0$, so lassen sich z und w als eindeutige Funktion einer dritten komplexen Variablen t darstellen, und zwar als automorphe Funktion mit Grenzkreis. Weyl faßte den tiefliegenden Sachverhalt poetisch: „Wir betreten damit den Tempel, in welchem die Gottheit ... aus der irdischen Haft ... sich selber zurückgegeben wird: in dem Symbol des zweidimensionalen Nicht-Euklidischen Kristalls wird das Urbild der Riemannschen Flächen selbst ... erschaubar.“ Werfen wir noch einen Blick auf die in dieser Ruhmeshalle durch Klein eingegrabene Inschrift, auf das Grenzkreistheorem: Jede Riemannsche Fläche vom Geschlecht $p > 1$ ohne Verzweigungspunkte

²¹ Klein betont, gleichfalls von Anfang an die Vorstellungen der nichteuklidischen Geometrie benutzt zu haben (*Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. 3, S. 581).

²² F. Klein, *Ges. math. Abhandlungen*, Bd. 3, S. 584; auch in: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik*, Bd. 1, S. 379. Dieser Bericht ist ein bewußtes Gegenstück zu Poincarés Schilderungen, die jener in der *Société de Psychologie* in Paris vorgetragen hat (*Œuvres*, t. 2, Paris: Gauthier-Villars 1916, p. LVII–LVIII) und die J. Hadamard in *The psychology of invention in the mathematical field* (Princeton 1945) popularisiert hat.

kann eindeutig bis auf Möbiustransformationen durch automorphe Funktionen mit Grenzkreis uniformisiert werden.²³ Diesen Sachverhalt deutete sich Klein in den Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie auch so: „Die Möglichkeit der Auffassung der Riemannschen Fläche als eine Raumform der nichteuklidischen Geometrie ist ... geradezu der Inhalt des Uniformisierungssatzes.“

Weshalb erhielt der seinerzeit noch unbekannte Poincaré Korrekturbogen? Klein hatte unmittelbar erkannt, daß die Arbeiten dieses jungen unbekannten französischen Mathematikers enge Bezüge zu seinen eigenen Untersuchungen aufwiesen, daher eröffnete er am 12. Juni 1880 einen Briefwechsel mit Poincaré. Sophus Lie berichtete Klein aus Paris, daß Poincaré – wie auch Gaston Darboux (1842–1917) und Camille Jordan (1838–1922) – zunächst mit Kleins Arbeiten Schwierigkeiten gehabt hatte. Aber Poincaré arbeitete sich seit 1880 (26 Jahre alt) – teilweise durch kollegiale Aufklärung Kleins – unglaublich rasch in das Thema ein und hielt mit, so daß Klein gewissermaßen im Wettlauf mit Poincaré als Konkurrenten seine Ergebnisse erhielt. Sowohl Poincaré als auch Klein betrieben nachhaltig den Fortgang jener Untersuchungen, ohne dabei freilich mehr als vage Vorstellungen vom Endergebnis haben zu können. Aber der ehrgeizige Klein fühlte sich herausgefordert und wollte, mußte unbedingt der erste am Ziel der von ihm begonnenen Forschung sein.

Der Wettstreit zwischen beiden verlief durchaus fair. Klein schrieb etwa am 3. April 1882 an Poincaré: „Es wird mir viel daran liegen, mit Ihnen in regem Verkehr zu bleiben.“²⁴ Er ließ, wie bereits erwähnt, durch den Teubner-Verlag sogar Druckfahnen an Poincaré schicken, und Poincaré antwortete bei einer solchen Gelegenheit im Januar 1882, daß er mit Ungeduld auf das angekündigte Theorem warte, das ihm sehr interessant erscheine: „J’attends avec impatience le théorème que vous m’annoncez et qui me paraît des plus intéressants.“

Aber die dem außergewöhnlichen Leistungsvergleich innewohnende Spannung entlud sich auf einem Nebenschauplatz, den die damalige äußerst mangelhafte Literaturkenntnis Poincarés eröffnete. Als nämlich Poincaré im Sommer 1881 darauf bestand, die automorphen Funktionen mit Grenzkreis *les fonctions fuchsien-nes* zu nennen, da sein Ausgangspunkt auch in Untersuchungen von L. Fuchs gelegen hatte, widersprach Klein heftig und entfachte einen Papierkrieg, in den verärgert auch der betroffene Fuchs eingriff.²⁵ Poincaré bemühte sich, den Sturm im

²³ Bei Klein in den beiden Mitteilungen *Über eindeutige Funktionen mit linearen Abbildungen in sich*, in: *Mathematische Annalen* 19 (1882), S. 565–568, 20 (1882), S. 49–51. Das oben paraphrasierte Theorem lautet wörtlich: „Unter allen auf einer Riemann’schen Fläche existierenden unverzweigten Funktionen gibt es immer eine und nur eine η -Funktion der zweiten Art. Alle anderen unverzweigten Funktionen sind eindeutige Funktionen dieses η .“ (S. 49) Die beiden Fälle $p = 0$ (Ebene bzw. Kugel) und $p = 1$ hatte schon Clebsch behandelt.

²⁴ Der Briefwechsel zwischen Klein und Poincaré in den Jahren 1881/82 ist in den *Ges. math. Abhandlungen* Kleins, Band 3, S. 587–621, abgedruckt.

²⁵ Klein hatte als Herausgeber der *Mathematischen Annalen* an die von Poincaré in den *Annalen* veröffentlichte Arbeit *Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires* (19 (1882), S. 553–564, datiert vom 17. 12. 1881) eine Bemerkung angefügt (S. 564), in der er betonte, daß die Bezeichnung „Fuchssche Funktion“ unzutreffend sei, da Schwarz und er selbst über solche Funktionen publiziert hätten, aber niemals Fuchs. Dieser schrieb daraufhin gereizt am 4. 3. 1882 an Poincaré: „M. F. Klein a ajouté ... une note, ... dans

Wasserglas zu beruhigen, indem er schrieb: „... il est clair que j'aurai pris une autre dénomination si j'avais connu le travail de M. Schwarz“, d.h., er hätte eine andere Bezeichnung gewählt, wenn er die Arbeiten von Schwarz gekannt hätte, und ausgleichend führte nun Poincaré auch *fonctions kleinéennes*²⁶ ein. Klein schlug darauf im Frühjahr 1882 vor, auf Namen ganz zu verzichten und bürgerte schließlich den Begriff automorphe Funktion ein. Poincaré replizierte auf deutsch mit dem Faust-Zitat: „Name ist Schall und Rauch“ (Vers 3457). Trotzdem gibt es heute einschlägige Fuchssche und Kleinsche Gruppen.

Klein und Poincaré erhielten 1882 gleichzeitig das Grenzkreistheorem, aber Klein konnte es in „seinen“ *Mathematischen Annalen* noch im November publizieren (Erscheinungsdatum 28. November), während Poincaré in den *Acta mathematica* erst im Dezember folgte.²⁷ Das war ein sehr knapper Vorsprung gewesen, der Klein zu seinem Triumph verholfen hatte und der sich zudem als Pyrrhussieg herausstellen sollte, denn Klein war geistig erschöpft und brach Ende 1882 gesundheitlich zusammen, damit dem jüngeren und derzeit extrem produktiven Poincaré gänzlich das Feld überlassend.²⁸ Dieser kündigte beispielsweise 1883 die Uniformisierung auch für analytische Gleichungen $F(z, w) = 0$ an. Jedoch waren letztlich sowohl Klein als auch Poincaré den Beweismitteln um ein Vierteljahrhundert vorausgeeilt – strenge Beweise vermochten erst ab 1907 Henri Poincaré und Paul Koebe (1882–1945) zu geben, der letztere war übrigens 1910 zum ersten Male aus Göttingen nach Leipzig für vier Jahre gekommen. Hilbert hatte zudem 1900 in seinem berühmten Vortrag „Mathematische Probleme“ auf dem Pariser Weltkongreß den ausstehenden Beweis dafür verlangt, daß analytische Beziehungen durch automorphe Funktionen zu uniformisieren seien (22. Problem), womit an herausragender Stelle auf die wünschenswerte Klärung dieser grundlegenden Frage hingewiesen worden war. Nach 1930 hat insbesondere Hans Petersson (1902–1984) Fortschritte bei Verallgemeinerungen des vielschichtigen Problems erzielt.²⁹

laquelle il ose de vous donner une leçon à la manière de maître à cause que vous avez donné mon nome aux fonctions ... “. *Le livre du centenaire de la naissance de Poincaré*. Paris: Gautier-Villars 1955, p. 276.

²⁶ Poincaré benutzte die Bezeichnungen „Fuchssche Funktionen“ für automorphe Funktionen mit Grenzkreis und „Kleinsche Funktionen“ für solche ohne Grenzkreis.

²⁷ Siehe Kleins Darstellung in den *Gesammelten mathematischen Abhandlungen*, Bd. 3, S. 577–586, insbesondere S. 585f. Dort Angaben zum Rückkehrschnitttheorem und zum allgemeine Fundamentaltheorem (S. 699). Auch in den *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Bd. 1, S. 374–381, gibt Klein eine Darstellung des „Wettlaufes“, der diese Bezeichnung insofern nicht ganz verdient, da Klein ihn mit einem deutlichen Vorsprung beginnen konnte.

²⁸ Die Publikationszahlen beider Mathematiker sind interessant:

	1878	1879	1880	1881	1882	1883	1884
Klein/Poincaré	6/1	6/3	4/4	6/21	3/14	1/11	1/12

Diese Statistik sagt natürlich weder etwas über die Länge der Artikel noch über deren Bedeutung aus. Beispielsweise veröffentlichte Poincaré vom 14.2.1881 bis zum 17.10.1881 insgesamt 11 Arbeiten zu automorphen Funktionen, die in den *Œuvres* (t. 2) 31 Seiten einnehmen, während die Arbeit von 1878 allein 74 Seiten umfaßt.

²⁹ Samuel Patterson, *Uniformisierung und diskrete Gruppen*. In: Hermann Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Hrg. von Reinhold Remmert. Stuttgart/Leipzig: B.G. Teubner 1997, S. 232–240.

Bei Kleins gesundheitlichem Zusammenbruch müssen wir einen Augenblick inne halten, um das Ausmaß des Schicksalsschlages zu erfassen, der den rastlos tätigen und bislang vom Erfolge verwöhnten genialen Mann im Höhepunkt seines Schaffens und noch dazu im besten Alter getroffen hatte. Mathematisches Arbeiten ist letztlich immer ein einsames Geschäft: dem Hochgefühl des schöpferischen Gestaltens folgt nach der Vollendung des Gedankengebäudes eine um so deutlichere Wahrnehmung des Abschlusses des Höhenfluges und des Ausbleibens von Einfällen, des Gewährwerdens einer sich anschließenden geistigen Leere, und damit ist das gesteigerte, überdeutliche Bemerken der Folgen von körperlicher Überanstrengung und Überarbeitung sowie eine verzerrte Sicht auf das Alltagsgeschehen verbunden, und hiermit wiederum das Aufkommen depressiver Stimmungen. In einer solchen Krise – heutige Psychologen sprechen nicht mehr wie Kleins Zeitgenossen vom Nervenzusammenbruch sondern englisch vom *Burn-out-Syndrom* –, in einer solchen Krise wird leicht ein vermeintlicher oder befürchteter Verlust der Lebens- und Schöpferkraft subjektiv zu einer festen Gewißheit. Das Verhalten der Betroffenen ist dabei vielfältig: Goethe (1749–1832) floh vor der Depression nach Italien, ohne einen Ortswechsel wollte Beethoven (1770–1827) „dem Schicksal in der Rachen greifen“.

Sehen wir uns unter diesem Gesichtspunkt einmal an, wie Klein das Überschreiten des Zenits seines mathematischen Schaffens erlebt und bewältigt hat. In seinem kometenhaften Aufstieg erfuhr Klein Ende 1882 mit 32 Jahren einen völligen Zusammenbruch der schöpferischen Leistungen, das muß ein furchtbarer Schock für den unentwegt wirkenden Mann gewesen sein. 42 Jahre sollten noch vor ihm liegen. Ist Klein nun, wie immer wieder gesagt wird, nach dem Zusammenbruch nicht mehr als Mathematiker sondern nur noch als Hochschullehrer, Organisator und Reformator tätig gewesen? Oder war er überhaupt – auch das wird behauptet – nur ein Organisationsgenie? Einige seiner Bemerkungen wie „volles Zusammenklappen der großen Produktivität“, „Verlust des Genies“ und die bekannte Aussage „Meine eigentliche produktive Tätigkeit auf dem Gebiet der theoretischen Mathematik ist 1882 zugrunde gegangen. Alles, was folgt, betrifft ... nur noch Einzelheiten“ stützen diese Thesen, auf die ich gleich eingehen will. Vorab meine Antwort: Wer ihn so verkürzt sieht, verstellt sich die Sicht auf Klein erheblich.

Klein war wissenschaftlich keineswegs am Ende seines Schaffens angelangt. Denn im Laufe der folgenden Monate raffte er sich wieder auf und ergriff etwas, das er als leichte Arbeit bezeichnete: das Ergebnis ist das wunderschöne Ikosaederbuch, in dem Geometrie, Algebra, Funktionen- und Gruppentheorie organisch ineinander verwoben sind.³⁰ Weitere Bücher erschienen, ständig folgten autografierte Vorlesungen, daneben blieb Klein weiterhin Herausgeber der führenden mathematischen Zeitschrift, der *Mathematischen Annalen*, und er dirigierte souverän fast 200 Mitarbeiter eines unwiederholbaren Jahrhundertwerkes, der grandiosen *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* in 6 Teilen mit insgesamt 24 Buchbinderbänden, weiter gab er die Werke von Gauß und Möbius heraus sowie verfaßte schließlich noch eine Geschichte der Mathematik seines Jahrhunderts in zwei Bänden, der Tod ließ eine geplante Gauß-Biographie in Vorarbeiten enden.

³⁰ Peter Slodowy hat es 1993 in kommentierter Form neu herausgegeben.

Bereits die grundlegenden Einsichten von Hermann Minkowski (1864–1909) zur Relativitätstheorie, die eine Deutung in der pseudo-euklidischen Geometrie (Minkowski-Welt) erlaubten, hatte Klein im Sinn seines Erlanger Programms interessiert aufgenommen, aber mit seinen fünf Beiträgen zur allgemeinen Relativitätstheorie begeisterte er 1918 selbst Albert Einstein (1879–1955), wie Arnold Sommerfeld (1861–1951) berichtet. „Klein hat sicherlich empfunden, daß gerade seine großartigsten wissenschaftlichen Schöpfungen im Grunde nur gigantische Entwürfe waren, deren Ausführung er anderen Händen überlassen mußte“, resümierte Courant, der nach Carathéodory Kleins Lehrstuhl in Göttingen inne hatte.

Wer hier vom wissenschaftlichen Lebensabend spricht, dem kann man nur entgegenhalten: Was für ein Abendrot!

Der eiserne Wille und das straffe Zeitregime waren es vor allem, wodurch Klein von seiner Begabung Höchstleistungen erzwang, wodurch er aber auch jahrelang seine labile Gesundheit überstrapazierte und weshalb er sich daher stets am Rande eines gesundheitlichen Zusammenbruchs bewegte. Klein selbst führte in seinen *Lebenserinnerungen* als eigene Eigenschaften an: „Ein zäher Wille, nie nachlassender Fleiß, nüchterner Wirklichkeitssinn, unbedingte Zuverlässigkeit und wohlbedachte Sparsamkeit.“ David Hilbert etwa, der Klein begeistert von seinen langen und intensiven Gesprächen mit seinem Freund Minkowski über mathematische Themen auf regelmäßigen Königsberger Spaziergängen berichtete, erhielt ein Bedauerndes „dass ich zum ausgiebigen Gedankenaustausch gar keine Zeit haben würde“ als Antwort (Brief vom 27. 6. 1889), Kleins Töchter baten um „Termine“ beim Vater.

In Notizen, obwohl erst ein Vierteljahrhundert nach der Leipziger Zeit zu Papier gebracht, finden wir immer noch ganz detaillierte Erinnerungen an die gerade beschriebenen allgemeinen Sachverhalte des Burn-out-Syndroms: Klein notierte Schlaflosigkeit, immer wieder Magenverstimmungen und schwere Asthmaanfälle, er fragte „Was ist die Ursache der Krankheit?“ oder klagte „Niemals Kontrolle der Verdauung!“, gequält brach aus ihm heraus „So viel Krankheit“, und vor diesem Hintergrund stellte er eben 1886 verzweifelt „herankommende Unproduktivität“³¹ fest, suchte ausgleichende „soziale Wirksamkeit als Ersatz für das verlorene Genie“ und wünschte sich für Göttingen ein „wissenschaftliches Dasein auf Basis eines vernünftigen Familienlebens“. Müssen solche Zeugnisse einer schwer durchlittenen Zeit nicht zwangsläufig in eine Depression führen und notwendig jede schöpferische Arbeit zum Versiegen bringen? Das erschütterndste, mir bekannte Gegenbeispiel in der Mathematik ist Carl Friedrich Gauß (1777–1855). Unerwartet findet der Leser mitten in einem Manuskript über elliptische Funktionen einen hingekritzten Satz, der ihn mit voller Wucht trifft: „Der Tod ist mir lieber als ein solches Leben.“

³¹ Kleins Studentin *Grace Chisholm*, verheiratete *Young*, die 1895 in Göttingen als erste Frau regulär promoviert wurde (Sophia Kowalewskaja zwar schon 1874, jedoch in absentia) berichtet von Kleins Geburtstagsfeier 1899 in Turin folgende, ihr gegenüber gemachte Bemerkung Kleins: „I envy you. You are in the happy age of productivity. When everyone begins to speak well of you, you are on the downward road.“ Klein war 50 Jahre und Young 31 Jahre, also genau in dem Alter wie Klein bei Antritt der Leipziger Professur. (L.C. Young, *Mathematicians in their times*. Amsterdam: North Holland 1981, p. 211)

Es war jedoch Kleins tiefste Überzeugung, daß das Maß der uns geschickten Leiden auch von uns ertragen werden könne und nicht unser Vermögen zu widerstehen überstiege, so wie es im 1. Korintherbrief, Kapitel 10, Vers 13, steht, an den Kleins Grabinschrift auf dem Göttinger Friedhof erinnert. Unter den zahllosen notorischen Klagen wie „∞ viele Geschäfte“, „so viel zu tun“ sind denn auch solche Bemerkungen wie „Sehnsucht nach Arbeit“ (1884) oder „die Muse will zunächst nicht recht“ (1886) zu finden.

Das Verhältnis von angewandter und reiner Mathematik war je schon ein kontroverses Thema: *Dienerin oder Königin?* Beispielsweise sah Hilbert in der Mathematik eine vornehme Dame, die bei den Nachbarn weder betteln noch sich ihnen aufdrängen solle.³² Demgegenüber hat Klein als „Mathematiker reinsten Wassers“ (Born) beständiges Interesse an den Anwendungen der Mathematik gezeigt und war unablässig bemüht, zu diesem Zwecke neue Institute und Vereinigungen zu gründen. Man liest in diesem Zusammenhang aber auch folgende Bewertung:

Gewiß hat Klein Bedeutendes und Bleibendes für die Mathematik und deren Anwendung geleistet. Doch sollte man nicht übersehen, daß Klein bewußt diese seine Kräfte in den Dienst der deutschen Großindustrie gestellt hat, ... er geriet sogar unter den Einfluß der Politik des deutschen Imperialismus und Großmachtschauvinismus.³³

Hier wird die Grenze der Mathematikgeschichte überschritten und das Gebiet einer voreingenommenen Geschichtsschreibung betreten. Aus einer solchen Sicht heraus ist es rückblickend leicht, selbstgerecht an den vielbeschäftigten Mathematiker hohe Ansprüche zu stellen; jedoch auch von anderen Gesichtspunkten ist Klein beständig an großen Erwartungen gemessen worden. Aber Klein hat seine Kräfte wahrlich nicht geschont und sie bis hin zum Zusammenbruch in den Dienst seiner Wissenschaft gestellt; dem Leipziger Kollaps folgte übrigens noch ein zweiter in Göttingen 1911. Daher ist es wohl menschlicher, ihn am altrömischen Rechtsgrundsatz „Ultra posse nemo obligatur (Niemand ist verpflichtet, mehr zu leisten, als er vermag)“ als an einem Idol zu messen, dessen Konturen von den Wunschvorstellungen einer problematischen Weltanschauung bestimmt sind und welches letztlich einen Übermenschen verlangt. Wenn ein Wort von Friedrich Nietzsche (1844–1900) auf Klein paßt, dann ist es dieses:

Es ist gut, eine Sache doppelt auszudrücken und ihr einen rechten und einen linken Fuß zu geben. Auf einem Bein kann die Wahrheit zwar stehen; mit zweien aber wird sie gehen und herumkommen.

Ergänzen Sie hier in Gedanken „Wahrheit“ durch das Beiwort „mathematisch“, dann wird deutlich, daß der eigentlich von Minkowski auf Hilbert gemünzte Ausdruck eines „Generaldirektors“ des modernen Mathematikbetriebes wie maßgeschneidert auf Klein zutrifft.

³² Niedersächs. Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabt., Cod. Ms. Hilbert 600/2, S. 92.

³³ *Ostwalds Klassiker* Nr. 253, *Das Erlanger Programm*, Biographische Notiz, S. 11. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig 1974.

Einen Auftrieb von außen brachte ein Ruf an die amerikanische Johns Hopkins University, Baltimore, am 12. Dezember 1883.³⁴ Zunächst zögert Klein, „große Lust hinzugehen, jedenfalls Neubeginn“, vertraute er seinen autobiographischen Notizen (1913) an. Ein innerhalb der folgenden Woche verfaßter Briefentwurf für Baltimore (datiert auf den 18. 12. 1883) spiegelt mit einer detaillierten, bis ins Hypochondrische tendierenden Krankheitsbeschreibung Kleins damalige innere Zerrissenheit wider. Am 31. Januar 1884 lehnte Klein von sich aus ab, da man nicht alle seiner Bedingungen erfüllen wollte. Den Posten erhielt Simon Newcomb (1835–1909). Das Dresdener Ministerium sandte Klein ein Dankschreiben für sein Bleiben, die Hopkins University verlieh ihm im Juli 1884 die Sylvester Medaille.

Unter dem 19. Oktober 1885 vermerkte Klein in den schon mehrfach erwähnten Notizen: „Göttingen fängt an zu spuken.“ Denn der Vortragende Rat im Preußischen Kultusministerium Friedrich Althoff (1839–1908), den Klein schon 1870 als Kriegsfreiwilliger bei Metz auf einem Schlachtfeld des deutsch-französischen Krieges kennengelernt hatte – wie er in seinen „Kriegserinnerungen“³⁵ berichtet –, war bereits im Frühjahr 1885 beim Sondieren für die Göttinger Nachfolge von Moritz Stern (1807–1894) in Leipzig gewesen, hatte allerdings Klein nicht getroffen, für den sich die Göttinger Fakultät entschieden hatte. (Schwarz hatte ein Separatvotum abgegeben.) Aber im Juli gab es Kontakte, und bereits im August war Althoff berechtigt, eine Berufungsverhandlung zu führen. In zwei Telegrammen vom 10. und 11. August – um Klein noch vor den Verhandlungen zu erreichen, war eines sogar nach Berlin gerichtet worden – versuchte das Sächsische Kultusministerium das Steuer herumzuwerfen, auch mit Hilfe einer angekündigten Gehaltserhöhung auf 9000 Mark. Aber am 12. November erhielt Klein die feste Zusage aus Preußen und akzeptierte.

„Sehr gegen meinen Willen bin ich in Leipzig von den Sorgen des Unterrichts absorbiert worden“,³⁶ schrieb Klein an Althoff und daß er sich in Göttingen vor allem wissenschaftlich wieder finden wolle. Ähnliche Klagen über Arbeitsüberhäufungen, an deren Ursachen Klein freilich nicht ganz schuldlos war, hat er auch beim Verlassen von Erlangen und München erhoben. In dem Bild vom zu weiten Mantel erscheint seine Sorge, daß es ihm unmöglich sein würde, „wissenschaftliche und organisatorische Arbeit nebst allseitiger Dozententätigkeit mit gleicher Energie neben einander herzuführen“³⁷. Weil er sich aber aufgrund seiner strengen Pflichtauffassung solchen Bürden nicht entziehen konnte, fürchtete Klein stets die ihn auf-

³⁴ J. Sylvester gab im Dezember 1883 seine Stelle an der Hopkins University zugunsten einer Savillian-Professur in Oxford auf. Die amerikanischen Bemühungen um Klein als Nachfolger hatten eine Langzeitwirkung, da Klein von nun an Mathematiker auch in die USA schickte (1884 Dyck, Lindemann, Wedekind; von allen Empfehlungen hatte wohl die für Bolza die nachhaltigsten Folgen für die amerikanische Mathematik) und schließlich auch selbst kam (1893, 1895, 1896). Sechs von Kleins amerikanischen Studenten waren später Präsident der AMS. – C. Reid, *The road not taken*, in: *The Math. Intelligencer* 1(1) (1978), p. 21–23; K.H. Parshall, D. Rowe, *The emergence of the American Mathematical Community*. Providence/London: AMS/LMS 1994.

³⁵ Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, Cod. Ms. Klein 22L.

³⁶ Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, Cod. Ms. Klein, 1B.

reibende administrative Aufgabenlast, die er übrigens in Großstädten wie München oder Leipzig als noch niederdrückender empfand. Für sich selbst schrieb Klein in den autobiographischen Notizen (1913) folgende Gründe für den Weggang auf: „Anhänglichkeit an Göttingen, Abneigung gegen die große Stadt, wo es mir gesundheitlich schlecht ging, Anziehung der Althoffschen Persönlichkeit und die erwartete Wirksamkeit in Preußen, Vereinsamung in der überalterten Fakultät.“ Schon unter der Jahreszahl 1881 hatte er zu dem letzten Punkt ausführlicher vermerkt: „Beginnender Gegensatz zu Neumann; Mayer und von der Mühl zu wenig mathematisch.“ Zusammengefaßt finden wir das in der Klage: „Die dortigen [4 Leipziger] Fachkollegen waren alle viel älter als ich [jeweils 8, 10, 17 und 23 Jahre] und ich habe mich dementsprechend dort wissenschaftlich wesentlich isoliert gefühlt.“ Klein notierte auch: „Ärger mit der Leipziger Bibliothek.“ Aber für die Jahre 1881/82 lesen wir ebenfalls: „Dieser Winter und der folgende Sommer waren die besten Leipziger Semester.“

Wo Licht ist, da ist auch Schatten. Das gilt nicht nur für Leipzig und Kleins dortige Kollegen, auch bei Klein fehlen Schattenseiten nicht. Manches, wie das straffe Zeitregime, erscheint natürlich aus der Alltagsperspektive anders als aus der Sicht des produktiven Gelehrten. Aber die Konsequenzen, die ein Fauxpas des Studenten Max Born hatte, nämlich auch Astronomie belegen zu müssen, um so im Rigorosum am verärgerten Klein als Prüfer vorbei zu kommen, waren keine *quantités négligeables*, sondern sind schlechtweg fatal. In Borns Memoiren finden sich auch einige Beispiele für Kleins „diktatorisches Gehabe“. „Klein ruled over it like a distant god, divus Felix, from above the cloud“, so beschrieb es Weyl 1944. Oskar Bolza (1857–1942) hat trotz der erhaltenen Förderung durch den Lehrer und dessen Unterstützung bis hin zur Stellensuche in seiner Autobiographie zwiespältig über seine Studienzeit bei Klein berichtet:

Dagegen war die Wirkung auf mich geradezu katastrophal: der ungeheure Abstand zwischen Kleins überragender Genialität, die, unterstützt von einem wunderbaren geometrischen Anschauungsvermögen, ihn die Resultate erraten ließ, seiner souveränen Beherrschung fast aller Gebiete der Mathematik, aus denen ihm für jede Aufgabe die reichste Fülle von Hilfsmitteln zuströmte ... wirkte erdrückend auf mich und hatte einen vollständigen Zusammenbruch meines Selbstvertrauens, wenigstens nach der Seite der wissenschaftlichen Produktivität zur Folge.

Diese Zeilen Bolzas vermitteln über die Beschreibung Kleins hinausgehend auch einen Einblick in die Schattenseiten jener unvergleichlichen Göttinger Ära der „Olympian professors“ und „shining lights“ (Peter D. Lax, geb. 1926), die allerdings nicht alle Anwesenden als „halcyon days“ (H. Weyl, 1944) wahrgenommen haben.

5 Kleins Abschied von Leipzig

In seinem letzten Leipziger Semester (WS 1885/86) erhielt Klein Besuch von zwei bekannten Mathematikern: aus Göttingen von dem bedeutenden Kollegen H.A.

³⁷ Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabt., Cod. Ms. Klein, 22L:1–4.

Schwarz (42 Jahre) und aus dem fernen Königsberg von dem frisch promovierten D. Hilbert (23 Jahre).

Hilbert besuchte eine Vorlesung Kleins über *Hyperelliptische Funktionen* und das zugehörige Seminar, in dem er zweimal vortrug. Er fiel Klein sofort auf und wurde zur privaten Silvesterfeier 1885/86 der Familie Klein eingeladen, „ein gewisser Dr. Hilbert“ notierte sich Klein. Eine Kopie des alten Seminarvortrags *Die allgemeinste periodische Function zweier Variablen*, den Hilbert am 15. Februar 1886, wenige Tage nach seinem 24. Geburtstag, gehalten hatte, überreichte Klein drei Jahrzehnte später dem nunmehrigen Göttinger Kollegen Hilbert anlässlich des 60. Geburtstages 1912. Hilbert war in Leipzig gleich in den engeren mathematischen Kreis um Klein vorgedrungen, und Klein riet Hilbert, nach Frankreich zu gehen, so wie er und vordem auch sein Lehrer Plücker es getan hatten. Als Klein nach Göttingen wechselte, war daher Hilbert unterwegs nach Paris. Aber in Paris war es dem jungen Deutschen nicht so schnell gelungen, engere Beziehungen zu den führenden mathematischen Kreisen zu knüpfen. Sehr bald mahnte daher Klein: „Es mag ja schwer sein, in Paris vielfachen und dabei ergiebigen mathematischen Verkehr zu finden, aber ich meine, bei immer wiederholten Anläufen muß man schließlich doch Vieles erreichen. Halten Sie [sich] immer vor Augen, dass die Gelegenheit ... niemals wiederkehrt.“ Neben dieser Einschärfung gab es auch kollegiale Fragen, etwa: „Wer ist eigentlich Stieltjes [1856–1894]? Ich habe für den Mann Interesse.“ Hilbert ließ sich mit der Antwort etwas Zeit und berichtete am 21. Mai 1886 in die Weender Str. 16 in Göttingen: „Ich blicke jetzt nämlich auf eine voll vierwöchentliche Periode äussersten physischen Uebelbefindens und gänzlicher Tatenlosigkeit zurück. ... Der Arzt behauptet, es sei die Acclimatisationskrankheit,“ – jedoch Hilbert stellte eine eigene Diagnose - „während ich es für hochgradige Vergiftung des Magens mittels Schwefelsäure halte, welche man hier genötigt ist, in verdünntem und gefärbtem Zustand unter dem Namen Wein zu sich zu nehmen.“ Hier fügen sich unsere Vorurteile zu einer verkehrten Welt: der Rheinländer predigt Pflichterfüllung, und der Ostpreuße praktiziert rheinländische Lebensart.

Der andere Besucher, Hermann Amandus Schwarz aus Göttingen, war der bedeutendste Schüler von Weierstraß. Da Schwarz vorerst keine Aussicht hatte, in Berlin Nachfolger des verehrten Lehrers zu werden, interessierte er sich sehr für die frei werdende Leipziger Stelle. Klein hatte seinen künftigen Kollegen sogar eingeladen, sich in Leipzig die neu geschaffenen mathematischen Einrichtungen selbst anzusehen. Das war ein Signal in die falsche Richtung. Schwarz, der in Finnland geweilt hatte, eilte hoffnungsvoll nach Leipzig, und Anfang Dezember 1885 erhielt er auch von Klein eine vertrauliche Nachricht: die Leipziger Berufungsliste! Auf die Plätze 2 und 3 waren Ferdinand Lindemann und Aurel Voss (1845–1931) gesetzt worden, und ein Separatvotum von Neumann nannte Sophus Lie, da dieser in Lie keinen funktionentheoretischen Konkurrenten sah.³⁸

Wer aber hatte Platz 1, *primo loco*, erhalten? Der Wunsch war der Vater der Wahrnehmung: Schwarz erwartete *Sie*, aber Klein hatte *Lie* geschrieben. Si-

³⁸ Eine ausführlichere Darstellung der Schwarzschen Sicht gibt Peter Ullrich, *Über die Wichtigkeit einer lesbaren Handschrift*, in: *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 1999, Heft 4, S. 39–42.

cherheitshalber bat Schwarz jedoch um Bestätigung der erhofften Lesart. Ein Briefentwurf zeigt, daß Klein Schwarz eigentlich über etwas Anderes hatte schreiben wollen. Aber nach dem Eintreffen der prekären Schwarzschen Frage hat Klein diese Absicht fallen gelassen und in dem neu aufgesetzten Brief auch die informellere Anrede „Lieber Freund“ gestrichen. Klein antwortete (ich zitiere nach dem Briefentwurf vom 7. 12. 1885):

Verehrter Herr College! Dass ist mir nun wirklich arg, dass meine undeutliche Schrift zu einem Missverständnisse Anlass gegeben, welches ich von Herzen bedauere. Es ist in der That Sophus Lie gemeint, der ja, wie Sie wissen seit Jahren mit Mayer /Leipzig/ in inniger Verbindung steht.³⁹

Mayer ist hier natürlich vorgeschoben, denn es gibt Belege, von denen gleich einer folgen wird, in denen Klein seinen Anteil an der Berufung Lies umißverständlich darlegt, die er übrigens schon bei dem möglichen Wechsel nach Baltimore ins Auge gefaßt hatte. Auch Weierstraß hatte inzwischen zuverlässige Nachrichten über die Berufungsliste erhalten und klärte Schwarz auf, fügte aber seinem Schreiben vom 20. Dezember noch eine Philippika an:

Wäre Leipzig eine preußische Universität, so würde ich mich verpflichtet halten, über ein so unerhörtes Verfahren, wie es der Leipziger Facultät beliebt hat, das eine Beleidigung ist für alle jetzt im kräftigen Mannesalter stehenden deutschen Mathematiker, an zuständiger Stelle ein offenes Wort zu reden. ... Ein schöner Anfang der neuen Aera.

Schließlich griff Weierstraß noch genüßlich den von Paul du Bois-Reymond (1831–1889) geprägten Ausdruck vom Kleeblatt Klein-Lie-Mayer als *société thuriféraire*⁴⁰ auf.

Wir müssen jetzt einige Schritte zurücktreten, um die Dinge aus etwas Abstand betrachten zu können. Dann fällt auf, wie sehr Klein *letztlich* im Sinn der Entwicklung der Mathematik tätig war: Er förderte den Nachwuchs, auch wenn dieser wie Hilbert unbequem war; er übergab sein Amt nicht nur in geordneten Verhältnissen, sondern sorgte auch für die angemessene Weiterführung in seinem Sinn. „Ich betrachte die hiesigen mathematischen Institute wie meine Kinder, die ich wohl fremden Händen anvertrauen darf, die ich aber nicht einfach verlassen und dem sicheren Untergang überweisen kann. ... In der That ist mir kein Zweifel, dass die Entwicklung des mathematischen Unterrichts für die nächsten Decennien mit der Entwicklung der Institute und der systematischen Organisation der Vorlesungen zusammenfällt“, schrieb Klein in Sachen der eigenen Nachfolgerschaft am 13. 11. 1885 an das Sächsische Kultusministerium, damit „das, was im Laufe der verflossenen fünf Jahre mit Mühe geschaffen wurde, auch weiterbestehe“. Seinen *Autobiographischen Notizen* vertraute Klein etwas wehmütig an, daß es merkwürdig

³⁹ Niedersächs. Staats- u. Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabt., Cod. Ms. Klein 11, 941 Anlage.

⁴⁰ Das französische Wort „thuriféraire“ hat eine interessante Wortgeschichte: es ist griechischen Ursprungs, „θύος“ (thýos) ist der Weihrauch, in kultischen Zusammenhängen erscheint es lateinisch als „turifer“ und meint dann „Weihrauch hervorbringend/tragend“, im modernen Französisch hat es jedoch die pejorative Bedeutung „Beweihräucherer“, sogar „Speichellecker“.

sei, wie „[ich] durch die Notwendigkeit, mich wissenschaftlich zu behaupten, doch einigermaßen von den Zielen, die ich in meiner Antrittsrede bezeichnete, abgelenkt bin“. An anderer Stelle vermerkte er: „Wie ich dann Ostern 1886 durchgesetzt habe, daß Lie als mein Nachfolger nach Leipzig berufen wurde und dadurch die Möglichkeit erhielt, jüngere Forscher in größerer Zahl in seine Ideen einzuführen.“

Gegenüber Hilbert hat sich Klein noch über den „unvermeidlichen Ärger, der mit jeder Berufung unausbleiblich verbunden scheint“ geäußert, nämlich als dieser Ärger 1893 wieder einmal eintrat, da Lindemann partout der Nachfolger von Schwarz zu werden wünschte, während Klein andere Kandidaten für geeigneter als seinen eigenen Schüler hielt: „Wird man übergangen, so kann man sich in philosophischer Ruhe fassen, hat man aber einen ausserordentlichen Erfolg, so rächen sich die guten Freunde durch allerlei Empfindlichkeiten, was viel schwerer zu ertragen ist.“ Von „old boy's network“ hielt Klein nichts, etwas gewagt übersetzt könnte man vielleicht sagen: Der Düsseldorfer mochte den Kölschen Klüngel nicht. Seriöse Leser bitte ich um Nachsicht, und ich beeile mich ernsthafter, Kleins Lebensmotto anzufügen: *Sincere et constanter*, etwa „aufrichtig und beständig“.

Kleins Beziehungen zu Leipzig waren mit dem Weggang natürlich nicht erloschen; im Gegenteil, durch das Erscheinen der *Mathematischen Annalen* (bis zum Jahre 1920) sowie der *Encyklopädie* im Leipziger Teubner-Verlag⁴¹ war er eng an die Stadt gebunden. Und es war Leipzig gewesen, wohin Klein die entscheidende Herausgebersetzung für das *Encyklopädie*-Projekt 1895 einberufen hatte. Die Aufnahme in die Royal Society, London, und die Leopoldina, Halle, im Jahr des Wegganges, sind beredete Anerkennungen seines Leipziger Wirkens.

Klein hatte die Berufung von Lie eingeleitet, dieser nahm an und kam im Februar 1886 aus Norwegen zu Besuch. Während Klein ihn im Dresdener Ministerium vorstellte, richtete Kleins Frau eine Wohnung in Göttingen ein. Am 1. April 1886 übersiedelte die Familie Klein dorthin.

6 Ausblick

Damit bin ich ersichtlich am Ende meines Vortrages „Klein in Leipzig“. Besinnen wir uns aber abschließend noch, was die angebotenen historischen Betrachtungen sollen und wollen. Bei einem ähnlichen Anlaß fragte schon 1907 Adolf Kneser (1862–1930): „Wühlen wir nur im alten Schutt, weil es uns Vergnügen macht, allerhand Antiquitäten einer wohlverdienten Vergangenheit zu entreißen? Und was sind überhaupt die Zwecke einer historischen Betrachtung für die Mathematik?“ Kneser berief sich u. a. auf den Leipziger Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), der meinte, die Geschichte gebe jedem sein Recht. Uns hier in Leipzig ist es eine Verpflichtung, in dieser Absicht Kleins zu gedenken, und wir können es mit Dankbarkeit für sein Wirken tun. Es war Felix Klein, der – genau wie er es in seiner An-

⁴¹ Das im Kriege zerstörte Verlagshaus nebst Druckerei befand sich in der Poststraße, die früher auf den Augustusplatz mündete, etwa in Höhe der heutigen Hauptpost; das ist schräg gegenüber dem Neubau der Universität, der etwa auf den Grundstücken des abgerissenen Augusteums sowie der gesprengten Paulinerkirche aufgeführt wurde und in dem jetzt die Fakultät für Mathematik und Informatik untergebracht ist.

trittsrede ausgeführt hatte – der Universität ein modernes Mathematisches Institut einrichtete und somit die Grundlagen für eine zeitgemäße Forschung und Lehre schuf. „Es ist dieser Reichthum wirklich staunen erregend“, teilte 1885 nach einer Besichtigung des Leipziger Instituts der beeindruckte Schwarz nach Berlin mit (Brief an Weierstraß vom 18. 10. 1885). Und ohne die auch außerhalb Deutschlands beachteten Leistungen von A. Mayer und C. Neumann zu schmälern, so war es doch erst der „Geometrie professor“ Klein, der der Leipziger Analysis tradition zu ihrem weltweiten Ansehen verhalf, denken wir nur an Leon Lichtenstein sowie Ernst Hölder oder in neuerer Zeit an Herbert Beckert (geb. 1920) und seine Schüler.

Aber wir dürfen mit dem Historiker Johann Gustav Droysen (1808–1884) auch über diesen lokalen Zweck hinausgehen, denn „Das, was war, interessiert uns nicht darum, weil es war, sondern weil es in gewisser Weise noch ist, indem es wirkt.“ In diesem Sinn habe ich versucht, in der vergangenen Stunde Ihnen ein lebendiges Bild von Felix Klein zu entwerfen und seine Stellung in der Mathematik zu umreißen. Ich wollte Klein nicht mit einem Denkmal steinigen. Bevor Sie entscheiden, wie weit mir das gelungen ist, lassen Sie mich noch an Kleins Worte aus dem Schreiben anlässlich seiner Berufung erinnern, als dieser den Dekan der Leipziger Philosophischen Fakultät bat, „die Anforderungen nicht höher zu spannen, als es meine [Kleins] nur zu begrenzte Leistungsfähigkeit gestattet“. Für Vorhaben wie dieses gilt nach wie vor Jonathan Swifts (1667–1745) alte Feststellung, daß die Elefanten stets kleiner als in der Natur gezeichnet werden, „Elephants are always drawn smaller than life“.

Literatur

- Nachlaß Felix Klein* (Cod. Ms. Felix Klein),
Nachlaß David Hilbert (Cod. Ms. D. Hilbert),
 beide Niedersächs. Staats- u. Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung.
Personalakte Klein. Universitätsarchiv Leipzig, 27 Seiten.
 Felix Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. 3 Bde. Hrg. R. Fricke, A. Ostrowski, H. Vermeil, E. Bessel-Hagen. Berlin: J. Springer 1921–1923. Reprint 1973.
Die Naturwissenschaften, Bände 7 (1919) und 13 (1925) mit Artikeln über Klein.
 Günther Frei, *Felix Klein (1849–1925) – A biographical sketch*. In: *Jahrbuch Überblicke Mathematik* 1984, S. 229–254. Mannheim: Bibl. Institut 1984. [Diese Skizze ist immer noch die beste Darstellung von Kleins Leben und Werk.]
 Fritz König, *Die Gründung des „Mathematischen Seminars“ der Universität Leipzig; Felix Klein*. In: *100 Jahre Mathematisches Seminar der Karl-Marx-Universität Leipzig*. Hrg. von H. Beckert und H. Schumann. Berlin: Dtsch. Verlag d. Wissenschaften 1981.

Ich danke der *Deutsche Akademie der Naturforscher, Leopoldina*, in Halle für deren Unterstützung bei einigen Archivrecherchen für diesen Vortrag, die ich in großzügiger Weise mit den durch den Förderpreis der Akademie ermöglichten Forschungen verbinden konnte (Förderzeichen LPD 1995).

Rüdiger Thiele
 Karl-Sudhoff-Institut für Geschichte
 der Medizin und der Naturwissenschaften
 Augustusplatz 10–11
 04109 Leipzig
 E-mail: thiele@medizin.uni-leipzig.de

(Eingegangen am 14. 02. 2000)



Buchbesprechungen

Chung, F., Graham, R., Erdős on Graphs, His Legacy of unsolved Problems Wellesley, Mass.: A. K. Peters 1998, 142 S., DM 34,–

Wie wohl kein anderer Mathematiker der Gegenwart hat Paul Erdős die ihm nahestehenden Gebiete der Mathematik, darunter Zahlentheorie, Geometrie und Kombinatorik, allein schon durch die Formulierung von Problemen beeinflusst. Über tausend sind es wohl, und jedesmal, wenn eines von ihnen gelöst wird, ist dies ein kleineres (oder größeres) Ereignis.

Paul had the uncanny ability time after time to identify a fundamental roadblock in some particular line of approach and to capture it in a well-chosen (often innocent-looking) problem.

Mit diesen Worten charakterisieren die Autoren des zu besprechenden Bandes die besondere Qualität der Erdős-Probleme, die zusammenzustellen ihr Ziel ist. Vielleicht greift selbst ihre anerkennende Formulierung noch zu kurz. Sind es doch nicht irgendwelche Forschungsziele, deren Lösung uns Erdöss pointierte Fragestellungen näherbringen: fast immer sind sie aus einem Mathematikverständnis geboren, das ganz wesentlich von Erdős selbst inspiriert und durch eigene Beiträge geprägt wurde. Daß es auch anders geht – wofür in der Graphentheorie die durch Wagner begründete deutsche Schule ebenso steht wie die Arbeiten von Tutte und in jüngster Zeit die durch Robertson und Seymour entwickelte Minorentheorie – setzt erst das Erdössche Lebenswerk ins rechte Licht: daß seine prägnanten und meist in irgendeiner Weise „quantifizierten“ Fragestellungen weite Teile der Graphentheorie geradezu definieren, ist durchaus nicht inhärentes Merkmal der Disziplin, sondern weitgehend Erdöss Verdienst.

Allein das in seinen Problemen artikulierte mathematische Vermächtnis Erdöss in geordneter Weise für die Nachwelt zusammenzustellen ist eine Arbeit, für die wir anderen Hinterbliebenen den Verfassern des vorliegenden Bandes Dank schulden. Doch gehen sie weit über eine bloße Auflistung hinaus. Zu allen genannten Problemen geben sie einen bis in allerjüngste Zeit hineinreichenden Abriss der bekannten Teilresultate, komplett mit Literaturangaben. Zu jedem der angesprochenen Gebiete bieten sie dem noch nicht eingeweihten Leser eine kurze inhaltliche Einführung, oft mit der Darstellung einiger auf Erdős zurückgehender klassischer Beweise oder Argumente, die dieses Gebiet und die folgenden Probleme geprägt haben. Mehr kann ein Herausgeber nicht tun: daß die meisten der Erdösschen Probleme ihren Zauber letztlich erst demjenigen erschließen, der wirklich an ihnen arbeitet, ist einmal mehr ein Zeugnis für den Genius ihres Urhebers – für seine Fähigkeit, intuitiv erfaßten mathematischen Reichtum buchstäblich auf den Punkt zu bringen.

Daß jedes Mathematikbuch Fehler enthält, ist eine allgemein bekannte Binsenweisheit, die zu wiederholen gleichwohl die meisten Vorworte (und einige Rezensionen) für nötig erachten. Ein Text, der so relativ kontextarm von Höhepunkt zu Höhepunkt hüpfte wie der vorliegende, und bei dem überdies so manches Epsilon eine Wasserscheide zwischen mathematischen Welten verbirgt, ist hier naturgemäß besonders anfällig: für Autor und Leser gleichermaßen. Die Verfasser scheinen denn auch ihre Quote an verzeihlichen Fehlern durchaus auszuschöpfen. Wer sich als Leser das Risiko ersparen möchte, mit dem einer wahren Erdös-Vermutung gebührenden Eifer an einem Druckfehler zu arbeiten, wird vielleicht gut daran tun, das Angebot an Literaturhinweisen auf die Originalquellen auch anzunehmen.

Die besondere persönliche Nähe der Verfasser zu Paul Erdős – er logierte häufig in ihrem Haus als irgendwo sonst – macht sicher den Versuch verständlich, die Dar-

stellung seines mathematischen Vermächtnisses durch eine menschliche Würdigung abzurunden. Bis auf ein warmherziges persönliches Vorwort von Fan Chung, das sicher vielen Lesern aus dem Herzen gesprochen sein wird, trauen sie sich aber letztlich nicht selbst an diese fürwahr nicht einfache Aufgabe heran. Schade eigentlich – es wird wenige geben, die Erdős Selbstlosigkeit, seine tiefe Betroffenheit angesichts menschlichen Unrechts und Leids, und nicht zuletzt seine vollkommen natürliche Offenheit gegenüber selbst den Jüngsten unserer Zunft hautnah erlebt hätten als sie. Stattdessen erteilen sie in einem Anhang des Buches einem Budapester Zeitgenossen Erdős das Wort, A. Vázsonyi, der auf zwanzig Seiten eine Reihe von Erdős-Anekdoten zum Besten gibt. So sehr die eine oder andere dieser überlieferten Skurrilitäten dem lebenden Erdős zur Zier gereicht haben mag – schließlich konnte sich jeder anhand des Originals davon überzeugen, wie viel oder wenig seines wahren Charakters sie nachzeichnen – so unglücklich erscheint mir ihre geballte Zusammenstellung jetzt, und an so prominentem Ort. Den menschlichen Qualitäten des Paul Erdős werden sie nicht gerecht – den bleibenden Wert des mathematischen Teils des Buches können sie jedoch nicht schmälern.

Chemnitz

R. Diestel

Goldman, J. R., *The Queen of Mathematics: a historically motivated guide to number theory*, Wellesley, MA: A. K. Peters 1998, 525 pages, \$45.–

Dieses Buch ist ein Lehrbuch der Zahlentheorie und zugleich eine reichhaltige Quelle für die geschichtliche Entwicklung derselben vom 17. bis zum 19. Jahrhundert mit Ausblicken bis in die Gegenwart. Der Autor legt großen Wert darauf, die Fragestellungen, Methoden und Theoreme bis zu ihren historischen Ursprüngen zurückzuverfolgen. Gerade für den Anfänger, der sich in dieses Gebiet einarbeiten möchte, ist dies sicherlich eine große Hilfe für das tiefere Verständnis.

Das Buch beginnt im Wesentlichen mit Fermat, dem Gründervater der Zahlentheorie in der Neuzeit. Seine Methode der „descente infinie“ wird besprochen und an Beispielen beleuchtet. Ferner werden behandelt: Pellsche Gleichung, perfekte Zahlen, Fermatesche Primzahlen. Im Kapitel 3 werden einige Beiträge von Euler behandelt: sein Beweis für die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen, die Formel für die Werte der Zetafunktion an geraden natürlichen Stellen und einige arithmetische Funktionen.

Im Kapitel 4 von Euler bis Lagrange geht es um Kettenbrüche, diophantische Approximation und nochmals die Pellsche Gleichung. Die nächsten beiden Kapitel sind Beiträgen von Lagrange und Legendre gewidmet: dem Vier-Quadrate-Satz und den Anfängen der Theorie der quadratischen Reste.

Der 2. Teil des Buches (Kapitel 7 bis 14) hält sich eng an die *Disquisitiones arithmeticae* von C. F. Gauß. Nach einem Überblick über dieses Werk und über Gauß' Leben beginnt der Autor mit einer Einführung in das Rechnen mit Kongruenzen. Hierbei werden die ersten Abschnitte der *Disquisitiones* einfach aus dem Lateinischen ins Englische übertragen. Es geht dann weiter mit Primitivwurzeln, Indizes, k -ten Potenzresten und schließlich dem quadratischen Reziprozitätsgesetz. Die arithmetische Theorie der binären quadratischen Formen ist auf die beiden Kapitel 12 und 13 aufgeteilt. Schließlich werden die Beiträge von Gauß zur Kreisteilung behandelt.

Der 3. Teil des Buches besteht aus 3 Kapiteln (15–17) und gibt eine Einführung in die algebraische Zahlentheorie, wie sie sich im Laufe des 19. Jahrhunderts bis hin zu Dirichlet und Minkowski entwickelt hat. Auch die Theorie der binären quadratischen Formen wird dabei wieder aufgegriffen und vom Standpunkt der Ideale in quadratischen Zahlkörpern neu beleuchtet.

Der 4. Teil des Buches (Kapitel 18–20) behandelt die Arithmetik algebraischer Kurven. Der Satz von Mordell über die endliche Erzeugbarkeit der Gruppe der rationalen Punkte einer elliptischen Kurve wird ausführlich und gewissenhaft bewiesen. Die weitere Theorie der elliptischen Kurven wie z.B. die L -Reihe einer elliptischen Kurve, die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer und Komplexe Multiplikation werden nur noch in Form von Ausblicken angedeutet.

Der 5. und letzte Teil des Buches (Kapitel 21–23) behandelt einzelne, heterogene Themen. In Kapitel 21 geht es um irrationale und transzendente Zahlen, diophantische Approximation (Sätze von Kronecker, Thue-Siegel-Roth und Baker). Den Beiträgen von Minkowski zur Geometrie der Zahlen ist das Kapitel 22 gewidmet. Zum Abschluß werden in Kapitel 23 noch die p -adischen Zahlen und Bewertungen angesprochen.

Soweit zum Inhalt. Die graphische Ausstattung des Buches auch mit Zeichnungen ist sehr schön. Es ist recht breit und ausführlich geschrieben und infolgedessen ziemlich umfangreich. Das liegt natürlich an der ausdrücklichen Motivation der Begriffsbildungen und Leitideen und an deren historischer Einordnung. Gerade für das Selbststudium halte ich das Buch für besonders geeignet. Nur der Mangel an Übungsaufgaben könnte dem eventuell entgegenstehen.

Erlangen

J. Köhn

Koecher, M., Krieg, A., Elliptische Funktionen und Modulformen, Berlin u. a.: Springer 1998, 289 S., DM 78,-

Das Buch ist entstanden aus dem Manuskript der letzten Vorlesung von Max Koecher, die er im Wintersemester 1988/89 unter dem Titel „Funktionentheorie III“ in Münster gehalten hat. Die Voraussetzungen an den Leser sind nur Grundkenntnisse in Funktionentheorie. Im ersten Kapitel werden elliptische Funktionen behandelt, ausgehend von historischen Fragestellungen. Die Kapitel II–V über Modulformen können unabhängig davon gelesen werden: es wird die klassische Theorie dargestellt, wobei in Kap. IV („Die Hecke-Petersson-Theorie“) Hecke-Operatoren für die volle Modulgruppe und der Zusammenhang zwischen ganzen Modulformen und Dirichletreihen mit Funktionalgleichung ausführlich behandelt werden, und in Kap. V („Theta-Reihen“) wird insbesondere ein Spezialfall des Siegelschen Hauptsatzes, nämlich daß Eisensteinreihen (für $k \equiv 0 \pmod{4}$) das gewichtete Mittel der Thetareihen zu den Klassen gerader unimodularer positiv-definiter quadratischer Formen in $2k$ Variablen sind, vollständig bewiesen. Ferner werden im letzten Kapitel Epsteinsche Zetafunktionen, Kroneckersche Grenzformel und Rankin-Konvolution behandelt.

Bis zum Schluß werden dabei dem Leser genaue Lehrbuch-Zitate der verwendeten Sätze insbesondere aus der Analysis gegeben. Weiterhin werden neben vielen historischen Bemerkungen auch zahlreiche Ausblicke auf neuere Entwicklungen und Ergebnisse mit Literaturziten belegt. Zahlreiche Aufgaben erschließen neue Themen, wie z. B. Poincaré-Reihen; vielleicht wären Lösungshinweise für einen eiligen Leser von Nutzen.

Es handelt sich um ein sehr empfehlenswertes Lehrbuch, das Studierenden mittlerer Semester in allen Details zugänglich ist. Wer noch weitergehende Anregungen auf diesem Gebiet sucht, der sei auf das Buch von Iwaniec „Topics in Classical Automorphic Forms“, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 17, 1997, hingewiesen.

Münster

M. Peters

Braess, D., Finite Elements Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics, Cambridge University Press 1997, 323 S., paperback, £ 17.95

Die Methode der Finiten Elemente hat sich in den letzten 40 Jahren zur wichtigsten Technik zur Diskretisierung partieller Differentialgleichungen, speziell vom elliptischen und parabolischen Typ, entwickelt. In der weiterführenden Numerik-Ausbildung bildet die Behandlung der theoretischen Grundlagen dieser Verfahren in der Zwischenzeit einen festen Bestandteil. Dementsprechend existiert eine reichhaltige einführende Lehrbuchliteratur, zwischen der sich ein neues Lehrbuch durch Qualität und eigenständiges Profil behaupten muß.

Für das vorliegende Buch von D. Braess stellt dies keine große Hürde dar. Basis für die Darstellung ist eine Vielzahl von Vorlesungen des Autors, bei denen er eine Reihe von Schwerpunkten gesetzt hat, die zum Teil seine eigenen Forschungsaktivitäten der letzten Jahre widerspiegeln. Neben den unverzichtbaren Grundlagen, die inzwischen weitgehend standardisiert sind, gibt der Autor zum einen einen guten Einblick in effiziente Lösungsverfahren für die entstehenden großen Gleichungssysteme mit konjugierten Gradienten und mit Mehrgitterverfahren. Besonders hervorzuheben ist aber eine geschlossene einführende Darstellung des Hauptanwendungsgebietes der Finiten Elemente, der Strukturmechanik, in deren Verlauf eine Reihe moderner Diskretisierungstechniken aufgegriffen werden. Gerade dieses Kapitel gibt auch dem fortgeschrittenen Leser einige neue Einsichten.

Das Buch ist für Einsteiger in das Themengebiet „Finite Elemente“ konzipiert, auch solche ohne weitergehende Vorbildung aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und der Variationsrechnung. Der Autor verzichtet bewußt auf die Darstellung einer Vielzahl technisch aufwendiger Einzelresultate aus der FE-Theorie, sondern beschränkt sich auf einfache Grundlagen und auf Resultate, die sich im Hilbertraum-Kontext formulieren und analysieren lassen. Das Bemühen um möglichst einfache Zugänge ist stets spürbar. Dies bedeutet in keiner Weise eine Oberflächlichkeit der Darstellung. Alle notwendigen analytischen und funktionalanalytischen Grundlagen werden stets genügend klar und ausführlich bereitgestellt. Überhaupt liegt das Schwergewicht auf der analytischen Theorie der betrachteten Diskretisierungsverfahren; numerisch-praktische Fragestellungen spielen eine untergeordnete Rolle, ebenso finden sich selten Tabellen über numerische Testresultate.

Analytisch gewonnene Einsichten erscheinen konsequenterweise auch als Triebfeder bei der Konstruktion oder Verbesserung spezieller FE-Techniken. Die Babuška-Brezzi-Theorie für Stabilitätsuntersuchungen bei Sattelpunktformulierungen spielt hier eine zentrale Rolle. Solche resultieren aus sogenannten gemischten Variationsprinzipien, die in der Ingenieurpraxis sehr verbreitet sind. Die Analyse von Modifikationen solcher Sattelpunktformulierungen durch Penalty-Terme liefern auch die Basis für das Verständnis sogenannter „locking“-Phänomene, einem unerwünschten suboptimalen Konvergenzverhalten für Probleme mit, z.T. versteckten, kleinen Parametern (dünnwandige Konstruktionen etc.), sowie deren Beseitigung.

Zum Inhalt im einzelnen:

Kapitel I gibt zunächst die Typeneinteilung für partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung an und diskutiert grundlegende Eigenschaften der Potential-/Poisson-Gleichung, der Wärmeleitungsgleichung und der Wellengleichung. Die Konvergenz der üblichen 5-Punkte-Diskretisierung wird mit Hilfe des diskreten Maximum-Prinzips analysiert, einer Beweistechnik, deren enge Grenzen kurz angesprochen werden.

Im folgenden konzentriert sich das Buch auf Finite-Elemente-Diskretisierungen für lineare elliptische Differentialgleichungen und Systeme. Kapitel II stellt die zentralen Grundlagen der Theorie zusammen. Der variationelle Zugang zur Existenztheorie für elliptische Randwertprobleme und Grundlagen der Theorie der Sobolevräume werden diskutiert. Es folgt die Darstellung der Konvergenztheorie konformer Finiten Elemente: Be-

stapproximationseigenschaft (Céa-Lemma), Dualitätsargument (Aubin-Nitsche-Lemma), Konvergenzaussagen bezüglich der Energienorm, L^2 -Norm, negativer Normen. Bereitgestellt werden hier auch die notwendigen Resultate aus der Theorie der Approximation mit stückweise polynomialen Funktionen (Bramble-Hilbert-Lemma, inverse Abschätzungen).

Im Rahmen einer einführenden Vorlesung zentral ist Kapitel III, überschrieben mit „Nonconforming and Other Methods“. Basierend auf den beiden Lemmata von Strang werden zunächst Finite-Elemente-Ansätze untersucht, die nicht alle notwendigen Stetigkeitsübergänge zwischen den Zellen gewährleisten, z.B. das Crouzeix-Raviart-Element. Dazu gehört auch die Behandlung krummliniger Gebietsränder, mit oder ohne isoparametrische Randanpassung. (Die bewiesene Fehlerordnung bei polygonaler Randanpassung ist nicht optimal.) Der Einfluß numerischer Integration, die ebenfalls zu den „variational crimes“ gezählt wird, wurde bereits in Kapitel II andiskutiert. Die bei der Analyse nichtkonformer Methoden auftretenden Terme spielen auch bei der Herleitung moderner a posteriori-Fehlerschätzer eine Rolle. Ein Überblick solcher Fehlerkontrollen (bezüglich des Energiefehlers) ist deshalb diesem Kapitel angefügt.

Der zweite wichtige Themenkreis ist die bereits erwähnte Analyse von Sattelpunktproblemen. Der Autor präsentiert die vollständigen funktionalanalytischen Grundlagen der Babuška-Brezzi-Theorie. Als Anwendungen werden eine gemischte Diskretisierung der Poisson-Gleichung und Verfahren für die Stokes-Gleichung behandelt. Ein sehr schöner Abschnitt untersucht Sattelpunktprobleme mit Penalty-Term, deren Analyse auf einem Lemma von Kirmse basiert. In diesen Kontext fallen z.B. stabilisierte Sattelpunktformulierungen nach Hughes oder auch Techniken mit erweiterten Lagrange-Funktionen. Weitere Anwendungen finden sich in Kapitel VI.

Kapitel IV ist der Lösung der bei der Diskretisierung auftretenden großen Gleichungssysteme mit konjugierten Gradienten gewidmet. Es werden einfache Vorkonditionierungstechniken angegeben, z.B. SSOR-Vorkonditionierung und Techniken unvollständiger Dreieckszerlegungen. Für Sattelpunktprobleme werden Uzawa-artige Algorithmen diskutiert.

Die wohl derzeit effizienteste Lösungstechnik bei extrem feinen Gittern ist die Mehrgittertechnik. Kapitel V gibt eine vollständige Konvergenzanalyse im Fall der Diskretisierung einfacher elliptischer Probleme. Es wird die Realisierung der wesentlichen Komponenten (Gittertransfer, Grobgitterkorrektur) vorgestellt und eine „klassische“ Analyse des Zweigitterfahrens vorgestellt, die rekursiv auf den Fall des W-Zyklus erweitert werden kann. Der Nachweis der Konvergenz des einfacheren V-Zyklus folgt einer Arbeit von Braess-Hackbusch; neuere Konvergenzbeweise aus der Theorie der Teilraumiterationsverfahren werden hier nicht untersucht. Das Kapitel schließt mit einer Analyse der sogenannten „geschachtelten Iteration“, auch des CASCADE-Verfahrens, und mit möglichen Erweiterungen für den nichtlinearen Fall.

Der auffälligste Teil des Buches ist sicherlich Kapitel VI. Es präsentiert eine Reihe von Anwendungen der Finiten Elemente im Bereich der Strukturmechanik und läßt damit auch das bisherige Material als integrierten Bestandteil einer anwendungsorientierten Forschungsdisziplin erscheinen. Der Autor beginnt mit einer kurzgefaßten axiomatischen Begründung der Elastizitätstheorie und stellt dann eine Reihe neuerer Diskretisierungsverfahren vor. Speziell werden behandelt das PEERS-Element der ebenen Elastizität, das diskrete Kirchhoff-Dreieck zur Lösung der Kirchhoffschen Plattengleichung und Diskretisierungen der Reissner-Mindlin-Platte. Eine besondere Aufmerksamkeit gilt stets den gemischten Diskretisierungen vom Hellinger-Reissner-Typ, die zum Teil durch zusätzliche Penalty-Terme modifiziert werden müssen, um „locking“ zu vermeiden.

Die meisten Abschnitte enthalten eine Sammlung von Übungsaufgaben, die meist die Aufgabe haben, zusätzliche Aspekte in die Diskussion einzuführen und die Notwendigkeit mathematischer Voraussetzungen zu begründen.

Das Buch ist sowohl als begleitendes Lehrmaterial für eine einführende FE-Vorlesung als auch als Hilfsmittel zur Konzeption einer solchen Veranstaltung geeignet. Gute Studierende können es auch für das Selbststudium nutzen. In jedem Fall sollte der Leser über solide mathematische Grundkenntnisse verfügen, was den Text für Ingenieure nur bedingt geeignet erscheinen läßt. Studierende mit erweiterten Interessen etwa hinsichtlich der Behandlung zeitabhängiger Probleme oder nichtlinearer Differentialgleichungen und solche, die stärker an der praktischen Realisierung interessiert sind, erhalten hier ein sehr gutes theoretisches Fundament.

Das Buch ist sehr zu empfehlen.

Dortmund

H. Blum

Killing, W., Briefwechsel mit Friedrich Engel zur Theorie der Lie-Algebren, hrsg. von W. Hein, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 1997, 247 S., DM 108,-

Wilhelm Killings „Briefwechsel mit Friedrich Engel zur Theorie der Lie-Algebren“ ist 1997 anlässlich seines 150. Geburtstages als 9. Band der „Dokumente zur Geschichte der Mathematik“ im Verlag Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, erschienen. Vor der Besprechung des Buches, das Wolfgang Hein für die Deutsche Mathematiker-Vereinigung herausgegeben und kommentiert hat, sollen einige Anmerkungen zum biographischen und ideengeschichtlichen Hintergrund vorausgeschickt werden.

1. Sophus Lie (1842–1899) hat in den Jahren 1872 bis 1878 seine Integrationsmethoden für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung entwickelt und zu einem relativen Abschluß gebracht. Zunächst konnte er zeigen, daß jede vorgelegte partielle Differentialgleichung 1. Ordnung $Zf = \xi(x, y)f_x + \eta(x, y)f_y = 0$, die eine infinitesimale Transformation $Xf = \alpha(x, y)f_x + \beta(x, y)f_y$ gestattet, durch Quadratur der äquivalenten gewöhnlichen Differentialgleichung $\xi dy - \eta dx = 0$ gelöst werden kann. Bei der Verallgemeinerung dieses Problems (P_1) gelangte Lie über den „Normalfall“ (P_n) zur „Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen“, wo er sich die Aufgabe stellte, ein System von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung durch spezielle angebbare infinitesimale Transformationen auf gewöhnliche Differentialgleichungen möglichst niedriger Ordnung zurückzuführen. Im Gang der Untersuchungen wurde er auf die gruppentheoretische Seite seiner Integrationsprobleme aufmerksam. Denn der „Normalfall“ (P_n) z. B. war nur dann durch Quadraturen zu „erledigen“, wenn die n infinitesimalen Transformationen eine „integrable“ oder auflösbare n -gliedrige Gruppe von endlichen Transformationen erzeugten.

Solche Erkenntnisse führten Lie zu der Einsicht, daß sich die gestellten Integrationsaufgaben erst dann genauer behandeln lassen, wenn die Zusammensetzungen aller in Frage kommenden Gruppen aufgeklärt worden sind. Er wandte sich deshalb den damit verbundenen rein gruppentheoretischen Problemen zu. Ende 1874 erschien seine erste diesbezügliche Mitteilung in den *Göttinger Nachrichten* unter dem Titel „Über Gruppen von Transformationen“. Lie gab dort alle eindimensionalen Transformationsgruppen an, die mit einfachen Hilfsmitteln gewonnen worden waren. Erst später entwickelte er systematische Verfahren, die darauf beruhen, daß jede transitive Transformationsgruppe einem Punkt allgemeiner Lage eine Richtungsgruppe zuordnet. Lies Vorgehen kann deshalb als die Erledigung eines algebraischen Problems mit nichtalgebraischen Methoden charakterisiert werden.

Der Veröffentlichung von 1874 folgte eine Vielzahl von Publikationen im *Archiv for Mathematisk og Naturvidenskab* und in den *Mathematischen Annalen*. Da Lie aber

seine mathematischen Schöpfungen weder verständlich noch überzeugend genug darzustellen vermochte, blieben seine bahnbrechenden Ergebnisse weitgehend unbeachtet. So war es von großer Bedeutung, daß Felix Klein und Adolph Mayer, die Lie persönlich und fachlich nahe standen, ihm ihren Schüler Friedrich Engel mit dem Auftrag sandten, bei der Ausarbeitung einer zusammenhängenden Darstellung der neuen Theorien zu helfen. Friedrich Engel (1861–1941) reiste im September 1884 nach Christiania und arbeitete mit Lie ein Dreivierteljahr zusammen. Nach der Rückkehr habilitierte sich Engel mit der Abhandlung „Über die Definitionsgleichungen der continuirlichen Transformationsgruppen“ und wirkte bis 1904 an der Universität Leipzig. 1886 folgte Lie einem Ruf an die Alma mater Lipsiensis, wo er bis 1898 einen Lehrstuhl für Geometrie inne hatte. Durch den nun wieder einsetzenden persönlichen Kontakt mit Engel wurde die Arbeit am geplanten Werk sehr gefördert, so daß 1888, 1890 und 1893 die drei umfänglichen Abschnitte der „Theorie der Transformationsgruppen“ erscheinen konnten. Auch gelang es, die neuen Ideen in der Lehre zu vermitteln und so in- und ausländische Schüler zu gewinnen. Unter ihnen befand sich der Franzose Arthur Tresse (geb. 1868), der seinen Freund Élie Cartan (1869–1951) auf die Theorien Lies aufmerksam machte.

2. Wilhelm Killing (1847–1923) dagegen war, von anderen Überlegungen ausgehend, eigenständig, aber später als Lie zu ähnlichen gruppentheoretischen Fragestellungen wie dieser gelangt. Bei seinen Untersuchungen zu den Grundlagen der Geometrie legte er sich nämlich die folgende Frage vor: In einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit mit den Koordinaten x_i gestatte jeder Punkt m unabhängige infinitesimale Bewegungen $u_j dt$. Wird nun ein beliebiger Punkt dieser Mannigfaltigkeit zwei oder mehreren solchen Bewegungen nacheinander unterworfen, dann ist seine Lageänderung dx_i als Ausdruck der u_j gesucht. Erste Resultate dazu veröffentlichte Killing in der Programmschrift „Erweiterung des Raumbegriffes“, die er den Vorlesungsankündigungen für das Wintersemester 1884/85 am Lyceum Hosianum in Braunsberg voranstellte. Gleichzeitig legte er die aus seiner Sicht neuartigen Ergebnisse mehreren Fachgenossen vor. Bei dieser Gelegenheit machte ihn Klein, mit dem seit 1880 ein Briefwechsel bestand, auf die Publikationen Lies aufmerksam. Daraufhin trat Killing, dem diese Arbeiten unbekannt geblieben waren, zuerst mit Lie und dann mit Engel in Kontakt. Nach Abschluß eines Lehrbuches zur nichteuklidischen Geometrie eröffnete Wilhelm Killing im November 1885 den mehr als 30 Jahre lang mit Friedrich Engel geführten Briefwechsel. Während jener Zeit entstanden auch die gruppentheoretischen Arbeiten Killings. Es waren dies die 2. Braunsberger Programmschrift „Zur Theorie der Lieschen Transformations-Gruppen“ von 1886, „Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen“, deren vier Teile von 1888 bis 1890 in den *Mathematischen Annalen* erschienen, die 3. Braunsberger Programmschrift „Über eine gewisse Determinante“ von 1889, „Erweiterung des Begriffes der Invarianten von Transformationsgruppen“ und „Bestimmung der größten Untergruppen von endlichen Transformationsgruppen“, beide 1890 in den *Mathematischen Annalen* veröffentlicht, sowie die Münsteraner Programmschrift „Bemerkungen über die Transformationsgruppen vom Range Null“ von 1895 und der Beitrag „Der Bau einer besonderen Klasse von Transformationsgruppen“ für die Ludwig-Boltzmann-Festschrift von 1904. Im Gang dieser Untersuchungen mußte sich Killing zunächst ein Bild vom Stand der Entwicklungen machen. Dann übernahm er auf Engels Anregung hin die Symbolik und die Terminologie Lies. So ausgerüstet wandte er sich – seinen ursprünglichen Interessen folgend – der „Zusammensetzungsfrage“ zu und ging hier im Gegensatz zu Lie die algebräische Seite des Problems an, die nach der Aufstellung des 2. und 3. Fundamentalsatzes der Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen seit etwa 1876 vorgezeichnet war. Dabei erwies sich besonders die Einführung der charakteristischen Gleichung einer Gruppe als folgenreich. Auf Grund der Relationen, die zwischen deren Wurzeln bestehen, konnte Killing

im Laufe der Zeit eine vollständige Übersicht über alle möglichen Typen von komplexen einfachen Lieschen Gruppen gewinnen. Élie Cartan überprüfte und vervollkommnete zunächst die Resultate seines deutschen Kollegen und dehnte sie später auf die reellen einfachen Lieschen Gruppen aus. Gerhard Kowalewski (1876–1950), ein kundiger und vertrauter Schüler von Lie und Engel, äußerte in diesem Zusammenhang, daß die Untersuchungen Cartans von Lie persönlich veranlaßt worden seien.

3. Nachdem durch die Vorbemerkungen ein Bezugsrahmen gegeben ist, soll nun der von Wolfgang Hein herausgegebene und kommentierte Briefwechsel von Wilhelm Killing und Friedrich Engel zur Theorie der Lie-Algebren besprochen werden. Der Band wird nach einem Geleitwort von Winfried Scharlau durch die Porträts der beiden Mathematiker eröffnet, wobei das Engelsche etwas mehr technische Sorgfalt verdient hätte. Dann folgt nach Vorwort, Lesehinweisen und einem geeigneten Motto die prägnante Skizze „Wilhelm Killing. Leben und Werk“. Dem Herausgeber gelingt es auf wenigen Seiten, die Ausgangspunkte und die Überlegungen zu vermitteln, die Killing zu gruppentheoretischen Fragestellungen führten. Die dargestellte Sicht auf Lie dagegen bedarf der Ergänzung, die deshalb im Anfangsteil der Rezension angedeutet wurde. Da sich Wolfgang Hein nicht zu einem analogen Abriss über Leben und Werk von Friedrich Engel entschlossen hat, bringt er dessen biographische Daten in einer ausführlichen Zeittafel unter. Diese beginnt 1842 mit Lies Geburt und endet 1941 mit Engels Tod. Sie enthält aber einige Ungenauigkeiten und Mängel, die kurz benannt werden müssen: Die Angabe auf S. 22, wonach Lie 1871 als Stipendiat in Leipzig weilte, ist weder belegt noch wahrscheinlich. Bei dem auf S. 23 und auch später stets ohne Vornamen oder dessen Initialen erwähnten Mathematiker Schur handelt es sich immer um Friedrich Schur (1856–1932), der nicht mit Issai Schur (1875–1941) verwechselt werden sollte. Auf S. 24 kehrt Lie nach Oslo zurück und stirbt in Christiania. Ohne den aufklärenden Hinweis, daß Christiania (seit 1877 auch Kristiania geschrieben) 1924 wieder in Oslo umbenannt wurde, sind beiden Angaben verwirrend. Auch trug Engels Frau den Vornamen Caroline und nicht Lina, wie auf S. 24 behauptet wird. Zu diesen Kleinigkeiten gesellt sich aber ein Mangel, der schwer zu verstehen ist: Das Erscheinen des dreiteiligen fundamentalen Werkes „Theorie der Transformationsgruppen“ findet in der Zeittafel nicht statt. Der eben besprochenen Zeittafel folgt auf den Seiten 33–185 der Briefwechsel der beiden Mathematiker in chronologischer Reihenfolge. Ihm sind die photomechanischen Wiedergaben zweier Seiten eines Briefes von Killing und eines Schreibens von Engel vorangestellt. Für den fachlichen Inhalt der Korrespondenz gilt im großen, was über den Gang der Untersuchungen Killings bereits weiter oben ausgeführt wurde; für die vielen interessanten Einzelheiten und auch bzgl. des Persönlich-Biographischen muß direkt auf die Briefe und deren sorgfältige Kommentierung verwiesen werden. Mit stichwortartigen Randbemerkungen und Fußnoten gelingt es Wolfgang Hein, diese wichtigen ideengeschichtlichen Zeugnisse so zu erläutern, daß sie für sich les- und weitestgehend verstehbar sind. Hier findet nun auch an allen entsprechenden Stellen die in der Zeittafel vermißte „Theorie der Transformationsgruppen“ ihren gebührenden Platz. Im Anhang werden Varia zu Killing photomechanisch wiedergegeben. Er umfaßt die Ernennungsurkunden zum ordentlichen Professor in Braunsberg und Münster sowie die Programmschriften „Erweiterung des Raumbegriffes“ und „Zur Theorie der Lieschen Transformations-Gruppen“, die schwer zugänglich, aber – wie aus der Darlegung hervorgeht – mathematikhistorisch bedeutsam sind. Der Band schließt mit einem Register ab, in dem zusätzlich zum Namen- und Sachverzeichnis die abgedruckten Briefe, die wissenschaftlichen Schriften Killings und die zitierte Literatur aufgeführt werden.

Nachdem die insgesamt verdienstvolle Herausgeberschaft Wolfgang Heins gewürdigt worden ist, sollen noch zwei Themenkomplexe angeschnitten werden, zu denen man im besprochenen Werk vergeblich einen Hinweis sucht:

Die rege Korrespondenz von Killing und Engel bricht im Dezember 1891 ab und erst im September 1897 beginnt wieder ein Austausch von Briefen mit einer gewissen Regelmäßigkeit. Nur einige abhanden gekommene Schriftstücke können aber einen derart krassen Einschnitt nicht herbeigeführt haben. Die Einsicht in die Korrespondenz von Lie, die leider noch immer nicht in gedruckter Form der wissenschaftlichen Öffentlichkeit vorliegt, läßt dann auch deutlich werden, daß er den Gedankenaustausch seines Schülers und Mitstreiters mit dem vermeintlichen Rivalen entschieden mißbilligte. Deshalb dürfte Engel den Kontakt zu Killing erst wieder geknüpft haben, als zu seinem erkrankten Lehrer keine engen Beziehungen mehr bestanden.

Auch könnten sich Leser des besprochenen Bandes die Frage stellen, ob es nicht in Lies umfangreichem Werk Äußerungen über seinen Zeit- und Fachgenossen Killing gibt. Diese Interessenten seien allgemein auf die „Gesammelten Abhandlungen“ mit ihren Anmerkungen und Registern sowie besonders auf die „Theorie der Transformationsgruppen“ verwiesen. Im 29. Kapitel des 3. Abschnittes wendet sich Lie den gruppentheoretischen Arbeiten anderer Autoren zu, die ihm bis zum Sommer 1893 vorgelegen haben. Der dortige § 142 ist dann auch sehr pointiert Killing gewidmet.

Leipzig

B. Fritzsche

Goldstern, M., Judah, H., The Incompleteness Phenomenon, A New Course in Mathematical Logic, Natick, Massachusetts: A. K. Peters Verlag 1998, xiii + 247 pp., ca. DM 82,–

Dies Buch stellt eine Einführung in die Mathematische Logik dar, deren Highlight Gödels (erster) Unvollständigkeitssatz ist. Ziel der Autoren war es, einen Logik-Kurs zu präsentieren, der wenig mathematische Erfahrung voraussetzt, insbesondere von (amerikanischen) Studenten im Under- graduate-Studium absolviert werden kann. Im Vorwort äußern die Autoren die Auffassung, Logik sollte von jedem Studenten gelernt werden, der in seiner Wissenschaft formal-deduktives Denken anwendet.

Das erste Kapitel enthält die Grundbegriffe der Mathematischen Logik: Formeln (in Aussagen- und Prädikatenlogik), ihre Erfüllung in Modellen, formale Ableitbarkeit.

Im zweiten Kapitel wird der Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik bewiesen: genau diejenigen Aussagen sind aus einer Theorie formal ableitbar, die inhaltlich aus ihr folgen; äquivalent: genau die (syntaktisch) widerspruchsfreien Theorien haben Modelle. Als Anwendung des Kompaktheitssatzes (für abzählbare Theorien) werden überabzählbar viele nichtisomorphe abzählbare Modelle konstruiert, die zum Standardmodell der Arithmetik elementar äquivalent sind.

Das dritte Kapitel bietet einen Einstieg in die Modelltheorie: elementare Erweiterungen und elementare Ketten mit den Sätzen von Craig und Robinson als Anwendung, Ultraprodukte und der Kompaktheitssatz, Typen und abzählbare Modelle, mit dem Satz von Vaught als Höhepunkt (keine vollständige Theorie hat genau zwei nichtisomorphe abzählbare Modelle).

Inhalt des vierten Kapitels ist der Unvollständigkeitssatz in einer schwachen Form: die Theorie PA (die erststufige Peano-Arithmetik) ist nicht vollständig, d.h. es gibt eine Aussage σ , so daß weder σ noch seine Negation aus PA ableitbar sind. Als Abschluß wird der Unvollständigkeitssatz auf weitere Theorien übertragen und die Verbindung zur Rekursionstheorie hergestellt.

Das Buch ist größtenteils anregend, ausführlich und gut lesbar geschrieben. Die zum Vollständigkeits- und Unvollständigkeitssatz hinzutretenden Themen bieten als Ergänzung eine hervorragende Stoffauswahl, da nichttriviale und faszinierende Resultate

mit verhältnismäßig geringem technischem Aufwand erzielt werden. Es gibt viele hilfreiche und meist einfache Aufgaben. Bei den Hauptresultaten wird mehr Wert auf Einfachheit der Begriffsbildungen bzw. der Beweise gelegt als auf allgemeinste bzw. schärfste Formulierungen: z.B. wird der Hauptteil des Kapitels 4 nur für die Theorie PA durchgeführt; in der Sprache von PA gibt es ein Funktionssymbol für die Exponentiation, was Folgenkodierung stark vereinfacht; im Beweis des Unvollständigkeitssatzes wird benutzt, daß das Standardmodell der Arithmetik Modell von PA ist, dafür wird der Begriff der rekursiven Funktion vermieden. Zu Beginn des Buches werden sog. induktive Strukturen eingeführt, die alle später benötigten Induktionsmethoden, insbesondere Induktion über den Formelaufbau, formalisieren; eine ihrer Anwendungen ist die Definition des Formelbegriffs, der erfahrungsgemäß den Studierenden meist Schwierigkeiten bereitet – m.E. ein guter Zugang. Insgesamt halte ich das Buch für sehr gelungen. Dem Anspruch einer Einführung für mathematisch nicht allzu versierte Leser wird es gut gerecht.

Es gibt eine Reihe von kleinen Ungenauigkeiten, manchmal auch in den Aufgaben. (Z.B. heißen abzählbare Mengen in 2.1 „enumerable“, in 2.3 „countable“.) Diese sind vom aufmerksamen Dozenten leicht zu finden.

Zwei Ergänzungsvorschläge 1. In Kapitel 2 werden die Begriffe abzählbar/überabzählbar erläutert. Der Text beschränkt sich dann i.w. auf abzählbare Bereiche, vielleicht aus Rücksicht auf amerikanische Undergraduate-Curricula. Alle Sprachen werden also als abzählbar vorausgesetzt, was nur am Anfang explizit gesagt wird; insbesondere wird der Vollständigkeitssatz nur für abzählbare Sprachen bewiesen. In Kapitel 3 wird aber der Ultrafilterexistenzsatz für *beliebige* Mengen zitiert (und in einer Aufgabe ein Beweis mit Hilfe des Auswahlaxioms skizziert); als Konsequenz ergibt sich der Kompaktheitssatz für beliebige (d.h. nicht notwendig abzählbare) Theorien. Hieraus und aus dem Vollständigkeitssatz für abzählbare Theorien kann man sofort den für beliebige Theorien folgern, leider wird dies aber nicht durchgeführt.

2. Am Ende von Kapitel 4 würde es sich anbieten zu sagen, daß, laut Churchs These, die rekursiven Mengen genau die entscheidbaren und die rekursiven Funktionen genau die im intuitiven Sinne berechenbaren sind. Schon am Anfang des Buches könnte man nach der Definition induktiver Strukturen die Frage aufwerfen, ob die von einer induktiven Struktur (B, K) erzeugte Menge $C(B, K)$ entscheidbar (d.h. rekursiv) sein muß, wenn die Menge B der Ausgangsobjekte („blocks“) endlich bzw. entscheidbar und die Menge K der erzeugenden Funktionen („operators“) endlich ist und alle Funktionen aus K berechenbar sind. Tatsächlich stehen am Ende des Buches alle Mittel bereit, um zu zeigen, daß die Menge $C(B, K)$ unter diesen Voraussetzungen rekursiv aufzählbar ist; das Beispiel der in PA ableitbaren Sätze zeigt, daß sie nicht rekursiv zu sein braucht. Die anschauliche Interpretation von rekursiv aufzählbaren Mengen als Mengen der Form $C(B, K)$ für induktive Strukturen (B, K) , die die obigen Voraussetzungen erfüllen, wäre eine wünschenswerte Ergänzung des Textes. Im Text wird gezeigt, daß rekursiv aufzählbare Mengen nicht notwendig rekursiv sind – ein weiteres Unvollständigkeitsphänomen und fundamental für Rekursionstheorie und Theoretische Informatik!

Berlin

S. Koppelberg

Polyanin, A. D., Manzhirov, A. V., Handbook of Integral Equations, Berlin u. a.: Springer 1998, 787 S., DM 228,–

Differential- und Integralgleichungen gehören zu den Hauptwerkzeugen, um technische und physikalische Gesetzmäßigkeiten oder auch Prozesse in Biologie und Wirtschaftswissenschaften zu beschreiben. Weder können ihre Theorie noch die derzeit zur Verfügung stehenden Methoden zu ihrer Lösung trotz jahrzehntelanger Anstrengun-

gen von Mathematikern, Physikern und Ingenieuren als ein fertiges Gebäude angesehen werden. Im Gegenteil, gerade Bedürfnisse aus Wissenschaft und Gesellschaft erfordern weitere, bisweilen sehr subtile Untersuchungen. Für den potentiellen Nutzer ergibt sich ein schwieriges Problem, nämlich das der Orientierung in der schier unerschöpflichen Flut von Zeitschriftenartikeln und Büchern, die verschiedensten Aspekte der Differential- und Integralgleichungen gewidmet sind. Ein Handbuch für Integralgleichungen sollte daher den Zweck verfolgen, eine solche Orientierung auf einem Niveau zu liefern, das die Mehrzahl der möglichen Nutzer, insbesondere Ingenieure und Naturwissenschaftler, nicht überfordert, aber andererseits auch eine realistische Vorstellung über die auftretenden Schwierigkeiten liefert. In welchem Maße das von A. D. Polyanin und A. I. Manzhirov vorgelegte Handbuch der Integralgleichungen diesen Ansprüchen genügt, läßt sich nicht mit Bestimmtheit sagen; die Antwort wird maßgeblich von der individuellen Vorbildung und den zu lösenden Problemen abhängen.

Im ersten Teil des Buches werden rund 2100 Integralgleichungen aufgeführt und ihre Lösungen angegeben. Es handelt sich dabei ausschließlich um eindimensionale Gleichungen, die auch nichtlinear sein können. Die Verfasser bieten dabei eine Klassifizierung an, die sich einerseits an den Schlagwörtern *variable* und *konstante Integrationsgrenzen*, Gleichungen erster und zweiter Art und andererseits an der konkreten Gestalt der Kerne ausrichtet. Diese Einteilung erlaubt es leicht, nach Gleichungen Ausschau zu halten, deren Lösungen man sucht.

Es ist ein Verdienst der Autoren, dieses Material zusammengetragen und es systematisch aufgearbeitet zu haben. Immerhin nehmen die entsprechenden Ausführungen mehr als 400 Seiten ein und bilden den ersten Teil des Buches. Der interessierte Leser wird viele Gleichungen mit Lösungen finden, die ihm wahrscheinlich bis dato unbekannt waren und andererseits ihm wohlbekannte vermissen. Zu den letzteren gehören zweifelsohne einige Klassen von singulären Integralgleichungen auf dem Intervall $[-1, 1]$, deren Lösungen für polynomiale rechte Seiten wohlbekannt sind ([3], Kapitel 9). Auf eine Eigenart des Buches soll noch verwiesen werden, die dem Anliegen der Autoren geschuldet ist, nämlich die Darlegungen so einfach wie nur möglich zu gestalten. Im gesamten Buch fehlt beispielsweise der Begriff des Banachraumes und damit der der Norm (eine Ausnahme bildet Abschnitt 7.1, in dem die Konvergenz im quadratischen Mittel kurz gestreift wird). Dies führt dazu, daß wichtige Eigenschaften der betrachteten Gleichungen nicht formuliert, beziehungsweise wichtige Unterschiede nicht herausgearbeitet werden können. Dies sind jedoch nicht die einzigen Folgen. So betrachten die Verfasser im Beispiel 25 auf Seite 318 die klassische Wiener-Hopfsche Gleichung und behaupten, daß diese genau dann lösbar ist, wenn ihr Symbol nicht verschwindet (der Begriff des Symbols wird nicht explizit eingeführt und genutzt). Die Verfasser haben dies mit einer anderen Eigenschaft verwechselt, der sogenannten normalen Auflösbarkeit. Diese kann auch ohne topologische Begriffsbildungen erklärt werden, wird aber in der Regel (in Banachräumen) über die Abgeschlossenheit der Bildmenge eingeführt. Eine Gleichung mit einem normal auflösbaren Operator muß nicht zwangsläufig lösbar sein, und eine mit einem nicht normal auflösbaren Operator kann eindeutig lösbar sein. Außerdem scheint mir, daß Faltungsgleichungen und mit ihnen verwandte im ersten Teil des Buches nur sporadisch auftreten.

Dennoch möchte ich den Wert des ersten Teiles unterstreichen. Beispielsweise können explizite Lösungen für das Testen von Approximationsverfahren hervorragende Dienste leisten oder das Abbildungsverhalten konkreter Operatoren kann genutzt werden, um effektive Approximationsverfahren zu entwickeln. Ich meine, daß der erste Teil des Buches verschiedensten Zwecken dienlich sein kann und sich zumindest in Teilen als bequemer Wissensspeicher erweisen wird.

Im zweiten Teil des Buches werden Methoden zur Lösung von Integralgleichungen diskutiert. Breiten Raum nehmen Methoden zur analytischen Lösung von Gleichun-

gen ein. Neben Integraltransformationen wird die Wiener-Hopf-Faktorisierung, das Zurückführen auf gewöhnliche Differentialgleichungen oder die Methode der Modellösung dargelegt. Obwohl im ersten Teil Faltungsgleichungen eher ein Schattendasein führten, werden im zweiten Teil schwerpunktmäßig klassische Methoden zu ihrer Lösung angegeben, die bis hin zur (äquivalenten) Regularisierung reichen. Das Fehlen eines Raumkonzeptes macht sich auch hier bemerkbar. Beispielsweise werden Wiener-Hopfsche Integralgleichungen wie auch singuläre Integralgleichungen vom nicht normalen Typ betrachtet. In dem üblichen Funktionsräumen sind diese bekanntlich nicht normal auflösbar und besitzen wesentlich andere Eigenschaften. Diese Unterschiede werden nicht herausgearbeitet und gehen faktisch unter. Als höchst mangelhaft möchte ich die Abschnitte des zweiten Teiles bewerten, die sich mit der Numerik für Integralgleichungen beschäftigen. Es werden zwar einige klassische Verfahren erwähnt, aber keinerlei Konvergenzaussagen getroffen oder auch nur auf diese Problem hingewiesen. Selbstredend macht sich auch hier das Fehlen des Konvergenzbegriffes drastisch bemerkbar. Gerade auf dem Gebiet der näherungsweisen Lösung von verschiedensten Klassen von Integralgleichungen haben sich in den letzten 15 Jahren enorme Erkenntniszuwächse ergeben (man vergleiche etwa die Monographien [1], [2] and [3]), die nicht einmal ansatzweise gestreift wurden.

Als Fazit bleibt zu sagen, daß dieses Buch in Teilen durchaus wertvoll ist, daß es sich für eine erste Orientierung eignet, aber keinesfalls das Studium einschlägiger Monographien über Integralgleichungen ersetzen kann.

Als spärlich und etwas einseitig habe ich die Literaturzitate empfunden. Im übrigen wurden im Inhaltsverzeichnis die vorletzten Seiten vertauscht.

- [1] M. Golberg, C. Chen, Discrete Projection Methods for Integral Equations, Computational Mechanics Publications, Southamton UK and Boston USA, 1997.
- [2] W. Hackbusch, Integral Equations: Theory and Numerical Treatment, Birkhäuser Verlag, Boston, 1995.
- [3] S. Prößdorf, B. Silbermann, Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, 1991.

Analyse und Konstruktion robuster Mehrgitterverfahren

Klaus Johannsen

Robuste Mehrgitterverfahren für die Konvektions-Diffusions-Gleichung mit wirbelhafter Konvektion

2000. 183 S. (Advances in Numerical Mathematics) Br. DM 72,00
ISBN 3-519-02747-X

Der Inhalt:

Grundlagen - Konvektions-Diffusions-Gleichung - Programmpaket UG -
Modellprobleme - Konstruktion robuster Mehrgitterverfahren -
Vergleich mit anderen Verfahren - Dichtegetriebene Grundwasser-
strömung

Das Buch beschäftigt sich mit der Analyse und Konstruktion von robusten Mehrgitterverfahren für die lineare, stationäre Konvektions-Diffusions-Gleichung.

Hierbei wird besonders auf die wirbelhafte Konvektion und die stabilisierenden Finite-Volumen-Diskretisierungsverfahren eingegangen. Die Darstellung ist zu gleichen Teilen von theoretischen Überlegungen und numerischen Experimenten geprägt, wodurch ein vertieftes Verständnis der auftretenden Phänomene gewonnen wird und ein für praktische Anwendungen tauglicher Algorithmus entwickelt wird.

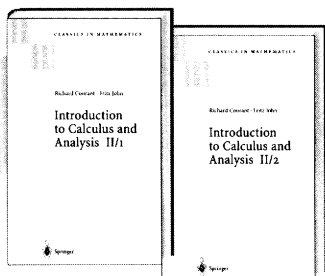


Abraham-Lincoln-Str. 46
65189 Wiesbaden
Fax: 06 11.78 78-400

Stand: August 2000
Änderungen vorbehalten

Back to the Future

CLASSICS IN MATHEMATICS



R. Courant, F. John

Introduction to Calculus and Analysis

Volume II/1 Chapters 1 - 4

Reprint of the 1st ed. 2000. XVI, 558 pp. 81 figs.
Softcover *DM 68 / £ 26 / FF 257 / Lit. 75.090
ISBN 3-540-66569-2

R. Courant, F. John

Introduction to Calculus and Analysis

Volume II/2 Chapter 5 - 8

From the reviews:

"These books (Introduction to Calculus and Analysis Vol. I/II) are very well written. The mathematics are rigorous but the many examples that are given and the applications that are treated make the books extremely readable and the arguments easy to understand. These books are ideally suited for an undergraduate calculus course. Each chapter is followed by a number of interesting exercises. More difficult parts are marked with an asterisk. There are many illuminating figures...Of interest to students, mathematicians, scientists and engineers. Even more than that."

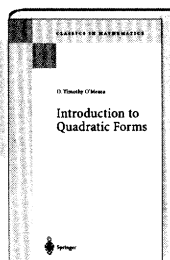
Newsletter on Computational and Applied Mathematics

"...one of the best textbooks introducing several generations of mathematicians to higher mathematics. ... This excellent book is highly recommended both to instructors and students."

Acta Scientiarum Mathematicarum

Reprint of the 1st ed. 2000. XXVIII, 412 pp. 39 figs.
Softcover *DM 68 / £ 26 / FF 257 / Lit. 75.090
ISBN 3-540-66570-6

Please order from Springer · Customer Service
Haberstr. 7 · 69126 Heidelberg, Germany
Tel: +49 6221 345200 · Fax: +49 6221 300186
e-mail: orders@springer.de
or through your bookseller



T.O. Meara

Introduction to Quadratic Forms

From the reviews:

"O'Meara (...) has given a clear account from first principles and his book is a useful introduction to the modern viewpoint and literature. In fact it presupposes only undergraduate algebra (up to Galois theory inclusive)... The book is lucidly written and can be warmly recommended."

The Mathematical Gazette

"Anyone who has heard O'Meara lecture will recognize in every page of this book the crispness and lucidity of the author's style... The organization and selection of material is superb... deserves high praise as an excellent example of that too-rare type of mathematical exposition combining conciseness with clarity..."

Bulletin of the AMS

Corr. 3rd printing 1999. XIV, 344 pp. 10 figs.
Softcover *DM 68 / £ 26 / FF 257 / Lit. 75.090
ISBN 3-540-66564-1

**For other volumes published in this series,
please visit our website at:
<http://www.springer.de/math/index/html>**



Springer

* Recommended retail prices. Prices and other details are subject to change without notice.
In EU countries the local VAT is effective. d&g · Gha · 6661.MNT/EI