D 20577
102. Band Heft 3
ausgegeben am 20. 10. 2000

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte:
Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Bilddaten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.
Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Verlag:
GWV Fachverlage
B. G. Teubner GmbH Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden
Postfach 15 46, 65173 Wiesbaden
Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden
http://www.teubner.de
http://www.gwv-fachverlage.de

Geschäftsführer: Dr. Hans-Dieter Haenel
Verlagsleitung: Dr. Heinz Weinheimer
Gesamtleitung Anzeigen: Thomas Werner
Gesamtleitung Produktion: Reinhard van den Hövel
Gesamtleitung Vertrieb: Heinz Detering

Abo-/Leserservice:
Tatjana Hellwig
Telefon: (06 11) 78 78-1 51
Fax: (06 11) 78 78-4 23
E-Mail: tatjana.hellwig@bertelsmann.de

Marketing/Sonderdrucke:
Stefanie Hoffmann
Telefon: (06 11) 78 78-3 79
Fax: (06 11) 78 78-4 39
E-Mail: stefanie.hoffmann@bertelsmann.de

Abonnentenverwaltung:
(Änderung von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung) VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6/Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,
Postfach 7777, 33310 Gütersloh
Ursula Müller
Telefon: (0 52 41) 80-19 65
Fax: (0 52 41) 80-96 20
E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

Bezugsbedingungen:
Die Zeitschrift erscheint 4 mal jährlich zum Jahresabonnementspreis von DM 178 (1 299 öS; 158 sFr) inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.
Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

ISSN 0012-0456

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 102, Heft 3

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

A. Greven: Interacting stochastic systems: Longtime behavior and its renormalization analysis

T. Korb, P. Schenzel: Zum Gedenken an Manfred Herrmann

A. Schönhage: Cantor-Medaille für Volker Strassen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
102 (2000) 95–101
Mathematics Subject Classification: 20 D

The Classification of the Finite Simple Groups

M. Aschbacher, Pasadena, CA, USA

About 1981 the finite group theory community decided via some sort of collective decision that the following result had been proved:

Classification Theorem *Each finite simple group is isomorphic to one of the following:*

(1) A group of prime order.
(2) An alternating group.
(3) A group of Lie type.
(4) One of 26 sporadic groups.

There are many things to be said about this theorem and eventually I'll get around to saying some of them. But for the moment I'll only pose a few questions to give you some things to think about:

Question 1. What is a simple group and why are simple groups interesting?

Question 2. What are the families of groups appearing in the conclusion of the Classification? In particular what is involved in describing these families and how useful is the description?

In order to answer these questions and to intelligently discuss the Classification we need some basic background. Let G be a group. Recall that G is *simple* if the only normal subgroups of G are 1 and G, or equivalently that 1 and G are the only homomorphic images of G. We can consider subnormal series

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

and observe that if G is finite there will exist maximal series of this form with the property that no further terms can be introduced in the series. Such a maximal series is called a *composition series* for G and has the property that each of the *factors*

$$G_{i+1}/G_i, \ 0 \leq i < n$$

in the series is a nonidentity simple group. The Jordan-Hölder Theorem says that any two composition series for G are of the same length and (up to isomorphism) have the same family of factors. This family of factors is the family of *composition factors* of G.

The composition factors do not determine G up to isomorphism. To retrieve G from these factors we must confront the

Extension Problem: Given groups X and Y, what are the groups G such that G has a normal subgroup $H \cong X$ with $G/H \cong Y$?

While the the composition factors of G do not determine G, they do exert a strong influence on the structure of G.

Examples (1) G is *solvable* iff all its composition factors are of prime order.

(2) Let p be a prime. G is a p-group iff all the composition factors of G are of order p.

You may recall that solvable groups and p-groups have very special properties.

Thus finite simple groups can be regarded as the building blocks of finite group theory, analogous to the primes in arithmetic or the elementary particles in physics. A finite group is not determined by its simple building blocks, but they do exert great influence on its structure. In particular in attacking some group theoretic problem one might attempt to reduce the problem to the case G simple and avoid the Extension Problem. This raises more questions:

Question 3. How do we recognize when a group is simple and what are the consequence of the simplicity of G? Put another way, even if we can reduce a problem to the case G simple, can we effectively make use of this fact?

Let $\mathcal{C}$ be a category. A *representation* of G in the category $\mathcal{C}$ is a group homomorphism $\pi : G \to Aut(X)$ for some object X in $\mathcal{C}$.

Examples (3) A *linear representation* is a representation in the category of vector spaces.

(4) A *permutation representation* is a representation in the category of sets.

The two classical representation theories are the theory of permutation representations and the theory of linear representations over the complex numbers **C**. Indeed when the notion of a "group" first appeared in the early nineteenth century the term meant "permutation group"; ie. a subgroup of the symmetric group (group of automorphisms) on some set. It was not until late in the nineteenth century that abstract groups made an appearance.

We can use representations of G to study the group, or in the other direction, we can use the group of symmetries of an object X to study X. The second point of view helps explain why group theory is useful and important and the first point of view will provide answers to some of the questions I've raised and help explain why the Classification is useful and important.

Most particularly, we will describe the simple groups appearing in the Classification in terms of representations of these groups on appropriate objects and we will use these representations to study the simple groups.

Let G be a nonabelian simple group. We seek an object X such that G is embedded in $Aut(X)$ and dominates $Aut(X)$ in the sense that $G \trianglelefteq Aut(X)$ and $C_{Aut(X)}(G) = 1$. Here if A is a group and $B \leq A$

$$C_A(B) = \{a \in A : ab = ba \text{ for all } b \in B\}$$

is the *centralizer* in A of B. Notice if $G \trianglelefteq H$ then for $h \in H$ we get a representation $c : H \to Aut(G)$ in the category of groups defined by

$$c(h) : g \mapsto h^{-1}gh$$

whose kernel is

$$\ker(c) = C_H(G)$$

So under our hypotheses, $Aut(X)$ is faithfully embedded in $Aut(G)$ and G is the unique minimal normal subgroup of $Aut(X)$. The image of G under this map is the group of *inner automorphisms* of G and is a normal subgroup of $Aut(G)$. We can use the object X to define G, prove the existence of G, and to study the structure of G.

Let us now return to the list of groups appearing in the Classification. The groups of prime order are the abelian simple groups. These groups have little structure or complexity, so we will ignore them. However they cause the biggest difficulties visa via the Extension Problem.

Let X be a set of order n. The group $Aut(X)$ is the *symmetric group* S_n of degree n. For $n > 4$, the unique minimal normal subgroup of S_n is the *alternating group* A_n which consist of all even permutations on X and is simple of index 2 in S_n. The set X is of course highly symmetric, so this representation is an ideal tool for studying the alternating group A_n.

The groups of Lie type are the analogues of the simple Lie groups. These groups have many useful representations, but I will concentrate on one class of representations. Recall a *Lie algebra* over a field F is a vector space X over F together with a bilinear product on X which satisfies a certain identity called the Jacobi identity.

Example (5) Let V be a n-dimensional vector space over F, $X = End_F(V)$, and define the Lie product of $x, y \in X$ by $[xy] = xy - yx$, where xy is the composition of x and y. Then X is a Lie algebra over F denoted by $gl_n(F)$.

When F is of characteristic 0, each nilpotent element in X can be exponentiated to obtain an automorphism of X. In our example the group generated by all such automorphisms is essentially the projective special linear group $PSL_n(F)$. When X is a simple Lie algebra over $\mathbf{C}$ this group is a simple Lie group.

In the late nineteenth century, Killing essentially classified the simple Lie algebras over $\mathbf{C}$ and hence also the simple complex Lie groups. In his thesis Cartan produced a much simpler treatment which is the first rigorous proof of this classification. Since then the proof has been simplified even further. It is interesting to compare the classification of the complex simple Lie algebras to the classification of the finite simple groups; the latter is far more complicated and much less elegant than the former. I will return to this comparison later, for the moment content to pose:

Question 4. The classification of the simple complex Lie algebras is simple and elegant; why is the proof of the classification of the finite simple groups so long and difficult?

In 1955 in his Tohoku paper [3], Chevalley showed that each simple complex Lie algebra X has a *Chevalley basis* B with the property that the product of any two members of B is in the $\mathbf{Z}$-linear span of B. Thus the resulting lattice can be tensored with any field F to obtain a Lie algebra X_F over F and then suitable nilpotent elements in this algebra can be exponentiated to obtain a group $X(F)$ of Lie algebra automorphisms of X_F called the *Chevalley group* of type X over F.

Example (6) When $X = gl_n(\mathbf{C})$, $X(F) \cong PSL_n(F)$ is the n-dimensional projective special linear group over F; ie. essentially the general linear group.

There are also *twisted Chevalley groups* obtained as fixed points of suitable automorphisms of the ordinary Chevalley groups. The *groups of Lie type* are the ordinary and twisted Chevalley groups. They can be effectively studied from the representations of the Lie algebra. The finite groups of Lie type are the groups of Lie type over finite fields.

There are other representations of the groups of Lie type which are superior for many purposes. For example the classical groups are often better studied from the point of view of their representations on spaces with bilinear or sesquilinear forms. The classical groups are the general linear groups, unitary groups, symplectic groups, and orthogonal groups.

Example (7) The representation of $GL_n(F)$ on $gl_n(F)$ is the adjoint representation of degree n^2 but its natural representation is of degree n on its defining vector space, and this object has much more symmetry.

Still another point of view is to consider the algebraic closure $\bar{F}$ of F. The Chevalley groups $X(\bar{F})$ are the simple algebraic groups over $\bar{F}$; ie. these groups also have the structure of an affine algebraic variety over $\bar{F}$. Then $X(F)$ can be viewed as a form of its algebraic group over F.

Finally we come to the sporadic groups. Some of the sporadic groups have nice representations which can be used to define and effectively study the group, but others do not. Moreover, unlike the alternating groups and the groups of Lie type, there is no naturally defined class of objects defining the sporadic groups. Hence the terminology.

I will briefly consider one of the sporadics as an example: the largest sporadic, usually known as the Monster. The Monster is the group of automorphisms of a certain vertex operator algebra. A *vertex operator algebra* (VOA) is an infinite dimensional graded Lie algebra X together with a huge family of operators on X satisfying a complicated family of identities. VOAs provide an algebraic formalization of string theory and are studied by both mathematicians and physicists. The most interesting VOAs are *holomorphic*; that is there is a modular function associated to the VOA with various properties. The modular function for the Monster VOA is the elliptic modular function j. The Monster VOA was discovered because various unexplained connections were observed between the Monster and certain modular functions. While the Monster VOA is a very interesting object, so far it has not been of much use for studying the Monster and is not even used in the simplest existence proof for the group.

Structure, Complexity, and the proof of the Classification.

I would now like to make an observation about the structure and complexity of finite groups which I believe helps explain why the Classification is on the one hand so useful and on the other hand has such a complicated proof. Because of the Extension Problem, the general finite group is a very complex object. As we've seen, most of the simple groups have relatively simple definitions; simple groups are not nearly as complex as many p-groups. On the other hand the general finite group does not possess much structure, while simple groups inherit a great deal of structure from their defining representations. Moreover we can study the simple group effectively using the representation and inherited structure.

The Classification is a tool for passing from the highly complex unstructured universe of the general finite group to the much less complex but highly structured universe of the finite simple group. This explains the great utility of the Classification. If one can reduce a problem to the simple case than at the same time one has avoided a great deal of complexity and made it possible to take of advantage of the structure of simple groups in solving the problem. In the absence of the Classification, the reduction to the simple case would be of little use, since a priori, one would not know that the simple group had any nice representations or structure.

This observation also explains why the classification of the finite simple groups is so much more difficult than the classification of the simple Lie groups. Lie extensions are not so complex, so Lie algebras are not as complex as finite groups. In particular the nondegeneracy of the Killing form of a Lie algebra X over $\mathbf{C}$ gives an effective criterion for deciding when X is semisimple and representations of semisimple algebras are completely reducible, so the Extension Problem for these objects is trivial.

Whenever a problem is solved by a reduction to the simple case and an appeal to the representation theory of the simple group, there is an implicit use of the fact that some complex problems have been avoided via an appeal to the Classification. One must pay a price for avoiding this complexity and that price is reflected in the difficulty in proving the Classification Theorem.

This is not to say that the current proof of the Classification cannot and should not be greatly simplified. It can. But one should expect that there is a lower bound to the size of a proof. In particular I do not believe there will ever be a proof whose length is of the order of magnitude of that of the classification of the simple complex Lie algebras.

Because the proof of the Classification is so long and complicated, various errors and gaps in the proof have surfaced since 1981, when the proof was thought to be complete. However in each case it has been possible to correct the error or close the gap. Usually this process has been relatively easy; the most recent gap involving the so called quasithin groups is the only notable exception. Since the Classification is so useful, it is important to have greater confidence in its proof. Hence the effort to simplify and solidify the proof is of high priority.

Some remarks on the proof of the Classification.

The proof of the Classification is based on local group theory. If H is a subgroup of G the *normalizer* in G of H is the largest subgroup $N_G(H)$ of G in which H is normal. The *local subgroups* of G are the normalizers of the nontrivial p-subgroups of G. By Sylow's Theorem, G has many p-subgroups, so G has a rich local structure. In particular the Classification characterizes simple groups in terms of their local structure. Thus given a finite simple group G one must:

(a) Prove the local structure of G resembles that of some group $\bar{G}$ on the list of the Classification, and

(b) use this fact to show $G \cong \bar{G}$.

Of the two steps, the first seems to be the most difficult.

For various reasons the prime 2 and 2-local subgroups play the largest role in the Classification. An *involution* in G is an element of order 2. If t is an involution in G then the centralizer $C_G(t)$ of t is a 2-local subgroup of G. In his 1954 talk at the Amsterdam International Congress [1], Brauer proposed that the simple groups should be classified in terms of centralizers of involutions. There were at least two reasons for Brauer to propose this approach. First, in the early twentieth century Burnside had conjectured that groups of odd order were solvable and by 1954 there was much evidence for this conjecture. An immediate consequence of the conjecture is that fact that each nonabelian simple group possesses involutions. Second, in [2], Brauer and Fowler had proved:

Brauer-Fowler Theorem. *If H is a group then there are at most a finite number of finite simple groups G possessing an involution t such that $C_G(t) \cong H$.*

Following Brauer, and particularly after the Feit-Thompson proof of Burnside's conjecture in [4], the preferred local subgroups from the point of view of the Classification are the centralizers of involutions. The exception to this principle are simple groups G whose 2-local structure is like that of a group of Lie type over a field of even characteristic. In such groups, involutions are unipotent (ie. exponentials of nilpotents), and centralizers of unipotent elements in a group of Lie type and characteristic p are dominated by a large normal p-subgroup, whose complexity we seek to avoid. Thus in these groups we pass to centralizers of elements of odd prime order, which are semisimple. (ie. diagonalizable over some extension field) Again there is an exception to this rule: if the p-rank of the 2-locals of G is small for all odd primes p, then the odd local structure is not sufficiently rich to support the analysis. In these "small" groups of even characteristic, unipotent methods are used.

The sporadic groups appear in this process because of various group theoretic accidents which make possible a local structure with a mixture of characteristics.

Some current work in finite group theory.

Today there are many active subareas in finite group theory, including:

1. The study of linear representations of finite groups.
2. The study of permutation representations of finite groups.
3. The study of specialized problems about finite groups arising in other areas of mathematics; solutions to such problems are used to solve the original problem, resulting in cross disciplinary programs.
4. Efforts to write down in one place a readable proof of the Classification and hopefully to simplify the proof.

Typically a problem in (3) will be about linear groups or permutation groups and is solved by first reducing to a problem about groups that are almost simple, and second by an appeal to knowledge of irreducible linear representations or primitive permutation representations of the simple groups. For example problems from number theory or about coverings of algebraic curves can be translated via Galois theory into special problems about finite permutation groups, whose solution gives a solution to the original problem.

Since the focus of this article is the Classification, I will concentrate on the fourth area. Further I will focus on the use of unipotent methods in the small groups of even characteristic. Several years ago it was realized that there was a gap in the proof of the Classification at exactly this point. For the last four years Steve Smith and I have been working to close that gap. We have a detailed draft of a treatment of this case and are in the process of writing down a final version of the proof.

To be precise, given a prime p define a finite group G to be of *characteristic p-type* if $C_H(O_p(H)) \leq O_p(H)$ for each p-local H of G, where $O_p(H)$ is the largest normal p-subgroup of H. We say G is of *even characteristic* if $C_H(O_2(H)) \leq O_2(H)$ for each 2-local H containing a Sylow 2-subgroup of G. Finally G is *quasithin* if the p-rank of H is at most 2 for each 2-local H and each odd prime p; ie. there is no $\mathbf{Z}/(p) \times \mathbf{Z}/(p) \times \mathbf{Z}/(p)$ subgroup of H. The simple quasithin groups of even characteristic are the "small" groups of even characteristic. Smith and I have achieved a classification of all simple quasithin groups of even characteristic using unipotent methods.

Recently U. Meierfrankenfeld, B. Stellmacher, and G. Stroth have begun a program to determine all finite simple groups of characteristic p-type for each prime p, possibly under suitable connectivity assumptions. Again their work is based on unipotent methods. This is an exciting program; if they are successful, even only when $p = 2$, the work could supply an alternate proof for at least part of the Classification.

References

[1] *R. Brauer:* On the structure of groups of finite order, Proc. Int. Cong. of Math., vol 1, 1954, 209–217.
[2] *R. Brauer and K. Fowler:* Groups of even order, Ann. Math., vol 62, 1955, 565–583.
[3] *C. Chevalley:*, Sur certains groupes simples, Tohoku Math. J., vol 7, 1955, 14–66.
[4] *W. Feit and J. Thompson:* Solvability of odd order, Pacific J. Math., vol 11, 1963, 755–1029

Michael Aschbacher
California Institute of Technology
Pasadena, California 91125
USA
asch@its.caltech.edu

(*Eingegangen 7. 12. 99*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
102 (2000) 102–148
Mathematics Subject Classification: 35C05, 35Q51, 35Q53, 47D50, 47N20
Schlüsselbegriffe: Spuren und Determinanten auf quasi-Banachidealen, Operatorgleichungen, explizite Lösungsformeln, asymptotische Formen von Negatonen, abzählbare Superposition von Solitonen, C_0-Halbgruppen, Inverse Streumethode.

Ein direkter Ansatz zur Untersuchung von Solitonengleichungen

B. Carl und C. Schiebold, Jena

1 Einleitung

Weil die Solitonentheorie eine der mathematischen Disziplinen ist, die immer in besonders engem Zusammenhang mit der physikalischen Anwendung stand, genießt die Frage nach der expliziten Angabe von Lösungsklassen weit höheres Interesse als es in vielen anderen Disziplinen der modernen Mathematik der Fall ist. Es gehört zu den erstaunlichen und verwirrenden Eigenschaften der Solitonentheorie, wie viele verschiedene Bereiche der Mathematik – Spektraltheorie, Algebraische Geometrie und Differentialgeometrie, um nur einige wenige zu nennen – zu diesem Zweck erfolgreich herangezogen werden konnten.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir einen funktionalanalytischen Zugang zur Konstruktion von Lösungen vorstellen, der in den letzten sechs Jahren in unserer Arbeitsgruppe in Jena verfolgt worden ist. Wir werden versuchen, unsere Arbeit in das Umfeld der aktuellen Forschung einzuordnen, können aber sicherlich keine Einführung in funktionalanalytische Methoden in der Solitonentheorie im allgemeinen geben.

Im folgenden erklären wir den Aufbau des Artikels.

Zunächst führen wir in Abschnitt 2 die grundlegende Konstruktion von Lösungsformeln am Beispiel der Korteweg-de Vries-Gleichung ausführlich durch und sichten dabei die notwendigen Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis. Weiterhin diskutieren wir Zusammenhänge zu den richtungsweisenden Vorleistungen von Marchenko und der bilinearen Methode von Hirota. Am Ende des Abschnitts geben wir in tabellarischer Form einen Überblick über die Ergebnisse für andere prominente Solitonengleichungen (etwa für die Sinus-Gordon-Gleichung, die Nichtlineare Schrödinger-Gleichung und das Toda-Gitter).

In Abschnitt 3 besprechen wir zwei wesentliche Anwendungen. Als erstes erhalten wir durch Einsetzen von (endlich-dimensionalen) Matrizen in unsere Lösungsformel die sogenannten Negatonen, eine Lösungsklasse, die von Matveev entdeckt und in Spezialfällen qualitativ beschrieben wurde. Der Erfolg unseres Ansatzes besteht nun darin, das asymptotische Verhalten von Negatonen durch die algebraischen Eigenschaften der zugrundeliegenden Matrix vollständig bestimmen und mithin von Matveev ausgesprochene Erwartungen bestätigen zu können. Als zweites behandeln wir Lösungen, die sich aus Diagonaloperatoren ergeben. Dies führt zur Verallgemeinerung tiefliegender Ergebnisse von Gesztesy et al. über die „abzählbare nichtlineare Superposition solitärer Wellen".

Abschnitt 4 beinhaltet zwei ergänzende Aspekte. Wir erklären, wie man durch den Einsatz von C_0-Halbgruppen unbeschränkte Operatoren in die Theorie einbezieht, was von dem ersten Autor und Huang zu einer Verfeinerung der Ergebnisse über Diagonaloperatoren genutzt wurde. Als Abschluß referieren wir die Ergebnisse der Dissertation von Blohm, wo der Zusammenhang mit der Inversen Streutheorie hergestellt wird.

Danksagung

Als erstes gilt unser Dank Herrn Prof. H. Triebel für die Anregung, die Ergebnisse unserer Arbeitsgruppe in dieser Form zugänglich zu machen. Außerdem wollen wir Herrn Prof. B. Fuchssteiner für wertvolle Hinweise und eine engagierte Einführung in seine eigenen Methoden danken. Weiterhin haben uns durch freundliche Unterstützung und Auskunft Herr Prof. W. Jäger, Herr Prof. G. Neugebauer und PD R. Meinel sehr geholfen.

Beide Autoren sind der Deutschen Forschungsgemeinschaft für ihre großzügige finanzielle Unterstützung verpflichtet, im Rahmen deren Forschungsprojekt „Methoden der Geometrischen Analysis und der Funktionalanalysis bei der Behandlung von nichtlinearen Gleichungen der Solitonentheorie" die vorliegende Arbeit entstanden ist.

2 Das zugrundeliegende Modell

2.1 Diskussion

Das grundlegende Modell, nach dem wir bei der Untersuchung von Solitonengleichungen vorgehen, läßt sich wie folgt beschreiben:

Man übersetze eine skalare Gleichung und eine spezielle Lösung simultan zu einer Operatorgleichung und einer entsprechenden operatorwertigen Lösung und versuche dann durch Anwendung eines geeigneten Funktionals skalare Lösungen, die nun von einem Operator abhängen, zurückzuerhalten.

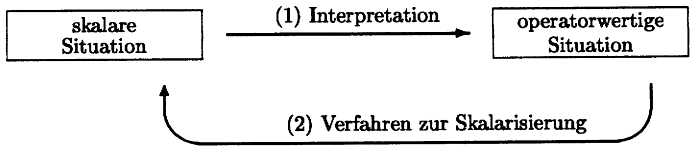
Die Idee zu dieser Vorgehensweise stammt ursprünglich von Marchenko, der sie in seinem richtungsweisenden Buch [30] im Rahmen der Operatoralgebra

$$C^\infty(\mathcal{L}(H)) = \{T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{L}(H) \mid T \text{ beliebig oft differenzierbar}\},$$

$\mathcal{L}(H)$ die beschränkten linearen Operatoren auf dem Hilbertraum H, verfolgt.

Im Unterschied zu seinem Ansatz verwenden wir das Konzept der Operatorenideale wie von Pietsch in [45] eingeführt. Konkret heißt das, daß wir statt Operatoren auf Hilberträumen auch die Banachraumtheorie einsetzen können und daß uns bei den Anwendungen starke Faktorisierungsresultate zur Verfügung stehen, die dadurch ermöglicht werden, daß man es gerade nicht mehr mit Operatoren zu tun hat, für die Ausgangs – und Zielraum übereinstimmt.

Wie im folgenden Diagramm angedeutet, muß man sich bei der Durchführung dieses Modells mit zwei verschiedenartigen Problemen auseinandersetzen.



Etwas ausführlicher handelt es sich um folgende Aufgaben:

(1) Formulierung von Operator-Versionen zu Gleichungen
Tatsächlich besteht eines der Hauptprobleme bei der Durchführung der Grundstrategie in der Formulierung von Operator-Versionen zu Gleichungen. Im allgemeinen stößt man dabei auf Situationen, die sich nicht automatisch operatorwertig behandeln lassen.

(2) Bereitstellung von Techniken, um Operatorlösungen in skalare Lösungen „zurückzuverwandeln"
Ein naheliegender Ansatz besteht darin, auf die im ersten Schritt hergeleitete operatorwertige Lösungsformel ein geeignetes Funktional τ anzuwenden. Damit die sich ergebenden skalaren Funktionen wirklich Lösungen der skalarwertigen Ausgangsgleichung sind, muß das Funktional gewisse Multiplikativitätseigenschaften erfüllen.

Diese Forderung bereitet Schwierigkeiten. Schließlich gibt es schon auf dem kleinsten Operatorenideal $\mathcal{F}$ der finiten Operatoren kein nicht-verschwindendes lineares Funktional τ mit der Eigenschaft

$$\tau(QR) = \tau(Q)\tau(R) \qquad \forall\, Q, R \in \mathcal{F}(E),$$

E ein Banachraum. Wir werden das Problem dadurch umgehen, daß wir für die bei der Rechnung relevanten Operatoren voraussetzen, daß sie eindimensional sind. In dieser Situation belegt eine Diskussion in [3], daß als Funktional gar nichts anderes als die Spur in Frage kommt:

Satz 2.1 *([3] Proposition III A 2) Sei E ein Banachraum und $\tau : \mathcal{F}(E) \to \mathbb{C}$ ein nicht-verschwindendes lineares Funktional mit der Multiplikativitätseigenschaft*

$$\tau\Big((a \otimes c)^2\Big) = \Big(\tau(a \otimes c)\Big)^2$$

für eindimensionale Operatoren $a \otimes c$. Dann handelt es sich bei τ notwendigerweise um die Spur auf den finiten Operatoren $\mathcal{F}(E)$, $\tau = \mathrm{tr}$.

2.2 Exemplarische Durchführung für die Korteweg-de Vries-Gleichung

Als nächstes werden wir die im vorigen Absatz diskutierte Methode exemplarisch anhand der Korteweg-de Vries-Gleichung, kurz KdV,

(1) $$u_t = u_{xxx} + 6uu_x$$

durchführen.

Erstmals wurde diese Methode in [3] an einer integrierten Form der KdV durchgeführt, hier folgen wir [13] in der Darstellung der Resultate.

(1) Formulierung der operatorwertigen KdV

In unseren bisherigen Arbeiten haben wir als Ausgangspunkt immer eine vergleichsweise einfache Lösung der vorliegenden Gleichung verwendet, und zwar das 1-Soliton. Seine operatorwertige Interpretation für die KdV gibt der folgende Satz.

Satz 2.2 *(vgl. [3] Theorem III B 2 (i), [13] Proposition 5.1) Sei E ein Banachraum, $A \in \mathcal{L}(E)$. Für $B \in \mathcal{A}(E)$, $\mathcal{A}$ ein quasi-Banachideal, definiere $L(x,t) := \exp(Ax + A^3 t)B$. Dann ist die Operatorenfamilie*

$$U := \Big((1+L)^{-1}(AL + LA)\Big)_x \in \mathcal{A}(E),$$

vorausgesetzt daß $(1+L)^{-1}$ existiert, eine Lösung der Operator-KdV in $\mathcal{A}$,

$$U_t = U_{xxx} + 3(UU_x + U_x U). \tag{2}$$

Bei der Übersetzung der KdV handelt es sich um einen vergleichsweise naheliegenden Ansatz. Bereits bei ihrer Diskretisierung, dem Toda-Gitter, stößt man auf Schwierigkeiten. Einige Beispiele zu solchen Situationen, in denen keine automatische Übersetzung mehr vorliegt, sind in Abschnitt 2.8 angegeben.

Bemerkung 2.3 *Ein Ansatz ganz anderer Natur, der aber ebenfalls wesentlich auf funktionalanalytischen Methoden beruht, wurde von Fuchssteiner entwickelt. Der erste Schritt besteht darin, ein nichtlineares integrables System als eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form*

$$u_t = K[u]$$

aufzufassen, wobei u ein Punkt in einer unendlich-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ortsabhängiger Funktionen und K ein Vektorfeld auf M ist. Die Lösungen der Evolutionsgleichung entsprechen dann denjenigen zeitabhängigen Kurven $u(t)$ in M, die der Gleichung genügen. Auf dieser Ebene erweist es sich als möglich, Methoden der symplektischen Geometrie anzuwenden, um Integrale der Bewegung (Erhaltungsgrößen), Rekursionsoperatoren, Hierarchien und integrable Deformationen von integrablen Systemen zu konstruieren (vgl. etwa für die KdV in [18], [20]*).*

In engerem Zusammenhang mit unseren Ergebnissen scheint eine quantisierte Fassung der KdV zu stehen, die Fuchssteiner in dem gemeinsamen Artikel [19] mit Chowdhury angegeben hat. Die Autoren leiten eine Gleichung her, die formal genau dieselbe Gestalt hat wie unsere Operatorgleichung (2). Für diese geben sie in einem abstrakten Kalkül eine Bihamilton'sche Form an, die dann dazu dient, für eine entlang der Regeln der Quantisierung abgeleitete Quanten-KdV unendlich viele Erhaltungsgrößen zu konstruieren, also Integrabilität im klassischen Sinne zu zeigen.

Schließlich wird eine kunstvoll eingerichtete Algebra von Distributionen betrachtet, welche das oben beschriebene Modell vollständig realisiert.

Bemerkung 2.4 *In der Literatur tauchen nicht-abelsche Verallgemeinerungen von Solitonengleichungen häufig auf, meist aber in einem völlig anderem Zusammenhang: Man betrachtet Gleichungen für Matrizen einer festen Dimension, die als Glei-*

chungssystem aufgefaßt werden, und versucht dann die Techniken der Inversen Streutheorie auf das betrachtete System zu übertragen. Zielsetzung dieser Verallgemeinerung der Inversen Streutheorie ist es, möglichst breite Klassen von Gleichungen in den Formalismus einzubeziehen. Erste Ergebnisse dieses Typs gehen auf Wadati und Kamijo [57] zurück.

(2) Herleitung einer skalaren Lösungsformel

Folgende allgemeine Aussage bildet die Grundlage unserer Skalarisierungstechnik.

Satz 2.5. *([3] Proposition III B 1, [13] Proposition 5.2) Sei $\mathcal{A}$ ein quasi-Banachideal mit einer stetigen Spur τ. Ist $U = U(x,t)$ eine Lösung der Operator-KdV (2) in $\mathcal{A}$, die zusätzlich der Bedingung $UP = U$, $U_x P = U_x$ für eine Projektion P mit* $\operatorname{rank}(P) = 1$ *genügt, so ist*

$$u = \tau(U)$$

eine Lösung der skalaren KdV (1).

Als nächstes wenden wir Satz 2.5 auf unsere Operatorlösung von Satz 2.2 an. Außerdem können wir direkt eine Umformulierung der sich so ergebenden Lösungsformel angeben, die sich besonders für explizite Rechnungen eignet, da sie das aufwendige Auswerten des inversen Operators $(1+L)^{-1}$ überflüssig macht.

Hauptsatz 2.6 *(vgl. [3] Theorem III B 2 (ii), [13] Theorem 5.4) Sei $\mathcal{A}$ ein quasi-Banachideal mit einer stetigen Determinante δ und E ein Banachraum. Definiere wieder*

$$L(x,t) := \exp(Ax + A^3 t)B \text{ mit } A \in \mathcal{L}(E) \text{ und } B \in \mathcal{A}(E),$$

wobei A und B so gewählt seien, daß $\operatorname{rank}(AB + BA) = 1$ *ist.*

Dann ist eine Lösung der KdV (1) gegeben durch

$$u = \operatorname{tr}\Big(\big((1+L)^{-1}(AL + LA) \big)_x \Big) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \delta(1+L), \tag{3}$$

vorausgesetzt $\delta(1+L) \neq 0$.

2.3 Exkurs zu Spuren auf Operatorenidealen

Das wichtigste Hilfsmittel bei der Durchführung der Skalarisierung ist die Theorie der Spuren und Determinanten auf Operatorenidealen, über die man sich etwa in Kapitel 4 von Pietsch's Buch [47] informieren kann. Außerdem möchten wir auf die Monographien von Defant/Floret [15], König [29], Pietsch [45] und Simon [55] verweisen, die in diesem Zusammenhang von grundlegender Bedeutung sind.

Ausgehend von der wohlbekannten Tatsache, daß es auf dem kleinsten Operatorenideal $\mathcal{F}$ der finiten Operatoren eine eindeutige Spur tr gibt, die sich auf zwei unterschiedliche Weisen ausdrücken läßt,

a) $\operatorname{tr}(T) = \sum_{i=1}^n \langle y_i, a_i \rangle$ für eine beliebige (finite) Darstellung $T = \sum_{i=1}^n a_i \otimes y_i$,

b) $\operatorname{tr}(T) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(T)$, wobei $\lambda_i(T)$ die Eigenwerte von T bezeichnet (tr ist eine spektrale Spur), verfolgt man die beiden dadurch motivierten Ansätze zur Erweiterung der Spur auf (größere) quasi-Banachideale.

Die in **b)** angedeutete Erweiterung betrifft Operatoren $T \in \mathcal{L}(E)$, deren Eigenwerte absolut summierbar sind, $\sum_i \mid \lambda_i(T) \mid < \infty$. Um von einer Eigenwertfolge $(\lambda_i(T))_i$ sprechen zu können, setzen wir stets voraus, daß T ein Riesz-Operator ist.

Dieser Ansatz führt uns zu Idealen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}_1^{eig}$ vom sogenannten Eigenwerttyp 1, wobei wir mit $\mathcal{S}_1^{eig} = \bigcup_{E,F} \mathcal{S}_1^{eig}(E,F)$ die Klasse bezeichnen, die sich aus den Mengen

$$\mathcal{S}_1^{eig}(E,F) = \left\{ T \in \mathcal{L}(E,F) \;\middle|\; \begin{array}{c} ST \text{ Riesz-Operator mit summierenden} \\ \text{Eigenwerten } \forall S \in \mathcal{L}(F,E) \end{array} \right\}$$

zusammensetzt. Nun ist $\mathcal{S}_1^{eig}$ allerdings selbst kein Operatorenideal, es gibt nämlich einen Banachraum E, für den $\mathcal{S}_1^{eig}(E,E)$ keinen Vektorraum bildet. Im Gegensatz dazu sei aber darauf hingewiesen, daß $\mathcal{S}_1^{eig}(H,H)$, H der unendlich-dimensionale separable Hilbertraum, zum Operatorenideal wird, der bekannten Schattenklasse vom Typ ℓ_1 (vergleiche Pietsch [46] zu diesen Aussagen).

Das folgende, tiefliegende Ergebnis von White klärt die Existenz der spektralen Spur für Ideale $\mathcal{A}$ vom Eigenwerttyp 1.

Satz 2.7 *([58]) Sei $\mathcal{A}$ ein quasi-Banachideal mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}_1^{eig}$. Für beliebige Banachräume E und jeden Operator $T \in \mathcal{A}(E)$ definieren wir*

$$\operatorname{tr}_\lambda(T) := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(T).$$

Dann ist die Funktion $\operatorname{tr}_\lambda$ eine stetige und spektrale Spur auf $\mathcal{A}$.

Im allgemeinen ist die spektrale Spur $\operatorname{tr}_\lambda$ nicht eindeutig wie eine Beobachtung von Kalton [28] zeigt, der die Existenz eines quasi-Banachideals $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}_1^{eig}$ mit verschiedenen stetigen Spuren nachweisen konnte.

Schließlich möchten wir noch anmerken, daß es nach Pietsch [47] kein größtes solches quasi-Banachideal $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}_1^{eig}$ gibt.

Die Darstellung in **a)** motiviert eine Erweiterung der Spur auf die Klasse $\mathcal{N}_r = \cup_{E,F}\mathcal{N}_r(E,F)$ der sogenannten r-nuklearen Operatoren im Sinne von Grothendieck $(0 < r \leq 1)$. Dabei gilt für einen Operator $T \in \mathcal{L}(E,F)$

$$T \in \mathcal{N}_r(E,F) \iff \exists\, a_i \in E', y_i \in F : T = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes y_i$$

$$\text{mit} \sum_{i=1}^{\infty} \| a_i \|^r \cdot \| y_i \|^r < \infty.$$

Ausgestattet mit der r-Norm

$$\| T \mid \mathcal{N}_r \| := \inf \left\{ \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \| a_i \|^r \cdot \| y_i \|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \right\} \qquad \text{für } T \in \mathcal{N}_r(E,F),$$

wobei das Infimum über alle möglichen Darstellungen von T läuft, wird $\mathcal{N}_r$ zum r-Banachideal.

$\mathcal{N}_r$ ist das kleinste r-Banachideal.

Satz 2.8. *Auf dem Banachideal $\mathcal{N}$ eingeschränkt auf die Klasse aller Banachräume mit metrischer Approximationseigenschaft wird durch*

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{N}}(T) := \sum_{i=1}^{\infty} \langle y_i, a_i \rangle \quad \textit{für } T = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes y_i, \quad (a_i \in E', y_i \in E)$$

eine eindeutige stetige Spur definiert.

Die hier entscheidende Frage war die nach der Unabhängigkeit von $\mathrm{tr}_{\mathcal{N}}$ von der Darstellung. Für beliebige Banachräume ist die Antwort negativ, ein Problem, das lange offen blieb und schließlich von Enflo [16] gelöst werden konnte, der einen Banachraum ohne metrische Approximationseigenschaft konstruierte.

Ebenfalls von Enflo [16] wurde die Existenz eines Operators $S \in \mathcal{N}(\ell_1)$ mit $\mathrm{tr}_{\mathcal{N}}(S) = 1$ und $S^2 = 0$ gezeigt, woraus sofort folgt, daß die Spur $\mathrm{tr}_{\mathcal{N}}$ nicht spektral ist.

Andererseits ergibt sich aus der Tatsache $\mathcal{N}_r \subset \mathcal{S}_1^{eig}$ für $0 < r \leq \frac{2}{3}$, daß auf diesen kleineren r-Banachidealen $\mathcal{N}_r$ $(0 < r \leq \frac{2}{3})$ sogar die spektrale Spur tr_λ existiert. Außerdem kann man in dieser Situation auch zeigen, daß durch

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{N}_r}(T) := \sum_{i=1}^{\infty} \langle y_i, a_i \rangle \quad \text{für } T = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes y_i \in \mathcal{N}_r(E)$$

eine Spur auf $\mathcal{N}_r(E)$, und zwar über der Klasse aller Banachräume E, definiert wird. Diese Spur ist eindeutig und stimmt daher mit der Spektralspur überein.

Der Zusammenhang zwischen Spuren und Determinanten wird durch den „Satz von Spuren und Determinanten“ beschrieben (Pietsch [47], Grobler et al. [23]).

Satz 2.9 *Es gibt eine eindeutige Beziehung zwischen stetigen Spuren und stetigen Determinanten auf jedem quasi-Banachideal.*

Satz 2.10 *Sei δ eine stetige Determinante auf dem quasi-Banachideal $\mathcal{A}$. Ist die $\mathcal{A}(E)$-wertige Funktion $T(z)$ differenzierbar im Punkt z_0 bezüglich der quasi-Norm $\| \cdot \mid \mathcal{A} \|$, so ist auch $\delta(I + T(z))$ differenzierbar in z_0, und es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big(\delta(I + T(z_0))\Big) = \tau\Big((I + T(z_0))^{-1} \frac{\partial}{\partial z} T(z_0)\Big)\, \delta\Big(I + T(z_0)\Big),$$

falls $I + T(z_0)$ invertierbar ist.

Dabei ist τ die Spur, die durch $\tau(S) := \lim\limits_{z \to 0} \frac{1}{z}\Big(\delta(I + zS) - 1\Big)$ für $S \in \mathcal{A}(E)$ gegeben ist.

Eine detailliertere Einführung in das Material, das bei der Skalarisierung eine Rolle spielt, findet man auch in [13].

2.4 Die Operatorgleichung $A_2 X + X A_1$

Wir wollen nun genauer auf die Forderung aus Hauptsatz 2.6 eingehen, welche wir hier – in allgemeinerer Form, um auch die Aussagen für die in Abschnitt 2.8 diskutierten Solitonengleichungen bereitzustellen – formulieren wollen:

Seien $A_j \in \mathcal{L}(E_j)$, E_j Banachräume, für $j = 1, 2$ gegeben. Unter welchen Voraussetzungen an A_j existiert ein Operator X, der der Bedingung $\mathrm{rank}(A_2 X + X A_1) = 1$ genügt, und welche Eigenschaften lassen sich für X nachweisen.

Dazu betrachten wir den Operator $\Phi_{A_1,A_2} : \mathcal{A}(E_1, E_2) \longrightarrow \mathcal{A}(E_1, E_2)$, $\mathcal{A}$ ein quasi-Banachideal, der durch

(4) $\quad \Phi_{A_1,A_2}(X) := A_2 X + X A_1$

gegeben ist, und interessieren uns für dessen Invertierbarkeit, oder mit anderen Worten für sein Spektrum, $\operatorname{spec}(\Phi_{A_1,A_2}) := \{\lambda \in \mathbb{C} | (\lambda I - \Phi_{A_1,A_2})$ ist nicht invertierbar in $\mathcal{L}(\mathcal{A}(E_1, E_2))\}$.

In grundlegenden Arbeiten haben Eschmeier [17] und Dash/Schechter [14] das Spektrum von elementaren Operatoren Φ,

(5) $\quad \Phi = p(R_{A_1}, L_{A_2})$,

wobei p ein Polynom ist und R_{A_1} die Multiplikation mit $A_1 \in \mathcal{L}(E_1)$ von rechts, L_{A_2} die mit $A_2 \in \mathcal{L}(E_2)$ von links bezeichnet, bestimmt. Wir zitieren hier ein Ergebnis von Aden, das ihre Aussage von Banachidealen auf p-Banachideale ($0 < p \leq 1$) verallgemeinert.

Satz 2.11 *([1], [2] Theorem III.2.7) Sei $\mathcal{A}$ ein p-Banachideal ($0 < p \leq 1$). Für das Spektrum des in (5) definierten Operators Φ gilt*

(6) $\quad \operatorname{spec}(\Phi) = p(\operatorname{spec}(A_1), \operatorname{spec}(A_2))$

unabhängig vom zugrundeliegenden p-Banachideal $\mathcal{A}$.

Folgerung 2.12 *Unter der Voraussetzung $0 \notin \operatorname{spec}(A_1) + \operatorname{spec}(A_2)$ gibt es zu jedem beliebigen quasi-Banachideal $\mathcal{A}$ und jedem Operator $C \in \mathcal{A}(E_1, E_2)$ stets eine eindeutige Lösung X der Gleichung $A_2 X + X A_1 = C$ in $\mathcal{A}(E_1, E_2)$, nämlich*

$$X := \Phi_{A_1,A_2}^{-1}(C) \in \mathcal{A}(E_1, E_2).$$

Einen systematischen Zugang zur Lösung der Operatorgleichung $A_2 X + X A_1$ ohne die Kenntnis von $\operatorname{spec}(A_j)$ ($j = 1, 2$) bietet das folgende Lemma.

Lemma 2.13 *Sei $\mathcal{A}$ ein Banachideal und $A_j \in \mathcal{L}(E_j)$, E_j Banachräume ($j = 1, 2$). Gilt*

$$\int_0^\infty \| e^{-A_2 s} C e^{-A_1 s} \mid \mathcal{A} \| \, ds < \infty \quad \text{für} \quad C \in \mathcal{A}(E_1, E_2),$$

so ist der durch das uneigentliche Integral $X := \int_0^\infty e^{-A_2 s} C e^{-A_1 s} \, ds \in \mathcal{A}(E_1, E_2)$ definierte Operator X Lösung der Gleichung $A_2 X + X A_1 = C$.

Bemerkung 2.14 *Die Aussage des Lemmas läßt sich nicht auf quasi-Banachideale $\mathcal{A}$ ausdehnen wie ein Gegenbeispiel von T. Kühn (ausgeführt in* [2] *Abschnitt IV.2) zeigt.*

Das folgende Kriterium ist grundlegend für die Erweiterung unserer Methode auch auf unbeschränkte Operatoren in [12], vergleiche Abschnitt 4.1.

Satz 2.15 *Seien A_j Erzeuger von C_0-Halbgruppen $(T_j(x))_{x \geq 0}$ auf Banachräumen E_j, $j = 1, 2$, mit $0 \notin \overline{\operatorname{spec}(A_1) + \operatorname{spec}(A_2)}$. Durch*

$$\mathcal{T}_{1,2}(x) X = \Big(T_2(x) X T_1(x) \Big)_{x \geq 0} \quad \text{für} \quad X \in \mathcal{K}(E_1, E_2)$$

wird auf den kompakten Operatoren $\mathcal{K}(E_1, E_2)$ ebenfalls eine C_0-Halbgruppe definiert, deren Erzeuger mit Φ_{A_1,A_2} bezeichnet wird, und der formal durch $\Phi_{A_1,A_2}X = A_2X + XA_1$ gegeben ist (vergleiche auch Abschnitt 4.1). Unter jeder der folgenden Bedingungen ist Φ_{A_1,A_2} invertierbar:

(i) ([44] Theorem 3) $\sup_{x\geq 0} \| \int_0^x \mathcal{T}_{1,2}(y)dy\| < \infty.$

(ii) ([4] Theorem 4.1) A_j ist Erzeuger einer „schließlich normstetigen Halbgruppe", das heißt, es gibt ein $x_0 > 0$, so daß $\lim_{x\to x_0} \|T_j(x) - T_j(x_0)\| = 0$ ist $(j = 1, 2)$.

(iii) ([27]) $A_j = A$ für $j = 1, 2$ und die Halbgruppe $\big(T_j(x)\big)_{x\geq 0} = \big(T(x)\big)_{x\geq 0}$ läßt sich zu einer C_0-Gruppe $\big(T(x)\big)_{x\in\mathbb{R}}$ ausdehnen, welche die folgende quasi-analytische Wachstumsbedingung erfüllt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(1 + \|T(x)\|)}{1 + x^2} dx < \infty.$$

Die Einschränkung auf kompakte Operatoren $\mathcal{K}(E_1, E_2)$ läßt sich auch durch die Einschränkung auf nukleare Operatoren $\mathcal{N}(E_1, E_2)$ ersetzen.

Für eine umfangreiche Diskussion der Operatorgleichung $A_2X + XA_1$ sei außerdem auf den Übersichtsartikel von Bhatia und Rosenthal [7] verwiesen.

2.5 Marchenko's Methode

In diesem Abschnitt möchten wir die Methode vorstellen, die Marchenko in seiner richtungsweisenden Arbeit [30] verwendet hat, und die Motivation und Ausgangspunkt unserer Untersuchungen war.

Seine grundlegende Idee bestand grob gesprochen darin, nichtlineare Gleichungen zunächst in einem allgemeineren Rahmen zu behandeln und dann auf die konkret interessierende Situation zu projizieren. Etwas präziser wird dies von Marchenko in seiner Einleitung anhand der KdV folgendermaßen formuliert:

Allgemeine Strategie

Gegeben sei eine auf einem Gebiet der (x, t)-Ebene definierte Operatorfunktion $\Gamma(x, t)$, die auf dem ganzen Gebiet invertierbar ist und dort den folgenden Bedingungen genügt

$$(7) \qquad \Gamma_t - 4\Gamma_{xxx} = 0, \qquad \Gamma_{xx} = a^2\Gamma,$$

$$(8) \qquad \Gamma_x(1 - P) = \Gamma N_0(1 - P),$$

wobei a, N_0 konstante Operatoren sind und P eine eindimensionale Projektion ($P^2 = P$) bezeichnet. Dann gilt

a) $U := 2\big(\Gamma^{-1}\Gamma_x\big)_x$ ist eine Operatorlösung der Gleichung $U_t = U_{xxx} + 3(UU_x + U_xU)$.

b) Die Funktion u, die durch $PUP = uP$ gegeben wird, ist eine skalare Lösung der KdV (1).

Bemerkung 2.16 *Zur Herleitung der Operatorgleichung wird lediglich (7) verwendet, (8) dient dazu, daß die Lösungseigenschaft von U bei der Projektion erhalten bleibt.*

Ausführung

Zunächst wählt man eine beliebige Algebra von operatorwertigen Funktionen und sucht in dieser Γ mit (7), (8). Offenbar genügt $\Gamma = e^{ax+4a^3t} + e^{-ax-4a^3t}M$ stets (7), und dann, für $N_0 = a$, auch (8), vorausgesetzt, es ist $(aM + Ma)(1 - P) = 0$. Um die letzte Bedingung zu erfüllen, reicht es, Operatoren M_0, R zu finden, so daß $aM_0 + M_0a = P$ und $[R, a] = 0$ gilt, und $M = RM_0$ zu setzen. Prinzipielle technische Schwierigkeiten bei der Ausführung sind demzufolge a) die Lösung der Gleichung M_0 mit $aM_0 + M_0a = P$ zu vorgegebenen a, P und b) die Gewährleistung der Invertierbarkeit von Γ.

Bemerkung 2.17 *Unsere Vorgehensweise orientiert sich ebenfalls an dieser Strategie, ein wesentlicher Unterschied besteht allerdings bereits im Ansatz: Marchenko verwendet den Begriff der logarithmischen Ableitung $\Gamma^{-1}\Gamma_x$ als Ausgangspunkt seiner Überlegungen, und um die Lösung zu projizieren, muß dann $U = UP + U(1 - P)$ in einen eindimensionalen Term und einen konstanten (konkret $U(1 - P) = N_0$) zerfallen. Im Gegensatz dazu stellen wir eine konkrete Lösung, nämlich das 1-Soliton, in den Vordergrund, die wir als Operatorfunktion interpretieren. In der bei der Interpretation notwendigen Symmetrisierung ist die Projektion sozusagen automatisch eingebaut.*

Der Operator N_0, den Marchenko durch seinen etwas allgemeineren Zugang als zusätzlichen Parameter einführen kann, muß bei jeder konkreten Realisierung passend eingerichtet werden. Man stellt weiter fest, daß er in der Anwendung in [30] kaum eine Rolle spielt, da er entweder (Realisierung **a)***) keine zusätzlichen Parameter beiträgt oder aber (Realisierung* **b)***) mit dem Operator a zusammenfällt.*

Auf der anderen Seite führt unser direkterer Ansatz durch seine übersichtliche Struktur zu deutlich transparenteren Lösungsformeln wie sich bereits im Fall der N-Solitonen, vergleiche nachstehend, zeigt.

Seine Methode formuliert Marchenko zunächst auf rein algebraischer Ebene.

In einem assoziativen Ring K mit Eins 1 betrachtet er die Gleichungen (7), die nun mittels verallgemeinerter Ableitungen aufgestellt werden ($\partial \in \mathcal{L}(K)$ heißt verallgemeinerte Ableitung, falls die Produktregel $\partial(k_1k_2) = (\partial k_1)k_2 + k_1(\partial k_2)$ für $k_1, k_2 \in K$ gilt) und leitet daraus ein Analog der KdV in K her. Jedes idempotente Element $P \in K$ kann dann unter der Annahme (8) als Projektor von K in den Unterring $K_0 = PKP$ verwendet werden.

Für die KdV handelt es sich bei dem Ring K_0, in dem Lösungen gesucht werden, traditionell um $K_0 = C^\infty$.

Marchenko führt zwei Typen von konkreten Realisierungen durch, deren wichtigste Ergebnisse hier referiert werden sollen.

a) Realisierung in Matrixringen

Die einfachste Erweiterung von K_0 ist der Matrixring $K = \mathrm{Mat}_N(K_0)$ der $N \times N$-Matrizen über K_0 mit der üblichen Differentiation $\partial k = (\partial k_{ij})_{i,j=1}^N$ für $k = (k_{ij})_{i,j=1}^N$, wobei K_0 in natürlicher Weise mit dem Unterring PKP,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

identifiziert wird.

Die Projektionsbedingung (8) läßt sich stets mit Wronski'schen Matrizen $W = W(\partial; f_1, \ldots, f_N) := \left(\partial^{N-j} f_i\right)_{i,j=1}^{N}$ lösen, und zwar in der Form $\partial W(1_N - P) = WN_0(1_N - P)$ mit

$$N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

und es gilt $P(W^{-1}\partial W)P = wP$ mit $w = (\det W)^{-1}\partial(\det W)$.

Um daraus konkrete Lösungen zu bestimmen, müssen nun zu vorgegebener Matrix a aus den Gleichungen (7) für W noch die an W beteiligten Funktionen f_j $(j = 1, \ldots, N)$ bestimmt und die Invertierbarkeit von W untersucht werden.

Ausgehend von der Diagonalmatrix

$$a = \begin{pmatrix} \sqrt{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{k_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{k_N} \end{pmatrix} \qquad \text{für } 0 < k_1 < \ldots < k_N$$

ergibt sich als Formel für die N-Solitonen

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\left(\det W(\partial_x; f_1, \ldots, f_N)\right)$$

$$\text{mit } f_j = \frac{1}{2}\left(e^{\vartheta_j} + (-1)^{j-1}e^{-\vartheta_j}\right) \text{ und } \vartheta_j(x,t) = k_j x + 4k_j^3 t + \varphi_j.$$

Die Beschreibung von N-Solitonen durch Wronski'sche Determinanten ergibt sich auch völlig natürlich bei der sukzessiven Konstruktion von Lösungen mit der sogenannten Darboux-Transformation. Eine ausführliche Darstellung dieser Methode wird von Matveev/Salle in [33] gegeben.

Bemerkung 2.18 *In unserem Formalismus finden sich die N-Solitonen wieder, indem man den Operator A speziell als folgende $N \times N$-Matrix in Diagonalgestalt einsetzt:*

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_N \end{pmatrix}.$$

Marchenko konstruiert noch weitere, nicht mehr reguläre Lösungen mit Matrizen a in Jordan'scher Normalform als Startpunkt. Auf eine Beschreibung dieser Lösungen im Rahmen unserer Operator-Methode kommen wir in Abschnitt 3.1 zurück.

Bemerkung 2.19 *Die zusätzliche Flexibilität, die wir bei unserer Vorgehensweise dadurch erzielen, daß wir das Konzept der Operatorenideale verwenden, zeigt sich hier ein erstes Mal konkret darin, daß wir bei der Ausdehnung der Lösungsklasse der N-Solitonen auf Superpositionen von abzählbar vielen Solitonen auf keinerlei Schwierigkeiten stossen, während im Formalismus von Marchenko Ergebnisse dieser Art nicht ohne weiteres ablesbar sind.*

Wir verweisen auf die Diskussion in Abschnitt 3.2, aus der auch klar die bedeutende Rolle der Faktorisierungsresultate, die uns im Rahmen der Banachraumtheorie zu Verfügung stehen, ersichtlich wird.

b) Realisierung in Operatoralgebren

Marchenko betrachtet als Grundring K_0 die Algebra $C^\infty(\mathcal{L}(H_0))$ der abzählbar oft differenzierbaren Funktionen eines Gebietes der (x, t)-Ebene in die beschränkten linearen Operatoren auf H_0, H_0 ein separabler Hilbertraum.

Als Erweiterung K verwendet er die Algebra $C^\infty(\mathcal{L}(H))$, wobei $H = L^2_\mu(\Omega, H_0) = \{f : \Omega \to H_0 \mid ||f(z)||_{H_0} \in L^2_\mu(\Omega)\}$, (Ω, μ) ein meßbarer Raum mit $0 < \mu < \infty$.

Geeignete Projektionen P mit $PH = H_0$, also mit $PC^\infty(\mathcal{L}(H))P = C^\infty(\mathcal{L}(PH)) = C^\infty(\mathcal{L}(H_0))$, ergeben sich durch $P(f(z)) = \int_\Omega p(z)(f(z))d\mu(z)$ zu $p \in L^2_\mu(\Omega, \mathcal{L}(H_0))$ mit $\int_\Omega p(z)d\mu(z) = 1$. Dabei ist das Integral $\int_\Omega f d\mu$ von $f \in L^2_\mu(\Omega, H_0)$ als das Element $h_0 \in H_0$ definiert, welches das Funktional $(\cdot, h_0) = \int_\Omega (\cdot, f(z))_{H_0} d\mu(z)$ erzeugt, und unter dem Integral $\int_\Omega F d\mu$ von $F \in L^2_\mu(\Omega, \mathcal{L}(H_0))$ versteht man den Operator auf H_0, der durch $(\int_\Omega F d\mu)(h_0) := \int_\Omega (F(z)h_0)d\mu(z)$ gegeben wird.

Im Fall der KdV ist $\dim H_0 = 1$ zu setzen, das heißt man identifiziert $H_0 \simeq \mathbb{C}$, $C^\infty(\mathcal{L}(H_0)) \simeq \mathbb{C}$, und das Konzept stimmt mit den üblichen Konventionen in $L^2_\mu(\Omega)$ überein. Die Ausführung der Grundstrategie erweist sich trotzdem als äußerst aufwendig, und wir beschränken uns deshalb darauf, das Ergebnis zu formulieren.

Satz 2.20 *(*[30] *Theorem 3.6.1) Die folgenden Voraussetzungen seien erfüllt:*

1) Der Träger Ω des Maßes μ liege in der Vereinigung von reeller und imaginärer Achse, sein asymmetrischer Anteil $\Omega_1 = \{z | z \in \Omega, -z \notin \Omega\}$ sei in endlich vielen Intervallen $\Delta_k = [\, \mathrm{i}a_k^-, \mathrm{i}a_k^+ \,]$ $(a_k^- < a_k^+)$ der imaginären Achse enthalten, und für die Zerlegung $\Omega_1^+ = \Omega_1 \cap \mathbb{C}^+$, $\Omega_1^- = \Omega_1 \backslash \Omega_1^+$ gelte $\operatorname{dist}(\Omega_1^+, \pi_1(\Omega_1^-)) > 0$ *$(\pi_1(z) = -z)$.*

2) Die nichtnegative Funktion $\omega(z)$ ist ein Muckenhoupt-Gewicht auf der Vereinigung γ von reeller und imaginärer Achse, das heißt

$$\sup_{z' \in \gamma} \sup_{r>0} \left\{ \frac{1}{r} \int_{z \in B(z',r) \cap \gamma} \omega(z)|dz| \cdot \frac{1}{r} \int_{z \in B(z',r) \cap \gamma} \omega(z)^{-1} |dz| \right\} < \infty,$$

$B(z', r) := \{z : |z - z'| < r\}$, und erfüllt $\inf_{z \in \Omega \backslash \Omega_1} (\omega(z)\omega(\overline{z})) > 0$.

3) Das Maß μ stimmt auf $\Omega \backslash \Omega_1$ mit dem linearen Lebesgue Maß ($d\mu(z) = (2\pi)^{-1}|dz|$) überein und genügt auf Ω_1 simultan den Carleson Bedingungen zu $\omega(-z)$ und $\omega(-z)^{-1}$, nämlich

$$\mu([-\mathrm{i}h,\mathrm{i}h]) \leq C\min\left\{\int_{-h}^{h}\omega(-x)dx,\ \int_{-h}^{h}\omega(-x)^{-1}dx\right\},$$

$$\mu([\mathrm{i}(a_k^{\pm}-h),\mathrm{i}(a_k^{\pm}+h)]) \leq C\min\left\{\int_{\mathrm{i}(a_k^{\pm}-h)}^{\mathrm{i}(a_k^{\pm}+h)}\omega(-z)|dz|,\right.$$

$$\left.\int_{\mathrm{i}(a_k^{\pm}-h)}^{\mathrm{i}(a_k^{\pm}+h)}\omega(-z)^{-1}|dz|\right\}.$$

4) Die Operatorfunktionen $p_0(z)$, $r(z)$ und $r(z)^{-1}$, $m(z)$ seien beschränkt und es gelte $m^*(\bar{z}) = m(z)$, außerdem sei nachstehende Ungleichung erfüllt,

$$\sup_{-\infty<z<\infty}\|r^*(-\bar{z})m(z)r(-z)\|_{H_0} + \tfrac{1}{2}\sup_{-\infty<z<\infty}\omega(z)^{-1}\|p_0(z)r(z)\|_{H_0}^2 < 1.$$

Dann ist der Operator $T = 1 + R(z)L$ beschränkt und invertierbar, wobei

$$R(z) = \Big(\mathbf{1}_{\Omega\setminus(\Omega\cap\mathbb{C}^+)}(z) - \mathbf{1}_{\Omega\cap\mathbb{C}^+}(z)\Big)r(z)r^*(-\bar{z})\ e^{-2\mathrm{i}z(x+4z^2t)}$$

$$L(f(z)) = \Big(\mathbf{1}_{\Omega\setminus\Omega_1}(z)\Big)m(z)f(-z) + \int\frac{p^*(-\bar{z})p(z')}{\mathrm{i}(z+z')}f(z')d\mu(z')$$

mit $p(z) = \Big(\mathbf{1}_{\Omega_1}(z) + \mathbf{1}_{\Omega\setminus\Omega_1}(z)\omega(z)^{-\frac{1}{2}}\Big)p_0(z)$, $\mathbf{1}_{\widehat{\Omega}}(z)$ die charakteristische Funktion auf $\widehat{\Omega}$.

Weiterhin ist

$$U(x,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}P\Big(-T^{-1}R(z)p^*(-\bar{z})\Big)P \quad \in C^\infty(\mathcal{L}(H_0))$$

eine selbstadjungierte Lösung der KdV $\quad U_t = U_{xxx} + 3(UU_x + U_xU)$.

In der interessierenden Situation, $H_0 \simeq \mathbb{C}$, identifiziert man Operatoren $F \in L^2_\mu(\Omega,\mathcal{L}(H_0)) = L^2_\mu(\Omega,\mathcal{L}(\mathbb{C}))$ mit den entsprechenden Funktionen $f \in L^2_\mu(\Omega)$, falls $F(z)\lambda = \lambda\big(F(z)1\big) = \lambda f(z)$ für $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann reduziert sich die Lösung von

$$\Big(-T^{-1}R(z)p^*(-\bar{z})\Big)P = g(z)P \Longleftrightarrow \Big(-R(z)p^*(-\bar{z})\Big)P = \Big(Tg(z)\Big)P$$

auf eine Integralgleichung für die Funktion $g(z)$.

Zwei Fälle werden diskutiert:

(1) Besteht $\Omega\cap\mathrm{i}\mathbb{R}$ aus endlich vielen verschiedenen Punkten mit positiven Imaginärteil, so fällt die Integralgleichung für $g(z)$ mit der Gelfand-Marchenko-Gleichung der Inversen Streumethode zusammen.

(2) Gilt $\Omega\cap\mathbb{R} = \emptyset$ und $\Omega\cap\mathrm{i}\mathbb{R}$ besteht aus endlich vielen disjunkten Intervallen, die symmetrisch zum Ursprung liegen, so kann man über die Integralgleichung für $g(z)$ die Baker-Akhiezer-Funktion konstruieren und die algebro-geometrischen Lösungen identifizieren.

Bemerkung 2.21 *Der Versuch, andere gut verstandene Lösungsklassen wie etwa die oben erwähnten auch in unseren Formalismus einzubinden, ist erfolgversprechend, und tatsächlich liegen bereits erste Ergebnisse in dieser Richtung vor, vergleiche Abschnitt 4.2.*

Dabei ist einerseits zu erwarten, daß man natürliche Übersetzungen der Bedingungen an den Träger Ω des Maßes μ in Eigenschaften des Spektrums des bei uns *zentralen Operators A finden und dadurch, ähnlich wie bei den Negatonen in Abschnitt 3.1, einen Beitrag zum Verständnis der geometrischen Eigenschaften der Lösungen leisten oder vernünftige Ausdehnungen der Lösungsklasse, siehe Abschnitt 3.2, untersuchen kann.*

Andererseits wäre es erstrebenswert, die technisch sehr aufwendige Ausführung von Marchenko zu vereinfachen.

2.6 Die Bilinearisierung von Hirota

In diesem Abschnitt wollen wir den Zusammenhang mit Hirota's Methode erläutern. Dazu werden wir seine Vorgehensweise zunächst kurz anhand der KdV (wie in [24] dargestellt) skizzieren. Für Erweiterungen auf andere Solitonengleichungen und eine ausführlichere Darstellung verweisen wir auf [25], [26].

Der von Hirota eingeführte bilineare Operator $D_x^i D_t^j$ wird für $i,j \in \mathbb{N}_0$ als Abbildung des Paares (g,h) auf die Funktion

$$D_x^i D_t^j\, g \cdot h := \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^i \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^j g(x,t)\, h(x',t')\Big|_{\substack{x=x'\\ t=t'}}$$

definiert. Eine Diskussion seiner Eigenschaften findet man ebenfalls in der oben angegebenen Literatur.

Die Idee zur Untersuchung einer nichtlinearen Gleichung in x, t besteht nun darin, zuerst eine lineare Gleichung für die doppelte Anzahl von Variablen x, x', t, t' aufzustellen, und danach aus der Einschränkung bestimmter Lösungen auf die Diagonale $x' = x$, $t' = t$ Lösungen der Ausgangsgleichung zu gewinnen.

Der erste Schritt von Hirota's Methode ist die sogenannte Bilinearisierung der vorgegebenen Solitonengleichung, das heißt die Umformulierung der Gleichung unter Verwendung des bilinearen Operators mittels einer geeigneten Variablentransformation.

Für die KdV lautet die bilineare Form

$$\text{(9)} \qquad D_x(D_t - D_x^3) g \cdot g = 0,$$

und ist g eine Lösung von (9), so erhält man daraus eine Lösung u der KdV durch die Transformation $u = 2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \log g$.

Bemerkung 2.22 *Wie bei unserer Operatormethode ist dieser erste Schritt, das Auffinden einer geeigneten Variablentransformation, mit der eine Gleichung bilinearisiert werden kann, nicht algorithmierbar, er hängt vielmehr von der vorgegebenen Gleichung ab. Oft motiviert sich diese Transformation ebenfalls aus einer speziellen Darstellung der 1-Solitonen Lösung.*

Im zweiten Schritt wird die bilineare Gleichung gelöst, indem man eine formale Störungsentwicklung durchführt. Der Ansatz

$$g(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n g_n(x,t) \quad \text{mit } g_0(x,t) \equiv 1$$

wird in die bilineare Gleichung eingesetzt und ein Koeffizientenvergleich in Potenzen von ϵ durchgeführt. Auf diese Weise ergibt sich eine Hierarchie von Gleichungen für die $g_n(x,t)$ $(n \geq 1)$, die man sukzessive lösen kann.

Setzt man $g_1(x,t)$ als Summe von N (verschiedenen) Exponentialfunktionen an, so bricht die Reihe ab und man erhält die N-Solitonen Lösungen:

Satz 2.23 *([24]) Seien $0 < k_1 < \ldots < k_N$. Die N-Solitonen Lösung der bilinearen KdV ist gegeben durch*

$$g(x,t) = \sum_{\mu=0,1} \exp\Big(\sum_{j=1}^{N} \mu_j \eta_j + \sum_{i<j}^{(N)} \mu_i \mu_j A_{ij}\Big),$$

$$\text{mit } \eta_j = k_j x + k_j^3 t + \varphi_j \text{ und } e^{A_{ij}} = \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j}\right)^2,$$

dabei bezeichnet $\sum_{\mu=0,1}$ die Summation über sämtliche möglichen Vektoren $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N) \in \{0,1\}^N$.

Der Vergleich von Hirota's Methode mit anderen bekannten Verfahren der Solitonentheorie wie etwa der Lösung des Anfangswertproblems mit der Inversen Streumethode oder Bäcklund Transformationen ist vielfach untersucht worden. Einen guten Überblick über die Ergebnisse in dieser Richtung kann man sich in dem Buch von Matsuno [32] verschaffen. Dort wird auch ausführlich dargestellt, welche anderen Lösungen sich mit dem eben skizzierten Ansatz konstruieren lassen.

Folgender Satz zeigt, daß unsere Methode ebenfalls Lösungen der bilinearen Form von Hirota liefert.

Satz 2.24 *(*[52] *Kapitel 2) Sei $\mathcal{A}$ ein quasi-Banachideal mit stetiger Determinante δ.*

Ist $L(x,t) \in \mathcal{A}(E)$, E ein Banachraum, eine Familie von Operatoren, die die Basisgleichungen $L_x = AL$ und $L_t = A^3 L$ erfüllt, und es gilt zusätzlich $\operatorname{rank}(AL + LA) = 1$, *so ist*

$$g(x,t) = \delta\big(I + L(x,t)\big)$$

eine Lösung der bilinearen KdV (9).

2.7 Ein Ansatz mit Fredholm'schen Integraloperatoren

Ein unserer Methode nahe verwandter Ansatz ist der von Pöppe entwickelte, in welchem die der Solitonengleichung zugrundeliegende bilineare Form von Hirota mittels Fredholm'scher Determinanten von geeigneten Integraloperatoren gelöst wird.

Um die Theorie Fredholm'scher Determinanten (vergleiche Smithies [56]) auch auf dem unbeschränkten Intervall $]-\infty, 0]$ zur Verfügung zu haben, wird für $\frac{1}{2} < \nu \leq 1$ der Raum

$$C_\nu := \Big\{\phi \in C^0(]-\infty,0], \mathbb{C}) \;\Big|\; \|\phi\|_\nu := \sup_{s \leq 0} |\phi(s)|(1-s)^\nu < \infty\Big\}$$

eingeführt. Auf C_ν wird dann ein normierter Raum LC_ν definiert, der aus Fredholm'schen Integraloperatoren besteht,

$$LC_\nu := \Big\{K : C_\nu \to C_\nu \Big| K\phi(s) := \int_{-\infty}^{0} k(s,\sigma)\phi(\sigma)d\sigma, k \text{ stetig},$$
$$\|K\| := M_\nu \sup_{s,\sigma \leq 0} (1-s)^\nu (1-\sigma)^\nu |k(s,\sigma)| < \infty\Big\},$$

wobei $M_\nu := \int_{-\infty}^{0}(1-s)^{-2\nu}ds < \infty$. Auf diesem ist die Fredholm'sche Determinante $\det(I + \lambda K)$ für $K \in LC_\nu$ wohldefiniert.

Satz 2.25 *([49] Theorem 2.3) Sei f eine Lösung der linearisierten KdV $f_t = 8f_{xxx}$, die so gewählt ist, daß sowohl f als auch alle Ableitungen von f nach x bis zur 4. Ordnung sowie nach t bis zur 2. Ordnung in $C_{2\nu}$ liegen. Das impliziert für den Fredholm'schen Integraloperator $F(x,t)$, der durch*

$$F(x,t)\phi(s) := \int_{-\infty}^{0} f(s+\sigma+2x,t)\phi(\sigma)d\sigma$$

gegeben ist, F, F_t, F_x, F_{xx}, $F_{xxx} \in LC_\nu$ für alle x und t.

Dann ist für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$

$$g(x,t;\lambda) := \det\big(I + \lambda F(x,t)\big)$$

eine Lösung der bilinearen KdV.

Bemerkung 2.26 *Die N-Solitonen erhält man durch einen Ansatz, der dem von Hirota ähnlich ist, nämlich*

$$f(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{j=1}^{N} \exp\Big(\frac{k_j}{2}x + k_j^3 t + \varphi_j\Big).$$

Die Verbindung zu Bäcklund Transformationen einerseits und zur Inversen Streumethode andererseits wird von Pöppe detailliert untersucht, man kann sich darüber ebenfalls in [49], zu weiterführenden Aspekten auch in [50] informieren.

Bemerkung 2.27 *a) Der Zugang von Pöppe beruht auf der sehr speziellen Wahl von addditiven Integraloperatoren auf einem passend zugeschnittenen Raum. Durch die Einbettung in den allgemeinen Rahmen der Operatorenideale unterliegt die Wahl des Operators A in unserem Ansatz keinen derartigen Einschränkungen.*

b) Die Behandlung von Gittergleichungen geht von einer anderen Situation aus. So lautet etwa für das Toda-Gitter in [5] die Forderung an den dort beteiligten Operator $F_n(t) \in \mathcal{N}(E)$ (E Banachraum)

$$\frac{\partial}{\partial t}F_n = F_{n+1} - F_{n-1} \qquad \text{und} \qquad F_{n+1} = V_- F_n = F_n V_+$$

mit den sehr speziellen Bedingungen $V_- V_+ = 1$ und $\operatorname{rank}(1 - V_+ V_-) = 1$ an die Operatoren V_-, $V_+ \in \mathcal{L}(E)$. Dieser Ansatz entstand zwar durch Diskretisierung des Verfahrens im kontinuierlichen Fall, in [5] *wird jedoch darauf hingewiesen, daß dennoch der kontinuierliche Fall nicht durch einen Grenzübergang aus dem diskreten Fall gewonnen werden kann.*

Mit unserer Strategie ist es gelungen, einen einheitlichen Zugang zu finden, in dem sowohl der kontinuierliche als auch der diskrete Fall im wesentlichen nach demselben Formalismus behandelt werden können, vergleiche auch Abschnitt 2.8.

c) Bei Pöppe's Vorgehensweise wird die Lösung direkt in Form von Fredholm'schen Determinanten angesetzt, operatorwertige Gleichungen werden in diesem Zusammenhang nicht behandelt.

2.8 Zusammenstellung von Resultaten zu anderen Solitonengleichungen

In den folgenden Tabellen haben wir einen Überblick über bisher erzielte Ergebnisse zu anderen Solitonengleichungen zusammengestellt. Dabei unterscheiden wir zwischen zwei Typen von Gleichungen, den üblichen kontinuierlichen Gleichungen, die neben dem Zeitparameter t von kontinuierlichen Ortsparametern x, $y \in \mathbb{R}$ abhängen, und den sogenannten Gittergleichungen, in denen die Ortskoordinate $n \in \mathbb{Z}$ diskret ist.

Kontinuierliche Gleichungen: *Korteweg-de Vries-Gleichung (KdV), Modifizierte Korteweg-de Vries-Gleichung (mKdV), Kadomtsev-Petviashvili-Gleichung (KP), Boussinesq-Gleichung (B), Sinus-Gordon-Gleichung (sG), Nichtlineare Schrödinger-Gleichung (NLS).*

Gittergleichungen: *Wadati-Gitter (W), Langmuir-Gitter (L), Toda-Gitter (T).*

Die vorliegenden Resultate sind erst teilweise veröffentlicht. Wie bereits erwähnt wurde die vorgestellte Methode zunächst für die Korteweg-de Vries-Gleichung in [3] durchgeführt. Anschließend gelang in [52] die Behandlung der Sinus-Gordon-Gleichung, außerdem wurde dort die Situation für Korteweg-de Vries/Modifizierte Korteweg-de Vries-Gleichung und Wadati/Langmuir-Gitter geklärt, die jeweils durch die sogenannte (diskrete) Miura Transformation bzw. die Kontinuum Approximation verbunden sind. Für das Toda-Gitter verweisen wir auf [53] und für die Kadomtsev-Petviashvili-Gleichung auf [13].

Die Vorgehensweise bei der Herleitung der Resultate lehnt sich eng an die in Abschnitt 2.2 ausführlich im Zusammenhang mit der Korteweg-de Vries-Gleichung geschilderte, und die mathematische Formulierung der Aussagen läßt sich völlig natürlich übertragen. Wir haben uns hier auf eine schematische Darstellung beschränkt, um Wiederholungen zu vermeiden.

(1) Operator-Versionen von Gleichungen

Zunächst werden im ersten Teil die operatorwertigen Übersetzungen dargestellt, und zwar nacheinander a) die operatorwertige Gleichung, b) die zugehörige Lösung und die zugrundeliegenden Basisgleichungen.

Kontinuierliche Gleichungen

a) Operatorgleichungen

KdV	$U_t = U_{xxx} + 3(UU_x + U_x U)$
mKdV	$U_t = U_{xxx} + 3(U^2 U_x + U_x U^2)$
KP	$U_{xt} = \frac{1}{4}(U_{xxx} + 6U_x^2)_x + \frac{3}{4}U_{yy} + \frac{3}{2}[U_y, U_x]$
B	$U_{tt} = U_{xx} + U_{xxxx} + 3(U_x U_{xx} + U_{xx} U_x) - \mathrm{i}\sqrt{3}[U_t, U_x]$
sG	$\Big((1 + U_-)^{-1} U_{-,x} + (1 - U_+)^{-1} U_{+,x}\Big)_t =$ $\frac{1}{2}\Big((1 - U_+)^{-1}(1 + U_-) - (1 + U_-)^{-1}(1 - U_+)\Big)$
NLS	$\mathrm{i}U_t + U_{xx} - 2U\overline{U}U = 0$ $\mathrm{i}\overline{U}_t - \overline{U}_{xx} + 2\overline{U}U\overline{U} = 0$

b) Operatorlösung und Basisgleichungen

KdV	$U = \Big((1 + L)^{-1}(AL + LA)\Big)_x$	$L_x = AL, L_t = A^3 L$
mKdV	$U = -\mathrm{i}(1 - L^2)^{-1}(AL + LA)$	$L_x = AL, L_t = A^3 L$
KP	$U = (1 + L)^{-1}(BL + LA)$	$L_x = (A + B)L, L_y = (A^2 - B^2)L,$ $L_t = (A^3 + B^3)L$
B	$U = (1 + L)^{-1}(A_+ L + LA_-)$ mit $A_\pm = A \pm \mathrm{i}A^{-1}\Omega/\sqrt{3}$	$L_x = AL, L_t = \Omega L$ für $[A, \Omega] = 0, \Omega^2 = A^2(1 + A^2)$
sG	$U_\pm = (1 \pm L)^{-1}(ALA^{-1} + L)$	$L_x = AL, L_t = A^{-1}L$
NLS	$U = (1 - L\overline{L})^{-1}(AL + L\overline{A})$ $\overline{U} = (1 - \overline{L}L)^{-1}(\overline{A}\,\overline{L} + \overline{L}A)$	$L_x = AL, L_t = \mathrm{i}A^2 L$ $\overline{L}_x = \overline{A}\,\overline{L}, \overline{L}_t = -\mathrm{i}\overline{A}^2\overline{L}$

Gittergleichungen

a) Operatorgleichungen

T	$\Big((1 + U_n)^{-1} U_{n,t}\Big)_t =$ $= (1 + U_n)^{-1}(1 + U_{n+1}) - (1 + U_{n-1})^{-1}(1 + U_n)$
L	$U_{n,t} = (1 + hU_n)U_{n+1} - U_{n-1}(1 + hU_n)$
W	$U_{n,t} = (1 + U_n^2)U_{n+1} - U_{n-1}(1 + U_n^2)$

b) Operatorlösung und Basisgleichungen

T	$U_n = (1+L_n)^{-1}(VL_nV - L_n)$	$L_{n+1} = V^2 L_n$, $L_{n,t} = (V - V^{-1})L_n$
L	$U_n = \frac{1}{h}V^{-1}(1+L_{n+1})^{-1}(VL_{n+1}V - L_{n+1})$ $-\frac{1}{h}V^{-1}(1+L_n)^{-1}(VL_nV - L_n)$	$L_{n+1} = VL_n$, $L_{n,t} = (V - V^{-1})L_n$
W	$U_n = -\mathrm{i}V^{-1}(1-L_n^2)^{-1}(VL_nV - L_n)$	$L_{n+1} = VL_n$, $L_{n,t} = (V - V^{-1})L_n$

In [6] gelingt es Bauhardt und Pöppe, das Zakharov-Shabat-System (ZS-System) auf Operatorebene zu behandeln. Obwohl auch dort skalare Lösungen durch Spurmethoden hergeleitet werden, ist eine bequeme Beschreibung der Lösungsformel durch Determinanten nicht mehr möglich. Ihr Ergebnis lautet:

Satz 2.28 *([6] Theorem 2.1) Seien $F(x,t)$, $G(x,t)$ Operatorenfamilien, die auf einem geeigneten normierten Raum definiert sind und für $x \to -\infty$ schnell genug fallen, so daß alle im folgenden angegebenen Integrale existieren. F und G seien Operatoren der Spurklasse und $1 - FG$ nicht-singulär für alle x und t.*

Außerdem sei A ein invertierbarer linearer Operator und .

$$F_x = AF,\ g(\ A)F_t \ = f(\ A)F, \quad G_x = AG,\ g(-A)G_t = -f(-A)G.$$

Dann sind

$$R(x,t) = (1 - FG)^{-1}(AF + FA),$$
$$Q(x,t) = (1 - GF)^{-1}(AG + GA)$$

Lösungen des ZS-Systems in Operator-Formulierung

$$g(\mathcal{L})\begin{pmatrix} R_t \\ Q_t \end{pmatrix} = f(\mathcal{L})\begin{pmatrix} R \\ -Q \end{pmatrix},$$

wobei $\mathcal{L}$ durch die folgende Vorschrift gegeben ist

$$\mathcal{L}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_x - R\ \int_{-\infty}^{x}(QU + VR)dx' - \int_{-\infty}^{x}(UQ + RV)dx'\ R \\ -V_x + Q\ \int_{-\infty}^{x}(UQ + RV)dx' - \int_{-\infty}^{x}(QU + VR)dx'\ Q \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 2.29 *Neben diesen direkten Interpretationen hat Blohm kürzlich Algorithmen angegeben, mit denen zu bestimmten Hierarchien Operatorlösungen konstruiert werden können. So wird in [8] ein Modell eingeführt, mit dem das Toda-Gitter und seine Verallgemeinerungen höherer Ordnung erhalten werden können, in [9] geht es um ein Modell für eine Hierarchie, die die Korteweg-de Vries-Gleichung beinhaltet.*

Eine Modifikation liefert des weiteren ein Modell, das ganz eng mit dem ZS-System zusammenhängt, beispielsweise übersetzt sich darin die Nichtlineare Schrödinger-Gleichung zu

$$U_t + U_{xx}E + 2U_x[U,E] = 0$$

mit zugrundeliegenden Basisgleichungen $L_x = -AE\ L\ E$ *und* $L_t = -2A^2E\ L\ E$ *(E eine mit A kommutierende Involution).*

Eine wesentliche Schwierigkeit bei der Behandlung des ZS-Systems besteht darin, daß man bei der Skalarisierung nicht mehr auf eine skalare Gleichung sondern vielmehr auf ein System von zwei (miteinander gekoppelten) Gleichungen hinauswill. Das bedeutet, daß man anstelle der Spur einen geeigneten Ersatz suchen muß. Diese Schwierigkeit wurde von Blohm in [9] *in der folgenden Weise überwunden:*

Sei F *ein Banach-Modul über* $\mathbb{C}^{2\times 2}$, $c \in F$ *und* $a : F \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ *ein Modul-Homomorphismus, wobei wir die Auswertung von* a *auf dem Element* $x \in F$ *mit* (x, a) *bezeichnen. Als natürliches Pendant für das Konzept eindimensionaler Operatoren verwendet er Modul-Homomorphismen* $a\triangle c : F \to F$, *die durch*

$$(a\triangle c)x = (x, a)c \quad \textit{für } x \in F$$

definiert sind. Da die Zuordung $\mathrm{Tr} : a\triangle c \to (c, a)$ *keine wohldefinierte Abbildung mehr liefert, muß man etwas vorsichtiger vorgehen. Unter der Voraussetzung, daß es ein* $x_0 \in F$ *gibt mit* $(x_0, a) = 1 \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, *ist*

$$\mathrm{Tr}_{a,c}\big(Y(a\triangle c)\big) = (Yc, a)$$

ein wohldefinierter Operator auf $D(\mathrm{Tr}_{a,c}) = \{Y(a\triangle c) | Y \in L(F)\}$, *der die Eigenschaften der Spur modelliert, das heißt, es gilt*

$$\mathrm{Tr}_{a,c}\big(X(a\triangle c)\,Y(a\triangle c)\big) = \mathrm{Tr}_{a,c}\big(Y(a\triangle c)\big)\mathrm{Tr}_{a,c}\big(X(a\triangle c)\big).$$

Schließlich bleibt zu erwähnen, daß sich die Gleichungen, die mit Blohm's ZS-Modell gelöst werden können, gerade durch sogenannte Zero-Curvature-Bedingungen $Z_x - X_t = [X, Z]$ *charakterisieren lassen. Letztere ist die Kompatibilitätsbedingung von*

$$\phi_x = X\phi \quad \textit{und} \quad \phi_t = Z\phi$$

(ϕ *ist* $\mathbb{C}^2$*-wertig), wobei die erste der Gleichungen gerade das zum ZS-System gehörige Streuproblem mit*

$$X = X(\lambda) = \lambda\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix},$$

dabei ist λ *der Eigenwert und* r, q *die beiden Funktionen, die später in der Evolutionsgleichung auftreten) darstellt während die zweite ihm das Zeitverhalten zuordnet. Macht man für* Z *einen polynomialen Ansatz in* λ, *so lassen sich die Koeffizienten-Matrizen explizit in Termen von* $\mathrm{Tr}_{a,c}(U_j)$, U_j *die Operatorlösungen aus der Operator-Hierarchie zu Blohm's Modell, angeben und damit dann auch die zur Zero-Curvature-Bedingung gehörende Evolutionsgleichung in Blohm's Modell bestimmen.*

(Für Einzelheiten verweisen wir auf [9]*).*

Es ist erwähnenswert, daß auf dem Operator-Niveau auch andere, wichtige Beziehungen zwischen Solitonengleichungen bestehen bleiben. Die folgende, besonders aussagekräftige Situation wird in [52], Abschnitt 1.4 besprochen.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{W} & \xrightarrow{\textbf{Miura-Transformation}} & \mathbf{L} \\
\textbf{Kontinuum-Approximation}\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow\ \textbf{Kontinuum-Approximation} \\
\mathbf{mKdV} & \xrightarrow{\textbf{Miura-Transformation}} & \mathbf{KdV}
\end{array}
$$

Satz 2.30 *Die durch $M(U) := U^2 + \mathrm{i}U_x$ definierte Miura-Transformation führt Lösungen U der mKdV in Lösungen $M(U)$ der KdV über. Analog gilt für die diskrete Miura-Transformation $M(U_n) := \frac{1}{h}\big((1 - \mathrm{i}U_n)(1 + \mathrm{i}U_{n+1}) - 1\big)$, daß sie Lösungen U_n des Wadati-Gitters in Lösungen $M(U_n)$ des Langmuir-Gitters überführt.*

Für die speziellen Lösungen, wie sie in den Tabellen angegeben sind, gelten die durch die Miura-Transformationen gegebenen Beziehungen ebenfalls.

Satz 2.31 *Durch die Vorschrift $U(x,t) := \frac{1}{h}U_n(\frac{3}{h^3}t)$, $nh = x - \frac{6}{h^2}t$, geht im Grenzwert $h \longrightarrow 0$ (Kontinuum-Approximation) das Langmuir-Gitter in die KdV und das Wadati-Gitter in die mKdV über.*

Auch die in den Tabellen angegebenen speziellen Lösungen werden ineinander überführt, vorausgesetzt der Zusammenhang $V = \exp(hA)$ gilt.

(2) Explizite Lösungsformeln

Im zweiten Teil werden nun die Lösungsformeln aufgelistet, die man nach der Durchführung der beschriebenen Skalarisierungstechnik erhält.

Kontinuierliche Gleichungen

KdV	$u = 2\big(\log\delta(1+L)\big)_{xx}$
mKdV	$u = \mathrm{i}\big((\log\frac{\delta(1-L)}{\delta(1+L)}\big)_x$
KP	$u = \big((\log\delta(1+L)\big)_x$
B	$u = 2\big((\log\delta(1+L)\big)_x$
sG	$u_\pm = \mp\frac{\delta(1\mp L)}{\delta(1\pm L)} \pm 1$
NLS	$u\bar{u} = -\big((\log\delta(1-L\bar{L})\big)_{xx}$

Gittergleichungen

T	$u_n = \frac{\delta(1+L_{n+1})}{\delta(1+L_n)} - 1$
L	$u_n = \frac{1}{h}\big(\log\frac{\delta(1+L_{n+1})}{\delta(1+L_n)}\big)_t$
W	$u_n = \frac{\mathrm{i}}{2}\big(\log\frac{\delta(1-L_n)}{\delta(1+L_n)}\big)_t$

Bemerkung 2.32 *a) Lösungen von der Sinus-Gordon-Gleichung $u_{xt} = \sin(u)$ ergeben sich aus der hier behandelten Version durch die Transformation $u = \mathrm{i}\log(1+u_-)/(1-u_+)$ (zur Motivation vergleiche* [52]*). Als Lösungsformel erhalten wir daher $u = 2\mathrm{i}\log\big(\delta(1+L)/\delta(1-L)\big)$.*

b) Aus der hier behandelten Form ergeben sich wiederum Lösungen des Toda-Gitters in seiner ursprünglichen Gestalt $\widehat{u}_{n,tt} = \exp(-(\widehat{u}_n - \widehat{u}_{n-1})) - \exp(-(\widehat{u}_{n+1}-$

$\widehat{u}_n$)) mittels der Transformation $\widehat{u}_n = -\log(1+u_n)$, und man erhält $\widehat{u}_n = -\log(\delta(1+L_{n+1})/\delta(1+L_n))$.

Bemerkung 2.33 *Im Theoretisch-Physikalischen Institut in Jena wurden in der Arbeitsgruppe „Gravitationstheorie" von Neugebauer und Meinel erhebliche Erfolge zur Ernst-Gleichung*

$$\Re(f)\Delta f = (\nabla f)^2$$

für das (komplexe) Ernst-Potential $f = f(\rho, \zeta)$, der Reduktion der axialsymmetrischen stationären Einstein'schen Feldgleichungen im Vakuum, erzielt. Diese ist eine Solitonengleichung, die physikalisch im Zusammenhang mit der Astrophysik von großer Bedeutung, aber mathematisch noch erstaunlich wenig erschlossen war.

Es ist deshalb bemerkenswert, daß es in den Arbeiten [41], [38] *und [42] gelungen ist, Analogien zur Theorie der üblichen Solitonengleichungen (N-Solitonen, elliptische Lösungen, Inverse Streumethode) zu finden. In den Arbeiten erweist es sich als ein besonders subtiler Punkt, unter den gefundenen Lösungen die physikalisch relevanten auszusondern. Da auch unsere Methode die qualitative Untersuchung von Lösungen ermöglicht (siehe Abschnitt 3.1), erscheint es uns als ein attraktives Projekt, die Ernst-Gleichung von unserem Standpunkt aus zu betrachten.*

3 Konstruktion und Untersuchung von Lösungsklassen

Im folgenden Abschnitt betrachten wir als Anwendung Lösungen, die sich durch bestimmte Setzungen für den „erzeugenden Operator" A in unserer Lösungsformel (3) ergeben und besprechen, in welcher Weise sich die funktionalanalytischen bzw. algebraischen Daten von A in der Geometrie der Lösungen auswirken.

Motiviert wurden unsere Untersuchungen durch die Beobachtung, daß sich durch Einsetzen von (endlichen) Matrizen in Diagonalform die bekannten Solitonenlösungen von Hirota ergeben.

Lemma 3.1 *Seien $a, c \in \mathbb{C}^N$ beliebig sowie $k_j \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden mit $k_i + k_j \neq 0 \; \forall i,j = 1,\dots,N$ und*

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_N \end{pmatrix}.$$

Dann lautet die Lösung der KdV, die gemäß Hauptsatz 2.6 und Folgerung 2.12 gegeben ist, $u(x,t) = 2\partial_x^2 \log p(x,t)$,

$$\begin{aligned} p(x,t) &= \det\left(\left(\delta_{ij} + \exp\left(k_i x + k_i^3 t\right) \frac{a_j c_i}{k_i + k_j}\right)_{i,j=1}^{N}\right) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{N} \sum_{i_1 < \ldots < i_n} \prod_{j=1}^{n} \exp\left(k_{i_j} x + k_{i_j}^3 t + \delta_{i_j}\right) \prod_{j'=j+1}^{n} \left(\frac{k_{i_j} - k_{i_{j'}}}{k_{i_j} + k_{i_{j'}}}\right)^2 \\ &\quad \textit{mit } \exp(\delta_j) = \frac{a_j c_j}{2k_j}. \end{aligned}$$

Für $0 < k_1 < \ldots < k_N$ *und* $\delta_j \in \mathbb{R}$ *sind dies gerade die N-Solitonen Lösungen von Hirota (vergleiche Satz 2.23).*

Als Verallgemeinerung gelangen wir zu zwei Lösungsklassen.

- Für beliebige (endliche) Matrizen erhält man sogenannte Negatonen. Grob gesprochen handelt es sich dabei um Überlagerungen einzelner solitärer Wellen, die aber in Gruppen zusammengefaßt sind. Das asymptotische Verhalten dieser Lösungen läßt sich an der Jordan'schen Normalform von A ablesen.
- Diagonaloperatoren A führen zu Lösungen, die man sich als Superposition von abzählbar vielen solitären Wellen vorstellen kann.

3.1 Asymptotisches Verhalten von Negatonen

Anfang der 90ziger Jahre wurde von Matveev und Salle in [33] der Formalismus der Darboux Transformationen systematisch entwickelt und als Anwendung Lösungsformeln für Solitonengleichungen hergeleitet, die Wronski'sche Determinanten enthalten.

Für die KdV lautet diese (siehe [34])

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0 + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log W \\ &\quad \text{mit } W = W(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) = \det\Big(\Big(\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}\varphi_j\Big)_{i,j=1}^{n}\Big), \end{aligned} \tag{10}$$

dabei sind $\varphi_i = \varphi_i(x,t)$ feste, linear unabhängige Lösungen des Systems

$$L\varphi = \lambda\varphi \text{ und } \varphi_t = A\varphi, \qquad \begin{aligned} L &= \partial_x^2 + u_0(x,t), \\ A &= -\Big(4\partial_x^3 + 6u_0(x,t)\partial_x + 3u_{0,x}(x,t)\Big) \end{aligned}$$

(zu möglicherweise verschiedenen Eigenwerten λ).

Aus diesen Formeln ergeben sich durch parallele Einsetzungen zwei wichtige neue Lösungsklassen, die in der Literatur als Positonen und Negatonen bezeichnet werden. Diese haben die Gestalt

$$u(x,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log W \qquad \text{für } W = W\Big(\varphi,\ldots,\frac{\partial^n}{\partial k^n}\varphi\Big) \tag{11}$$

mit $\varphi = \varphi(k;x,t)$,

$$\varphi_{\text{pos}} = \sin\Big(k\big(x - k^2t + \delta(k)\big)/2\Big) \qquad \text{(Positon der Ordnung } n\text{)},$$

$$\varphi_{\text{neg}} = \begin{cases} \cosh\Big(k\big(x + k^2t + \delta(k)\big)/2\Big) \\ \sinh\Big(k\big(x + k^2t + \delta(k)\big)/2\Big) \end{cases} \qquad \text{(Negaton der Ordnung } n\text{)}$$

(bemerke $\lambda = k^2/4$). Um Lösungen zu bilden, die Kollisionen von N Positonen und Negatonen beliebiger Ordnungen $n_1,\ldots,n_N$ beschreiben, verwendet man in der Wronski'schen Formel (11)

$$W = W\big(\varphi(k_1), .., \frac{\partial^{n_1}}{\partial k_1{}^{n_1}}\varphi(k_1), ..., \varphi(k_N), .., \frac{\partial^{n_N}}{\partial k_N{}^{n_N}}\varphi(k_N)\big)$$

mit $\varphi \in \{\varphi_{\rm pos}, \varphi_{\rm neg}\}$, wobei insbesondere die Wahl zwischen den beiden Funktionen $\varphi_{\rm neg}$, die ein Negaton erzeugen, noch geeignet zu treffen ist (vgl. [35] und auch Bemerkung 3.2).

Bemerkung 3.2 *Die N-Solitonen ergeben sich mittels $W(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ aus der Setzung*

$$\varphi_j(x,t) = \begin{cases} \cosh\Big(k_j\big(x + k_j^2 t + \delta(k_j)\big)/2\Big), & j \textit{ ungerade}, \\ \sinh\Big(k_j\big(x + k_j^2 t + \delta(k_j)\big)/2\Big), & j \textit{ gerade}. \end{cases}$$

Bemerkung 3.3 *a) Das Konzept der Positonen ist nur für ungerade Ordnungen interessant, wo sie sich als stabile Objekte erweisen. Im Fall gerader Ordnung ergeben sich periodische, singuläre Lösungen wie beispielsweise im Fall nullter Ordnung $u(x,t) = -(k^2/2)\sin^{-2}\big(k(x - k^2 t + \delta)/2\big)$ (vergleiche auch die Diskussion in [35]).*

b) Das Konzept der Negatonen stellt eine Erweiterung von den bekannten Solitonen dar: Solitonen sind Negatonen nullter Ordnung.

Matveev und seine Schule haben sich auf die Untersuchung der Positonen konzentriert und konnten in [36], [37] das asymptotische Verhalten von Lösungen, in denen (beliebig viele) Solitonen und Positonen der Ordnung 1 zusammengefaßt sind, klären. Im Fall der Negatonen erzielten Rasinariu et al. [51] Ergebnisse in dieselbe Richtung. Diese beschränken sich aber auf Einzelfälle (zum Beispiel Negatonen der Ordung n für $0 \leq n \leq 4$ oder die Kollision von zwei Negatonen der Ordnung 1). Sowohl für Positonen als auch für Negatonen sprechen die Autoren in den oben zitierten Artikeln Erwartungen für den offen gebliebenen allgemeinen Fall aus.

Die Resultate in diesem Abschnitt stellen eine vollständige Behandlung des allgemeinen Falles für die Negatonen dar, wobei die Erwartungen von Rasinariu et al. und sinngemäß auch die von Matveev bestätigt werden können.

In unserer Lösungsformel (3) ergeben sich die Negatonen durch Einsetzen von (endlichen) Matrizen A, die wir gemäß

Lemma 3.4 *(*[3], [52] *Lemma 4.0.1) Sei A eine beliebige Matrix mit* $0 \notin \mathrm{spec}(A) + \mathrm{spec}(A)$ *und* $u(x,t) = 2\partial_x^2 \log\det\big(1 + \exp(Ax + A^3 t)\Phi_{A,A}^{-1}(a \otimes c)\big)$ *die gemäß Hauptsatz 2.6, Folgerung 2.12 zu diesen Daten gegebene Lösung der KdV.*

Dann gibt es Vektoren $\hat{a}$, $\hat{c}$, so daß gilt:

$$u(x,t) = 2\partial_x^2 \log\det\Big(1 + \exp(J_A x + J_A^3 t)\Phi_{J_A,J_A}^{-1}(\hat{a} \otimes \hat{c})\Big),$$

J_A Jordan'sche Normalform von A.

stets in Jordangestalt annehmen können. Genauer setzen wir

Voraussetzung 3.5 *Die Matrix A bestehe aus N einzelnen Jordanblöcken A_j der Dimension n_j zum Eigenwert k_j,*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_N \end{pmatrix} \quad \textit{mit } A_j = \begin{pmatrix} k_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & k_j \end{pmatrix},$$

die Eigenwerte $k_j \in \mathbb{C}$ *seien paarweise verschieden und es gelte* $k_i + k_j \neq 0$ $(\forall i,j = 1, \dots, N)$.

Da lediglich reelle Lösungen betrachten werden sollen, fordern wir zusätzlich, daß sowohl die Vektoren a, c als auch die Eigenwerte reell sind, ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$k_N > \ldots > k_1 > 0.$$

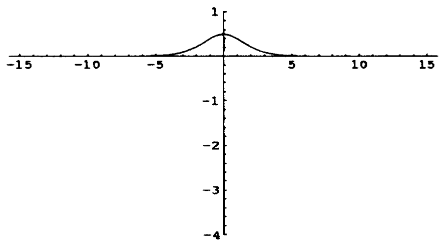
voraus. Unser Ziel im folgenden ist es zu erklären, wie man das asymptotische Verhalten von Negatonen in Korrespondenz zu den algebraischen Daten der Matrix A setzen kann.

Dazu ist es sinnvoll, zunächst die elementaren Bausteine zu betrachten, aus denen sich Negatonen zusammensetzen, die Negatonen nullter Ordnung. Die Gestalt eines solchen Negatons nullter Ordnung hängt vom Vorzeichen der Parameter a_1, c_1 ab. Setzt man $(a_1 c_1)/(2k_1) = \epsilon_1 \exp(\delta_1)$ mit reellem Parameter δ_1 und Vorzeichen ϵ_1, so unterscheidet man zwischen

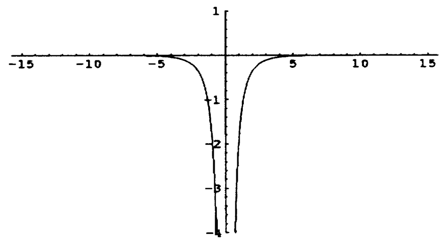
a) „regulären" Solitonen $u(x,t) = (k_1^2/2)\cosh^{-2}\big(k_1(x + k_1^2 t + \delta_1)/2\big)$ für $\epsilon_1 = 1$ und

b) „singulären" Solitonen $u(x,t) = -(k_1^2/2)\sinh^{-2}\big(k_1(x + k_1^2 t + \delta_1)/2\big)$ für $\epsilon_1 = -1$ (In der Literatur spricht man auch oft von Solitonen und Antisolitonen).

Soliton



Antisoliton



Weil die Lösungen $u(x,t)$, die wir hier untersuchen, auch Pole haben können, erweist sich die folgende Betrachtungsweise als praktisch bei der Formulierung eines Konvergenzbegriffes, der das asymptotische Verhalten charakterisiert.

Die Beobachtung, daß $u_t(\cdot) := u(\cdot, t)$ für jedes feste t die Einschränkung einer meromorphen Funktion – definiert auf einer geeigneten Umgebung U (eventuell gilt $U = U(t)$) der reellen Achse – ist, zeigt, daß man $u_t(\cdot)$ auch als Abbildung in die Riemann'sche Zahlensphäre $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auffassen kann.

Man versieht nun $\hat{\mathbb{C}}$ mit einer Metrik, etwa mit der kordalen Metrik $\mathrm{d}^{\mathrm{cord}}$, die in der üblichen Weise gegeben wird durch

$$d^{\text{cord}}(w,z) = |\pi^{-1}(w) - \pi^{-1}(z)|,$$
$$\pi^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3, \ \pi \text{ die stereographische Projektion,}$$

und verwendet mit diesen Vereinbarungen den Begriff der (global) gleichmäßigen Konvergenz von Abbildungen $u_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ für $t \to \pm\infty$ bezüglich der kordalen Metrik.

Definition 3.6 *Man sagt, daß zwei Funktionen $u(x,t)$ und $v(x,t)$ für $t \to \infty$ (bzw. $t \to -\infty$) das gleiche asymptotische Verhalten haben,*

$$u(x,t) \approx v(x,t) \qquad \textit{für } t \approx \infty \ (t \approx -\infty), \tag{12}$$

falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein t_ϵ gibt, so daß für $t > t_\epsilon$ (bzw. $t < t_\epsilon$) gilt $d^{\text{cord}}\big(u(x,t), v(x,t)\big) < \epsilon$ gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$.

Wir kommen nun zu unserem Hauptergebnis. Die Beweise bauen auf Methoden auf, die die zweite Autorin in ihrer Dissertation [52] entwickelt hat. Die hier gewählte Formulierung orientiert sich an der Verbesserung dieser Aussagen, die sie in [54] im Zusammenhang mit der Sinus-Gordon-Gleichung erzielen konnte.

Hauptsatz 3.7 *([52] Theorem 4.3.1, [54] Theorem B) Zu den Daten in Voraussetzung 3.5 assoziieren wir die Kurven*

$$\Gamma_{j,m_j}(x,t) = k_j x + k_j^3 t + \log |\ \tau\ |^{\mp m_j} + (\delta_j + \delta_j^{\pm} + \delta_{j,m_j}^{\pm}) \tag{13}$$

$$\textit{für } m_j = -(n_j-1), -(n_j-1)+2, \dots, (n_j-1)-2, (n_j-1), \tag{14}$$

und, entlang dieser Kurven die Solitonen

$$\begin{aligned} u_{j,m_j}^{\pm}(x,t) &= 2k_j^2 \ell_j^{\pm}(1+\ell_j^{\pm})^{-2} \\ &\quad \textit{mit } \ell_j^{\pm}(x,t) = (-1)^{\frac{(n_j-1)+m_j}{2}} \epsilon_j \exp\Big(\Gamma_{j,m_j}(x,t)\Big) \end{aligned} \tag{15}$$

mit der Vereinbarung, daß der Vektor a (und entsprechend auch c) zerlegt sei gemäß $a = (a_1, \dots, a_N)^t$ mit $a_j = (a_j^{(1)}, \dots, a_j^{(n_j)})^t$, also der Jordanform von A angepaßt, und wir setzen $a_j^{(1)} c_j^{(n_j)}/(2k_j)^{n_j} = \epsilon_j \exp(\delta_j)$ mit $\delta_j \in \mathbb{R}$, $\epsilon_j = \pm 1$.

Die Größen $\delta_j^{\pm}$, $\delta_{j,m_j}^{\pm}$ kennzeichnen den Phasenshift, der in der asymptotischen Form auftritt, und es gilt

$$\exp(\delta_j^-) = \prod_{j'=1}^{j-1} \left[\frac{k_{j'} - k_j}{k_{j'} + k_j}\right]^{2n_{j'}} \ \textit{bzw.} \ \ \exp(\delta_j^+) = \prod_{j'=j+1}^{N} \left[\frac{k_{j'} - k_j}{k_{j'} + k_j}\right]^{2n_{j'}} \tag{16}$$

$$\textit{und} \quad \exp(\delta_{j,m_j}^{\pm}) = \left(4k_j^3\right)^{\mp m_j} \frac{\left(\frac{(n_j-1)\pm m_j}{2}\right)!}{\left(\frac{(n_j-1)\mp m_j}{2}\right)!}. \tag{17}$$

Dann läßt sich das asymptotische Verhalten der nach Hauptsatz 2.6 und Folgerung 2.12 gegebenen Lösung $u(x,t)$ der KdV beschreiben durch

$$u(x,t) \approx \sum_{j=1}^{N} \sum_{m_j} u_{j,m_j}^{\pm}(x,t) \qquad \textit{für } t \approx \pm\infty \tag{18}$$

(die Summationsindizes m_j sind durch (14) gegeben).

Qualitativ lassen sich die in Hauptsatz 3.7 beschriebenen Phänomene in der folgenden Weise zusammenfassen ([52], im Anschluß an Theorem 4.3.1):

Interpretation

Die Lösung wird offenbar durch die endlich vielen Eigenwerte $k_1, \dots, k_N$ charakterisiert, die wir von geometrischer Vielfachheit 1 vorausgesetzt haben, um die Diskussion von Weghebungsphänomenen zu vermeiden.

a) Wir besprechen zunächst ein einzelnes Negaton der Ordnung n, das zu einem reellen Eigenwert k der algebraischen Vielfachheit n gehört, oBdA $k > 0$. Eine solche Lösung stellt ein Wellenpaket dar, das aus n regulären und singulären Solitonen besteht. Deren Form ist identisch und hängt nur vom Eigenwert k ab.

Als erstes beobachtet man, daß sich das geometrische Zentrum des Wellenpaketes mit konstanter Geschwindigkeit $-k^2$ bewegt, während sich die beteiligten Solitonen selbst voneinander entfernen. Der Abstand zwischen einem dieser Solitonen und dem geometrischen Zentrum wächst dabei höchstens logarithmisch.

Man kann sich nun vorstellen, daß jedes einzelne Soliton für große negative Zeiten $t << 0$ auf der einen Seite des Zentrums startet und sich dem Zentrum logarithmisch annähert. Irgendwann wechselt es auf die andere Seite über und entfernt sich für große positive Zeiten $t >> 0$ wieder logarithmisch vom Zentrum. Nach dieser Deutung, die auch durch Computerexperimente belegt wird, erscheinen in der asymptotischen Form für $+\infty$ die einzelnen Solitonen genau in der umgekehrten Reihenfolge wie in der asymptotischen Form für $-\infty$.

Außerdem kann man den Formeln entnehmen, daß sich in der asymptotischen Form reguläre und singuläre Solitonen immer abwechseln. Insbesondere gibt es nur zwei Typen von asymptotischen Formen, und dieser Typ hängt allein vom Vorzeichen ϵ ab.

Das Wellenpaket als Gesamtheit, genauer gesagt der Verlauf seines Zentrums, erfährt durch die internen Kollisionen der am Wellenpaket beteiligten Solitonen, die wir eben beschrieben haben, keinen Phasensprung.

b) Im allgemeinen Fall, wo der Lösung N Eigenwerte $k_1, \dots, k_n$ von algebraischer Vielfachheit $n_1, \dots, n_N$ zugrunde liegen, besteht diese aus N Wellenpaketen wie in a), beschreibt also die Superposition von N Negatonen der Ordungen $n_1, \dots, n_N$.

Diese treffen sich – wie N-Solitonen – im Laufe der Zeit in elastischen Stößen, aus denen sie ungeändert hervorgehen bis auf die Tatsache, daß sie dabei einen Phasensprung erfahren. Letzterer wird durch (16) gegeben.

Es ist bemerkenswert, daß es sich bei (16) um eine natürliche Verallgemeinerung der Formel handelt, die für die N-Solitonen wohlbekannt ist, und von der sich (16) nur durch das Auftreten der algebraischen Vielfachheit im Exponenten unterscheidet.

c) N-Solitonen findet man in der Klasse der Negatonen, indem man speziell die algebraischen Vielfachheiten n_j der Eigenwerte k_j gleich 1 und die Parameter $\epsilon_j = 1$ für $j = 1, \dots, N$ wählt.

Folgerung 3.8 *([52], Korollar 4.3.2)*

Die Summe der Phasensprünge verschwindet: $\sum_{j=1}^{N} n_j(\delta_j^+ - \delta_j^-) = 0.$

Bemerkung 3.9 *a) Eine ähnliche Aussage wurde in der kürzlich fertiggestellten Arbeit* [54] *für die Sinus-Gordon-Gleichung hergeleitet. Hier hat man es sogar mit glatten, also physikalisch relevanten Lösungen zu tun.*

Ein für die Sinus-Gordon-Gleichung neu auftretendes Phänomen sind pulsierende Wellen, die in Form von komplex konjugierten Eigenwerten in Erscheinung treten. Dadurch ist die Struktur der sich ergebenden Lösungsklasse reichhaltiger, was andererseits aber auch zu zusätzlichen Schwierigkeiten in der asymptotischen Analyse führt.

b) Es ist bemerkenswert, daß sich die Eigenschaften der hier besprochenen Negatonen deutlich von denen der Positonen unterscheiden: Positonen sind schwach lokalisiert, fallen wie $1/x$ und oszillieren für x groß; außerdem tritt in Kollisionen zwischen Positonen kein Phasenshift auf (vergleiche [37]).

Im Anhang haben wir zur Illustration einige Computergraphiken zusammengestellt.

3.2 Superposition von abzählbar vielen Solitonen

Daß sich einzelne Solitonen durch „nichtlineare Superposition" zu den N-Solitonen zusammensetzen lassen, ist eine grundlegende Bemerkung in der Solitonentheorie. Es ist daher naheliegend, Lösungen zu suchen, die sich aus N-Solitonen durch einen geeigneten Grenzübergang für $N \to \infty$ ergeben, also durch Superposition abzählbar vieler Solitonen.

Der Zugang zu solchen Lösungen läßt sich bei unserer Vorgehensweise darauf zurückführen, daß der in Hauptsatz 2.6 eingehende Banachraum frei gewählt werden kann. Als kanonische Verallgemeinerung der Situation aus Lemma 3.1 betrachten wir:

Voraussetzung 3.10 *Sei E einer der klassischen Folgenräume c_0 oder (gewichteter) l_p für $1 \le p < \infty$ und A ein Diagonaloperator auf E, der von einer beschränkten Folge $k = (k_i)_i \in \ell_\infty$ erzeugt wird, also*

$$A : E \longrightarrow E \quad \text{mit } A(\xi_i)_i = (k_i \xi_i)_i.$$

Zuerst konzentrieren wir uns auf den Fall $0 \notin \operatorname{spec}(A) + \operatorname{spec}(A)$. Unter dieser Bedingung an den Operator A wird der Operator X, der die Rangbedingung $\operatorname{rank}(AX + XA) = 1$ aus Hauptsatz 2.6 erfüllt, durch Folgerung 2.12 gegeben, und man kommt zu einer Lösungsklasse, die man sogar durch jede beliebige Determinante ausdrücken kann.

Satz 3.11 *([3] Proposition IV C 3 (i)) Die Situation sei wie in Voraussetzung 3.10. Gilt $\inf_{i,j} |k_i + k_j| > 0$, so gehört der Operator*

$$L(x,t) = \left(\frac{a_j c_i}{k_i + k_j} \exp\left(k_i x + k_i^3 t\right) \right)_{i,j=1}^{\infty}$$

für beliebige $a = (a_i)_i \in E'$, $c = (c_i)_i \in E$ zur Komponente $\mathcal{A}(E)$ jedes vorgegebenen quasi-Banachideals $\mathcal{A}$ mit einer stetigen Determinante δ, und

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \delta(1 + L)$$

ist eine Lösung der KdV, vorausgesetzt das Argument im Logarithmus verschwindet nicht.

Als nächstes beschäftigen wir uns mit der Frage, inwiefern man auf diese Bedingung verzichten, das heißt Diagonaloperatoren A mit $0 \in \operatorname{spec}(A) + \operatorname{spec}(A)$ zulassen kann.

Offensichtlich ist dann Folgerung 2.12 nicht mehr anwendbar, und man steht somit vor dem Problem, daß für die formale Lösung $X = \left(\frac{a_j c_i}{k_i + k_j}\right)_{i,j}$ der Operatorgleichung $AX + XA = a \otimes c$ (für $a \in E'$, $c \in E$) a priori noch nicht einmal die Beschränktheit sichergestellt ist. Ein vernünftiger Ansatz besteht darin, geeignete Bedingungen an $a \in E'$ und $c \in E$ zu finden, also zusätzliche Annahmen über die Wahl des eindimensionalen Operators $a \otimes c$ zu machen, um dadurch zu erreichen, daß X in einem quasi-Banachideal mit einer „möglichst guten" Determinante liegt. Der folgende Satz zeigt, daß dies möglich ist, ohne daß es zu wesentlichen Einbußen an die Qualität der Lösungsformel kommt.

Der Einfachheit halber betrachten wir Folgen $k = (k_i)_i$ mit positiven Einträgen $k_i > 0 \, \forall i$.

Satz 3.12 *(*[3] *Proposition IV C 3 (ii)) Die Situation sei wie in Voraussetzung 3.10. Gilt $k_i > 0$ für alle i, so gehört der Operator*

$$L(x,t) = \left(\frac{a_j c_i}{k_i + k_j} \exp\left(k_i x + k_i^3 t\right)\right)_{i,j=1}^{\infty}$$

für $(a_i/\sqrt{k_i})_i \in E'$ und $(c_i/\sqrt{k_i})_i \in E$ zur Komponente $\mathcal{L}_\infty \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{L}_1(E)$ des quasi-Banachideals $\mathcal{L}_\infty \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{L}_1$, und

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \det\nolimits_\lambda (I + L)$$

($\det_\lambda$ bezeichnet die spektrale Determinante auf $\mathcal{L}_\infty \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{L}_1$) ist eine Lösung der KdV, vorausgesetzt das Argument im Logarithmus verschwindet nicht.

Bemerkung 3.13 *Das quasi-Banachideal $\mathcal{L}_\infty \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{L}_1 = \bigcup_{E,F} \mathcal{L}_\infty \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{L}_1(E,F)$ besteht aus Operatoren $T \in \mathcal{L}(E,F)$ (E, F Banachräume), die über einen L_1-Raum, einen Hilbertraum und schließlich einen L_∞-Raum faktorisieren (mit der üblichen Produktnorm). Es gilt $\mathcal{L}_\infty \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{S}_1^{eig}$, ein Sachverhalt, der hauptsächlich auf Grothendieck's Theorem (siehe Pisier* [48]*) basiert. Die Existenz der spektralen Determinante $\det_\lambda$ folgt dann aus Satz 2.7.*

In Artikeln von Gesztesy et al. – siehe [21] für die KdV – wird ein völlig anderer Zugang zur Konstruktion von „Limit-Solitonen" (Notation von [21] übernommen) gegeben.

Ausgangspunkt ist das N-Soliton in der Gestalt

$$u_N(x,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \det \left(1_N + C_N(x,t)\right)$$
$$\text{mit } C_N(x,t) = \left(\frac{b_i b_j}{k_i + k_j} \exp \frac{1}{2}\left((k_i + k_j)x + (k_i^3 + k_j^3)t\right)\right)_{i,j}^{N}$$

für $k_i > 0$, $b_i > 0$. Dies entspricht den Bezeichnungen in [21] bis auf Transformation zur KdV in der Form (1) und eine Umskalierung der k_i, b_i (mit $\kappa_i = k_i/2$ für den von Gesztesy et al. verwendeten Parameter κ_i). Die Übereinstimmung mit der Darstellung der N-Solitonen in Lemma 3.1 ergibt sich leicht aus den Eigenschaften einer Determinante. Man faßt nun $C_N(x,t)$ in der üblichen Weise als Operator auf ℓ_2 auf. Unter der

Hauptannahme
a) $C_N(x,t)$ *konvergiert für* $N \to \infty$ *bezüglich der Spurnorm* $\|\cdot|\mathcal{N}\|$ *gegen einen Operator* $C_\infty(x,t)$, *der somit ein Spurklasse-Operator ist, das heißt* $C_\infty(x,t) \in \mathcal{N}(\ell_2)$,
b) Die zum Streuproblem gehörigen Schrödinger-Operatoren $H_N(t) = d^2/dx^2 + u_N(x,t)$ *in* $L_2(\mathbb{R})$ *sind bezüglich* N *(und* t*) gleichmäßig von oben beschränkt,*

existiert dann das sogenannte Limit-Soliton

$$(19)\qquad \begin{aligned} u_\infty(x,t) &= 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\det\Big(1 + C_\infty(x,t)\Big) \\ \text{mit } C_\infty(x,t) &= \left(\frac{b_i b_j}{k_i + k_j}\exp\frac{1}{2}\Big((k_i + k_j)x + (k_i^3 + k_j^3)t\Big)\right)_{i,j}^{\infty}, \end{aligned}$$

wobei det die Fredholm'sche Determinante bezeichnet.

Nach Umformulierung dieser Hauptannahme in Bedingungen an die Folgen $(k_i)_i$, $(b_i)_i$ basiert nun das Hauptergebnis von Gesztesy et al. auf einer sorgfältigen Untersuchung der spektralen Eigenschaften des zu den N-Solitonen assoziierten Schrödinger-Operators H_N sowie seiner Streudaten in $N \to \infty$.

Satz 3.14 *(*[21] *Theorem 6.1) Sei* $(k_i)_i \in \ell_\infty$ *eine beschränkte Folge mit positiven Einträgen* $k_i > 0\ \forall i$ *und* $k_i \neq k_j$ *für* $i \neq j$. *Außerdem gelte* $(b_i^2/k_i)_i \in \ell_1$ *mit* $b_i > 0\ \forall i$.

Dann ist durch (19) *eine Lösung der KdV gegeben.*

Unsere Ergebnisse (Satz 3.11, Satz 3.12) zeigen, daß sich diese Lösungen in einem wesentlich allgemeineren Rahmen realisieren lassen. Umgekehrt findet sich das Resultat von Gesztesy et al. in unseren Ergebnissen wie folgt wieder:

Folgerung 3.15 *(aus Satz 3.12) Seien* $(k_i)_i$, $(b_i)_i$ *zwei Folgen mit positiven Einträgen und es gelte* $(k_i)_i \in \ell_\infty$, $(b_i^2/k_i)_i \in \ell_1$. *Dann ist*

$$L(x,t) = \left(\frac{b_i b_j}{k_i + k_j}\exp\frac{1}{2}\Big((k_i + k_j)x + (k_i^3 + k_j^3)t\Big)\right)_{i,j}^{\infty} \in \mathcal{L}_\infty \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{L}_1(\ell_2)$$

wegen $\mathcal{L}_\infty \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{L}_1(\ell_2) \subseteq \mathcal{N}(\ell_2)$ *(vergleiche* [29]*) ein Spurklasse-Operator auf* ℓ_2, *also* $L \in \mathcal{N}(\ell_2)$, *und*

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\det(1 + L)$$

*(*det *die Fredholm'sche Determinante auf* $\mathcal{N}(\ell_2)$*) ist eine (wohldefinierte, da* $\det(1 + L) > 0$*) Lösung der KdV.*

Dies ist genau die von Gesztesy et al. beschriebene Lösungsklasse, vergleiche Satz 3.14.

Bemerkung 3.16 *Fordert man zusätzlich zu der Hauptannahme auch noch* $(k_i)_i \in \ell_1$, *so kann man sogar zeigen, daß das Limit-Soliton (19) ein reflektionsloses Potential darstellt, für Einzelheiten siehe* [21].

Bemerkung 3.17 *a) Die Arbeit* [21] *von Gesztesy et al. beinhaltet weitere bedeutende Beiträge, auf die wir hier nicht eingegangen sind und die im Rahmen unserer Methoden auch nicht zugänglich sind. Beispielsweise führt die detaillierte Beschreibung der spektralen Eigenschaften des zum Steuproblem assoziierten Schrödinger-Operators*

$$H_\infty(t) = d^2/dx^2 + u_\infty(x,t), \quad u_\infty \text{ ein Limit-Soliton gemäß Satz 3.14),}$$

in [21] *Theorem 5.9 zur Lösung des folgenden Problems:*

Zu vorgegebener, abzählbarer (und beschränkter) Menge $\{k_j^2/4 \,|\, j\}_j \subseteq (0,\infty)$ *konstruiere explizit ein (reelles, glattes) Potential u, so daß das Punktspektrum von* $H = d^2/dx^2 + u$ *die Menge* $\{k_j^2/4 \,|\, j\}_j$ *enthält und das absolut stetige Spektrum von H mit* $(-\infty, 0]$ *übereinstimmt.*

Andererseits ist die aufwendige Analysis in Verbindung mit den Streudaten, die einen wesentlichen Teil der Argumente in [21] *ausmacht, nicht notwendig, wenn es darum geht, die Lösungsformel zu verifizieren. Im Zusammenhang mit unserer Methode ist die Beweisführung daher vergleichsweise einfach.*

b) In [22] *ist Gesztesy und Renger eine Übertragung ihrer Methoden auf das Toda-Gitter gelungen, wesentlich ist hier die Untersuchung der zum Streuproblem gehörenden Jacobi-Operators auf* $\ell_2(\mathbb{Z})$. *Wie sich die dort konstruierten Limit-Solitonen bei uns wiederfinden wird in* [53] *erklärt.*

Zum Schluß dieses Abschnittes zeigen wir, wie sich die beiden in Satz 3.11 und Satz 3.12 hergeleiteten Lösungsklassen auf eine ganz spezielle Situation zurückführen lassen. Dabei handelt es sich um

- die Reduktion auf die Idealkomponente $\mathcal{N}(\ell_1)$ und
- die Einschränkung auf eindimensionale Operatoren der Form $e_0 \otimes d$ mit $e_0 = (1,1,\ldots) \in \ell_\infty$ und einer Folge d, an die gewisse Summierbarkeitsforderungen gestellt werden. Auf diese Weise kann man die Anzahl der beteiligten Parameter auf die Hälfte reduzieren.

Die Determinante auf $\mathcal{N}(\ell_1)$ ist daher in gewissen Sinn universell für die Konstruktion von Lösungen mit Diagonaloperatoren.

Hauptsatz 3.18 *(*[3] *Theorem IV C 5) Unter jeder der beiden Voraussetzungen*

a) $\inf_{i,j} |k_i + k_j| > 0$ *und* $d = (d_i)_i \in l_1$.
b) $k_i > 0 \;\forall i$ *und* $d = (d_i)_i$ *mit* $(d_i/k_i)_i \in l_1$.

gehört der Operator

$$(20) \qquad L(x,t) = \left(\frac{d_i}{k_i + k_j} \exp\left(k_i x + k_i^3 t\right) \right)_{i,j=1}^{\infty}$$

zur nuklearen Komponente $\mathcal{N}(\ell_1)$, *und* $u = 2\partial_x^2 \log \det_{\mathcal{N}}(I + L)$ *ist eine Lösung der KdV, vorausgesetzt das Argument im Logarithmus verschwindet nicht.*

Außerdem läßt sich im Fall a) jede Lösung aus Satz 3.11, im Fall b) jede Lösung aus Satz 3.12 explizit in dieser Form ausdrücken.

Bemerkung 3.19 *Die in Hauptsatz 3.18 erzielte Reduktion der beiden Lösungsklassen aus Satz 3.11 und Satz 3.12 auf die Idealkomponente $\mathcal{N}(\ell_1)$ kann man in ähnlicher Weise für alle anderen von uns behandelten Solitonengleichungen formulieren.*

Die Tatsache, daß sich bei der KdV diese Reduktion für beide Lösungsklassen mit dem gleichen Operator (20) ausdrücken läßt, beruht allerdings auf der hier zugrundeliegenden speziellen Eindimensionalitätsforderung, die durch den elementaren Ausdruck $\Phi_{A,A}(X) = AX + XA$ gegeben ist.

Etwa im Falle der Kadomtsev-Petviashvili-Gleichung, wo man den elementaren Ausdruck $\Phi_{A_1,A_2}(X) = A_2X + XA_1$ verwendet, ist eine solch einheitliche Reduktion nur unter der Zusatzvoraussetzung

$$\left(\sqrt{k_i^{(2)}/k_i^{(1)}}\right)_i \in \ell_\infty$$

an die Diagonaloperatoren A_1, A_2, die von Folgen $k^{(1)} = (k_i^{(1)})_i$, $k^{(2)} = (k_i^{(2)})_i$ (beschränkt, mit positiven Einträgen) erzeugt werden, möglich.

Eine ausführliche Diskussion dieser Zusammenhänge findet man in [13].

4 Einige andere Aspekte

Im letzten Abschnitt wollen wir auf einige weiterführende Fragestellungen im Zusammenhang mit unserer Operator-Methode eingehen.

Eine erste natürliche Frage besteht darin, ob und mit welchen mathematischen Methoden sich die Operator-Methode noch weiter ausdehnen läßt, und welche Anwendungen sich dabei ergeben.

Da dem erzeugenden Operator A eine Schlüsselrolle in unserer Strategie zukommt (wie die Beispiele, die wir im letzten Abschnitt untersucht haben, belegen), liegt vor allem der Versuch nahe, diese Klasse von zugelassenen erzeugenden Operatoren A zu erweitern.

Im ersten Unterabschnitt wollen wir aufzeigen, wie man die Theorie der C_0-Halbgruppen nutzen kann, um auch unbeschränkte Operatoren A in die Strategie einzubeziehen. Einige Beispiele sollen den Vergleich zum bisherigen ermöglichen.

Eine andere wichtige Frage ist die nach dem Gültigkeitsbereich unserer Operator-Methode, genauer interessieren wir uns dafür, in wie weit sich klassische Lösungstechniken der Solitonentheorie mit unserem Ansatz in Verbindung bringen lassen.

So gibt die Inverse Streumethode ein kraftvolles Werkzeug zur allgemeinen Lösung des Anfangswertproblemes

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x, \qquad u(x,0) = u_0(x),$$

für schnell fallende Potentiale $u_0(x)$ an die Hand. Im zweiten Unterabschnitt wollen wir darstellen, wie sich die so gewonnenen Lösungen in unserer Strategie wiederfinden lassen.

4.1 Erweiterung auf unbeschränkte Operatoren

In Satz 2.2 haben wir erklärt, wie man für beschränkte Operatoren $A \in \mathcal{L}(F)$, F ein Banachraum, Lösungen der Operator-KdV (2) beschreiben kann. Eine abstraktere Formulierung dieser Aussage lautet:

Satz 4.1 *Sei $A \in \mathcal{L}(F)$. Gegeben seien außerdem zwei Familien $L(x,t)$, $M(x,t)$ von beschränkten Operatoren, die einmal stetig differenzierbar nach der Zeitvariablen t und viermal stetig differenzierbar nach der Ortsvariablen x sind, und die*

a) den beiden Basisgleichungen $L_x = AL$, $L_t = A^3 L$ und $M_x = AM$, $M_t = A^3 M$ sowie

b) der Kopplungsbedingung $AL + LA = M$ genügen.

Dann ist $U := \left((1+L)^{-1}M\right)_x$ Lösung der Operator-KdV (2) in $\mathcal{L}$, vorausgesetzt daß $(1+L)^{-1}$ existiert.

Wie in [12] gezeigt wird, erhält man völlig analog Lösungen der Operator-KdV (2) auch für unbeschränkte Operatoren $A \in L(F)$.

Satz 4.2 *([12] Proposition 2.1) Sei $A \in L(F)$ dicht definiert und abgeschlossen. Wieder seien Familien beschränkter Operatoren $L(x,t)$, $M(x,t)$ gegeben, die sowohl einmal stetig differenzierbar nach der Zeitvariablen t und viermal stetig differenzierbar nach der Ortsvariablen x sind als auch $L(x,t)f$, $M(x,t)f \in D(A^n)$ $(1 \leq n \leq 4)$ für alle $f \in F$ erfüllen. Ferner sollen sie*

a) den beiden Basisgleichungen $L_x = AL$, $L_t = A^3 L$ und $M_x = AM$, $M_t = A^3 M$ sowie

b) der Kopplungsbedingung, genauer $ALf + LAf = Mf$ $\forall f \in D(A)$, genügen.

Dann ist erneut durch $U := \left((1+L)^{-1}M\right)_x$ eine Lösung der Operator-KdV (2) in $\mathcal{L}$ gegeben, vorausgesetzt daß $(1+L)$ invertierbar ist.

Die Skalarisierungstechnik aus Abschnitt 2.2 ist nun ohne Einschränkung anwendbar, das heißt man kann unter der Voraussetzung $M(x,t) = c \otimes m(x,t)$ durch Anwendung der Spur wieder zu skalaren Lösungen der KdV (1) kommen.

Die konkrete Durchführung unserer Strategie stößt auf zwei grundsätzliche Probleme.

(1) Um die Basisgleichung $T_x = AT$ zu lösen, konnten wir für beschränkte Operatoren $A \in \mathcal{L}(F)$ mit der Exponentialfunktion arbeiten,

$$T(x) = \exp(xA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n, \qquad A \in \mathcal{L}(F).$$

Eine Entsprechung dieses Konzeptes für unbeschränkte Operatoren $A \in L(F)$ stellt die Theorie der C_0-Halbgruppen bereit, für die man eine umfassende Einführung in [40], [43] findet. Dabei heißt eine Halbgruppe $\left(T(x)\right)_{x\geq 0}$ von beschränkten Operatoren auf F eine C_0-Halbgruppe, falls sie stark stetig ist, das heißt $\lim_{x\to 0} T(x)f = f$ $\forall f \in F$.

Unter dem infinitesimalen Erzeuger A einer Halbgruppe $\left(T(x)\right)_{x\geq 0}$ versteht man den Operator A, der auf $D(A) = \{f \in F : \exists \lim_{x\to 0}(T(x)f - f)/x\}$ durch $Af =$

$\lim_{x \to 0}(T(x)f - f)/x$ gegeben ist. Im allgemeinen gilt $A \in L(F)$. Man zeigt leicht, daß A dicht definiert und abgeschlossen ist.

Eine solche Halbgruppe modelliert die Eigenschaften einer Exponentialfunktion, denn für alle $f \in D(A)$ ist $T(x)f \in D(A)$, und es gilt

$$\frac{d}{dx} T(x)f = AT(x)f = T(x)Af$$

(man verwendet daher auch die symbolische Schreibweise $(e^{xA})_{x \geq 0}$).

Lemma 4.3 *([12] Theorem 2.3) Sei $L(x,t) \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ ein quasi-Banachideal mit stetiger Determinante δ. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ gibt, so daß λA der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe ist, gilt auch für die aus Satz 4.2 hergeleitete Lösungsformel die Darstellung $u = 2\partial_x^2 \log \delta(1 + L)$.*

(2) Um der Operatorgleichung $AX + XA = C$ zu vorgegebenem Operator $C \in \mathcal{K}(F)$ Sinn zu geben, geht man folgendermaßen vor:

Ist $A \in L(F)$ Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $\big(T(x)\big)_{x \geq 0}$, so wird durch $\big(\mathcal{T}(x)\big)_{x \geq 0}$ mit $\mathcal{T}(x)X = T(x)XT(x)$ eine C_0-Halbgruppe auf $\mathcal{K}(F)$ definiert, deren Erzeuger $\Phi_{A,A}$ formal durch

$$\begin{aligned} \Phi_{A,A}X &= \lim_{x \to 0} \frac{\mathcal{T}(x)X - X}{x} = \frac{d}{dx}\mathcal{T}(x)X\Big|_{x=0} \\ &= \frac{d}{dx}\Big(T(x)XT(x)\Big)\Big|_{x=0} = AX + XA \end{aligned}$$

gegeben ist. Offenbar ist $\Phi_{A,A}$ nur für solche X, deren Bild in $D(A)$ enthalten ist, überhaupt erklärt. Kriterien für die Invertierbarkeit von $\Phi_{A,A}$ haben wir in Satz 2.15 zusammengestellt.

Wir fassen zusammen.

Satz 4.4 *(analog [12] Proposition 3.6) Sei F ein Banachraum mit metrischer Approximationseigenschaft. A und A^3 seien Erzeuger von C_0-Halbgruppen $(e^{xA})_{x \geq 0}$, $(e^{tA^3})_{t \geq 0}$ auf F und $\Phi_{A,A}$ invertierbar.*

Weiter sei $B \in \mathcal{N}(F)$ ein Operator, dessen Bild in $D(A^k)$ enthalten ist, $A^k B$ nuklear, und es gelte $ABf + BAf = (a \otimes c)f \; \forall f \in D(A)$ mit $c \in D(A^k)$ $(1 \leq k \leq 4)$.

Dann löst $u = 2\partial_x^2 \log \det_{\mathcal{N}}(1 + e^{xA}e^{tA^3}B)$ die KdV (1), vorausgesetzt die Determinante verschwindet nicht.

Ein natürliches Verfahren, um die Invertierbarkeit von $\Phi_{A,A}$ zu garantieren, besteht darin, für $\omega(A) = \inf\{w \in \mathbb{R} |$ es gibt ein $M \geq 0$ so daß $\|T(x)\| \leq Me^{wx}$ für alle $x \geq 0\}$, die sogenannte Wachstumsschranke, $\omega(A) < 0$ zu fordern und damit die Voraussetzung (i) in Satz 2.15 zu erfüllen. Genauer gilt dann, wie sich leicht aus der Eigenschaft der C_0-Halbgruppe $\big(\mathcal{T}(x)\big)_{x \geq 0}$ auf $\mathcal{N}(F)$,

$$\int_0^{x_0} \mathcal{T}(x)(a \otimes c)dx \in D(\Phi_{A,A})$$

$$\text{und} \quad \Phi_{A,A} \int_0^{x_0} \mathcal{T}(x)(a \otimes c)dx = \mathcal{T}(x_0)(a \otimes c) - (a \otimes c),$$

im Grenzübergang $x_0 \to \infty$ verifizieren läßt:

Lemma 4.5 *Sei $-A \in L(F)$ Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $\big(T(x)\big)_{x\geq 0}$ auf F mit $\omega(-A) < 0$. Dann existiert der durch das Bochner-Integral definierte Operator $B = \int_0^\infty T(x)(a \otimes c)T(x)dx$, ist nuklear, und es gilt $B \in D(\Phi_{A,A})$ und $AB + BA = a \otimes c$.*

Zur Illustration der so vorgenommenen Ausdehnung der Operator-Methode auf unbeschränkte Operatoren greifen wir noch einmal die in Abschnitt 3.2 besprochene Konstruktion von Lösungen auf, die die abzählbare Superposition von Solitonen beschreiben.

Zunächst erläutern wir, wie man im Sinn von Satz 4.4, Lemma 4.5 zu neuen Lösungen dieser Art gelangen kann.

Sei dazu F einer der klassischen Folgenräume c_0 oder (gewichteter) ℓ_p für $1 \leq p < \infty$ und $(k_i)_i$ eine (nicht notwendig beschränkte) Folge, zu der der Operator

$$A : F \to F \quad \text{mit} \quad A(\xi_i)_i = (k_i \xi_i)_i$$

gegeben ist. Solche Multiplikationsoperatoren gehören zu den Standardbeispielen in der Theorie der C_0-Halbgruppen (vergleiche etwa [40] Abschnitt A-I.2), und es ist bekannt:

$$-A \text{ erzeugt eine } C_0\text{-Halbgruppe } \big(T(x)\big)_{x\geq 0} \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_i \Re(-k_i) < \infty.$$

Außerdem gilt in diesem Fall $\omega(-A) = \sup_i \Re(-k_i)$.

Um die Existenz von $B := \Phi_{A,A}^{-1}(a \otimes c)$ zu gewährleisten, reicht daher nach Lemma 4.5 die Forderung $\sup_i \Re(-k_i) < 0$, i.e.

$$(21) \qquad \inf_i \Re(k_i) > 0.$$

Ist schließlich noch $c \in D(A^k)$, $1 \leq k \leq 4$, so sind alle nötigen Voraussetzungen erfüllt, und offensichtlich erhält man auf diese Weise Lösungen u auf $([0,\infty) \times [0,\infty)) \cap D(u)$.

Bemerkung 4.6 *Die einzige Voraussetzung (21) an die Folge $(k_i)_i$ läßt ohne weiteres reelle Folgen zu, die nach oben unbeschränkt sind. Man kann also auf die hier besprochene Weise Lösungen konstruieren, die man als Überlagerung von abzählbar vielen Solitonen, die sogar beliebig schnell und auch beliebig groß werden können (Zu einem Soliton zum Eigenwert k_i gehört die Geschwindigkeit $-k_i^2$ und die Amplitude $k_i^2/2$), auffassen kann.*

Außerdem wollen wir noch zeigen, wie sich die Voraussetzungen an die Folge $(k_i)_i$ durch eine Konstruktion gemäß Satz 4.2, Lemma 4.3 (falls $(k_i)_i \subset \mathbb{R}$ setze $\lambda = \mathrm{i}$) noch weiter abschwächen lassen.

Folgerung 4.7 *(folgt [12] Corollar 4.4) Sei $(k_i)_i$ eine Folge reeller Zahlen mit $k_i + k_j \neq 0\ \forall i,j$ und $(d_i)_i$ eine Folge positiver Zahlen mit $(d_i)_i \in \ell_\delta$ für ein $\delta \in (0,1)$, so daß die folgenden Voraussetzungen für $t \in (-\infty, 0]$ erfüllt sind:*

$$(22) \qquad \sup_{i,j} \ (d_i d_j)^{(1-\delta)/2} \frac{\sqrt{|k_i k_j|}}{|k_i + k_j|} \ \ |k_i^n l_i| < \infty \ \textit{und} \ \big(d_i^{(1-\delta)/2}\sqrt{|k_i|} \ \ (k_i^n l_i)\big)_i \in c_0 \ \forall x$$

$(0 \leq n \leq 4)$ mit $l_i(x,t) = \exp\big(k_i x + k_i^3 t\big)$.

Dann ist $a = \left(d_i^{(1-\delta)/2}\sqrt{|2k_i|}\ \right)_i \in c_0'$, $c = \left(d_i^{(1-\delta)/2}\sqrt{|2k_i|}\ \mathrm{sign}(k_i)\right)_i \in c_0$ *und*

$$M(x,t) = \left((a_i)_i \otimes (c_i\ l_i)_i\right), \qquad L(x,t) = \left(\frac{a_j c_i}{k_i + k_j}\ d_j^\delta\ l_i\right)_{i,j} \in \mathcal{N}(c_0)$$

erfüllen die Voraussetzungen von Satz 4.2, Lemma 4.3.

Also ist durch $u = 2\partial_x^2 \log \det_{\mathcal{N}}(1 + L)$ *eine Lösung der KdV (1) gegeben, vorausgesetzt die Determinante verschwindet nicht.*

Bemerkung 4.8 *Für positive Folgen* $k_i > 0\ \forall i$, *die von Null wegbleiben,* $\inf_i k_i > 0$ *(man betrachtet also Überlagerungen von Solitonen mit gewissen Mindestgeschwindigkeiten), kann man Voraussetzung (22) ersetzen durch die „physikalisch sinnvolle" Bedingung*

$$\text{(23)} \qquad \lim_{i\to\infty} d_i^{1/k_i} = 0.$$

Anschaulich bedeutet (23), daß die einzelnen Solitonen zum Zeitpunkt $t = 0$ *„weit genug" von einander entfernt sind (Das Maximum des Solitons zum Eigenwert* k_i *befindet sich zum Zeitpunkt* $t = 0$ *bei* $x_i = -(\log d_i)/k_i)$*). Solche Lösungen kann man sicher auf* $\mathbb{R} \times (-\infty, 0]$ *beschreiben.*

In der Arbeit [12] gehen die Autoren nun auf die Schwierigkeit ein, den Operator A so zu wählen, daß mit A auch A^3 wieder Erzeuger einer C_0-Halbgruppe ist, und überwinden diese mittels der Technik gebrochener Potenzen für m-akkretive Operatoren (Operatoren T, für die es ein $\lambda \geq 0$ gibt, so daß $\left((-T) - \lambda I\right)$ eine (auf dem ganzen Raum definierte) beschränkte Inverse hat). Nach dem Lumer-Phillips-Theorem gilt:

T dicht definiert, m-akkretiv

$\Longrightarrow -T$ Erzeuger einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen.

Für m-akkretive Operatoren T kann man gebrochene Potenzen T^α, $\alpha \in (0,1)$, definieren (eine ausführliche Beschreibung der Vorgehensweise findet man etwa in [59]) und erhält mit T^α wieder m-akkretive Operatoren. Auch deren Wachstumsschranke läßt sich ausrechnen, $\omega(-T^\alpha) = \sup\{\Re(\lambda) | \lambda \in \mathrm{spec}(-T^\alpha)\}$ mit $\mathrm{spec}(T^\alpha) = \mathrm{spec}(T)^\alpha$, deren Kontrolle nach Lemma 4.5 die Invertierbarkeit von $\Phi_{T^\alpha, T^\alpha}$ garantiert. Eine vernünftige Wahl ist somit $A = -T^{1/3}$ zu einem vorgegebenen m-akkretiven Operator T mit $\omega(-T) < 0$.

Davon ausgehend werden in [12] weitere Lösungen konstruiert, deren Eigenschaften sich von denen der hier besprochenen deutlich unterscheiden. Beispielsweise führt die auf $L_2(0,\tau)$ ($\tau > 0$ fest) durch

$$T(t)f(s) = \begin{cases} f(s+t), & s+t \leq \tau \\ 0, & s+t > \tau \end{cases}$$

gegebene nilpotente C_0-Halbgruppe von Translationen zu Lösungen $u(x,t)$ in $[0,\infty) \times [0,\infty)$, so daß $u(\cdot, t)$ für festes $t \geq 0$ schneller als exponentiell gegen Null geht und die Lösung u selbst nach vorgegebener Zeit τ verschwindet.

4.2 Das Anfangswertproblem

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, kann man mit der Inversen Streumethode das Anfangswertproblem

$$(24)\qquad u_t = u_{xxx} + 6uu_x, \qquad\qquad u(x,0) = u_0(x),$$

für schnell fallende Potentiale $u_0(x)$ (also $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ der Schwartz-Raum) lösen.

Für die KdV besteht das (direkte) Streuproblem hauptsächlich in der Untersuchung der spektralen Eigenschaften des Schrödinger-Operators H in $L_2(\mathbb{R})$,

$$(25)\qquad H = \frac{d^2}{dx^2} + u_0(x) \quad \text{mit } D(H) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(s)|(1+|s|)^2 ds < \infty \right\}$$

(der Sobolev-Raum $H^2(\mathbb{R})$ zweiter Ordnung). Man konstruiert zu H die sogenannten Streudaten $\Sigma(H) = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_N; d_1, \ldots, d_N; \rho(\cdot)\}$, die sich wie folgt zusammensetzen:

a) N positive Zahlen $\kappa_1, \ldots, \kappa_N$, so daß $\{\kappa_1^2, \ldots, \kappa_N^2\}$ das diskrete Spektrum von H ist,

b) N positive Normierungskonstanten $d_1, \ldots, d_N$ und

c) der Reflexionskoeffizient ρ, eine stetige Funktion, die auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definiert ist und den Bedingungen $\rho(-s) = \overline{\rho(s)}$ und $|\rho(s)| < 1$ für $s \neq 0$ genügt.

Unter dem inversen Streuproblem versteht man umgekehrt die Rekonstruktion des zu H gehörenden Potentials zu vorgegebenen Streudaten $\Sigma(H)$. Dazu definiert man mit letzteren den Kern

$$(26)\qquad \Gamma(x) = \sum_{j=1}^{N} d_j e^{\kappa_j x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \rho(s) e^{-\mathrm{i}sx} ds, \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

und betrachtet die sogenannte Gelfand-Levitan-Marchenko-Gleichung

$$(27)\qquad 0 = \Gamma(x+y) + k(x,y) + \int_{-\infty}^{x} k(x,z)\Gamma(z+y)dz \quad (y \leq x)$$

für $k(x,y)$ $(y \leq x)$. Diese ist eindeutig lösbar, und man kann zeigen, daß sich das Potential u_0 aus der Lösung der Gelfand-Levitan-Marchenko-Gleichung durch $u_0(x) = -2\partial_x k(x,x)$ ergibt. Für die mathematischen Details zur Formulierung und Durchführung des inversen Streuproblems für den Schrödinger-Operator H verweisen wir auf [10], Kapitel 2.1, wo diese sorgfältig ausgearbeitet wurden.

Die Inverse Streumethode nutzt diese Information, um das Anfangswertproblem der KdV (24) gemäß der folgenden Vorgehensweise zu lösen:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\boxed{\begin{array}{l} u(x,0)\\ = u_0(x)\end{array}} \arrow[r, "\text{direktes Streuproblem}"] \arrow[d] & \boxed{\begin{array}{l}\kappa_1(0),\dots,\kappa_N(0),\\ d_1(0),\dots,\ d_N(0);\quad \rho(s;0)\end{array}} \arrow[d, "\begin{array}{c}\text{Implementierung des}\\ \text{Zeitverhaltens}^{*}\end{array}"] \\
\boxed{u(x,t)} & \boxed{\begin{array}{l}\kappa_1(t),\dots,\kappa_N(t),\\ d_1(t),\dots,\ d_N(t);\quad \rho(s;t)\end{array}} \arrow[l, "\text{inverses Streuproblem}"']
\end{tikzcd}$$

* Die Strategie zur Implementierung des Zeitverhaltens besteht darin, für eine bereits gegebene Lösung $u(x,t)$ des Anfangswertproblems aus der Gültigkeit der KdV eine Formel für die Zeitabhängigkeit der Streudaten abzuleiten. Man erhält: $\kappa_j(t) = \kappa_j(0)$, $d_j(t) = d_j(0)e^{8\kappa_j^3 t}$ und $\rho(s;t) = \rho(s;0)e^{8is^3 t}$.

Bemerkung 4.9 *Die Bedingung, daß u_0 ein schnell fallendes Potential ist, ist besonders bequem bei der Durchführung der Inversen Streumethode. Es gibt jedoch zahlreiche Möglichkeiten, diese Wachstumsbedingung an das Potential u_0 abzuschwächen.*

Beispielsweise ist es Marchenko, aufbauend auf den Konzepten, die wir in Abschnitt 2.5 geschildert haben, in [31] *gelungen, das Anfangswertproblem für sehr allgemeine Potentiale u_0, die insbesondere nicht mehr schnell fallend oder periodisch sein müssen, zu lösen.*

In seiner Dissertation [10] (die Idee geht ursprünglich auf [2] zurück) gibt Blohm zu vorgegebenen Streudaten konkrete Operatoren $K(x,y)$ an, so daß durch $k(x,y) = \operatorname{tr}(K(x,y))$ die Gelfand-Levitan-Marchenko-Gleichung (27) gelöst wird. Ausgehend von dem abstrakten Resultat

Satz 4.10 *(*[9] *Theorem 3.2) Sei F ein Banachraum und A der Erzeuger einer C_0-Gruppe $\left(e^{xA}\right)_{x\in\mathbb{R}}$ auf F. Außerdem seien $a \in F'$, $c \in F$ gegeben und $B \in \mathcal{L}(F)$ so, daß*

$$\langle B\hat{c}, \hat{a}\rangle = \int_0^\infty \langle \exp(-sA)\hat{c}, a\rangle\langle \exp(-sA)c, \hat{a}\rangle ds \quad \forall \hat{a} \in F', \hat{c} \in F \textit{ gilt,}$$

weiterhin existiere die Inverse in (28).

Dann ist $k(x,y) = \operatorname{tr}(K(x,y))$,

$$K(x,y) = -\Big(\exp\big((y-x)A\big)\big(1+\exp(2xA)B\big)^{-1}\exp(2xA)\Big)(a\otimes c), \quad y \le x \tag{28}$$

eine Lösung der Gelfand-Levitan-Marchenko-Gleichung (27) zum Kern $\Gamma(x) = \langle \exp(xA)c, a\rangle$.

konstruiert er einen Operator A so, daß der Kern $\Gamma(x)$ auf die Streudaten abgestimmt, das heißt durch (26) gegeben ist. Um dies zu erreichen, denkt man sich $\Gamma(x) =: \Gamma^d(x) + \Gamma^c(x)$ in kanonischer Weise in seinen diskreten und seinen kontinuierlichen Teil zerlegt, und betrachtet jeden Teil einzeln. Wir beschreiben nun die Wahlen, mit denen sich $\langle \exp(xA)c, a\rangle = \Gamma^{d,c}(x)$ (vgl. Satz 4.10) erreichen läßt.

a) Sei $A \in \mathcal{L}(\ell_2^N)$ der durch $(\kappa_1, \ldots, \kappa_N)$ gegebene Diagonaloperator und für die Vektoren a, c gelte $a_j c_j = d_j \ \forall j$. Dann ist $\langle \exp(xA)c, a\rangle = \Gamma^d(x)$, und wie im Fall der N-Solitonen ergibt sich $B = \left(\dfrac{a_j c_i}{\kappa_i + \kappa_j}\right)_{i,j=1}^N$.

b) Sei $A \in L(L_2(\mathbb{R}))$ der durch $(Af)(s) = -\mathrm{i}sf(s)$ definierte Erzeuger der C_0-Gruppe $\big(T(x)\big)_{x\in\mathbb{R}}$ auf $L_2(\mathbb{R})$ mit $\big(T(x)f\big)(s) = e^{-\mathrm{i}xs}f(s)$ und für a, $c \in L_\infty(\mathbb{R}) \cap \bigcap_n D(A^n)$ gelte $2\pi a(s)c(s) = \rho(s)$. Dann ist $\langle \exp(xA)c, a\rangle = \Gamma^c(x)$. Mit $B = 2\pi M_c \mathcal{F}^{-1} I_+ P_+ \mathcal{F}^{-1} M_a$, $I_+ : L_2(0,\infty) \hookrightarrow L_2(\mathbb{R})$ und $P_+ : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(0,\infty)$ Einbettung und Projektion, $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation auf $L_2(\mathbb{R})$ und M Multiplikationsoperatoren, erfüllt man die restlichen Voraussetzungen.

Es bleibt, im allgemeinen Fall für $\Gamma(x)$ alles geeignet zusammenzusetzen. Die Einzelheiten finden sich in [10].

Also kann man das Anfangswertproblem der KdV folgendermaßen lösen:

Zu vorgegebenem Anfangswert $u(x,0) = u_0(x)$ ermittelt man zunächst in konventioneller Weise die Streudaten. Zu diesen Streudaten liefert obige Konstruktion einen Operator $A \in L(F)$ sowie $a \in F'$, $c \in F$ (F geeignet), so daß man die Lösung $k(x,y)$ der Gelfand-Levitan-Marchenko-Gleichung zum durch die Streudaten gemäß (26) bestimmten Kern $\Gamma(x)$ mit Hilfe von Satz 4.10 explizit erhält. Dabei läßt sich u_0 durch $u_0(x) = 2\partial_x k(x,x)$ rekonstruieren.

Andererseits ergibt sich aus unserem Formalismus zu den Daten $2A \in L(F)$ und $\sqrt{2}a \in F'$, $\sqrt{2}c \in F$ eine Lösung der KdV durch

$$u(x,t) = 2\partial_x \mathrm{tr}\Big(\Big(\big(1 + \exp(2xA + 8tA^3)B\big)^{-1} \exp(2xA + 8tA^3)\Big)(a \otimes c)\Big).$$

Aus dem Vergleich der Formeln folgt $u(x,0) = 2\partial_x k(x,x)$, mit $u(x,t)$ ist also eine Lösung der KdV zum Anfangswert $u(x,0) = u_0(x)$ gegeben.

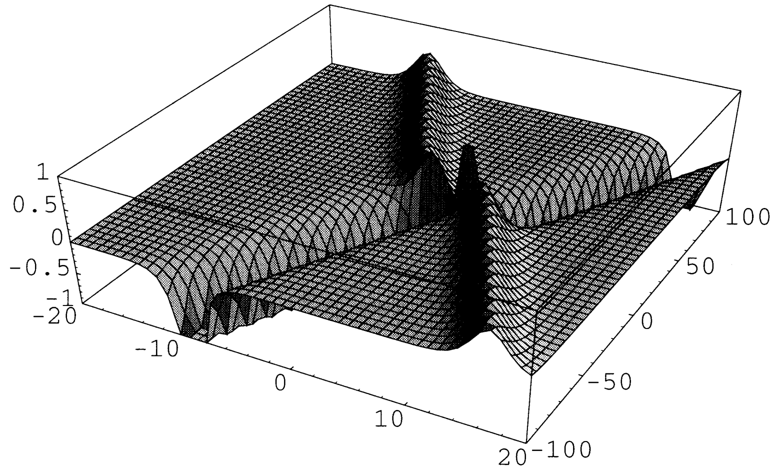
Damit ist gezeigt, daß prinzipiell alle Lösungen aus der Inversen Streumethode auch unserem Formalismus zugänglich sind.

Bemerkung 4.11 *Den Zusammenhang zwischen der Erzeugung der N-Solitonen u aus dem Operator* $\mathrm{diag}\{k_1, \ldots, k_N\}$ *und den diskreten Eigenwerten von* $H = d^2/dx^2 + u$, *die dann durch* $\{k_1^2/4, \ldots k_N^2/4\}$ *gegeben sind, hatten wir schon bei den Resultaten von Gesztesy et al. in Abschnitt 3.2 vorgefunden.*

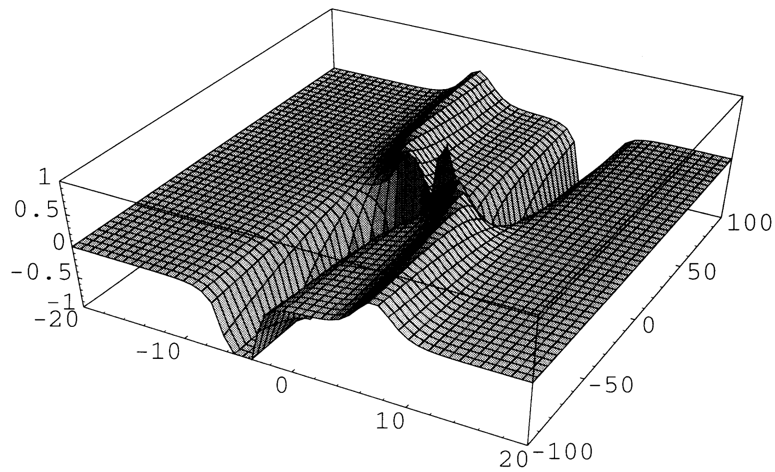
Anhang A

Auf den folgenden Seiten haben wir zur Illustration unseres Ergebnisses über Negatonen aus Abschnitt 3.2 einige Computergraphiken zusammengestellt. Vor allem kam es uns darauf an, den Unterschied zwischen den geraden Linien, auf denen sich Solitonen fortbewegen, und den logarithmischen Kurven, auf denen die Teilnehmer eines Negatons laufen, herauszuarbeiten. Man kann den Graphiken außerdem entnehmen, daß die Konvergenzgeschwindigkeit in der Tat sehr groß ist.

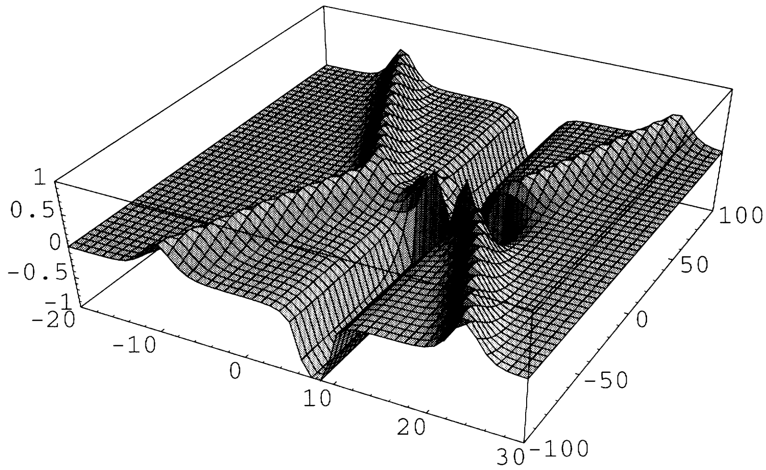
In den Bildern haben wir jeweils $u(x-t,t)$ dargestellt, wobei die Variablen x und t in der üblichen Weise aufgetragen sind.



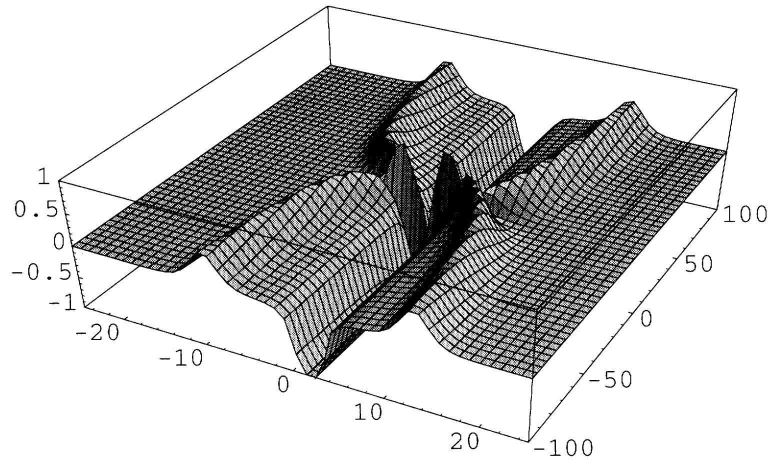
Ein Soliton ($k_1 = 1.05$) und ein Antisoliton ($k_2 = 0.95$)



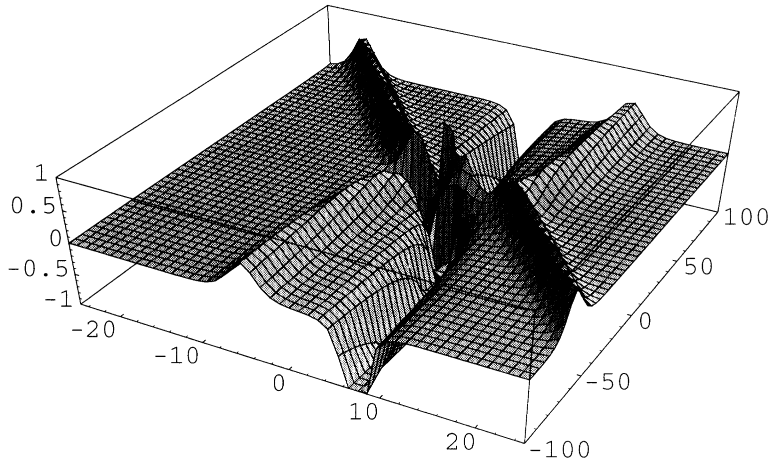
Negaton ($k = 1$) aus einem Soliton und einem Antisoliton



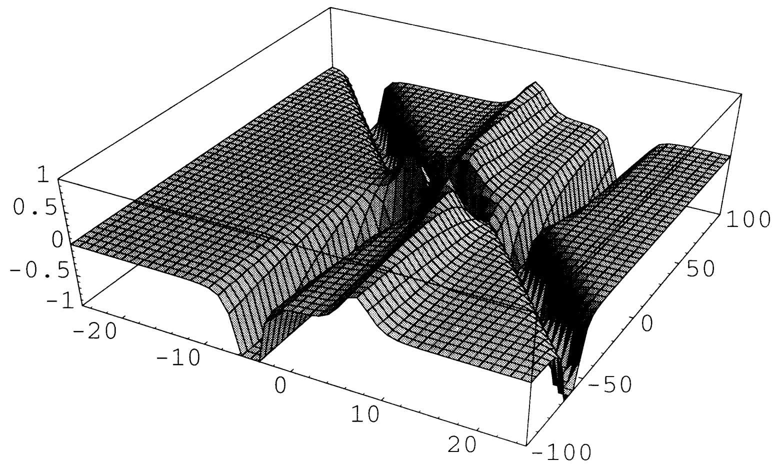
Zwei Solitonen ($k_1 = 0.95, k_2 = 1.05$) und ein Antisoliton ($k_3 = 1$)



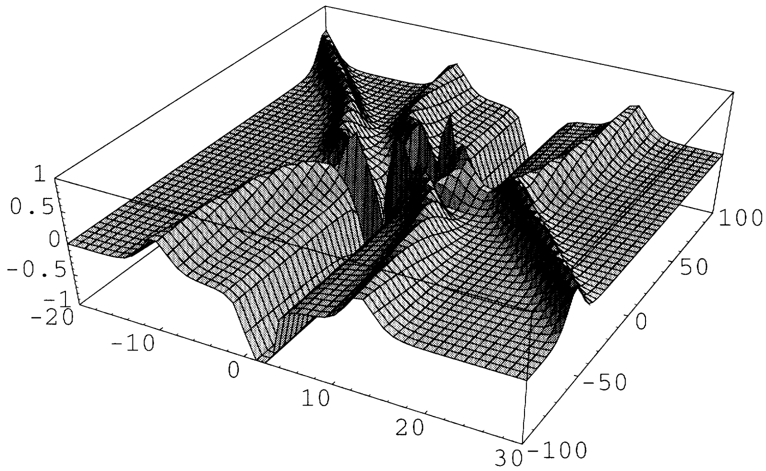
Negaton ($k = 1$) aus zwei Solitonen und einem Antisoliton



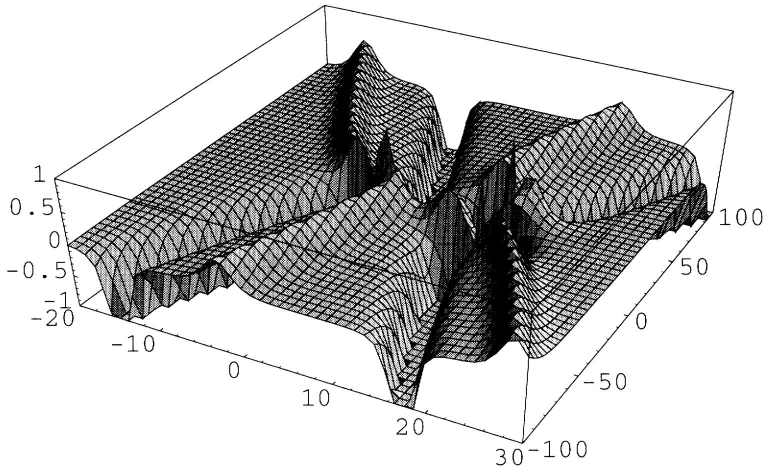
Negaton ($k_1 = 1$) aus einem Soliton und einem Antisoliton sowie ein Soliton ($k_2 = 1.1$)



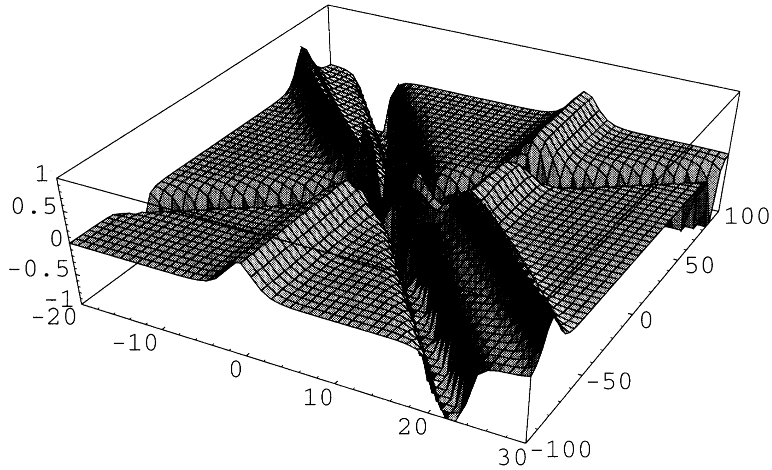
Negaton ($k_1 = 1$) aus einem Soliton und einem Antisoliton sowie ein Antisoliton ($k_2 = 1.1$)



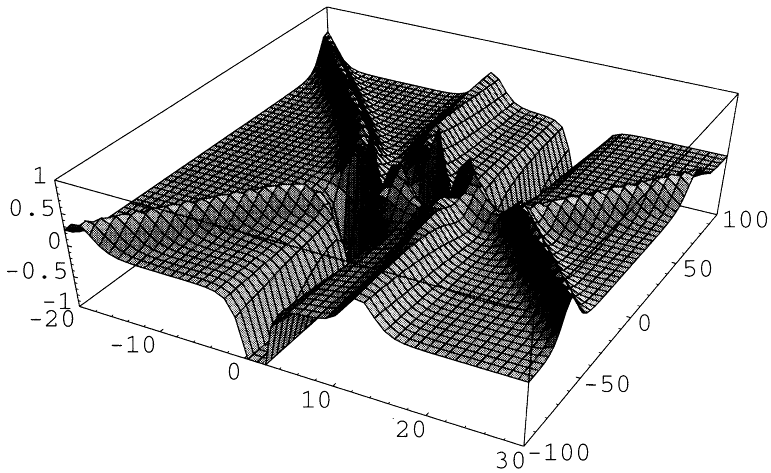
Negaton ($k_1 = 1$) aus zwei Solitonen und einem Antisoliton
sowie ein Soliton ($k_2 = 1.1$)



Negaton ($k_1 = 0.95$) aus einem Soliton und einem Antisoliton
sowie Negaton ($k_2 = 1.05$) aus einem Soliton und einem Antisoliton



Negaton ($k_1 = 1.1$) aus einem Soliton und einem Antisoliton
sowie ein Soliton ($k_2 = 1$) und ein Antisoliton ($k_3 = 0.8$)



Negaton ($k_1 = 1$) aus einem Soliton und einem Antisoliton
sowie zwei Solitonen ($k_2 = 0, 9, k_3 = 1.1$)

Literatur

[1] H. Aden. *The spectrum of multiplication operators on p-Banach operator ideals.* Preprint, Jena 1996.

[2] H. Aden. *Elementary Operators and Solutions of the Korteweg-de Vries Equation.* Thesis, Jena 1996.

[3] H. Aden und B. Carl. *On realizations of solutions of the KdV equation by determinants on operator ideals.* J. Math. Phys. **37**, 1833–1857 (1996).

[4] W. Arendt, F. Räbiger und A. Sourour. *Spectral properties of the operator equation $AX + XB = Y$.* Quart. J. Math. Oxford (2) **45**, 133–149 (1994).

[5] W. Bauhardt und C. Pöppe. *The Fredholm determinant method for discrete integrable evolution equations.* Lett. Math. Phys. **13**, 167–178 (1987).

[6] W. Bauhardt und C. Pöppe. *The Zakharov-Shabat inverse spectral problem for operators.* J. Math. Phys. **34**, 3074–3086 (1993).

[7] R. Bhatia und P. Rosenthal. *How and why to solve the operator equation $AX - XB = Y$.* Bull. London Math. Soc. **29**, 1–21 (1997).

[8] H. Blohm. *Solution of a discrete inverse scattering problem and of the Cauchy problem of a class of discrete evolution equations.* J. Math. Phys. **40**, 4374–4392 (1999).

[9] H. Blohm. *Solution of inverse scattering problems and non-linear equations by trace methods.* Nonlinearity (erscheint).

[10] H. Blohm. *On the Solution of Nonlinear Evolution Equations and Corresponding Cauchy Problems by Trace Methods.* Thesis, Jena 1999.

[11] R. K. Bullough und P. J. Caudrey (Hrsg.). *Solitons.* Topics in Current Physics 17, Springer-Verlag, Berlin 1980.

[12] B. Carl und S.-Z. Huang. *On realizations of solutions of the KdV equation by the C_0-semigroup method.* Amer. J. Math. **122**, 403–438 (2000).

[13] B. Carl und C. Schiebold. *Nonlinear equations in soliton physics and operator ideals.* Nonlinearity **12**, 333–364 (1999).

[14] A. T. Dash und M. Schechter. *Tensor products and joint spectra.* Israel J. Math. **8**, 191–193 (1970).

[15] A. Defant und K. Floret. *Tensor Norms and Operator Ideals.* North-Holland Mathematics Studies 176, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1993.

[16] P. Enflo. *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces.* Acta Math. **130**, 309–317 (1973).

[17] J. Eschmeier. *Tensor products and elementary operators.* J. Reine Angew. Math. **390**, 47–66 (1988).

[18] B. Fuchssteiner. *Integrable nonlinear evolution equations with time-dependent coefficients.* J. Math. Phys. **34**, 5140–5158 (1993).

[19] B. Fuchssteiner und A. R. Chowdhury. *A new approach to the Quantum KdV.* Chaos, Solitons & Fractals **5**, 2345–2355 (1995).

[20] B. Fuchssteiner. *Some tricks from the symmetry-toolbox for nonlinear equations: Generalizations of the Camassa-Holm equation.* Physica D **95**, 229–243 (1996).

[21] F. Gesztesy, W. Karwowski und Z. Zhao. *Limits of soliton solutions.* Duke Math. J. **68**, 101–150 (1992).

[22] F. Gesztesy und W. Renger. *New classes of Toda soliton solutions.* Commun. Math. Phys. **184**, 27–50 (1997).

[23] J. J. Grobler, H. Raubenheimer und P. van Eldik. *Fredholm theory for operators in an operator ideal with a trace.* Integral Equations Operator Theory **5**, 774–790 (1982).

[24] R. Hirota. *Exact solutions of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons.* Phys. Rev. Lett. **27**, 1192–1194 (1971).

[25] R. Hirota. *Direct methods in soliton theory.* In Bullough/Caudrey [11], 157–176.

[26] R. Hirota. *Direct methods of finding exact solutions of nonlinear evolution equations.* In Miura [39], 40–68.

[27] S.-Z. Huang. *Spectral Theory for Non-Quasianalytic Representations of Locally Compact Abelian Groups.* Thesis, Tübingen 1996.

[28] N. J. Kalton. *Unusual traces on operator ideals.* Math. Nachrichten **134**, 119–130 (1987).

[29] H. König. *Eigenvalue Distribution of Compact Operators.* Operator Theory: Advances and Applications 16, Birkhäuser-Verlag, Basel 1986.

[30] V. A. Marchenko. *Nonlinear Equations and Operator Algebras.* Mathematics and Its Applications 17, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1988.

[31] V. A. Marchenko. *The Cauchy problem for the KdV equation with non-decreasing initial data.* In Zakharov [60], 273–318.

[32] Y. Matsuno. *Bilinear Transformation Method.* Mathematics in Science and Engineering 174, Academic Press, Orlando 1984.

[33] V. B. Matveev und M. A. Salle. *Darboux Transformations and Solitons.* Springer Series in Nonlinear Dynamics, Springer-Verlag, Berlin 1991.

[34] V. B. Matveev. *Theory of positons I.* Preprint des Max-Planck-Institutes für Metallforschung, Stuttgart 1992.

[35] V. B. Matveev. *Generalized Wronskian formula for solutions of the KdV equations: first applications.* Physics Letters A **166**, 205–208 (1992).

[36] V. B. Matveev. *Positon-positon and soliton-positon collisions: KdV case.* Physics Letters A **166**, 209–212 (1992).

[37] V. B. Matveev. *Asymptotics for the multipositon-soliton τ function of the Korteweg-de Vries equation and the supertransparency.* J. Math. Phys. **35**, 2955–2970 (1994).

[38] R. Meinel und G. Neugebauer. *Solutions of Einstein's field equations related to Jacobi's inversion problem.* Physics Letters A **210**, 160–162 (1996).

[39] R. Miura (Hrsg.). *Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons, and Their Applications.* NSF Research Workshop on Contact Transformations, Lecture Notes in Mathematics 515, Springer-Verlag, Berlin 1976.

[40] R. Nagel (Hrsg.). *One-Parameter Semigroups of Positive Operators.* Lecture Notes 1184, Springer-Verlag, Berlin 1986.

[41] G. Neugebauer und D. Kramer. *Einstein-Maxwell solitons.* J. Phys. A: Math. Gen. **16**, 1927–1936 (1983).

[42] G. Neugebauer, A. Kleinwächter und R. Meinel. *Relativistically rotating dust.* Helv. Phys. Acta **69**, 473–489 (1996).

[43] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, Berlin 1983.

[44] V. Q. Phóng. *The operator equation $AX - XB = C$ with unbounded operators A and B and related abstract Cauchy problems.* Math. Z. **208**, 567–588 (1991).

[45] A. Pietsch. *Operator Ideals.* Mathematische Monographien 16, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978.

[46] A. Pietsch. *Distributions of eigenvalues and nuclearity.* Banach Center Publ. **8**, 361–365 (1982).

[47] A. Pietsch. *Eigenvalues and s-Numbers.* Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1987.

[48] G. Pisier. *Factorization of Linear Operators and Geometry of Banach Spaces.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics 60, AMS 1986.

[49] C. Pöppe. *The Fredholm determinant method for the KdV equations.* Physica D **13**, 137–160 (1984).

[50] C. Pöppe. *General determinants and the τ function for the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy.* Inverse Problems **5**, 613–630 (1989).

[51] C. Rasinariu, U. Sukhatme, and A. Khare. *Negaton and positon solutions of the KdV and mKdV hierarchy.* J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 1803–1823 (1996).

[52] C. Schiebold. *Funktionalanalytische Methoden bei der Behandlung von Solitonengleichungen.* Thesis, Jena 1996.

[53] C. Schiebold. *An operator theoretic approach to the Toda lattice equation.* Physica D **122**, 37–61 (1998).

[54] C. Schiebold. *Solitons of the sine-Gordon equation coming in clusters.* Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik, Jena 1999.

[55] B. Simon. *Trace Ideals and Their Applications.* London Mathematical Society Lecture Note Series 35, Cambridge University Press, Cambridge 1979.

[56] F. Smithies. *Integral Equations.* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 49, Cambridge University Press, Cambridge 1958.
[57] M. Wadati und T. Kamijo. *On the extension of the Inverse Scattering Method.* Prog. Theor. Phys. **52**, 397–414 (1974).
[58] M. C. White. *Analytic multivalued functions and spectral trace.* Math. Ann. **304**, 669–683 (1996).
[59] K. Yosida. *Functional Analysis.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 23, Springer-Verlag, Berlin 1980.
[60] V. E. Zakharov (Hrsg.). *What Is Integrability?* Springer Series in Nonlinear Dynamics, Springer-Verlag, Berlin 1991.

Bernd Carl
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Jena
Ernst-Abbe-Platz 1–4
D-07743 Jena
carl@minet.uni-jena.de

Cornelia Schiebold
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Jena
Ernst-Abbe-Platz 1–4
D-07743 Jena
cornelia@minet.uni-jena.de

(*Eingegangen: 3. 3. 2000*)

Buchbesprechungen

Arndt, J., Hänel, C., Pi, Algorithmen, Computer, Arithmetik, Berlin u. a.: Springer 1998, 191 S., DM 78,–

Ein Gutteil der Faszination, die von der Zahl π ausgeht, beruht wohl auf der (zumindest beim ersten Hinsehen bemerkenswerten) Antinomie, daß sie uns einerseits als Kreiszahl geometrisch besonders ausgezeichnet, andererseits aber arithmetisch eher wenig auffällig erscheint. Natürlich gibt es im Internet längst Fanclubs zu π, und so erstaunt es nicht, daß im zu besprechenden Werk über π versucht wird, trendgemäß und allgemeinverständlich altes und neues Wissen über die Kreiszahl zusammenzufassen. Zur Einbeziehung des Computers und so als neue Ingredienz gegenüber älteren Darstellungen über π enthält das Buch eine CD zur π-Numerik (Programme zur Berechnung einiger Millionen Stellen von π, inklusive einer Langzahlarithmetik) sowie mit detaillierten Ergänzungen zum Buchtext.

Der in den Kapiteln 7–10 beschriebene Hauptgegenstand des Werks sind die (mit der Entdeckung des auf dem Gaußschen arithmetisch-geometrischen Mittel basierenden π-Algorithmus) 1976 einsetzende Entwicklung schneller iterativer Algorithmen zur Dezimalstellenberechnung von π sowie das (unter Einsatz von Computeralgebra) 1995 entdeckte BBP-Verfahren zur gezielten Berechnung einzelner Hexadezimalstellen von π. Die Algorithmen sind in ANSI-C-Programmen kodiert.

Das Buch wendet sich an mathematisch interessierte Laien. Eine Herleitung der hinter den Algorithmen stehenden Mathematik oder anderer mathematischer Hintergründe ist demzufolge nicht Absicht des Buchs (hier wird der Leser z. B. auf die Monographie (1987) der beiden Borweins verwiesen); doch finden auch weniger Ziffernverliebte beim Blättern interessante Informationen, vor allem in den Kapiteln 1–2; 7–10.

Stilistisch salopp, bricht sich die Begeisterung der Autoren für ihr Objekt häufig Bahn; kein Wunder: „Jemand hat gesagt, daß man aus einem normalen Menschen einen π-Fan machen könne, aber das Umgekehrte nicht möglich wäre. Da ist was dran... . Die Autoren sind dafür Beispiele“ (p. 10).

Die ersten 6 Kapitel des Buches (Der Stand der Dinge / Wie zufällig ist π? / Leichte Wege zu π / Näherungen von π und Kettenbrüche / Arcus Tangens / Tröpfel-Algorithmen) enthalten, in etwas unsystematischer Darstellung, Skurriles und Wissenswertes in buntem Potpourri. Nach dem Hauptteil des Buchs (Kapitel 7–10: Gauß und π / Ramanujan und π / Die Borweins und π / Das BBP–Verfahren) folgen Zusätze und Historisches, z. T. das in den Anfangskapiteln Gesagte wieder aufgreifend (Kapitel 11–14: Arithmetik / Vermischtes / Historie / Die Zukunft: Internet π-Berechnungen). Die historischen Versuche zur Kreisquadratur und -rektifikation bleiben weitgehend ausgespart. Die Schlußkapitel 15 und 16 enthalten interessante Formeln zur Darstellung von π und Tabellen, in denen sich π auf viele Stellen (zur Basis 10 und 16) ausgedruckt findet. Nutzer der CD werden die anschließenden Angaben zur verwendeten Langzahlarithmetik zu schätzen wissen, an weiteren Details Interessierte das ausführliche Literaturverzeichnis.

Der Zweck des Buchs ist Experimental-Mathematik, nicht Beweis-Mathematik. Es geht den Autoren wohl auch um das Wecken bzw. Fördern von Interesse an einer spielerischen (also rechnergestützten) Beschäftigung mit Mathematik, am konkreten Gegenstand π. Niemand wird bestreiten, daß so etwas sehr wichtig ist, und so ist dem Werk (Buch und DC) Verbreitung und Nutzung zu wünschen, selbst wenn mathematische Stringenz dabei weniger berührt wird (und die Erzeugung weiterer π-Fans sicher nicht so nötig ist).

Erlangen G. Martens

Kurzweil, H., Stellmacher, B., Theorie der endlichen Gruppen, Eine Einführung, Berlin u. a.: Springer 1998, 342 S., DM 44,–

Noch ein Buch über endliche Gruppen? Ohne hier vollständig zu sein, so haben wir doch die Bücher von Huppert [Hu] und Blackburn, Huppert [HuBl], von Suzuki [Su], Gorenstein [Go] und erst kürzlich erschienen von Aschbacher [Asch]. Weiter gab es, zumindest im deutschsprachigen Raum, das sehr erfolgreiche Buch von Kurzweil [Ku], das leider vergriffen ist. Die Antwort kann man hier schon vorwegnehmen, ja, und es ist ein Buch, auf das in gewisser Weise schon gewartet wurde.

Die Bücher von Huppert, Blackburn und Suzuki sind sicherlich viel zu umfangreich, um sie einem Anfänger zum Erlernen des Stoffes zu geben. Das Buch von Aschbacher ist für den durchschnittlichen Anfänger etwas zu schwierig. Das Buch von Gorenstein war ein Kult-Buch, mit dem eine ganze Generation von Gruppentheoretikern aufgewachsen ist, jedoch nach 30 Jahren fehlt ihm etwas die Aktualität. Wie ich noch beschreiben werde, könnte das vorliegende Buch diese Rolle für die Zukunft übernehmen. Besonders, da der Aufbau ähnlich ist. Beginnen wir mit dem, was das Buch uns laut Kapitelüberschriften zu bieten hat. 1. Grundlagen (hier werden die üblichen Techniken zum Arbeiten in Gruppen bereitgestellt), 2. Abelsche Gruppen, 3. Operieren und Konjugieren (u.a. Sylow Satz, der Begriff des Operierens ist ohnehin ein zentraler in der Gruppentheorie und auch dem vorliegenden Buch), 4. Permutationsgruppen (u.a. Frobeniusgruppen, Kranzprodukte), 5. p-Gruppen und nilpotente Gruppen (Fittinggruppe, Frattinigruppe), 6. Normal- und Subnormalteilerstruktur (auflösbare Gruppen, Schur-Zassenhaus-Satz, verallgemeinerte Fittinggruppe, Satz von O'Nan-Scott), 7. Verlagerung und p-Faktorgruppen, 8. Operationen von Gruppen auf Gruppen (Teilerfremde Operation, Zerlegung von Operation, minimale Operation, lineare Operation). Diese acht Kapitel stellen den ersten Teil des Buches dar. Dieser Teil ist als die eigentliche Einführung in die Theorie der endlichen Gruppen gedacht. Man kann es auch daran erkennen, daß die späteren Kapitel keine Übungsaufgaben mehr enthalten. Hier wird auf 200 Seiten eine recht vollständige Einführung gegeben, die wohl, wenn noch mit einigen Beispielen angereichert, in etwa der Umfang einer 2-semestrigen Vorlesung zur Gruppentheorie sein könnte. Ausgerüstet mit diesem Stoff hat man ein gutes Fundament für ein erfolgreiches Eindringen in die Tiefen der Gruppentheorie. Die letzten 4 Kapitel beschäftigen sich dann mit Fragestellungen der aktuellen Gruppentheorie. Hier werden die zwei wichtigsten Arbeitsmethoden vorgestellt, das Zusammenspiel von lokaler und globaler Struktur und die Amalgammethode. Gerade diese hat in den letzten Jahren zu beachtlichen Erfolgen in der Gruppentheorie geführt. Die Kapitelüberschriften sind 9. Quadratische Operation (Thompson-Gruppe, Timmesfeld Replacement, Satz von Glaubermann, p-Komplementsatz von Thompson, der mit der vom zweiten Autor eingeführten charakteristischen Untergruppe $W(S)$ bewiesen wird, Thompson's Satz über fixpunktfreie Automorphismen), 10. Einbettungen p-lokaler Untergruppen (stark p-eingebettete Untergruppen, primitive Paare, Satz von Bender, $p^a q^b$-Satz, Amalgam-Methode, wobei ein Spezialfall des Satzes von Goldschmidt bewiesen wird), 11. Signalisator-Funktoren (Vollständigkeitssatz von Glauberman), 12. N-Gruppen. Dieses letzte Kapitel ist sicherlich der Höhepunkt des Buches. Die N-Gruppenarbeit von J. Thompson war die richtungsweisende Arbeit in der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen. Sie hat für viele Teile des Beweises als Modell gedient. Seit geraumer Zeit werden im Rahmen der Revision der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen immer mehr Sätze mit der oben erwähnten Amalgammethode bewiesen. Der zweite Autor hat kürzlich einen Beweis der N-Gruppenarbeit (in einer allgemeineren Fassung: 2-lokale Untergruppen sind auflösbar) gegeben [St], der auf der Amalgammethode beruht. Vielleicht kann dies für weitere Untersuchungen in der Klassifikation zum Modell werden. Hier in dem Buch wird der Spezialfall $\mathbb{C}_G(\Omega_1(Z(S))) \leq N_G(S)$, für $S \in Syl_2(G)$ behandelt. In diesem Kapitel kann man dann auch sehen, wie lebendig Gruppentheorie ist. Fast alles, was vorher zur Verfügung gestellt wurde, fließt hier ein. Der Leser bekommt ein Gefühl, wie stark die vorher entwickelten Methoden sind und sicherlich noch viele weitere Anwendungsmöglichkeiten warten. Dieser zweite Teil scheint mir hervorragend für ein Seminar geeignet zu sein.

Insgesamt haben wir ein gelungenes Buch vorliegen. Die Darstellung ist flüssig, das Vorgehen wird motiviert und der Leser wird immer wieder darauf hingewiesen, wenn Resultate später eine wesentliche Rolle spielen werden. Die Autoren haben sich bemüht, selbst für einige Standardsätze der Gruppentheorie interessante und unübliche Beweise zu geben. Dies macht auch die Kapitel 1–8 für den Fachmann interessant. Natürlich gibt es auch einige wenige Kritikpunkte. Es gibt eine Reihe von Druckfehlern, ja sogar richtige Fehler (Zu Lemma 1.6.5 ist die Kleinsche Vierergruppe ein Gegenbeispiel), es gibt Zitate ins Leere. Wobei zu den Zitaten zu sagen ist, daß die Autoren hier einen hervorragenden Dienst am Leser geleistet haben. Die Zitate sind nicht nur mit der Referenznummer, sondern auch stets mit der Seitenzahl versehen, was das Auffinden sehr erleichtert. Nicht anfreunden konnte ich mich mit den Übungsaufgaben. Es finden sich leichte und sehr schwierige Aufgaben nebeneinander. Einige würden in anderen Büchern als Hauptsätze stehen (z.B. der Satz von Iwasawa-Schmidt). Es gibt aber keinen Hinweis auf den Schwierigkeitsgrad, noch ein Zitat zu entsprechenden Originalarbeiten.

Es wurde hier ein gutes Buch vorgelegt, auf das viele, insbesondere wegen der Darstellung der Amalgammethode, lange gewartet haben. Das Buch folgt dem Rezept des Buches von Gorenstein, solide Grundlagen (Kapitel 1–8), und dann Anwendung in der modernsten und derzeit richtungsweisenden Gruppentheorie (Kapitel 9–12). Möge ihm der gleiche Erfolg beschieden sein. Es sollte so schnell wie möglich eine englische Version geben. Dieses Buch gehört unbedingt in jede Fachbereichsbibliothek, und bei einem Preis von 44,– DM können es sich sicherlich auch Kollegen und insbesondere Studenten, die sich für Gruppentheorie interessieren, anschaffen.

[Asch] M. Aschbacher, Finite Group Theory, Cambridge Univ. Press 1986
[Go] D. Gorenstein, Finite Groups, Harper und Row 1968
[Hu] B. Huppert, Endliche Gruppen I. Springer 1967
[HuBl] B. Huppert, N. Blackburn, Finite groups II, II, Springer 1982
[Ku] H. Kurzweil, Endliche Gruppen, Springer 1977
[St] B. Stellmacher, An aplication of the amalgam method: The 2-local structure of N-groups of characteristic 2-type, J. Algebra 190, 1997, 11–67
[Su] M. Suzuki, Group Theory I, II, Springer 1981, 1986

Halle G. Stroth

Wagner, F., Stable Groups (London Math. Soc. Lecture Notes Series 240), Cambridge University Press 1997, 309 S., paperback £ 27.95

Das Buch behandelt *unendliche Gruppen.* Es behandelt sie aus der Sicht der klassischen Gruppentheorie und aus der Sicht der Modelltheorie. Es geht hauptsächlich darum, die algebraische Struktur der sogenannten ‚stabilen Gruppen‘ aufzudecken. Es geht aber auch darum, abstrakte modelltheoretische Begriffe am Beispiel der Gruppentheorie transparent zu machen.

Man nennt eine Gruppe G *‚stabil‘,* wenn für jede elementare Erweiterung H von G und für jede in H parametrisch-definierbare Teilmenge $X \subseteq H$ gilt, daß in G der Schnitt $X \cap G$ parametrisch-definierbar ist (eventuell mit einer anderen Formel).

In dem vorliegenden Buch werden in einem einleitenden Kapitel alle benötigten Hilfsmittel aus der Gruppentheorie und aus der Modelltheorie sorgfältig zusammengestellt und erklärt.

Damit können dann in den folgenden fünf Kapiteln Ausschnitte aus der Theorie der stabilen Gruppen abgehandelt werden. Es handelt sich um Ausschnitte, die zu einem beträchtlichen Teil das Werk des Autors selber sind und seiner Dissertation (Oxford 1990) und seiner Habilitations-Schrift (Freiburg/Brsg. 1993) entnommen sind.

Im *ersten Kapitel* sind noch die klassischen gruppentheoretischen Begriffe dominierend. Es wird gezeigt, daß stabile Gruppen einige Endlichkeits-Bedingungen (insbesondere Kettenbedingungen) erfüllen. Die Gültigkeit derartiger Kettenbedingungen bewirkt, daß manche der wichtigsten Untergruppen auch in der gruppentheoretischen Sprache der 1. Stufe definierbar sind, oder doch wenigstens $\wedge$-definierbar sind, d. h. als Durchschnitt definierbarer Untergruppen geschrieben werden können.

Insbesondere sind stabile Gruppen stets $\mathfrak{M}_C$-Gruppen, d. h. jede absteigende Kette von Zentralisatoren ist endlich. Es wird gezeigt, daß in einer $\mathfrak{M}_C$-Gruppe die Fitting-Untergruppe stets nilpotent ist, und daß in einer ω-saturierten $\mathfrak{M}_C$-Gruppe sogar das Hirsch-Plotkin-Radikal nilpotent ist.

In *Kapitel zwei* werden ‚generische' Typen zur Analyse stabiler Gruppen herangezogen. In einer superstabilen Gruppe werden die 1-Typen von maximalem Shelah-Rang als ‚generische' Typen bezeichnet, denn sie sind offenbar die ‚allgemeinsten' Objekte im Raum aller 1-Typen. Es wird beispielsweise gezeigt, daß eine stabile Gruppe mit einer generischen Involution fast-abelsch ist, d. h. einen abelschen Normalteiler von endlichem Index besitzt. Eine auflösbare stabile Gruppe mit einem generischen Element von Primzahl-Ordnung hat einen nilpotenten Normalteiler von endlichem Index.

Das Hauptresultat ist hier jedoch Hruschovskis modelltheoretisches Analogon des Weilschen Satzes, das die Rekonstruktion der Gruppe aus generischen Daten erlaubt.

In *Kapitel drei* geht es um „große" und „kleine" Teilmengen und ihre geeigneten Definitionen. Der Zugang zu solchen Begriffen ist hier modelltheoretisch und geht von Hruschovskis ‚Fremdheits-Begriff' aus. Dem Fremdheits-Begriff werden die Begriffe des Σ-internen partiellen Typs und des Σ-analysierbaren partiellen Typs gegenüber gestellt, wenn Σ irgend eine Klasse partieller Typen ist. Es wird die gruppentheoretische Bedeutung dieser Begriffe an zahlreichen Sätzen vorgeführt. Wenn beispielsweise der generische Typ einer stabilen Gruppe fremd zu allen Mengen $\{g^{-1}x^{-1}gx; x \in G\}$ ist (für $g \in G$), dann ist G fast-abelsch. Das Hauptgewicht dieses Kapitels liegt jedoch auf einer Entwicklung einer modelltheoretischen Frattini-Theorie und verschiedener ‚Komponenten'.

Kapitel vier bringt die Geometrie (Prä-Geometrien, Lokale Modularität, CM-Trivialität, Dimensionalitäten etc.) ins Spiel. Ausgangspunkt ist freilich die Abhängigkeits-Relation, die mit dem Begriff des Gabelns von Typen (forking) verknüpft ist.

Das abschließende *fünfte Kapitel* behandelt ‚Rang-artige Gruppen' (kurz: $\mathfrak{R}$-Gruppen), d. h. Gruppen, die eine Eigenschaft $\mathfrak{R}$ besitzen, die superstabilen Gruppen und auch schmalen stabilen Gruppen gemein ist. Es wird gezeigt, daß $\mathfrak{R}$-Gruppen stets eine gleichmächtige abelsche Untergruppe besitzen. Das ist ein bemerkenswertes Phänomen, das über den klassischen Satz von Hall-Kulatilaka-Kargapolov weit hinausgeht.

Der Hauptsatz ist hier ein Struktursatz für $\mathfrak{R}$-Gruppen G. Wenn man als Radikal $R(G)$ den maximalen lokal-auflösbaren Normalteiler von G wählt, dann ergibt sich, daß für die Frattini-freie Komponente G^{Φ} die Faktorgruppe $G^{\Phi}/R(G^{\Phi})$ als direkte Summe endlich vieler $\mathfrak{R}$-zusammenhängender Normalteiler geschrieben werden kann und diese sind Frattini-frei.

Das Buch ist insgesamt sehr sorgfältig geschrieben. Es ist der erweiterte Text von Vorlesungen, aber kein Lehrbuch. Insofern sind Motivierungen (leider) selten. Der „rote Faden" ist jedoch immer gut sichtbar. Er folgt der Frage, welchen Einfluß die Begriffe der geometrischen Stabilitäts-Theorie auf die Struktur von Gruppen haben. Es ist dann ganz natürlich, daß andere große Bereiche der Theorie stabiler Gruppen völlig ausgeklammert sind, beispielsweise die Behandlung der einfachen stabilen Gruppen von endlichem Morley-Rang, wie sie von Borovik und seinen Schülern und Schülerinnen in Analogie zur Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen entwickelt wird und schon in weiten Teilen durchgeführt worden ist.

Tübingen U. Felgner

Parshin, A. N., Shafarevich, I. R. (Eds.), Algebraic Geometry III, Complex Algebraic Varieties. Algebraic curves and their Jacobians, Berlin u. a.: Springer 1998, 270 S., DM 158,–

Es handelt sich um eine Übersetzung des 1989 bei VINITI in Moskau erschienen Buches, das Band 36 der Reihe ‚Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften" bildete. Diese Reihe hatte das Ziel, eine Gesamtdarstellung der heutigen Mathematik, zumindest in ihren wichtigsten Teilbereichen zu geben. Man kann sicher beweisen, daß so etwas unmöglich ist. Das Gebiet ist einfach zu umfangreich, um es mit der notwendigen Präzision in endlicher Zeit übersichtlich darzustellen. Aber man kann auch versuchen, Kompromisse bei Themenauswahl und Ausführlichkeit der Darstellung einzugehen, und so Übersichtsbände zu einigen zentralen Gebieten in einer Reihe zusammenzufassen, so wie es die Mathematiker in der damaligen Sowjetunion begannen.

Ich halte ein solches Unternehmen für sehr verdienstvoll. Zumindest soll man den Autoren für ihre Mühe sehr dankbar sein. Einen guten Übersichtsartikel zu verfassen, ist mindestens genauso schwierig, wie das Schreiben einer Original-Monographie. Es macht aber viel weniger Spaß. Dagegen sind Übersichtsartikel unendlich hilfreich für Mathematiker, welche dem Gebiet ferner stehen, oder für solche, die sich einarbeiten wollen. Die Enzyklopädie, welche zu Beginn unseres Jahrhunderts unter der Federführung deutscher Mathematiker entstand, hat Generationen unschätzbare Dienste geleistet. Und damit ist dieses Projekt der russischen Mathematiker gleichwertig.

Der Band enthält zwei Übersichtsartikel zur Algebraischen Geometrie, welche inhaltlich wenig gemeinsam haben:

I. ‚Complex Algebraic Varieties: Periods of Integrals and Hodge Structures" (ca 210 Seiten) der Autoren Vik. S. Kulikov und P. F. Kurchanov,

II. ‚Algebraic Curves and their Jacobians" (ca 40 Seiten) von V.V. Shokurov.

Der erste Artikel ist eine ausgezeichnete Einführung in die Theorie der Periodenabbildung. Er enthält motivierende Vorbemerkungen und beginnt mit den Grundlagen. Die Theorie wird vollständig aufgebaut, natürlich wird bei technischen Details immer wieder auf Literatur-Artikel verwiesen. Ich kenne kein Buch hierzu mit vergleichbarer Ausführlichkeit und Geschlossenheit. Der Artikel führt hin zu allen konkreten Anwendungen der Theorie der Periodenabbildung, wie sie zur Zeit seines Entstehens bekannt waren. Damit ist er in gewisser Hinsicht auch abschließend. Denn in den Jahren 1960–80 war diese Theorie ein ganz zentrales Thema der Algebraischen Geometrie, seither haben sich die Gewichte etwas verschoben.

Ziel der Theorie ist es (etwas vereinfachend formuliert), algebraische Mannigfaltigkeiten über dem Grundkörper $\mathbb{C}$ durch ihre Perioden zu klassifizieren. Das klassische Vorbild sind algebraische Kurven (= kompakte Riemannsche Flächen). Auf einer Kurve vom Geschlecht g gibt es g linear unabhängige holomorphe 1-Formen. Die Integrale dieser Formen über eine Basis der ersten Homologie heißen die ‚Perioden" der Kurve. Und diese Perioden legen die Kurve mit ihrer komplexen Struktur eindeutig fest. Eine Präzisierung dieser Tatsache ist der Satz von Torelli (1914).

Und in diesem Artikel wird die notwendige Theorie aufgebaut, um ähnliche Sätze (die man heute ‚Torelli-Sätze" nennt) in möglichst großer Allgemeinheit zu beweisen. So ist Kapitel 3. dem Beweis des Torelli-Satzes für Kurven und in den folgenden anderen Fällen gewidmet:

- Hyperflächen vom Grad 3 im $\mathbb{P}_4$ (,cubic threefolds'),
- $K3$-Flächen,
- elliptische Flächen über $\mathbb{P}_1$ (,elliptic pencils'),
- Hyperflächen von hohem Grad.

Wenn man nun einen Torelli-Satz hat, in der Art, daß die Perioden bestimmter Differentialformen die algebraischen Mannigfaltigkeiten einer bestimmten Sorte charakterisieren, so ist das Klassifikationsproblem für diese Mannigfaltigkeiten auf die Frage zurückgeführt: Welche Perioden kommen vor? Das ist das sogenannte Problem der ,Surjektivität der Periodenabbildung'. Im klassischen Fall der Kurven z.B. müssen die Perioden die Riemannschen Periodenrelationen erfüllen.

Dieser Frage in ihrer Allgemeinheit sind Kapitel 4 und 5 des Artikels gewidmet. Das wesentliche technische Hilfsmittel ist dabei die Untersuchung von Entartungen algebraischer Mannigfaltigkeiten in singuläre Varietäten. Da wird die Theorie der Differentialformen und ihrer Perioden wirklich technisch, und kann nur in der Sprache der von Deligne eingeführten ,Mixed Hodge Structures" formuliert werden.

Der Artikel schließt mit der Anwendung dieser Theorie auf algebraische $K3$-Flächen. Es wird die Surjektivität der Periodenabbildung in diesem Fall bewiesen. Diese Tatsache, ein Resultat des erstgenannten Autors dieses Artikels aus den Jahren 1977–80, ist eines der wichtigsten Ergebnisse der Moskauer Schule der Algebraischen Geometrie um Shafarevich.

Insgesamt haben die Autoren einen glücklichen Kompromiß zwischen den Ansprüchen an Lesbarkeit und Präzision, sowie Umfang gefunden. Auf seinem Gebiet ist dies sicher der beste und nützlichste Übersichtsartikel bisher. Er sollte in keiner Institutsbibliothek fehlen.

Der zweite Artikel dieses Bandes befaßt sich mit einigen Aspekten der Theorie algebraischer Kurven. Er setzt den Übersichtsartikel ,Riemann Surfaces and Algebraic Curves" aus Band 23 dieser Enzyklopädie fort. Paragraph 1 enthält die Anwendungen der Theorie algebraischer Kurven auf gewöhnliche Differentialgleichungen (KP-Hierarchie, Toda-Gitter). Paragraph 2 skizziert die Theorie der ,speziellen Divisoren" auf einer algebraischen Kurve, Paragraph 3 beschäftigt sich mit Prym-Varietäten, und Paragraph 4 mit der Charakterisierung von Jacobischen. Der Autor benutzt die algebraische, nicht die analytische Sprache. Die vier Paragraphen stehen miteinander in Zusammenhang, allerdings nicht sehr eng. Die Gebiete sind klassisch, obwohl vollständige und exakte Resultate meist erst aus der Zeit zwischen 1970 und 80 stammen.

Dieser Übersichtsartikel ist nützlich. Der Verfasser ist international anerkannter Experte. Natürlich darf ein solcher Artikel in keiner mathematischen Enzyklopädie fehlen. Aber allein schon vom Umfang her hat er nicht das Gewicht des ersten Artikels in diesem Band.

Erlangen W. Barth

Ranicki, A., High-dimensional knot theory, Algebraic surgery in codimension 2, Appendix by E. Winkelnkemper (Springer Monographs in Mathematics), Berlin u. a.: Springer 1998, XXVI, 646 S., DM 189,–

Die Artenvielfalt in der Natur nimmt durch unkontrollierten menschlichen Eingriff bedrohlich ab, die Artenvielfalt der K- und L-Gruppen nimmt ebenso bedrohlich zu.

Die Knotentheorie (Titel des Buches) ist Geometrie und Topologie, also das Wirkliche Leben – und daher schmutzig. Das mögen wir aber gar nicht, schnell die Decke drüber. Die Läuterung des Körpers zu Geist und Seele geschieht durch die Verwandlung in Reine Algebra (Untertitel des Buches, verschämt im Kleindruck).

Das vorliegende Werk ist eine im lakonischen Berichtsstil verfaßte Spezialmonographie, die zum größten Teil aus Definitionen und Propositionen (die sich manchmal über drei Seiten erstrecken) besteht. Selten Beweise, und wenn, dann skizzenhaft, aber natürlich viele Verweise auf die Literatur. 200 Seiten K-Theorie, 400 Seiten L-Theorie. Vorausgesetzt wird eine gründliche Kenntnis der allgemeinen Methoden der K- und L-Theorie, sowie der algebraischen Chirurgie-Theorie, insbesondere tausende von Seiten früherer Schriften des Autors. Die Knotentheorie an sich und ihre topologischen Ergebnisse werden ebenfalls eigentlich vorausgesetzt: Ein Hauptergebnis über die Kobordismengruppe von Knoten, hier die letzte Formel auf der letzten Seite 612, ein abzählbar unendliches Produkt zyklischer Gruppen der Ordnungen $\infty, 2, 4$ – das liest und versteht man durch die Originalarbeiten von Kervaire, Milnor, Levine und Stoltzfus.

Was findet man also in dem Buch? Was sucht man? Findet man, wenn man sucht? Zunächst einmal wird man mit einer schier unüberschaubaren Fülle von Algebra, K- und L-Theorie, die im weiteren Sinne durch die Knotentheorie motivierbar ist (wie etwa unendliche zyklische Überlagerung, Seifert-Form, gefaserte Knoten, offene Bücher,...), konfrontiert. Das führt zu Polynomringen $A[z]$, Laurent-Ringen $A[z, z^{-1}]$, Potenzreihen $A[[z]]$, diversen (auch nicht-kommutativen) Lokalisierungen, deren K- und L-Theorie (bezüglich verschiedener Involutionen), also auch die entsprechenden Theorien für Objekte mit Endomorphismen oder Automorphismen. (Der Buchstabe L wird durch obere und untere Indizes, durch Zusätze und weitere geklammerte Zusätze, die ihrerseits mehrere obere und untere Indizes tragen können, dekoriert.) Die Artenverwandschaft wird in hunderten von exakten Sequenzen, Zopf-Diagrammen, Isomorphismen, Interpretationen etc. notiert. Zwischendurch gibt es kurze Berichte über den topologischen Ursprung. Man kann das Werk als ein umfassendes Kompendium über derlei Algebra ansehen und als vollständige Zusammenfassung und Aufarbeitung der relevanten Literatur. Das eigentliche Anliegen des Autors ist wohl die Umarbeitung, Einordnung, Übersetzung und dabei Systematisierung des knotenmotivierten Materials im Hinblick auf die u. a. vom Autor entwickelte und vertretene algebraische Chirurgie-Theorie.

Das Buch wird man kaum als fortlaufenden Text lesen. Es ist lexikalischer Natur. Man schlägt nach. Ein Beispiel: Die 20-seitige historische Einleitung wird man sicherlich lesen. Dort steht: The main technique used in the book is *algebraic transversality*. Im Index unter A und T findet sich nichts. Kapitel 7 trägt den Titel Algebraic Transversality. Dort wird dieser Terminus aber im Wortsinne nicht erklärt. Wenn man sowieso schon alles weiß, was der Autor unterstellt, mag man raten. Es wird auf ein früheres Buch des Autors verwiesen.

Wünschenswert wäre eine strukturierte Übersicht über Inhalt und Zweck des Buches. In der amorphen Aneinanderreihung des Textes findet man schwer strukturierte Anhaltspunkte. Es gibt seitenlange Wiederholungen grundlegender Definitionen aus früheren Wiederholungen desselben Materials. Aber, wo hört der Bericht auf, wo beginnt die Erkenntnis? Das möchte man doch gesagt bekommen.

Da das Buch nun einmal den Titel trägt, wäre es schön gewesen, wenn wenigstens ein einziges geometrisches Resultat über Knoten wirklich hergeleitet worden wäre.

Gibt es eine Laus im Pelz? Nein, einen Glückskäfer: Der sehr lesenswerte Anhang (10 Seiten) von Winkelnkemper über die Darstellung von Mannigfaltigkeiten als sogenannte offene Bücher, über Anwendungen und geometrische Implikationen.

Göttingen T. tom Dieck

Banyaga, A., The Structure of Classical Diffeomorphism Groups (Mathematics and its Applications, 400), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group 1997, XII+197 pages, $ 112

Over the last decades infinite dimensional groups have been intensively studied. Beside gauge groups and certain Banach Lie groups arising from C^*-algebra theory and/or quantum physics, the most natural class of them are the groups of diffeomorphisms of finite dimensional manifolds, possibly preserving some extra structure as a symplectic or a volume form, or a contact structure. Though these "classical" diffeomorphism groups are obviously closely linked to the geometry of the manifold, their study is difficult from a "Lie theoretic" point of view at least for the following three reasons:

- the smooth Banach manifold of C^r-diffeomorphisms is (for $1 \leq r < \infty$) only a topological group,
- the exponential map of the Fréchet manifold of C^∞-diffeomorphisms is not a local diffeomorphism, and
- this latter smooth Fréchet Lie group has no real-analytic structure.

In the research monograph under review the author concentrates on two related – algebraic – aspects of the theory which seem to be reaching a certain maturity. Namely, he considers purely group theoretic properties, such as simplicity and perfectness of the concerned groups, and the question if one can recover the manifold (plus possibly one of the above mentioned extra structures) from the group of diffeomorphisms. Obviously these questions can be considered as an extension of Kleins Erlangen program to the case of diffeomorphism groups.

Before describing very briefly the content of this monograph, we would like to point out that both the Zentralblatt and the Mathematical Reviews articles on it are already available (Zbl. 874.58005 and MR 98h:22024).

The first chapter introduces the fundamental concepts and facts of the theory of diffeomorphism groups as $\mathrm{Diff}_c^\infty(M)$, the group of smooth diffeomorphisms of a manifold M, which are equal to the identity of M outside a compact set.

In the second chapter the rather ingenious proof of the simplicity of $\mathrm{Diff}_c^\infty(M)_0$, the connected component of $\mathrm{Diff}_c^\infty(M)$ containing the identity of M, is derived. Here, the "geometric parts", i.e. Hermans proof in the case that M is a n-dimensional torus and Thurstons extension to arbitrary manifolds are completely presented, and only the proof of an appropriate implicit function theorem in Fréchet spaces is put aside.

Chapter 3 covers the "flux homomorphism" from the identity component of $\mathrm{Diff}_\omega^\infty(M)_c = \{\phi \in \mathrm{Diff}_c^\infty(M) \mid \phi^*\omega = \omega\}$ (for a closed p-form ω on M) to a quotient of $H_c^{p-1}(M)$, the $(p-1)$-th de Rham cohomology group of compactly supported forms, from several points of view.

In the following two chapters (4 and 5) the results on the full diffeomorphism group obtained in Chapter 2 are extended to the symplectic and the volume-preserving cases with the main difference that simplicity is now only proved for the kernels of the respective flux homomorphisms.

Similar statements are proved in the contact case in Chapter 6, where the approach à la Herman and Thurston hitherto used is replaced by "Epsteins theory" which supplies a criterion for simplicity of subgroups of diffeomorphism groups.

The concluding Chapter 7 applies the preceding results in order to show that an abstract group isomorphism between the groups of diffeomorphisms of two manifolds is always induced by a smooth diffeomorphism of the manifolds. The analogous results for the symplectic, unimodular and contact cases are derived as well, together with their "infinitesimal" counterparts for the corresponding Lie algebras of vector fields.

This monograph is a very complete and detailed account of the algebraic theory of classical diffeomorphism groups written by one of its principal contributors. Inevitably, the thorough presentation of the involved proofs forces the author to include some rather technical parts. Nevertheless this book is a genuine addition to the literature and far from being merely a compilation of the existing research articles on the subject.

Some words of criticism might be nevertheless in place: a symbol index would be helpful for the reader and, unfortunately, the proof-reading appears to be not on the same level of accuracy as the text. In fact, the numerous misprints range from misspellings to mistakes and gaps in formulas.

As a last remark, the reviewer would like to point out that \$ 112 for a book with less than 200 pages seems to be a bit overprized in a world where TEX is freely available (and was used for typing this book) and mathematical library budgets are shrinking.

Strasbourg T. Wurzbacher

Berndt, R., Einführung in die Symplektische Geometrie (Advanced Lecture in Math.), Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 1998, 185 S., Kart. DM 48,–

Durch Abstraktion von der hamiltonschen Formulierung der Mechanik ist die symplektische Geometrie in ihrer heutigen Form entstanden. Die symplektische Gruppe wurde allerdings auch unabhängig davon untersucht, laut H. Weyl bereits von N. H. Abel. In den 60er Jahren begann dann eine stürmische Entwicklung, welche bis heute andauert und mit Namen wie Kirillov, Kostant und Souriau in Verbindung steht. Einige der zugrundeliegenden Ideen (z. B. die Impulsabbildung) finden sich allerdings schon in Lies Buch aus dem letzten Jahrhundert. Es gibt inzwischen bereits zahlreiche Einführungen in Buchform – Hinweise werden in der Einleitung gegeben – allerdings nicht auf Deutsch. Diese Lücke wird von der vorliegenden Monographie geschlossen, welche aus Vorlesungen des Autors hervorgegangen ist.

Nach einem Überblick über hamiltonsche Mechanik und Quantisierung wird zunächst die lineare Algebra symplektischer Vektorräume einschließlich der symplektischen Gruppe und der mit einer vorgegebenen symplektischen Struktur verträglichen komplexen Strukturen behandelt.

Symplektische Mannigfaltigkeiten werden in der üblichen Weise eingeführt. Erklärt werden u.a. der Satz von Darboux, und als Beispiele symplektischer Mannigfaltigkeiten tauchen Kotangentialbündel, Kählermannigfaltigkeiten, und koadjungierte Bahnen auf; etwas mehr Platz wird dann dem komplex projektiven Raum gewidmet. Erfreulich ist, daß auf S. 63 die wenig bekannte Tatsache erklärt wird, wie der n-dimensionale komplex projektive Raum mit seiner symplektischen Struktur als koadjungierte Bahn der Gruppe $SU(n+1)$ gewonnen wird. Am Ende des 2. Kapitels wird kurz auf das „squeezing theorem“ von Gromov, auf pseudoholomorphe Kurven und auf symplektische Kapazitäten eingegangen. Dies sei hier hervorgehoben, ebenso die Behandlung von Kontaktmannigfaltigkeiten im folgenden 3. Kapitel, in welchem zuvor hamiltonsche Vektorfelder und Poissonklammern eingeführt werden.

Anschließend werden Impulsabbildung (engl. „moment map“) und symplektische Reduktion behandelt und das Verfahren der geometrischen Quantisierung skizziert. In einem Anhang werden einige technische Hilfsmittel zu glatten Mannigfaltigkeiten und Vektorbündeln, zu Liegruppen und Liealgebren, zu Kohomologietheorie und zur Darstellungstheorie bereitgestellt.

Das Buch ist elementar, als solches auch gedacht, und erfreulich kurz. Es wird seinem Zweck allerdings nur mit Einschränkungen genügen. Schon das einführende Kapitel, welches als Motivation gedacht ist und die Überschrift „Einige Aspekte der theoretischen Mechanik" trägt, ist in der Darstellung nicht befriedigend. Schade, hier wurde eine Gelegenheit verspielt, eine echte Einführung zu geben. (Zur Orientierung mögen hier etwa die entsprechenden Abschnitte in [N. Woodhouse, Geometric Quantization, Oxford: Clarendon 1980] dienen). Beispielsweise wird gleich auf der ersten Seite mit den Begriffen „System" und „Veränderung" umgegangen, ohne daß diese vorher definiert worden sind (oder ohne daß vorher bemerkt wurde, daß diese absichtlich nicht definiert worden sind). Der hamiltonsche Formalismus wird mit Hilfe der Legendretransformation in der üblichen Weise erklärt, aber es wird nicht bemerkt, daß dabei eine Voraussetzung (Umkehrbarkeitsvoraussetzung) erforderlich ist, welche in vielen Fällen nicht erfüllt ist und Anlaß zur (äußerst wichtigen) Theorie von Systemen mit Zwangsbedingungen (Beispiel: Elektrodynamik) gegeben hat. Im Abschnitt (0.6) wird dann die Beziehung zwischen klassischer Poissonklammer und quantenmechanischem Kommutator mit Hilfe einer „von der Physik nahegelegten Konstanten" c erklärt, welche ein Vielfaches von i ist, ohne daß dabei bemerkt wird, daß i nicht die Rolle einer Konstanten spielt, sondern aus formalen Gründen eingeführt werden muß, die mit der (wahrscheinlichkeitstheoretischen) Interpretation der Quantenmechanik zusammenhängen, da der Kommutator $AB - BA$ zweier symmetrischer Operatoren A, B kein symmetrischer Operator ist. Die Rolle der Konstanten c wird auf S. 124 wieder aufgegriffen, aber auch dort ist nur die Rede von einer „Liealgebra selbstadjungierter Operatoren", ohne daß erläutert wird, was damit gemeint ist. An dieser Stelle hätte mit einigen Zeilen übrigens die wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation der Quantenmechanik erklärt werden können.

Auch anderswo hätte eine zusätzliche Bemerkung mitunter zu mehr Klarheit verholfen. Beispielsweise wird im Abschnitt 2.4 der Cauchy-Riemann-Operator im Rahmen eines „Formalismus komplexer Differentialformen" in Koordinaten ohne Hinweis auf den Dolbeaultkomplex eingeführt; auch der Cauchy-Riemann-Operator wird nicht als solcher benannt. Selbst der Anhang gibt Anlaß zu Mißverständnissen. Dort werden auf S. 168 die (echschen) Kohomologiegruppen einer Mannigfaltigkeit mit Werten in einer Gruppe eingeführt, welche mit G bezeichnet wird. Es wird nicht bemerkt, daß G hier abelsch sein muß. Bis an dieser Stelle bezeichnete G stets eine i.a. nicht-abelsche Gruppe.

Der Stil des Autors ist nicht immer ganz geschickt. Es mag sein, daß in einer Vorlesung die einzelnen Worte einen anderen Stellenwert als in der jetzt geschriebenen Fassung haben. In der vorliegenden Buchform gibt beispielsweise die Verwendung der Passivform zusammen mit „kann" leider gelegentlich Anlaß zu Mißverständnissen. (Beispiele: S. 81: „ kann durch Vorgabe einer gewissen 1-Form eine Kontaktstruktur auf einer Mannigfaltigkeit definiert werden "; S. 123: „Es kann nun versucht werden, den Bereich der Quantisierung auszudehnen "; S. 125: „Es kann nun ein noch etwas anderer Ansatz verfolgt werden.").

Sollte es zu einer Neuauflage kommen, ist zu hoffen, daß die Gelegenheit zur Beseitigung der genannten Mängel genutzt wird.

Lille J. Huebschmann

de Gruyter Mathematics

de Gruyter Expositions in Mathematics

Editors: O. H. Kegel · V. P. Maslov · W. D. Neumann · R. O. Wells, Jr.

Volume 31:

Viktor P. Maslov · Petya P. Mosolov

Nonlinear Wave Equations Pertubed by Viscous Terms

2000. 17 x 24 cm. X, 329 pages. Cloth.
USA, Canada, Mexico: Cloth US$ 148.95
All other countries: DM 298,- /EUR 152,36 / öS 2.175,- /sFr 265,- • ISBN 3-11-015282-7

This book deals with mathematical statements of a wide class of problems studied in mechanics. In particular, equations of one-dimensional barotropic gas, the Cauchy problem for equations of viscous compressible fluids, hyperbolic equations with small viscosity, and the theory of elasticity for media with different moduli of elasticity are studied. Admissible discontinuities of solutions are classified, and the problem of interaction of discontinuities is considered.
The book is intended for scientists in mathematics and mechanics, as well as for graduate and post-graduate students.

de Gruyter Proceedings in Mathematics

Algebraic Number Theory and Diophantine Analysis

Proceedings of the International Conference held in Graz, Austria, from August 30 to September 5, 1998

Editors: F. Halter-Koch · R. F. Tichy

2000. 17 x 24 cm. XVII, 554 pages. Cloth.
USA, Canada, Mexico: US$ 168.95
All other countries: DM 368,- /EUR 188,16 / öS 2.686,- /sFr 328,- • ISBN 3-11-016304-7

de Gruyter Series in Logic and Its Applications

Editors: W. A.Hodges · R. Jensen · S. Lempp · M. Magidor

Volume 3:

Sy D. Friedman

Fine Structure and Class Forcing

2000. 17 x 24 cm. X, 221 pages. Cloth.
USA, Canada, Mexico: Approx. US$ 89.95
All other countries: Approx. DM 178,- / EUR 91,01 /öS 1.229,- /sFr 158,-
• ISBN 3-11-016777-8

This book is intended for the student familiar with the basics of axiomatic set theory, including an introduction to Gödel's theory of constructibility. It presents a thorough analysis of the first two approximations to the set-theoretic universe, given by the universes L and $L[0^\#]$. Gödel's constructible universe L provides the setting in which the most thorough understanding of set theory can be achieved, through use of the fine structure theory.
The text begins with a streamlined treatment of the fine structure of L, using the notion of Σ^* formula. This is followed by the technique of forcing with sets or classes, establishing basic facts about the preservation of ZFC and cofinalities. The model $L[0^\#]$ then arises naturally as a way to select the "relevant" forcing extensions of L. The author shows that forcing, normally a tool for establishing relative consistency results, now becomes a powerful technique for analysing the set-theoretic universe. He develops this theme by using class forcing to solve the Genericity, Π^1_2-Singleton and Admissibility Spectrum problems of Jensen and Solovay.

Prices are subject to change.

WALTER DE GRUYTER GMBH & CO. KG
Genthiner Straße 13 · 10785 Berlin
Telefon +49-(0)30-2 60 05-0
Fax +49-(0)30-2 60 05-251
www.deGruyter.de

de Gruyter
Berlin · New York