

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg  
unter Mitwirkung von  
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,  
H. Lange, H. Triebel



# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

## Manuskripte:

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Daten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

<http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html>

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden. Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Recht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

## Verlag:

GWV Fachverlage  
B. G. Teubner GmbH Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden  
Postfach 1546, 65173 Wiesbaden  
Abraham-Lincoln-Straße 46, 65189 Wiesbaden  
<http://www.teubner.de>  
<http://www.gwv-fachverlage.de>

*Geschäftsführer:* Dr. Hans-Dieter Haenel  
*Verlagsleitung:* Dr. Heinz Weinheimer  
*Gesamtleitung Anzeigen:* Thomas Werner  
*Gesamtleitung Produktion:* Reinhard van den Hövel  
*Gesamtleitung Vertrieb:* Heinz Detering

## Abo-/Leserservice:

Tatjana Hellwig  
Telefon: (06 11) 78 78-1 51  
Fax: (06 11) 78 78-4 23  
E-Mail: [tatjana.hellwig@bertelsmann.de](mailto:tatjana.hellwig@bertelsmann.de)

## Marketing/Sonderdrucke:

Stefanie Hoffmann  
Telefon: (06 11) 78 78-3 79  
Fax: (06 11) 78 78-4 39  
E-Mail: [stefanie.hoffmann@bertelsmann.de](mailto:stefanie.hoffmann@bertelsmann.de)

## Abonnentenverwaltung:

(Änderungen von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung) VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6 / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,  
Postfach 7777, 33310 Gütersloh  
Ursula Müller  
Telefon: (0 52 41) 80-19 65  
Fax: (0 52 41) 80-96 20  
E-Mail: [ursula.mueller@bertelsmann.de](mailto:ursula.mueller@bertelsmann.de)

## Bezugsbedingungen:

Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementspreis von € 95,- (158,- sFr) inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.  
Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

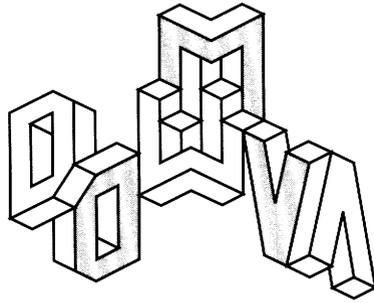
## Copyright ©

B. G. Teubner GmbH Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden 2001. Printed in Germany. Der Verlag Teubner ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer. Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil dieser Zeitschrift darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages vervielfältigt oder verbreitet werden. Unter dieses Verbot fällt insbesondere die gewerbliche Vervielfältigung per Kopie, die Aufnahme in elektronischen Datenbanken und die Vervielfältigung auf CD-ROM und allen anderen elektronischen Datenträgern.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim  
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

ISSN 0012-0456

Beilagenhinweis: Diese Ausgabe enthält eine Fremdbeilage des Stern-Verlages Janssen & Co., Düsseldorf und eine Verlegerbeilage. Wir bitten unsere Leser um Beachtung



# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

104. Band

Herausgegeben von A. Krieg  
unter Mitwirkung von  
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,  
H. Lange, H. Triebel



© B. G. Teubner GmbH Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2002

Der Teubner Verlag ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer.

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil dieser Zeitschrift darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages vervielfältigt oder verbreitet werden. Unter dieses Verbot fällt insbesondere die gewerbliche Vervielfältigung per Kopie, die Aufnahme in elektronischen Datenbanken und die Vervielfältigung auf CD-ROM und allen anderen elektronischen Datenträgern.

Satz: Fotosatz Behrens, Oftersheim

Druck und buchbinderische Verarbeitung: pagina media gmbh, Hemsbach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Printed in Germany

ISSN 0012-0456

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

<b>On the character space of commutative hypergroups</b>	3
R. Lasser . . . . .	3
<b>Wagners Vermutung und das Graphen-Minoren Projekt</b>	
D. Rautenbach . . . . .	17
<b>Discriminants, Resultants and a Conjecture of S. Halperin</b>	
V. Hauschild . . . . .	26
<b>Two Problems in Economics</b>	
I. Ekeland . . . . .	51
<b>Von den Linienkoordinaten zu Regelvarietäten</b>	
G. Fischer . . . . .	59
<b>Domain decomposition in optimal control problems for distributed parameter systems</b>	
J. E. Lagnese, G. Leugering . . . . .	91
<b>Gitter und Modulformen</b>	
G. Nebe . . . . .	125
<b>Atoms of Topology</b>	
H.-J. Baues . . . . .	147
<b>Cantor's Set Theory from a Modern Point of View</b>	
Sy D. Friedman . . . . .	165
<b>Fraktale Analysis aus der Sicht der Funktionenräume</b>	
H. Triebel . . . . .	171

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

<b>Leopold Vietoris zum Gedächtnis</b>	75
H. Reitberger . . . . .	75

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

<b>H. Niederreiter, C. P. Xing: Rational Points on Curves over Finite Fields</b>	1
H. Stichtenoth . . . . .	1
<b>J. von zur Gathen, J. Gerhard: Modern Computer Algebra</b>	
W. Decker . . . . .	2
<b>K. Hulek: Elementare Algebraische Geometrie</b>	
Ch. Birkenhake . . . . .	4
<b>M. Väth: Volterra and Integral Equations of Vector Functions</b>	
N. Jacob . . . . .	5
<b>K. Sato: Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions</b>	
R. Schilling . . . . .	6
<b>T. M. Liggett: Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes</b>	
A. Klenke . . . . .	10

<b>R. Korn, E. Korn: Option Pricing and Portfolio Optimization</b>	
M. Schweizer . . . . .	11
<b>T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmid, J. Teugels: Stochastic Processes for Insurance and Finance</b>	
D. Tasche . . . . .	13
<b>J. Nocedal, S. J. Wright: Numerical Optimization</b>	
J. Jahn . . . . .	14
<b>J. Appell, A. S. Kalitvin, P. P. Zabrejko: Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations</b>	
N. Jacob . . . . .	15
<b>K. J. Engel, R. Nagel: One-Parameter Semigroups of Linear Evolution Equations</b>	
M. Demuth . . . . .	16
<b>R. G. Bartle: A Modern Theory of Integration</b>	
S. Graf . . . . .	18
<b>M. Hazewinkel (Ed.): Handbook of Algebra, Volume 2</b>	
H.-J. Nastold . . . . .	21
<b>B. Bolzano: Functionenlehre</b>	
D. D. Spalt . . . . .	22
<b>T. Needham: Anschauliche Funktionentheorie</b>	
Th. Bröcker . . . . .	25
<b>A. Juhl: Cohomological Theory of Dynamical Zeta Functions</b>	
J. Hilgert . . . . .	27
<b>K.-H. Neeb: Holomorphy and Convexity in Lie Theory</b>	
G. Ólafsson . . . . .	30
<b>A. Uchiyama: Hardy spaces on the Euclidean space</b>	
H. Triebel . . . . .	33
<b>J.-P. Aubin: Mutational and Morphological Analysis</b>	
K.-P. Hadeler . . . . .	34
<b>L. Ambrosio, N. Dancer: Calculus of Variations and Partial Differential Equations</b>	
M. Grüter . . . . .	36
<b>M. Chipot: Elements of Nonlinear Analysis</b>	
H. Kielhöfer . . . . .	37
<b>A. M. Etheridge: An Introduction to Superprocesses</b>	
A. Klenke . . . . .	39
<b>M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, V. Montesinos Santalucia, J. Pelant, V. Zizler: Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry</b>	
E. Behrends . . . . .	41
<b>F. Dillen, L. Verstraelen (Eds.): Handbook of Differential Geometry, Vol. 1</b>	
J. Heber . . . . .	42

<b>G. Fischer, J. Pionkowski: Ruled Varieties</b>	45
E. Serresi . . . . .	45
<b>D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov: A Course in Metric Geometry</b>	46
W. Ballmann . . . . .	46
<b>M. R. Murty: Problems in Analytic Number Theory</b>	48
S. J. Patterson . . . . .	48
<b>E. Krätzel: Analytische Funktionen in der Zahlentheorie</b>	49
S. J. Patterson . . . . .	49
<b>R. Carroll: Quantum Theory, Deformation and Integrability</b>	51
P. Vanhaecke . . . . .	51
<b>W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander: Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems</b>	52
R. Nagel . . . . .	52
<b>D. Eisenbud, D. R. Grayson, M. Stillman, B. Sturmfels: Computations in Algebraic Geometry with Macaulay 2</b>	55
S. Müller-Stach . . . . .	55
<b>C. F. Dunkl, Y. Xu: Orthogonal Polynomials of Several Variables, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications</b>	57
H. J. Schmid . . . . .	57



**Vorwort** ..... 145

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

**Atoms of Topology**  
H.-J. Baues ..... 147

**Cantor's Set Theory from a Modern Point of View**  
Sy D. Friedman ..... 165

**Fraktale Analysis aus der Sicht der Funktionenräume**  
H. Triebel ..... 171

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

**D. Eisenbud, D. R. Grayson, M. Stillman, B. Sturmfels: Computations in Algebraic  
Geometry with Macaulay 2**  
S. Müller-Stach ..... 55

**C. F. Dunkl, Y. Xu: Orthogonal Polynomials of Several Variables, Encyclopedia  
of Mathematics and Its Applications**  
H. J. Schmid ..... 57

### In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten

**P. Ullrich:** Die Weierstraßschen „analytischen Gebilde“:  
Alternativen zu Riemanns „Flächen“ und Vorböten der komplexen Räume

---

### Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, 52056 Aachen  
E-Mail: [krieg@mathA.rwth-aachen.de](mailto:krieg@mathA.rwth-aachen.de)

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle  
Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund  
E-Mail: [gather@statistik.uni-dortmund.de](mailto:gather@statistik.uni-dortmund.de)

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg  
E-Mail: [heintze@math.uni-augsburg.de](mailto:heintze@math.uni-augsburg.de)

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln  
E-Mail: [kawohl@mi.uni-koeln.de](mailto:kawohl@mi.uni-koeln.de)

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität  
Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1 $\frac{1}{2}$ , 91054 Erlangen  
E-Mail: [lange@mi.uni-erlangen.de](mailto:lange@mi.uni-erlangen.de)

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität,  
Ernst-Abbe-Platz 1–4, 07740 Jena  
E-Mail: [triebel@minet.uni-jena.de](mailto:triebel@minet.uni-jena.de)

### Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heerweg 347 b, POB 810,  
NL-2160 SZ Lisse/Holland

## Vorwort

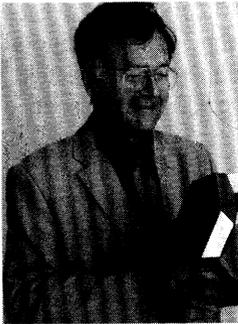
In diesem Heft finden Sie neben den Buchbesprechungen und der Arbeit von Herrn Baues die Ausarbeitungen der Plenarvorträge auf der diesjährigen DMV-Jahrestagung in Halle von Herrn Friedman und Herrn Triebel.

Die DMV-Tagung hatte als Schwerpunkt die mathematische Modellbildung in den Naturwissenschaften. Die Anwendungsorientierung wurde durch einen speziellen Industrie-Nachmittag unterstrichen. Aufgrund des Umfeldes von Halle spielte dabei die chemische Industrie eine besondere Rolle. Obwohl die Anwendungsorientierung in der letzten Zeit immer wieder gefordert wurde und die Veranstalter großes Engagement gezeigt haben, ist der erwartete größere Zuspruch leider ausgeblieben. Sicherlich werden in den kommenden Jahren weitere Organisationsformen getestet werden, damit die DMV-Jahrestagung der zentrale Treffpunkt der deutschen Mathematikerinnen und Mathematiker bleibt.

Sie werden in den nächsten Heften weitere Ausarbeitungen von Haller Plenarvorträgen finden. Neben den bis jetzt erschienenen Arbeiten von Herrn Friedman, Frau Nebe und Herrn Triebel haben noch Frau Hefendehl-Hebeler, Herr Mohnke und Herr Schuster Beiträge zugesagt.

A. Krieg





## Atoms of Topology

Hans-Joachim Baues

### Abstract

- Keywords and Phrases: homotopy types of finite polyhedra, suspension, atom, homotopy groups of spheres, wild representation type
- Mathematics Subject Classification: 55P15

In 1932 Alexandroff wrote the introductory essay „Einfachste Grundbegriffe der Topologie“ on polyhedra and homology. Following this tradition we explain the elementary notion of an atom in topology which leads to outstanding problems of Mathematics: the computation of stable homotopy groups of spheres and the wild problem of representation theory. In low dimension  $\leq 11$  we describe a complete list of such atoms.

Eingegangen: 22. 07. 2002

Hans-Joachim Baues, Max-Planck-Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7,  
D-53111 Bonn, Germany. E-Mail: baues@mpim-bonn.mpg.de

**DMV**  
**JAHRESBERICHT**  
**DER DMV**  
© B. G. Teubner 2002

We can think of Topology as the theory of spaces. A priori, one has for each  $n = 1, 2, 3, \dots$  an Euclidean space  $\mathbb{R}^n$  of dimension  $n$ . For  $n = 1$  this is the real line  $\mathbb{R}$  whose points are real numbers. Moreover  $\mathbb{R}^2$  is the plane. The 3-dimensional space  $\mathbb{R}^3$  is closest to our intuition and figures which we can see in the real world can be described by subsets of  $\mathbb{R}^3$ . In general  $\mathbb{R}^n$  consists of all tuples  $x = (x_1, \dots, x_n)$  where  $x_1, \dots, x_n$  are real numbers in  $\mathbb{R}$ .

In the following a *space* means a subset of an Euclidean space  $\mathbb{R}^n$  of arbitrary dimension so that spaces are very general geometrical figures. Spaces or figures are like topological molecules in which, as we show, a plan of molecular structure is deeply hidden. We use the analogy between spaces and molecules as a helpful tool to explain the mathematical results in this paper. In nature molecules have the well known properties in table 1.

#### Atoms in Nature

- (a) Each *molecule* splits into atoms; in order to obtain the splitting one needs *forces* of chemistry.
- (b) Atoms are *indecomposable* with respect to such forces.
- (c) There is a list of atoms ordered by the number of *protons* inside an atom. The atom with exactly one proton is the hydrogen atom denoted by H.

Table 1

In topology “finite spaces” have also a kind of molecular structure. In fact, we introduce the notion of an “atom” in topology and we show that finite spaces have the properties in table 2 analogous to properties of molecules in table 1.

#### Atoms in Topology

- (A) Each *finite space* splits via suspension into atoms; here *suspension* is a kind of force which allows the splitting.
- (B) Atoms are *indecomposable*.
- (C) We describe a list of atoms of low dimension ordered by the number of *cells* inside an atom. The atom with exactly one cell is the 1-sphere denoted by  $S^1$ .

Table 2

Such properties of finite spaces are fundamental results which can be explained easily by use of a few elementary notions of topology.

Some people in physics now say that the dimension of the real world is not 3 or 4 but 11, compare for example [CJS] and [N]. As a coincidence it turns out that in topology dimension 11 is the highest dimension for which the number of torsion free atoms is finite. In fact, there exist exactly 394 torsion free atoms of dimension  $\leq 11$ . Such atoms have at most 6 cells. In dimension  $> 11$  the number of torsion free atoms is infinite.

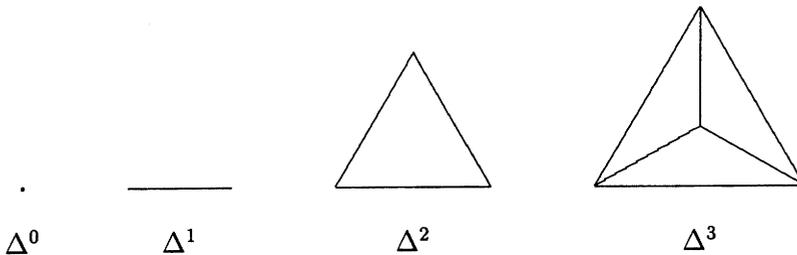
The determination of atoms in topology leads to two outstanding problems of Mathematics: On the one hand the *computation of stable homotopy groups of spheres* which is equivalent to the computation of a list of atoms with 2 cells, and on the other hand the *universal problem of representation theory* (see table 3) which is equivalent to the determination of a complete list of atoms of dimension 9.

## 1 Finite spaces

Two spaces  $X$  and  $Y$  are *homeomorphic* if there exist continuous maps  $f : X \rightarrow Y$  and  $g : Y \rightarrow X$  such that the composites  $fg = 1_Y$  and  $gf = 1_X$  are the identity maps. A class of homeomorphic spaces is called a *homeomorphism type*. We identify homeomorphic spaces and we write  $X \approx Y$  if there is a homeomorphism  $X \rightarrow Y$ .

Homotopy types are equivalence classes of spaces which are considerably larger than homeomorphism types. To this end we use the notion of deformation or homotopy. Two maps  $f, g : X \rightarrow Y$  are *homotopic*,  $f \simeq g$ , if there is a family of maps  $f_t : X \rightarrow Y, 0 \leq t \leq 1$ , with  $f_0 = f, f_1 = g$  such that the map  $(x, t) \mapsto f_t(x)$  is continuous as a function of two variables. The principal idea of the notion of homotopy type is to consider “nearby” objects (that is, objects, which are “deformed” or “perturbed” continuously a little bit) as being similar. This idea of perturbation is a common one in Mathematics and Science; properties which remain valid under small perturbations are considered to be the stable and essential features of an object. The equivalence relation generated by “slight continuous perturbations” has its precise definition by the notion of homotopy equivalence: Two spaces  $X$  and  $Y$  are *homotopy equivalent*,  $X \simeq Y$ , if there are continuous maps  $f : X \rightarrow Y$  and  $g : Y \rightarrow X$  such that the composites  $fg$  and  $gf$  are homotopic to the identities,  $fg \simeq 1_Y$  and  $gf \simeq 1_X$ . A class of homotopy equivalent spaces is called a *homotopy type*.

For each number  $n = 0, 1, 2, \dots$  one has the *simplex*  $\Delta^n$  which is the convex hull of the basic unit vectors  $e_0, e_1, \dots, e_n$  regarded as points in the Euclidean  $(n + 1)$ -space  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Hence  $\Delta^0$  is a point,  $\Delta^1$  an interval,  $\Delta^2$  a triangle,  $\Delta^3$  a tetrahedron, and so on:



The dimension of  $\Delta^n$  is  $n$ . The name “simplex” describes an object which is supposed to be very simple: Yet once the simplex was defined, the universe of polyhedra had to emerge:

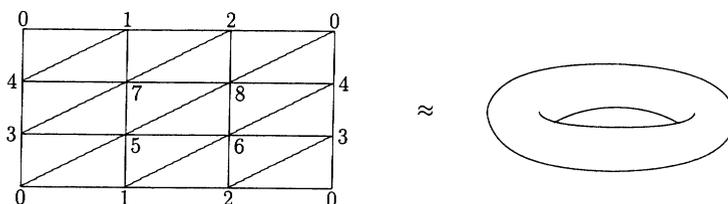
For each subset  $a \subset \{0, 1, \dots, n\}$  with  $a = \{a_0 < \dots < a_r\}$  one has the  $r$ -dimensional *face*  $\Delta_a \subset \Delta^n$  which is the convex hull of the set of vertices  $e_{a_0}, \dots, e_{a_r}$ . Hence the set of all subsets of the set  $\{0, 1, \dots, n\}$  can be identified with the set of all faces of the simplex

$\Delta^n$ . There are “substructures”  $S$  of a simplex obtained by the union of several faces, that is,

$$S = \Delta_{a_1} \cup \Delta_{a_2} \cup \dots \cup \Delta_{a_k} \subset \Delta^n \text{ with } a^1, \dots, a^k \subset \{0, \dots, n\}.$$

*Finite polyhedra* are topological spaces  $X$  homeomorphic to such substructures  $S$  of simplexes  $\Delta^n, n \geq 0$ . A homeomorphism  $S \approx X$  is called a *triangulation* of  $X$ . Hence a polyhedron  $X$  is a space in which we do not see any simplexes. We can introduce simplexes in  $X$  via triangulation.

For example the *torus* is the product  $S^1 \times S^1$  of two 1-spheres. A triangulation of the torus is obtained as in the following picture:



Here the corresponding subsets  $a^i \subset \{0, \dots, 8\}$  are defined by triangles. In the sketch we use the fact that the torus  $S^1 \times S^1$  is obtained from the square by identifying sides in the boundary; for example the edge connecting vertices 0 and 3 on the left hand side is identified with the corresponding edge on the right hand side.

The initial problem of topology (Seifert and Threlfall [ST] called it the main problem) is the classification of homotopy types of finite polyhedra. A great deal of J. H. C. Whitehead’s work focused on this problem. Compare the article of Hilton-James [HJ].

**(1.1) Definition** A space  $X$  is *finite* if there exists a finite polyhedron homotopy equivalent to  $X$ .

The *dimension* of a polyhedron  $X$  is the maximal dimension of a simplex which can appear in a triangulation of  $X$ . The *homotopy dimension*  $\dim(X)$  of a finite space  $X$  is the minimal dimension of a polyhedron homotopy equivalent to  $X$ . Hence the homotopy dimension of a finite space  $X$  is an invariant of the homotopy type of  $X$ .

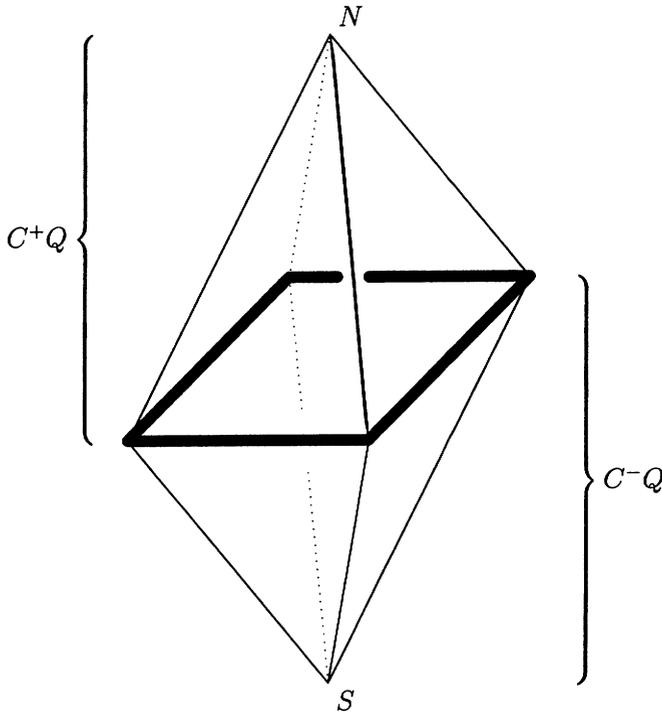
The *n-sphere*  $S^n$  is the set of all points  $x$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  with  $\|x\| = 1$  and the *(n + 1)-ball*  $B^{n+1}$  is the set of all  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  with  $\|x\| \leq 1$ . The sphere  $S^n$  is the boundary  $\partial B^{n+1}$  of  $B^{n+1}$ . A space  $X$  is *(n – 1)-connected* if each continuous map  $S^i \rightarrow X$  with  $i \leq n – 1$  admits a continuous extension  $B^{i+1} \rightarrow X$ . We call  $n – 1 = \text{conn}(X)$  the *connectivity* of  $X$  if  $X$  is  $(n – 1)$ -connected but not  $n$ -connected.

The complexity of a homotopy type in general is largely measured by the dimension and, for a given dimension, the complexity diminishes as the connectivity increases.

A space  $X$  is *contractible* if  $X$  is homotopy equivalent to a point. For a contractible space  $X$  we have  $\text{conn}(X) = \infty$  since  $X$  is  $n$ -connected for all  $n$  and  $\dim(X) = 0$ . All balls  $B^n$  are contractible. The torus  $S^1 \times S^1$  is 0-connected but not 1-connected so that  $\text{conn}(S^1 \times S^1) = 0$ .

We need the notion of suspension originally termed „Einhangung“ by Freudenthal [F]. Given a space  $X$  we define the *suspension*  $\Sigma X$  of  $X$  as follows. For  $X \subset \mathbb{R}^n$  we

choose points  $N$  and  $S$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , respectively above and below  $\mathbb{R}^n$ . Here  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  is identified with the space of points  $x$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  with  $x_{n+1} = 0$ . Then  $\Sigma X$  consists of all points  $tN + (1-t)x$  and  $tS + (1-t)x$  with  $0 \leq t \leq 1$  and  $x \in X$ . The suspension  $\Sigma Q$  of a square  $Q = \square$  is sketched by the double-pyramid



Each suspension consists of the union of two cones  $C^+X$  and  $C^-X$  which are the parts of  $\Sigma X$  above  $\mathbb{R}^n$  and below  $\mathbb{R}^n$  respectively. Both cones  $C^+X$  and  $C^-X$  are contractible but  $\Sigma X$  in general is not contractible.

If  $X$  is a polyhedron then so is  $\Sigma X$ . For a map  $f : X \rightarrow Y$  between spaces we have the obvious extension  $\Sigma f : \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$  carrying  $N$  to  $N$  and  $S$  to  $S$ . Given  $f$  the suspension  $\Sigma f$  is also denoted by  $f : \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$ .

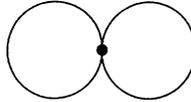
We also use the iterated suspension  $\Sigma^n X$  with  $\Sigma(\Sigma^n X) = \Sigma^{n+1} X$ . We have the well known formulas

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \dim(\Sigma^n X) &\leq n + \dim(X), \\ \text{conn}(\Sigma^n X) &\geq n + \text{conn}(X). \end{aligned}$$

Here equality holds if  $X$  is 1-connected. For the spheres  $S^n$  one gets  $S^{n+1} \approx \Sigma S^n$  and  $\dim(S^n) = n$  and  $\text{conn}(S^n) = n - 1$ . Moreover for the ball  $B^n$  one has a homeomorphism  $B^{n+1} \approx \Sigma B^n$ .

## 2 Atoms

We consider the *decomposition* of spaces. The *one point union*  $A \vee B$  of two spaces  $A$  and  $B$  is obtained by choosing points  $a_0 \in A$  and  $b_0 \in B$  and by identifying  $a_0$  and  $b_0$ ; i.e. by gluing the point  $a_0$  to the point  $b_0$ . The following picture shows the one point union  $S^1 \vee S^1$  of two 1-spheres  $S^1$



We have inclusions  $i_1 : A \rightarrow A \vee B$  and  $i_2 : B \rightarrow A \vee B$ . If  $A$  and  $B$  are 0-connected polyhedra then the homotopy type of  $A \vee B$  does not depend on the choice of the points  $a_0 \in A$  and  $b_0 \in B$ . The space  $X$  is *decomposable* if  $X$  is homotopy equivalent to a one point union  $A \vee B$  where  $A$  and  $B$  are non-contractible; otherwise  $X$  is *indecomposable*. We also call  $X \simeq A \vee B$  a *splitting of  $X$* .

For example the sphere  $S^n$ ,  $n \geq 1$ , is indecomposable. We are now ready to introduce the notion of an atom in topology.

**(2.1) Definition.** An *atom* is a finite space  $X$  which is indecomposable and satisfies

$$\dim(X) = 2\text{conn}(X) + 1.$$

Each atom  $X$  yields the sequence of *suspended atoms*  $X, \Sigma X, \Sigma^2 X, \dots, \Sigma^n X, \dots$ .

The 1-sphere  $S^1$  is an atom. The sphere  $S^n$  with  $n \geq 2$  is not an atom but a suspended atom  $S^n = \Sigma^{n-1} S^1$ . The next lemma yields property  $B$  in table 2.

**(2.2) Lemma.** *All suspended atoms are indecomposable. If suspended atoms  $\Sigma^k X \simeq \Sigma^k Y$  are homotopy equivalent then the atoms  $X \simeq Y$  are homotopy equivalent.*

Hence an atom  $X$  is indecomposable in the strong sense that  $X$  is indecomposable and also all iterated suspensions of  $X$  are indecomposable. In addition each iterated suspension of  $X$  determines the homotopy type of  $X$ . Such a property does not hold for an indecomposable space with  $\dim(X) > 2\text{conn}(X) + 1$ . For example the product  $S^n \times S^n$  of two spheres  $S^n$  has  $\text{conn}(S^n \times S^n) = n - 1$  and  $\dim(S^n \times S^n) = 2n$ . Such a product is indecomposable as a space but this property is not preserved by suspension since there is a homotopy equivalence

$$\Sigma(S^n \times S^n) \simeq S^{n+1} \vee S^{n+1} \vee S^{2n+1}$$

showing that  $\Sigma(S^n \times S^n)$  is decomposable.

**(2.3) Proposition.** *A finite space  $Y$  with*

$$(*) \quad \dim(Y) \leq 2\text{conn}(Y) + 1$$

*is homotopy equivalent to a finite one point union  $Y_1 \vee \dots \vee Y_r$  of suspended atoms  $Y_i$  with*

$$\text{conn}(Y) \leq \text{conn}(Y_i) < \dim(Y_i) \leq \dim(Y)$$

*for  $i = 1, \dots, r$ . (Here the empty one point union with  $r = 0$  denotes a point.)*

The next corollary yields for each finite space  $X$  atoms  $A_1, \dots, A_r$  associated to  $X$ . This corresponds to property (A) in table 2.

**(2.4) Corollary.** *Let  $X$  be any finite space. Then there are atoms  $A_1, \dots, A_r$  such that for appropriate natural numbers  $k, k_1, \dots, k_r \geq 0$  one has a homotopy equivalence*

$$\Sigma^k X \simeq \Sigma^{k_1} A_1 \vee \dots \vee \Sigma^{k_r} A_r$$

In fact, we can choose  $k \geq \dim(X) - 2\text{conn}(X) - 1$ . Then 1.2 shows that  $Y = \Sigma^k X$  satisfies (\*) in 2.3 so that the suspended atom  $Y_i = \Sigma^{k_i} A_i$  in 2.3 determines  $A_i$  and  $k_i$  by 2.2.

The results above show that atoms as defined in 1 are indeed distinguished spaces. According to 2.3 a list of atoms yields a classification of all homotopy types of finite spaces  $X$  with  $\dim(X) \leq 2\text{conn}(X) + 1$ . We describe such a list as follows. Recall that the dimension of an atom is always an odd number.

**(2.5) Theorem.**

- *The 1-sphere  $S^1$  is an atom and this is the only atom of dimension 1.<sup>2</sup>*
- *For each prime power  $q = p^j, j \geq 1$ , one has the Moore atom  $M_q = M(\mathbb{Z}/q, 2)$  and this is a complete list of atoms of dimension 3.*
- *The Chang atoms form a complete list of atoms of dimension 5. [Ch, B1, B2, H1, H2].*
- *The sequence-atoms form a complete list of atoms of dimension 7. [BH, B1, B2].*
- *The computation of all atoms of dimension 9 requires the solution of the universal problem of representation theory [BD4]; see table 3.*

We shall describe the cell structure of the atoms in section 4 below.

**The universal problem of representation theory**

For  $n = 1, 2, \dots$  we consider  $n \times n$ -matrices  $A$  with entries in  $\mathbb{R}$  (or in a field  $\mathbb{K}$ , for example the field  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2$  consisting of two elements). Given an  $m \times m$ -matrix  $B$  we obtain the  $(n + m) \times (n + m)$ -matrix

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

We say that a pair  $(D_1, D_2)$  of  $k \times k$ -matrices  $D_1, D_2$  is *decomposable* if there exists a pair  $(A_1, A_2)$  of  $n \times n$ -matrices and a pair  $(B_1, B_2)$  of  $m \times m$ -matrices with  $n + m = k$  such that  $(D_1, D_2)$  is equivalent to  $(A_1 \oplus B_1, A_2 \oplus B_2)$ , that is

$$\begin{aligned} D_1 &= U(A_1 \oplus B_1)U^{-1} \\ D_2 &= U(A_2 \oplus B_2)U^{-1} \end{aligned}$$

where  $U$  is an invertible  $k \times k$ -matrix. Otherwise  $(D_1, D_2)$  is *indecomposable*. The computation of a complete list of equivalence classes of indecomposable pairs of matrices  $(D_1, D_2)$  is the *universal* (or *wild*) problem of representation theory.

Table 3

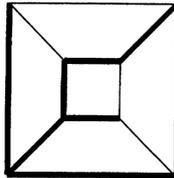
According to proposition (2.3) we have the following applications of theorem (2.5) on the classification of homotpy types.

**(2.6) Corollary.** *A 0-connected 1-dimensional finite space is homotopy equivalent to a finite one point union of 1-spheres  $S^1$ .*

This result is classical and has the following well known proof. Let  $X$  be a 0-connected 1-dimensional space so that  $X$  is homotopy equivalent to a connected graph  $Y$ . We can choose in  $Y$  a maximal tree  $T$  and by contracting the tree  $T$  to a point we obtain a homotopy equivalence

$$X \simeq Y \simeq S^1 \vee \dots \vee S^1$$

between  $X$  and a one point union of 1-spheres. For example the edges of a cube form a graph which is homotopy equivalent to a one point union of five 1-spheres:



The bold edges in the sketch describe a maximal tree.

Property (A) of atoms in table 2 describes a higher dimensional analogue of the old result (2.6) on connected graphs. As a next application of theorem (2.5) we get the following well known fact.

**(2.7) Corollary.** *A 1-connected 3-dimensional finite space is homotopy equivalent to a finite one point union of spheres  $S^2, S^3$  and Moore atoms.*

This result can be used to show that a 1-connected 3-dimensional manifold  $M$  is homotopy equivalent to a 3-sphere (the Poincaré conjecture claims that  $M$  is actually homeomorphic to the 3-sphere). Moreover corollary (2.7) is crucial for the classification of 1-connected 5-dimensional manifolds  $N$  (see Barden [Ba] and Stoecker [St]) since the complement of a point in  $N$  is a 1-connected 3-dimensional finite space.

The next application of theorem (2.5) is originally due to J. H. C. Whitehead [W1] and Chang [Ch].

**(2.8) Corollary.** *A 2-connected 5-dimensional finite space is homotopy equivalent to a finite one point union of spheres  $S^3, S^4, S^5$ , suspended Moore atoms, and Chang atoms.*

Moreover the next corollary of theorem (2.5) is proved in [BH].

**(2.9) Corollary.** *A 3-connected 7-dimensional finite space is homotopy equivalent to a finite one point union of spheres  $S^4, S^5, S^6, S^7$ , suspended Moore atoms, suspended Chang atoms and sequence-atoms.*

The complexity of atoms of dimension 9 involves the universal problem of representation theory in table 3. Therefore we cannot classify atoms of dimension  $\geq 9$  in general. We can, however, look at subclasses of atoms satisfying for example certain “homological” conditions.

In 1895 Poincaré introduced the *homology*  $H_n(X)$  of a polyhedron  $X$  which is an abelian group depending only on the homotopy type of  $X$ . Moreover this group is compatible with suspension, that is  $H_n(X) = H_{n+1}(\Sigma X)$ . In 1932 P. Alexandroff [A] wrote an introductory essay „Einfachste Grundbegriffe der Topologie“ on polyhedra and homology. Nowadays homology is one of the most important mathematical concepts.

The Moore atom  $M_q$  can be characterized by homology groups since  $M_q$  up to homotopy equivalence is the unique finite space which is 1-connected and satisfies  $H_2(M_q) = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  and  $H_n(M_q) = 0$  for  $n \neq 2$ .

**(2.10) Definition.** We say that a finite space  $X$  (or an atom  $X$ ) is *torsion free* if all homology groups  $H^n(X) \cong \mathbb{Z}^{\beta_n}$  are finitely generated free abelian groups,  $n \geq 0$ . Here the rank  $\beta_n$  is the  $n$ -th *Betti number* of  $X$ .

It is not possible to compute all atoms of dimension 9. If we restrict, however, to torsion free atoms we are able to classify them up to dimension 11, see [BD1,BD2,BD3].

**(2.11) Theorem.** For  $n \leq 13$  the number  $A(n)$  of all torsion free atoms of dimension  $n$  is given by the following table 4.

$n$	1	3	5	7	9	11	13
$A(n)$	1	0	1	1	67	324	infinite

Table 4

Moreover the computation of all torsion free atoms of dimension 21 requires the solution of the universal problem of representation theory, see table 3.

We shall describe the atoms of theorem (2.11) more explicitly in table 10 below in terms of graphs which look like *lightning flashes*. Theorem (2.11) shows that up to dimension 11 there exists only a finite number of torsion free atoms and this number is 394. In dimension 13, however, there is an infinite number of such atoms. It still might be possible to compute all torsion free atoms of dimension 13, 15, 17 and 19. As an application of theorem (2.11) and proposition (2.3) we get the corollary:

**(2.12) Corollary.** For  $n \leq 6$  each  $(n - 1)$ -connected  $(2n - 1)$ -dimensional torsion free finite space is homotopy equivalent to a finite one point union of suspended lightning-flash-atoms of dimension  $\leq 2n - 1$  and connectivity  $\geq n - 1$ .

Using real numbers  $\mathbb{R}$ , complex numbers  $\mathbb{C}$  and quaterionic numbers  $\mathbb{H}$  one obtains the according *projective planes* denoted by  $\mathbb{R}P_2$ ,  $\mathbb{C}P_2$  and  $\mathbb{H}P_2$  respectively. The suspension of these planes yields examples of atoms. In fact  $\Sigma\mathbb{R}P_2 = M_2$  is a Moore-atom,  $\Sigma\mathbb{C}P_2$  is a Chang atom, and  $\Sigma\mathbb{H}P_2$  is a lightning-flash-atom of dimension 9.

### 3 Cell attachments

For a space  $X$  and a map  $f : S^{m-1} \rightarrow X$  we obtain the cell attachment

$$(3.1) \quad X \cup_f e^m = (X \cup B^m) /_{y \sim f(y)}$$

by identifying points  $y \in S^{m-1} \subset B^m$  with  $f(y) \in X$ . We call the subspace  $e^m = B^m - S^{m-1} \subset X \cup_f e^m$  a *cell* and the image  $f(S^{m-1})$  in  $X$  the *boundary* of the cell  $e^m$ . We shall consider spaces

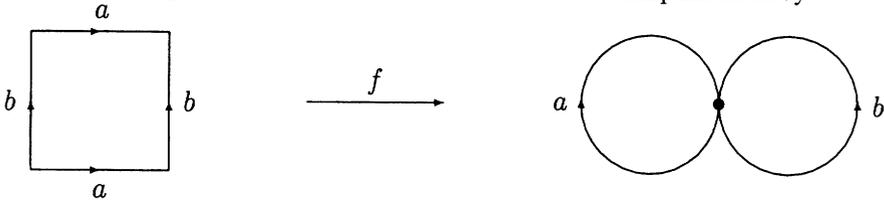
$$(3.2) \quad Y = (S^{n_1} \vee \dots \vee S^{n_k}) \cup e^{m_1} \cup \dots \cup e^{m_r}$$

obtained from a one point union  $S^{n_1} \vee \dots \vee S^{n_k}$  of spheres by inductive cell attachments where  $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_r \geq 1$ . The sphere  $S^n$  is considered to be a space with one  $n$ -cell obtained by the cell attachment  $* \cup e^n$ . Here  $*$  is the space consisting of a point. Therefore the space  $Y$  in 3.2 has  $k + r$  cells. Each finite *cell complex*  $Y$  as defined in (3.2) is a finite space in the sense of definition (1.1).

It is a lot more economical to use cell complexes instead of polyhedra. For example the torus  $S^1 \times S^1$  can be described by the cell attachment

$$S^1 \times S^1 \approx (S^1 \vee S^1) \cup_f e^2$$

where the attaching map  $f : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$  is the commutator map sketched by



Hence the torus has 3 cells while the triangulation of the torus in section 1 uses 30 1-simplexes and 18 2-simplexes.

The cell attachment for a map  $\alpha : S^{m-1} \rightarrow S^n$  between spheres yields the cell-complex

$$(3.3) \quad S^n \cup_\alpha e^m.$$

If  $\alpha$  is homotopic to a map  $\beta : S^{m-1} \rightarrow S^n$  then there is a homotopy equivalence  $S^n \cup_\alpha e^m \simeq S^n \cup_\beta e^m$ . The homotopy type of  $S^n \cup_\alpha e^m$  is therefore defined by the element  $\alpha \in \pi_{m-1}(S^n)$  where  $\pi_{m-1}(S^n)$  is the set of homotopy classes<sup>3</sup> of maps  $S^{m-1} \rightarrow S^n$ . This set which canonically has the structure of an abelian group is termed a *homotopy group of a sphere*.

For example  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ . Here the map  $q : S^1 \rightarrow S^1$  with  $q \in \mathbb{Z}$  carries  $x \in S^1 \subset \mathbb{C}$  to the  $q$ -th power  $x^q = x \cdot \dots \cdot x \in S^1$  where we use the multiplication of complex numbers. The suspension  $\Sigma^{n-1} q = q : S^n \rightarrow S^n$  is the map of Brouwer degree  $q$  [Br].

The suspension  $\Sigma$  yields a homomorphism

$$(3.4) \quad \Sigma : \pi_{n+k}(S^n) \rightarrow \pi_{n+k+1}(S^{n+1})$$

which by the Freudenthal suspension theorem is an isomorphism if  $k \leq n - 2$ . Therefore the group  $\pi_{2n-2}(S^n)$  for  $n \geq 2$  is termed a *stable* homotopy group of spheres. Table 5 shows a list of homotopy groups  $\pi_{n+k}(S^n)$  for  $k \leq 9$  and  $n \leq 11$  as computed by Toda [T]. In this list the diagonal indicates the stable groups  $\pi_{2n-2}(S^n)$ .

Homotopy classes of maps between spheres,  $S^{n+k} \rightarrow S^n$

$\pi_{n+k}(S^n)$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$
$k = 0$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$k = 1$	$\infty$	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$k = 2$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$k = 3$	2	12	$\infty + 12$	24	24	24	24	24	24	24
$k = 4$	12	2	$(2)^2$	2	0	0	0	0	0	0
$k = 5$	2	2	$(2)^2$	2	$\infty$	0	0	0	0	0
$k = 6$	2	3	$24 + 3$	2	2	2	2	2	2	2
$k = 7$	3	15	15	30	60	120	$\infty + 120$	240	240	240
$k = 8$	15	2	2	2	$24 + 2$	$(2)^3$	$(2)^4$	$(2)^3$	$(2)^2$	$(2)^2$
$k = 9$	2	$(2)^2$	$(2)^3$	$(2)^3$	$(2)^3$	$(2)^4$	$(2)^5$	$(2)^4$	$\infty + (2)^3$	$(2)^3$

Table 5

For a prime power  $q = p^i \in \pi_2 S^2 = \mathbb{Z}$  the cell complex  $M_q = S^2 \cup_q e^3$  is the Moore atom in theorem (2.5). Moreover for  $n \geq 3$  each non trivial map  $\alpha \in \pi_{2n-2}(S^n)$  yields a torsion free atom  $S^n \cup_\alpha e^{2n-1}$  with 2-cells.

Hence the computation of all atoms with 2-cells requires the computation of stable homotopy groups of spheres. It remains one of the greatest challenges of Mathematics to compute and determine the structure of these homotopy groups. Serre [S] showed the surprising result that  $\pi_{2n-2}(S^n)$  is finite for all  $n \geq 3$ .

The distinguished nature of elements in homotopy groups of spheres is exemplified by the classical Hopf maps. The Hopf maps  $2 : S^1 \rightarrow S^1, \eta : S^3 \rightarrow S^3$  and  $\nu : S^7 \rightarrow S^4$  are attaching maps for the projective planes

$$\mathbb{R}P_2 = S^1 \cup_2 e^2$$

$$\mathbb{C}P_2 = S^2 \cup_\eta e^4$$

$$\mathbb{H}P_2 = S^4 \cup_\nu e^8$$

The suspension of these projective planes are atoms as mentioned above. Here the suspension of  $S^n \cup_\alpha e^m$  satisfies  $\Sigma(S^n \cup_\alpha e^m) = S^{n+1} \cup_{\Sigma\alpha} e^{m+1}$  where  $\Sigma\alpha$  is the suspension of the map  $\alpha$ . The suspensions  $\Sigma\eta$  and  $\Sigma\nu$  generate the stable groups  $\pi_4 S^3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  and  $\pi_8 S^4 = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$  respectively.

In order to define the Hopf map  $\eta : S^3 \rightarrow S^2$  (see [Ho]) we use the multiplication map

$$\mu : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$$

which carries  $(x, y)$  with  $x, y \in S^1 \subset \mathbb{C}$  to the product  $\mu(x, y) = x \cdot y$  of complex numbers<sup>4</sup>. For  $0 \leq \lambda \leq 1$  and  $x \in S^1$  we get  $\lambda x \in B^2$ . Now the Hopf map  $\eta$  is the composite

$$\eta : S^3 = \partial(B^2 \times B^2) = B^2 \times S^1 \cup S^1 \times B^2 \xrightarrow{\bar{\eta}} \Sigma S^1 = S^2$$

where  $\bar{\eta}$  carries  $(\lambda x, y)$  to  $(1 - \lambda)N + \lambda(x \cdot y) \in \Sigma S^1$  and carries  $(x, \lambda y)$  to  $(1 - \lambda)S + \lambda(x \cdot y) \in \Sigma S^1$ . In table 25 we show a perspective view of the Hopf map due to W. A. Dreckmann. This view describes for various points  $x \in S^2$  the fibers  $\eta^{-1}(x) \subset S^3 = * \cup e^3 \approx * \cup \mathbb{R}^3$ .

The quaternionic Hopf map  $\nu : S^7 \rightarrow S^4$  is defined by the multiplication map

$$\mu : S^3 \times S^3 \rightarrow S^3$$

which carries  $(x, y)$  with  $x, y \in S^3 \subset \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$  to the product  $\mu(x, y) = x \cdot y$  of quaternionic numbers<sup>5</sup>. We obtain  $\nu$  by the composite

$$\nu : S^7 = \partial(B^4 \times B^4) = B^4 \times S^3 \cup S^3 \times B^4 \xrightarrow{\bar{\nu}} \Sigma S^3 = S^4$$

where  $\bar{\nu}$  is defined in terms of  $\mu$  similarly as  $\bar{\eta}$  above.

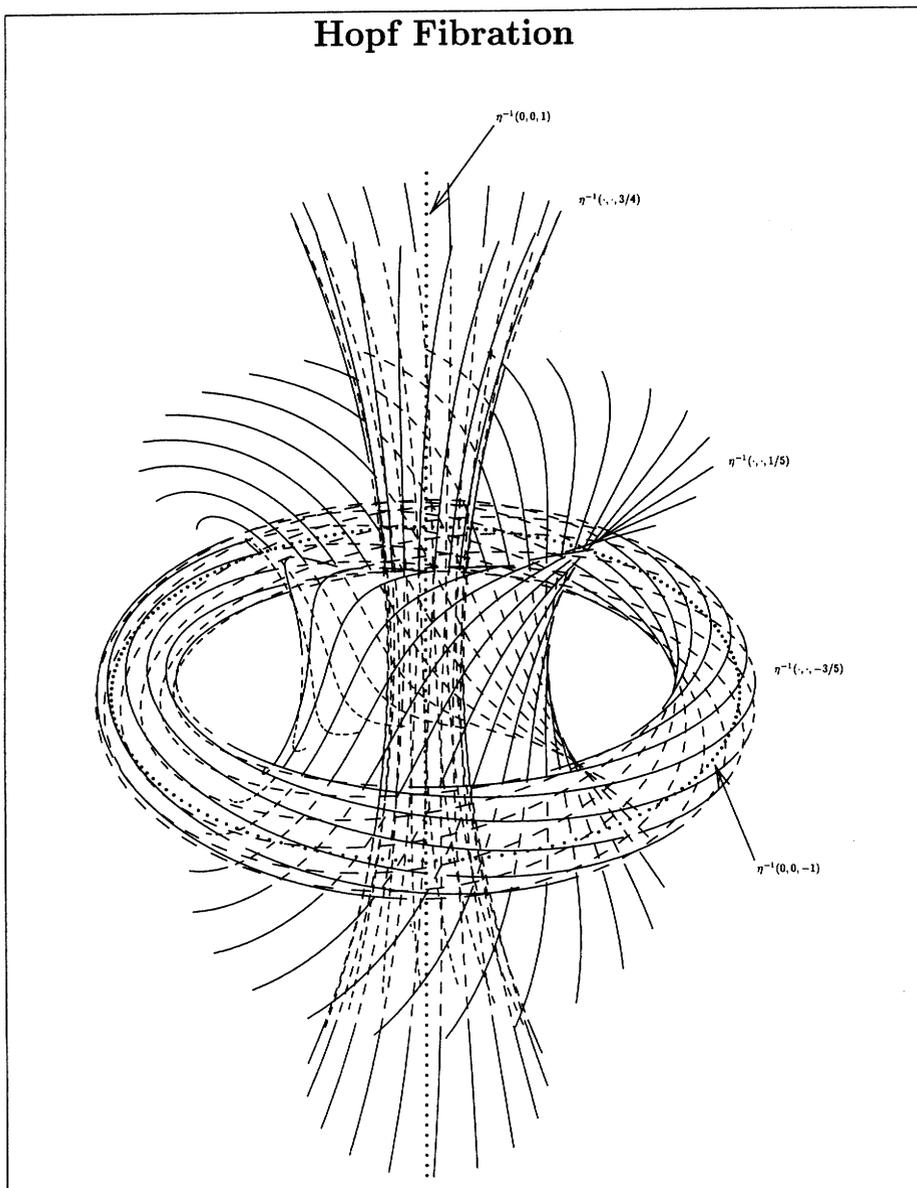


Table 6

## 4 The cell structure of atoms

The cell structure of atoms of low dimension can be described by certain connected graphs with vertices of level  $n = 1, 2, \dots$ . Such a vertex of level  $n$  describes a cell of dimension  $n$  (which is a sphere  $S^n$  if the vertex is not connected by an edge to a vertex of lower level). The edges characterize the attaching maps of cells.

For example atoms of dimension  $\leq 5$  are described by the graphs in table 7. The Chang atom corresponding to the graph at the right hand side of table 7 is accordingly a cell complex of the form  $S^3 \vee S^4 \cup e^4 \cup e^5$  with 4 cells.

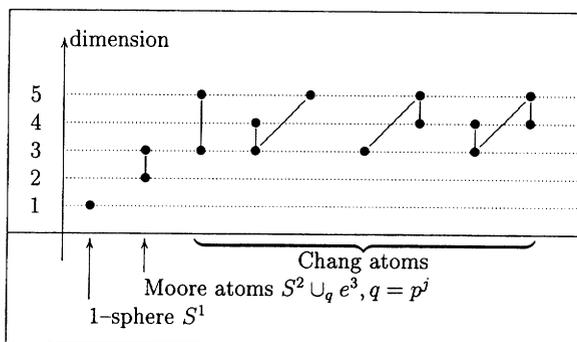


Table 7

The atoms of dimension 7 can be described similarly by connected finite subgraphs of maximal height in the infinite sequences of table 8. We therefore call the atoms of dimension 7 also “sequence-atoms”, see [BH], [B1], [B2]. The vertical edges in a Chang atom or in a sequence-atom are associated with a power of the prime 2 describing a direct summand of the homology of the atom.

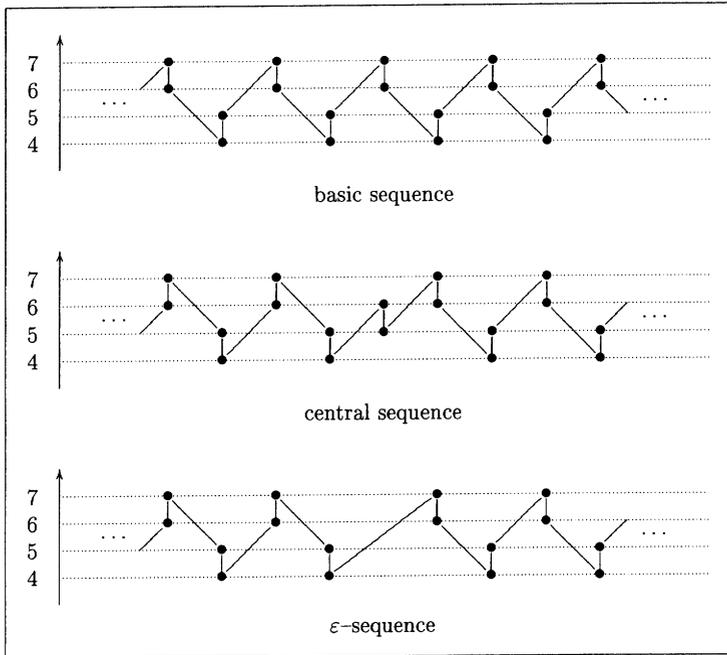


Table 8

For example a complete list of all atoms of dimension 7 for which homology groups are cyclic torsion groups is described by the graphs in table 9.

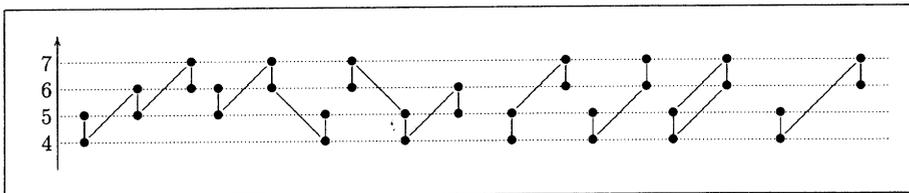


Table 9

Finally the lightning-flash-atoms in table 10 form a complete list of torsion free atoms of dimension  $\leq 11$ . Such atoms have at most 6 cells. A number in the bottom line of table 10 indicates the number of possible realizations of the corresponding graph as a cell-complex according to the choice of attaching maps. For example, a cell complex given by the graph at the right hand side of table 10 has the form  $S^6 \vee S^7 \vee S^8 \cup e^{10} \cup e^{11}$  and there are 36 possibilities to choose attaching maps. In a similar way one gets the cell structure of all torsion free atoms of dimension  $\leq 11$  by the lightning-flash graphs in table 10.

In order to achieve results on the classification of atoms as described in theorem (2.5) and theorem (2.12) one first has to translate the purely topological problem into an algebraic problem. For this we use methods of Algebraic Topology as developed in



the book [B1]; see also [U1], [U2] and [BG]. Then the highly sophisticated algebraic problem has to be transformed into an equivalent matrix problem which can be solved by methods of Representation Theory. For example the computation of torsion free atoms of dimension 11 in [BD3] leads to a ring  $R$  determined by the  $21 \times 21$ -matrix  $(M_{ij})$  in table 11. The ring  $R$  consists of all  $21 \times 21$ -matrices  $(A_{ij})$  for which  $A_{ij} \in \mathbb{Z}$  is divisible by  $M_{ij}$ . The classification of indecomposable matrices over this ring  $R$  yields the result on 11-dimensional torsion free atoms in table 10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	12	12
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	6
3	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	12
4	1	2	2	1	2	1	2	2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2	2	12	12
5	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	2	1	1	1	2	2	2	12	12
6	1	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2	12	12
7	1	2	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	12	12
8	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	12	12
9	1	2	2	1	1	1	2	2	1	1	1	1	2	1	1	1	2	2	1	12	12
10	1	2	2	1	2	1	2	2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2	2	12	12
11	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	2	1	1	1	2	2	2	12	12
12	1	2	2	2	1	2	2	2	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2	12	12	12
13	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	12
14	1	2	2	1	2	1	2	2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2	2	12	12
15	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	2	1	1	1	2	2	2	12	12
16	1	2	2	2	1	2	2	2	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2	12	12	12
17	1	2	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	12	12
18	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	12	12
19	1	2	2	1	1	1	2	2	1	1	1	1	2	1	1	1	2	2	1	12	12
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Table 11

Footnotes

- Such sequences of suspended spaces lead to the notion of "spectrum" in stable homotopy theory.
- Here  $S^1$  is an atom as a space and its uniqueness refers to an atom as a homotopy type.
- The homotopy class of map  $f$  is the set of all maps  $g$  which admit a homotopy  $g \simeq f$ .
- Each element in  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  can be written as  $(x_0, x_1) = x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot i$  and two such elements are multiplied according to the table

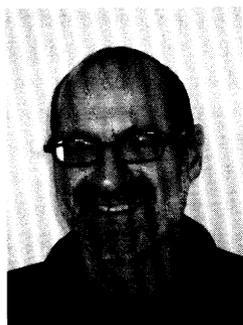
	1	$i$
1	1	$i$
$i$	$i$	-1

- Each element in  $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$  can be written as  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot i + x_2 \cdot j + x_3 \cdot k$  and two such elements are multiplied according to the table

	1	$i$	$j$	$k$
1	1	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	-1	$k$	$-j$
$j$	$j$	$-k$	-1	$i$
$k$	$k$	$j$	$-i$	-1

## References

- [A] Alexandroff, P., *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*, Springer Verlag (Berlin), 1932, 48 pages.
- [B1] Baues, H.-J., *Homotopy type and homology*, Oxford Math. Monographs, Oxford University Press, 1996, 596 pages.
- [B2] Baues, H.-J., *Homotopy types*, Handbook of algebraic topology, chapter I (1995), Edited by I. M. James, Elsevier Science, 1–71.
- [Ba] Barden, D.: *Simply connected five-manifolds*, Ann. Math. **82** (1965) 365–385.
- [BD1] Baues, H.-J. and Drozd, Y., *Representation theory of homotopy types with at most two non trivial homotopy groups*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **128** (2000) 283–300.
- [BD2] Baues, H.-J. and Drozd, Y., *The homotopy classification of  $(n-1)$ -connected  $(n+1)$ -dimensional polyhedra with torsion free homology,  $n \geq 5$* , Expositiones Mathematicae, **17** (1999) 161–180.
- [BD3] Baues, H.-J. and Drozd, Y., *Classification of stable homotopy types with torsion free homology*, to appear in Topology.
- [BD4] Baues, H.-J. and Drozd, Y., *Indecomposable homotopy types with at most two non-trivial homology groups*. Preprint.
- [BG] Baues, H.-J. and Goerss, P., *A homotopy operation spectral sequence for the computation of homotopy groups*, Topology **39** (2000) 161–192.
- [BH] Baues, H.-J. and Hennes, M., *The homotopy classification of  $(n-1)$ -connected  $(n+3)$ -dimensional polyhedra,  $n \geq 4$* , Topology **30** (1991) 373–408.
- [Br] Brouwer, L. E. J., *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **71** (1912) 97–115.
- [CJS] Cremer, E. and Julia, B. and Scherk, J.: *Supergravity theory in eleven dimensions*, Physics Letters B **76** (1978) 409–412.
- [Ch] Chang, S. C., *Homotopy invariants and continuous mappings*, Proc. R. Soc. London Ser. A **202** (1950) 253–263.
- [F] Freudenthal, H., *Über die Klassen der Sphärenabbildungen*, Comp. Math. **5** (1937).
- [H] Henn, H.-W., *Classification of  $p$ -local low dimensional spectra*, J. Pure Appl. Algebra **19** (1980) 159–169.
- [H1] Hilton, P. J., *An introduction to homotopy theory*, Cambridge University Press, 1953.
- [H2] Hilton, P. J., *Homotopy theory and duality*, Nelson Gordon and Breach, 1965.
- [HJ] Hilton, P. and James, I., *The Whitehead heritage*, The Math. Intelligencer **19** (1997) 58–63.
- [Ho] Hopf, H., *Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension*, Fund. Math. **25** (1935).
- [N] Nahm, W. *Supersymmetries and their representation*, Nuclear Physics B **135** (1978) 149–166.
- [P] Poincaré, H., *Analysis Situs*, Journal de l'École Polytechnique **1** (1895) 1–121.
- [S] Serre, J. P., *Groups d'homotopie et classes groupes abéliens*, Ann. of Math. **58** (1953) 258–294.
- [St] Stöcker, R.: *On the structure of 5-dimensional Poincaré duality spaces*, Comment. Math. Helv. **57** (1982) 481–510.
- [ST] Seifert, H. and Threlfall, W., *Lehrbuch der Topologie*, Chelsea Publishing Comp. New York Teubner (1934).
- [T] Toda, H., *Composition methods in homotopy groups of spheres*, Annals of Math. Studies **49** (1962), Princeton University Press.
- [U1] Unsöld, H. M., *On the classification of spaces with free homology*, Dissertation FU Berlin (1987).
- [U2] Unsöld, H. M.,  *$A_n^4$ -Polyhedra with free homology*, Manuscripta Math. **65** (1989) 123–145.
- [W1] Whitehead, J. H. C., *The homotopy type of a special kind of polyhedron*, Ann. Soc. Polon. Math. **21** (1948) 176–186.
- [W2] Whitehead, J. H. C., *Combinatorial homotopy I*, Bull. Amer. Soc. **55** (1949) 213–245.



## Cantor's Set Theory from a Modern Point of View

Sy D. Friedman

### Abstract

- Keywords and Phrases: projective sets, constructible sets, forcing, inner models, Woodin cardinals
- AMS-Klassifikation: 03 E 15, 03 E 35, 03 E 45, 04 E 55

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, the inventor of set theory, spent virtually his entire mathematical career in Halle and was the founder of the Deutsche Mathematische Vereinigung. At its first meeting, in Halle in 1891, this Society elected Cantor as its first president.

Cantor's work uncovered a structure to infinity which no one had foreseen, and which Cantor himself found difficult to believe. His ideas were very much opposed (especially by Poincaré and Kronecker), but fortunately also defended (by Dedekind, Weierstrass and Mittag-Leffler). His work is fundamental to our current understanding of mathematics.

Although Cantor's version of set theory led to paradox, this has been adequately circumvented through the introduction of axioms for set theory. The emerging theory ZFC (Zermelo-Fraenkel set theory with the axiom of Choice) has served as an excellent foundation for mathematics: its language is adequate to express almost all mathematical assertions and its axioms are adequate to prove almost all theorems of mathematics, once they are expressed in set-theoretic terms.

Set theory today exhibits two interconnected aspects, the Pure and the Applied.

Eingegangen: 30.09.2002

Sy D. Friedman, Institut für Formale Logik, Universität Wien,  
Währinger Straße 25, A-1090 Wien, Österreich, sdf@logic.univie.ac.at

**DMV**  
**JAHRESBERICHT**  
**DER DMV**  
© B. G. Teubner 2002

Applied set theory refers to the many successes of set theory either in solving mathematical problems or in showing that they are unsolvable, by virtue of their being neither provable nor refutable in ZFC. For example, Cantor himself applied set theory to answer an important question in the study of Fourier series. But he was unable to resolve the Continuum Problem (concerning the cardinality of the set of real numbers), and indeed this problem was later shown to be unsolvable in ZFC by Gödel and Cohen.

Pure set theory refers to the deeper investigation of the structure of infinity. Although Cantor left us with an excellent theory of counting into the transfinite and a powerful theory of cardinality, he provided no clear picture of the universe of sets as a whole. There is now evidence that such a picture is starting to emerge through the detailed analysis of subuniverses of the universe of all sets called *inner models*.

This talk emphasizes the exciting recent developments in set theory's pure side, with some reference to the striking applications which have served as important motivation for the subject's development.

Cantor earned his doctorate in Berlin in 1867 and was appointed in Halle in 1869, where he soon after habilitated. Under the influence of Heine, his work moved to the study of trigonometric series, which led him necessarily into his investigations in set theory. In addition to developing his profound theory of transfinite numbers and cardinality, he showed that the algebraic numbers are countable (and therefore almost all reals are transcendental), the reals are not countable and  $n$ -dimensional Euclidean space can be put into 1-1 correspondence with the real line. He was appointed to a chair in Halle in 1879.

Cantor founded the DMV in 1890 and was elected its first president the year after.

Cantor's ideas were revolutionary, and met significant opposition, especially from Kronecker. Mittag-Leffler persuaded Cantor to withdraw a paper that he had submitted to *Acta Mathematica*, on the grounds that he had submitted it "about 100 years too soon"! Fortunately Cantor also had the support of some important mathematicians, such as Dedekind.

Cantor's two key contributions were to provide us with theories of *transfinite counting* and of *infinite cardinality*.

Transfinite counting arises naturally when one considers the *Cantor derivative*: If  $C$  is a closed set of real numbers, then  $C'$  denotes the set of all limit points of  $C$ . Thus  $C \supseteq C' \supseteq C'' \supseteq \dots$ . Write  $C^\infty = C \cap C' \cap C'' \cap \dots$ . Then  $C^\infty \supseteq (C^\infty)'$ , and this inclusion may be strict. Thus one must keep counting past  $\infty$ :  $C^\infty \supseteq C^{\infty+1} \supseteq C^{\infty+2} \supseteq \dots!$

The key feature of this new sequence of counting stages is that it forms a *wellordering*, a linear ordering with no infinite descending sequence of elements. Cantor showed that any two wellorderings are comparable in the sense that one is isomorphic to an initial segment of the other, and that the wellorderings can be canonically represented by special wellorderings where the ordering relation is given by the membership relation  $\in$ . Sets which carry such a special wellordering are called *ordinals*.

Cantor's view was that each well-defined set carries a wellordering. Thus every set can be placed in 1-1 correspondence with an ordinal. But this ordinal is *not* unique. A *cardinal* is an ordinal which cannot be put into 1-1 correspondence with a smaller ordi-

nal. Then every set can be put into 1-1 correspondence with a *unique* cardinal, called the *cardinality* of that set.

Zermelo later justified Cantor's view by proving that every set can indeed be well-ordered, using the Axiom of Choice. Thus, Cantor's theory does provide an excellent theory of cardinality for arbitrary sets. This theory left however one major gap:

The Continuum Problem: What is the cardinality of the continuum?

The Continuum Hypothesis (CH): Every uncountable set of reals has the same cardinality as the set of all reals.

Cantor failed to solve this problem, and in fact it was later discovered that this problem cannot be solved using the currently accepted axioms for set theory.

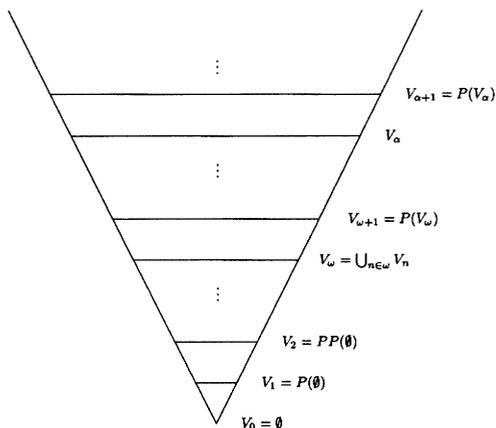
## Paradoxes

Cantor, and independently Burali-Forti, found paradoxes in Cantor's set theory. The most famous version of the paradox is due to Russell: If  $x$  consists of all sets  $y$  such that  $y \notin y$ , then  $x \in x \leftrightarrow x \notin x$ !

Zermelo's proposal was to avoid the paradoxes by confining oneself to established principles of set-formation. He developed an axiomatic theory of sets, Zermelo set theory, which captures these principles and to the present day does appear to be free of contradiction. Fraenkel added a missing axiom scheme to Zermelo's system, resulting in ZFC, Zermelo-Fraenkel set theory with the axiom of choice. This is the standard axiom system for set theory today.

## The Universe of Sets $V$

As a consequence of the ZFC axioms one has the following attractive picture of the set-theoretic universe  $V$ :



This provides the first picture of the universe of sets, based on the ordinals and power set operation. But this is *not* a canonical description, in light of the vagueness of the power set operation. A consequence of this vagueness is that the continuum problem remains unsolved.

## The Vagueness of Power Set

One possible way to avoid the vagueness of power set is to focus on *definable sets*, as did the descriptive set-theorists of the 1930s. A set of reals is *Borel* iff it belongs to the smallest  $\sigma$ -algebra containing all open sets. It is  $\Sigma_1^1$  (or analytic) iff it is the continuous image of a Borel set and is  $\Pi_1^1$  iff its complement is  $\Sigma_1^1$ . Inductively, a  $\Sigma_{n+1}^1$  set is the continuous image of a  $\Pi_n^1$  set and a  $\Pi_{n+1}^1$  set is the complement of a  $\Sigma_{n+1}^1$  set. A set is *projective* iff it is  $\Sigma_n^1$  or  $\Pi_n^1$  for some  $n$ .

The descriptive set-theorists of the 1930s were able to show that  $\Sigma_1^1$  sets do not violate the continuum hypothesis, in the sense that each uncountable  $\Sigma_1^1$  set of reals does have the same cardinality as the reals. But they were unable to extend this to  $\Pi_1^1$  sets. Later work of Gödel and Cohen implies that this indeed cannot be done in ZFC.

Another approach to circumventing the vagueness of the power set operation is due to Gödel. Recall that in our picture of  $V$ , at a successor stage  $V_{\alpha+1}$  one takes the all subsets of the previous stage  $V_\alpha$ . Gödel modified this hierarchy by instead taking only those subsets of the previous stage which can be produced using simple set-theoretic operations. He showed that iteration of this “weak” power set operation gives rise to a hierarchy of  $L_\alpha$ ’s whose union  $L$  is a model of ZFC. Moreover his hierarchy grows so slowly that sets are easily labelled by ordinal numbers, yielding the striking consequence that CH holds in  $L$ . This provided the first consistent interpretation of ZFC in which CH is demonstrably true.

Gödel himself did not consider  $L$  to be the correct interpretation of  $V$ , but only as a tool for showing that statements are consistent with the axioms of ZFC. This point of view is almost universal among set-theorists today. Indeed there are other consistent interpretations of the ZFC axioms. Cohen developed a technique for adding new sets to  $L$  while preserving the ZFC axioms. In fact, he was able to obtain such an interpretation where CH is false: A *Cohen real over  $L$*  is a real that belongs to every open dense set of reals which  $L$  can “describe”. By adding many Cohen reals to  $L$ , one obtains a consistent failure of CH.

Cohen’s method, called *forcing*, is very general. Another of its applications is the following: A real in  $[0, 1]$  is *random over  $L$*  iff it belongs to every measure one subset of  $[0, 1]$  which  $L$  can “describe”. Solovay [70] used this notion of forcing to obtain an interpretation of ZFC in which no projective set of reals violates the continuum hypothesis.

## Canonical Universes

Thus we are faced with a dilemma: Must we accept different universes with different kinds of mathematics; universes where CH holds and universes where it does not? This

kind of undecidability is certainly very troubling, and has led set-theorists to search for a canonical, acceptable interpretation, or *standard model*, of ZFC which provides the “correct” answers to undecidable problems. Gödel’s  $L$  is surely canonical, but rejected as being too restrictive, given the ease with which it can be modified by forcing. Unfortunately the universes constructed using forcing are not canonical: If there is one Cohen (random) real over  $L$ , then there are many. How does one obtain canonical universes which are larger than  $L$ ?

An answer came from measure theory. From work of Scott [61] and Solovay [71], we have: If there is a countably additive extension of Lebesgue measure to all sets of reals, then  $V$  is not  $L$ . And any model of ZFC with such a measure can be converted into a model of ZFC with a certain type of large cardinal number called a *measurable cardinal* (and vice-versa). Now Silver[71] showed that if there is a measurable cardinal then there is a canonical subuniverse of  $V$ , or *inner model*, with a measurable cardinal. This provided the first canonical inner model larger than Gödel’s  $L$ .

Is Silver’s model the desired standard model of ZFC?

To answer this question we consider the role of *large cardinal hypotheses*, of which the assumption of a measurable cardinal is an example. We say that two set-theoretic assertions  $\varphi, \psi$  are *consistency-equivalent* iff one can show that  $\text{ZFC} + \varphi$  has a model iff  $\text{ZFC} + \psi$  has a model. Experience shows that any natural set-theoretic assertion  $\varphi$  is consistency-equivalent to an assertion  $\psi$ , where  $\psi$  is either a large cardinal hypothesis or simply one of the statements  $0 = 0$  or  $0 = 1$ . Thus large cardinal hypotheses calibrate the strength of natural set-theoretic assertions.

Hypotheses beyond the existence of a measurable cardinal are needed for this calibration. A nice example arises from descriptive set theory:

$A$  is *Wadge reducible* to  $B$  iff for some continuous  $f, x \in A$  iff  $f(x) \in B$ .

$WP_n$ : If  $A, B$  are  $\Sigma_n^1$  but not  $\Pi_n^1$  then  $A$  is Wadge reducible to  $B$  and vice-versa.

Now we have

$WP_1$  is consistency equivalent to the *existence of #'s*, a large cardinal axiom below a measurable cardinal (Martin [70] and Harrington [78]).

$WP_2$  is consistency equivalent to (a little more than) the existence of a Woodin cardinal, a cardinal much larger than a measurable cardinal (Hjorth [96]).

$WP_n$  seems to require  $n - 1$  Woodin cardinals.

Thus our desired standard model for ZFC should be big enough to permit the existence of Woodin cardinals. Silver’s model is therefore too small.

The construction of canonical inner models for large cardinals at and above the level of Woodin cardinals is a central, ongoing project in pure set theory. These models however cannot be built using only the axioms of ZFC. Instead, one shows that if there is a large cardinal of a certain kind, then there is a canonical inner model with this kind of large cardinal. But isn’t this circular? Why should we allow these large cardinals at all? It is reasonable to assert that  $L$  is too restrictive, but need we assume that Woodin cardinals exist? Perhaps our position should be that  $WP_n$  is simply false for  $n > 1$ !

The justification of large cardinal hypotheses remains an important challenge for pure set theory. One approach to this problem makes use of endomorphisms. An inner model  $M$  is *rigid* iff there is no 1-1 embedding  $M \rightarrow M$  which preserves the basic set-theoretic operations union, product, difference, etc. The smallest large cardinal axiom, written “ $0^\#$  exists”, is equivalent to the statement that  $L$  is not rigid. If  $L$  is not rigid, there is a “canonical” inner model  $L^\#$  bigger than  $L$  which satisfies “ $L$  is not rigid”. Now do this again: If  $L^\#$  is not rigid then there is a canonical inner model  $L^{\#\#}$  where this is true, etc. There is a canonical  $\#$  operation which iterated in this way leads to models with Woodin cardinals. This is analogous to Gödel’s construction of  $L$ , obtained through iteration of a weak power set operation. In Gödel’s context, the axioms of ZFC justify the use of this operation. In the current context, one must argue for the non-rigidity of the models that arise in a canonical  $\#$ -iteration. Such an argument can provide a justification for the existence of inner models with Woodin cardinals.

However no canonical  $\#$  iteration is known which goes very far *beyond* Woodin cardinals. Luckily, most current applications of large cardinals do not use stronger hypotheses. But finding such an operation remains an important problem if we wish to achieve a satisfying picture of the set-theoretic universe, a picture which would not only give rise to numerous further applications of set theory and justify the use of large cardinal hypotheses, but also lend credence to the claim that the paradoxes that threatened Cantor in the infancy of set theory have been definitively resolved.

## References

- L. Harrington [78] Analytic determinacy and  $0^\#$ , *J. Symbolic Logic* 43 (1978), no. 4, pp. 685–693.  
 G. Hjorth [96]  $\Pi_2^1$  Wadge degrees, *Ann. Pure Appl. Logic* 77 (1996), no. 1, 53–74.  
 D. Martin [70] Measurable cardinals and analytic games, *Fund. Math.* 66, pp. 287–291.  
 D. Scott [61] Measurable cardinals and constructible sets, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* 9 (1961), pp. 521–524.  
 J. Silver [71] The consistency of the GCH with the existence of a measurable cardinal, in “Axiomatic Set Theory” (D. Scott, ed.), *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. XIII, Part 1, Amer. Math. Soc., 1971, pp. 391–395.  
 R. Solovay [70] A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, *Ann. of Math.* (2) 92 (1970), pp. 1–56.  
 R. Solovay [71] Real-valued measurable cardinals, in “Axiomatic Set Theory” (D. Scott, ed.), *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. XIII, Part 1, Amer. Math. Soc., 1971, pp. 397–428.



## Fraktale Analysis aus der Sicht der Funktionenräume

Hans Triebel

### Abstract

- Keywords and Phrases: Fractals, function spaces, spectral theory, fractal measures
- Mathematics Subject Classification: 46 E 35, 42 B 35, 28 A 80, 42 C 40, 43 A 85

The paper surveys the symbiotic relationship between

- some aspects of fractal geometry and fractal analysis,
- spectral theory of fractal elliptic operators, and
- the recent theory of function spaces.

Erweiterte Fassung eines Plenarvortrages auf der DMV-Tagung in Halle im September 2002

Eingegangen: 06. 11. 2002

Hans Triebel, Mathematisches Institut, Fakultät für Mathematik und Informatik, Friedrich-Schiller-Universität Jena, D-07740 Jena.  
E-Mail: triebel@minet.uni-jena.de

**DMV**  
**JAHRESBERICHT**  
**DER DMV**  
© B. G. Teubner 2002

## 1 Einleitung

A. S. Besicovitch entwickelte (mit anscheinend nur wenigen Gleichgesinnten) im Laufe von etwa 40 Jahren, Ende der zwanziger Jahre bis Ende der sechziger Jahre des letzten Jahrhunderts, *The Geometry of Sets of Points* (Titel eines von ihm geplanten aber bis zu seinem Tode 1970 nicht vollendeten Buches). Auf dieser Grundlage entstand in den letzten 20 bis 25 Jahren jenes Teilgebiet der Mathematik, das man heute *fraktale Geometrie* nennt und wie es in den Monographien [17], [18], [29], [19] (um nur einige zu nennen) dargestellt wird. Das Wort *fraktal (fractal)* geht auf B. B. Mandelbrot (1975) zurück. Während Besicovitch eine rein innermathematische Theorie des Nicht-Glatten (etwa in Ergänzung der differenzierbaren Analysis und Geometrie) entwickelte, propagierte Mandelbrot die Idee, daß viele Objekte der Natur eine fraktale Struktur aufweisen, die durch die (differenzierbare) Analysis und Geometrie nicht angemessen beschrieben werden kann. Insbesondere suggerierte er den Begriff der *Selbstähnlichkeit (self-similarity)*, der dann in [24] (1981) seine mathematische Formulierung fand. Zusammen mit seiner affinen Verallgemeinerung (*IFS: iterated function systems*) ist er ein Eckstein der fraktalen Geometrie und fraktalen Analysis bis zum heutigen Tage. Es hat immer wieder Vorschläge gegeben, wann eine Menge (etwa eine Punktmenge im  $\mathbb{R}^n$ ) *fraktal* genannt werden sollte. Eine befriedigende Definition gibt es aber wohl nicht und *fraktal* wird als unscharfes Synonym für *nicht-glatt* (das Objekt oder die zu seiner Bearbeitung zugelassenen Instrumente betreffend) akzeptiert. Man hat dann von Fall zu Fall zu sagen, was für Voraussetzungen im Einzelnen gemacht werden.

Im letzten Jahrzehnt und insbesondere in den letzten Jahren hat es eine Vielzahl neuer Entwicklungen zur fraktalen Geometrie und nunmehr auch zur fraktalen Analysis gegeben, ohne daß sich ein allumfassender Königsweg herausgebildet hätte. Bei der Frage nach adäquaten Geometrien *completely distinct from Euclidean geometry* findet man in [38], Preface:

*They suggest rather strong shifts in outlook, for what kind of geometries are really around, what one might look for, how one might work with them, and so on.*

Das wird ergänzt durch [13], Preface:

*The subject remains a wilderness, with no central zone, and many paths to try. The lack of main roadways is also one of the attractions of the subject.*

Ein Aspekt hiervon ist die Frage wieviel Geometrie man tatsächlich braucht, um wohl-bekannte signifikante Sätze der Analysis zu erhalten. Das hat zu einer Analysis auf metrischen Räumen geführt (gelegentlich durch Zutaten gespickt), wobei man [23] als eine erste zusammenfassende Darstellung ansehen kann.

Zur Analysis auf nicht-glatten Strukturen gehört seit längerer Zeit die Theorie der *Dirichletschen Formen (quadratischen Formen)* und der durch sie erzeugten Operatoren. Eine Darstellung der verschiedenartigen Aspekte findet man in [25], wobei wir insbesondere auf [30] verweisen.

Eine zentrale Frage, die mit besonderer Intensität in den letzten Jahren bearbeitet wurde, lautet:

*Was ist ein (oder der) Laplace-Operator auf einer fraktalen Struktur und was kann man über sein Spektrum sagen?*

Den gegenwärtigen Stand dieser und benachbarter Fragestellungen findet man in [26], woraus wir wie folgt zitieren:

*Why do you only study self-similar sets? The reason is that self-similar sets are perhaps the simplest and most basic structures in the theory of fractals. They should give us much information on what would happen in the general case of fractals. Although there have been many studies on analysis on fractals, we are still near the beginning in the exploration of this field.* ([26], Introduction, p. 5.)

Während die obigen skizzenhaften Ausführungen auf (direkt oder über Dirichletformen definierte) Operatoren auf fraktalen Strukturen hinauslaufen, kann man einen (aber nur scheinbar) umgekehrten Standpunkt einnehmen: Auf glatten Strukturen, etwa dem euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$ , oder beschränkten  $C^\infty$  Gebieten  $\Omega$  in  $\mathbb{R}^n$ , werden fraktale (Differential-)Operatoren untersucht. Prototypen hierfür sind

$$(1.1) \quad A = -\Delta + \mu \quad \text{und} \quad B = (-\Delta)^{-1} \circ \mu, \quad \Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

wobei  $\mu$  etwa ein Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit kompaktem Träger und  $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$  ist. *Schrödinger-Operatoren* der Form  $A$  in  $\mathbb{R}^n$  sind von quantenmechanischer Relevanz und haben eine lange Geschichte, die auf Fermi (1936) zurückgeht, insbesondere wenn  $\mu$  eine endliche Summe von Dirac-Maßen ist. Eine umfassende Darstellung dieses Gegenstandes findet man in [2]. Operatoren der Form  $B$  treten bei der mathematischen Modellierung von Trommeln (vorzugsweise in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ ) mit fraktaler Membran auf. Hierbei ist  $\Omega$  etwa ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet,  $(-\Delta)^{-1}$  ist der inverse Operator des Dirichlet-Laplace Operators in  $\Omega$  und der Träger von  $\mu$  ist eine kompakte Menge in  $\Omega$ . Sie sind Gegenstand späterer Ausführungen in dieser Arbeit.

Ein wesentliches Instrument der heutigen Analysis auf quasi-metrischen Räumen  $(X, \varrho, \mu)$ , bestehend aus einer Menge  $X$ , einer quasi-Metrik  $\varrho$  und einem Maß  $\mu$ , sind Funktionenräume. Soweit es sich um Sobolev-Räume  $W_p^1(X)$  mit  $1 < p < \infty$  handelt verweisen wir auf [20] und [23]. Bezüglich der sich entwickelnden Theorie der Räume vom Typ

$$B_{pq}^s(X) \quad \text{und} \quad F_{pq}^s(X) \quad \text{mit} \quad |s| \leq \theta \leq 1, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

wurden erste zusammenfassende Darstellungen in [21] und [22] gegeben. Fraktale verschiedenster Art können als quasi-metrische Räume betrachtet werden und mit Hilfe der angedeuteten Theorie der Funktionenräume kann man etwa eine weitreichende Spektraltheorie von Riesz-Operatoren entwickeln, [49]. Aber auch dieses ist nicht Gegenstand der nachfolgenden Ausführungen.

Vielmehr ist das Anliegen dieser Arbeit die Darstellung einiger Aspekte der fraktalen Analysis, die auf der heutigen Theorie der Funktionenräume

$$B_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad F_{pq}^s(\mathbb{R}^n), \quad 0 < p \leq \infty, \quad 0 < q \leq \infty, \quad s \in \mathbb{R},$$

beruhen. Diese Räume enthalten als Spezialfälle Hölder-Zygmund-Räume, Sobolev-Räume (ganzer und gebrochener Glattheit), klassische Besov-Räume und Hardy-Räume. Für diese Räume gibt es seit einiger Zeit atomare Zerlegungen und (zumindest für einige) auch Darstellungen durch wavelets. Dieses wurde in [41] und in [42] durch subatomare Zerlegungen (quarkonial decompositions) ergänzt. Die Elementarbausteine

(quarks) sind konstruktiv, überaus einfach und in hohem Maße flexibel. Insbesondere können sie beliebigen Strukturen, etwa fraktalen Mengen in  $\mathbf{R}^n$ , angepaßt werden. Selbstähnlichkeit ist nicht erforderlich. Auf diesem Wege ist es möglich, fraktale Operatoren, etwa vom Type  $B$  in (1.1) zu untersuchen. Gegenstand der nachfolgenden Ausführungen ist die Beschreibung diesbezüglicher Resultate wie sie in den letzten Jahren erzielt wurden. Einige Ergebnisse werden hier erstmals (ohne Beweise) publiziert. Wir beschränken uns auf die einfachsten Fälle (was die Formulierungen, nicht den beweistechnischen Aufwand anbelangt). Das zu den Beweisen verwendete Instrumentarium skizzieren wir erst im Abschnitt 6 der Arbeit, wobei wir hierbei auf [41] und insbesondere auf [42] verweisen können.

Natürlich ist die obige Aufzählung verschiedenster Aspekte der fraktalen Geometrie und der fraktalen Analysis etwas willkürlich, unvollständig und durch die persönlichen Interessen und Kenntnisse des Autors bestimmt. Die engen Beziehungen der Stochastik zur fraktalen Geometrie blieben ebenso unerwähnt wie etwa die Spektraltheorie des Laplace-Operators in beschränkten Gebieten im  $\mathbf{R}^n$  mit fraktalem Rand (hierzu geben wir aber später einige Literaturhinweise). Sinn der Aufzählung war lediglich, eine Standortbestimmung der nachfolgenden Ausführungen im Rahmen dessen, was man *fraktale Analysis* nennen könnte zu ermöglichen.

## 2 Fraktale Operatoren

### 2.1 Die schwingende Membran

Es sei  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet in der Ebene  $\mathbf{R}^2$  und es sei  $\Gamma$  eine kompakte Menge in  $\mathbf{R}^2$  mit

$$(2.1) \quad \Gamma \subset \Omega \quad \text{und} \quad |\Gamma| = 0,$$

wobei  $|\Gamma|$  das Lebesguesche Maß von  $\Gamma$  ist. Wir interpretieren  $\Omega$  als Trommel deren am Rand  $\partial\Omega$  fixierte aber ansonsten arg strapazierte Membran durch  $\Gamma$  beschrieben wird. Modellbildung, ausgehend vom klassischen Fall, legt nahe,  $\Gamma$  nicht als Punktmenge, sondern als Träger eines Radonschen Maßes  $\mu$ ,

$$(2.2) \quad \text{supp } \mu = \Gamma \subset \Omega, \quad 0 < \mu(\Gamma) = \mu(\mathbf{R}^2) < \infty,$$

zu sehen. Von besonderem Interesse (weil der Problemstellung gut angepaßt) sind *isotrope* Maße, also Maße für die es eine im Intervall  $(0, 1]$  definierte positive Funktion  $h(r)$  mit

$$(2.3) \quad \mu(B(\gamma, r)) \sim h(r), \quad \gamma \in \Gamma, \quad 0 < r \leq 1,$$

gibt, wobei  $B(\gamma, r)$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $\gamma$  und Radius  $r$  ist. Wir benutzen hier und in Zukunft das Äquivalenzeichen  $\sim$  für zwei positive Funktionen  $a(x)$  und  $b(x)$  oder für zwei Folgen positiver Zahlen  $a_k$  und  $b_k$  (sagen wir mit  $k \in \mathbb{N}$ , natürliche Zahlen), wenn es zwei positive Zahlen  $c$  und  $C$  mit

$$(2.4) \quad c a(x) \leq b(x) \leq C a(x) \quad \text{oder} \quad c a_k \leq b_k \leq C a_k$$

für alle zugelassenen Variablen  $x$  und  $k$  gibt. Bezogen auf (2.3) bedeutet dies die Unabhängigkeit der positiven Äquivalenzkonstanten von  $\gamma$  und  $r$ . Von besonderem Interesse sind so-genannte  $d$ -Mengen mit

$$(2.5) \quad h(r) \sim r^d, \quad 0 < r \leq 1, \quad \text{und} \quad 0 < d < 2.$$

In diesem Fall ist jedes Radonsche Maß  $\mu$  mit (2.2), (2.3), (2.5) äquivalent zu  $\mathcal{H}^d|_\Gamma$ , der Einschränkung des Hausdorff-Maßes  $\mathcal{H}^d$  in  $\mathbb{R}^2$  auf  $\Gamma$ . Ist  $d = 1$ , so kann man an ein Geradenstück denken. Andere Beispiele sind (ein- und zwei-dimensionale) Cantor-Mengen, die v. Kochsche Kurve (snowflake), Sierpinski'sche Dreiecke usw. Wohl alle Bücher über fraktale Geometrie, etwa [18], [19], enthalten zahlreiche Beispiele solcher  $d$ -Mengen. Es stellt sich aber folgendes Problem:

*Für welche Funktionen  $h$  gibt es Radonsche Maße  $\mu$  mit (2.2), (2.3)?*

## 2.2 Die klassische Theorie

Die klassische Theorie bei der die Membran nicht eine singuläre Menge  $\Gamma$  mit (2.1), (2.2), sondern ganz  $\Omega$  oder  $\bar{\Omega}$  ist, ist wohlbekannt. Wir formulieren einige Aussagen in einer solchen Form, daß sie mit den späteren fraktalen Analoga vergleichbar sind. Im Rahmen der  $L_2$ -theorie betrachtet man im (komplexen) Hilbertraum  $L_2(\Omega)$  den selbstadjungierten, positiv-definiten Dirichlet-Laplace Operator  $-\Delta$ ,

$$(2.6) \quad -\Delta u(x) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad \text{dom}(-\Delta) = H_0^2(\Omega),$$

wobei

$$(2.7) \quad H^2(\Omega) = W_2^2(\Omega) = \{f \in L_2(\Omega) : D^\alpha f \in L_2(\Omega), |\alpha| \leq 2\}$$

der wohlbekannte Sobolev-Raum und

$$(2.8) \quad H_0^2(\Omega) = W_{2,0}^2(\Omega) = \{f \in W_2^2(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = 0\}$$

ist. Dann ist  $-\Delta$  ein selbstadjungierter positiv-definiter Operator mit reinem Punktspektrum. Die Eigenfrequenzen  $\lambda_k$  der schwingenden Membran und die zugehörigen Eigenfunktionen  $u_k$  sind durch

$$(2.9) \quad -\Delta u_k = \lambda_k^2 u_k, \quad u_k \in H_0^2(\Omega), \quad k \in \mathbb{N},$$

gegeben. ( $\mathbb{N}$  ist the Gesamtheit der natürlichen Zahlen). Für unsere Zwecke ist es sinnvoll, nicht nur den inversen Operator  $(-\Delta)^{-1}$  zu betrachten, sondern ihn auch an unsere späteren Bezeichnungen durch

$$(2.10) \quad B = (-\Delta)^{-1} = (-\Delta)^{-1} \circ \mu_L = (-\Delta)^{-1} \circ id^{\mu_L}$$

anzupassen, wobei  $\mu_L$  das Lebesguesche Maß (in der Ebene) ist. Dann kann man (2.9) als

$$B u_k = \varrho_k u_k, \quad \varrho_1 > \varrho_2 \geq \dots \geq \varrho_k \geq \dots > 0, \quad \varrho_k \rightarrow 0$$

für  $k \rightarrow \infty$ , schreiben, wobei  $\varrho_k = \lambda_k^{-2}$  die Eigenwerte des kompakten positiven selbstadjungierten Operators  $B$  in  $L_2(\Omega)$  sind. Wohlbekannt (und auf unsere späteren Zwecke zugeschnitten) sind folgende 3 Aussagen:

(a) (H. Weyl, 1912, [50], [51]),

$$(2.11) \quad \varrho_k \sim k^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(b) (R. Courant, 1924, [12], S. 398/99). Der größte Eigenwert  $\varrho_1$  ist einfach und (abgesehen von einer multiplikativen Konstanten) ist

$$(2.12) \quad u_1(x) > 0, \quad x \in \Omega,$$

*Nullstellenfreiheit* in der Terminologie von Courant.

(c) (Glattheit). Es gilt (in offensichtlicher Schreibweise)

$$(2.13) \quad u_k \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Für den beschriebenen klassischen Fall waren die Aussagen von Weyl von Anfang an schärfer als (2.11) und schlossen die Volumina von  $\Omega$  (Hauptterm) und von  $\partial\Omega$  (Restglied) ein. Spektraltheorie von (regulären und singulären elliptischen) Differentialoperatoren und Pseudodifferentialoperatoren ist seit dieser Zeit bis zum heutigen Tage ein zentrales Anliegen der Analysis, ein wahres Jahrhundertthema. Den heutigen Stand und insbesondere die heutigen Techniken findet man etwa in [37]. Unser Anliegen hier läßt sich in die Frage kleiden:

*Was wird aus den Eigenschaften (a), (b), (c), also (2.11), (2.12), (2.13), wenn in (2.10) das Lebesguesche Maß  $\mu_L$  (also die homogene Membran) durch ein Maß  $\mu$  mit (2.2) ersetzt wird und wie und wo ist ein diesbezüglich modifizierter Operator  $B$  definiert?*

### 2.3 Problemstellung

Es sei  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$ . Wenn man das nunmehr  $n$ -dimensionale Lebesguesche Maß  $\mu_L$  in (2.10) durch ein singuläres Maß  $\mu$  mit (2.1), (2.2) ersetzen möchte, dann ist klar, daß die in (2.6)–(2.10) beschriebene  $L_2$ -Theorie nicht mehr ausreichend ist. Insbesondere braucht man statt  $H^2(\Omega)$  und  $H_0^2(\Omega)$  in (2.7), (2.8) Räume geringerer Glattheit, wobei sich

$$H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega) = \left\{ f \in L_2(\Omega) : \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_2(\Omega) \text{ mit } j = 1, \dots, n \right\}$$

und

$$(2.14) \quad \mathring{H}^1(\Omega) = \mathring{W}_2^1(\Omega) = \{ f \in H^1(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

als geeignete Räume erweisen. Die Sobolev'schen Räume  $H^s(\mathbb{R}^n)$  kann man am einfachsten durch den Lift

$$(2.15) \quad H^s(\mathbb{R}^n) = (id - \Delta)^{-\frac{s}{2}} L_2(\mathbb{R}^n), \quad s \in \mathbb{R},$$

bestimmen. Dann ist  $H^s(\Omega)$  die Einschränkung von  $H^s(\mathbb{R}^n)$  auf  $\Omega$ . Da  $C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega)$

dicht in  $\mathring{H}^1(\Omega)$  ist, kann man den dualen Raum von  $\mathring{H}^1(\Omega)$  im Rahmen der dualen Paarung  $(D(\Omega), D'(\Omega))$  betrachten und erhält

$$(2.16) \quad \left(\mathring{H}^1(\Omega)\right)' = H^{-1}(\Omega).$$

Nach [42], Proposition 20.3, S. 297, gilt (2.16) sogar für beliebige beschränkte Gebiete.

**Proposition 1.** (a) *Es sei  $\Omega$  ein beliebiges beschränktes  $C^\infty$  Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist*

$$(2.17) \quad (-\Delta)^{-1} : H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathring{H}^1(\Omega)$$

*eine isomorphe Abbildung.*

(b) *Es sei  $\sigma \in \mathbb{R}$ . Dann ist*

$$(2.18) \quad (id - \Delta)^{-\sigma} : H^{-\sigma}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^\sigma(\mathbb{R}^n)$$

*eine isomorphe Abbildung.*

**Bemerkung 1.** Teil (b) ist eine wohlbekannte Lifteigenschaft und auch eine Folge von (2.15). Bezüglich Teil (a) verweisen wir auf [42], 19.2, S. 254/55, und die dortigen Literaturangaben.

Um nunmehr dem Operator  $B$  aus (1.1) einen Sinn zu geben, betrachten wir den Spuroperator (trace)  $tr_\mu$  und den Identifikationsoperator  $id_\mu$ . Hierbei ist  $\mu$  ein Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit kompaktem Träger

$$(2.19) \quad \Gamma = \text{supp } \mu \quad \text{und} \quad 0 < \mu(\mathbb{R}^n) = \mu(\Gamma) < \infty.$$

Dann ist im Sinne stetiger Einbettung

$$(2.20) \quad tr_\mu : S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_2(\Gamma, \mu),$$

und

$$(2.21) \quad id_\mu : L_2(\Gamma, \mu) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n),$$

wobei  $S(\mathbb{R}^n)$ ,  $S'(\mathbb{R}^n)$  (Schwartz-Raum, Raum der temperierten Distributionen) und  $L_2(\Gamma, \mu)$  (komplexer Hilbertraum  $L_2$  bezüglich  $\mu$ ) die übliche Bedeutung haben. Hierbei ist (vorerst)  $tr_\mu$  die punktweise Spur, also

$$(tr_\mu \varphi)(\gamma) = \varphi(\gamma) \quad \text{für} \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \gamma \in \Gamma,$$

und  $id_\mu$  ist die übliche (und weil Radonsches Maß auch mögliche) Identifizierung von  $f \in L_2(\Gamma, \mu)$  mit der temperierten Distribution  $id_\mu f \in S'(\mathbb{R}^n)$  gemäß

$$(id_\mu f)(\varphi) = \int_\Gamma f(\gamma) \varphi(\gamma) \mu(d\gamma), \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

**Proposition 2.** *Es sei  $\mu$  ein Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit kompaktem Träger gemäß (2.19). Spuroperator und Identifikationsoperator seien durch (2.20), (2.21) gegeben. Dann ist*

$$(2.22) \quad tr'_\mu = id_\mu$$

*für den dualen Operator  $tr'_\mu$  von  $tr_\mu$ .*

**Beweis.** Mit üblichen Bezeichnungen folgt die Aussage aus

$$\begin{aligned} (tr'_\mu \psi)(\varphi) &= (tr_\mu \varphi)(\psi) = (tr_\mu \varphi, \bar{\psi})_{L_2(\Gamma, \mu)} \\ &= \int_{\Gamma} \varphi(\gamma) \psi(\gamma) \mu(d\gamma) \\ &= (id_\mu \psi)(\varphi), \end{aligned}$$

für alle  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  und  $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ .

**Problem 1.** Wie sich zeigen wird, reduziert sich die Frage wie  $B$  aus (1.1) in Verallgemeinerung von  $B$  aus (2.10) definiert werden kann auf das Problem ob sich  $tr_\mu$  aus (2.20) zu einer linearen stetigen Abbildung von  $H^1(\mathbb{R}^n)$  in  $L_2(\Gamma, \mu)$  fortsetzen läßt. Verallgemeinert auf  $H^s(\mathbb{R}^n)$  lautet das Problem:

*Es sei  $\mu$  ein Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit kompaktem Träger gemäß (2.19). Für welche  $s > 0$  gibt es eine positive Konstante  $c$  mit*

$$(2.23) \quad \|tr_\mu \varphi\|_{L_2(\Gamma, \mu)} \leq c \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

für alle  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ ?

Wir schreiben hier und in Zukunft  $\|a\|_A$  für die Norm von  $a \in A$  im Banachraum  $A$ . Gilt (2.23), so kann man  $tr_\mu$  durch Vervollständigung zu einem linearen und stetigen Operator

$$(2.24) \quad tr_\mu : H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_2(\Gamma, \mu)$$

fortsetzen (unter Beibehaltung der Schreibweise  $tr_\mu$ ). Gilt (2.24), so folgt aus (2.21), (2.22),

$$(2.25) \quad id_\mu : L_2(\Gamma, \mu) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n) = (H^s(\mathbb{R}^n))'$$

Hieraus ergibt sich

$$(2.26) \quad id^\mu = id_\mu \circ tr_\mu : H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n).$$

Wie üblich bedeutet  $\hookrightarrow$ , daß die entsprechende Abbildung linear und stetig ist.

**Proposition 3.** (a) *Es sei  $\mu$  ein Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit kompaktem Träger gemäß (2.19). Es sei  $s > 0$ , so daß  $tr_\mu$  gemäß (2.24) ein linearer und stetiger Operator ist. Dann ist*

$$(2.27) \quad B_s = (id - \Delta)^{-s} \circ id^\mu : H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n).$$

(b) *Es sei  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ . Es sei  $(-\Delta)^{-1}$  der inverse Operator des Dirichlet-Laplace Operators entsprechend Proposition 1. Es sei  $\mu$  ein Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit*

$$\Gamma = \text{supp } \mu \subset \Omega, \quad 0 < \mu(\Gamma) < \infty.$$

Gilt (2.24) mit  $s = 1$ , so ist

$$(2.28) \quad B = (-\Delta)^{-1} \circ id^\mu : \dot{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \dot{H}^1(\Omega).$$

**Beweis.** Teil (a) folgt unmittelbar aus (2.26), (2.18). Entsprechend erhält man Teil (b) aus (2.26) mit  $s = 1$  und (2.17).

**Bemerkung 2.** Der Operator  $B$  aus (2.28) ist die Präzisierung von  $B$  aus (1.1) und die sachgemäße Verallgemeinerung von (2.10). Wir verweisen auf [42], 9.2, 122–124, wo man weitergehende Ausführungen bezüglich der Dualität (2.22), und (2.24), (2.25) in allgemeineren Räumen findet.

### 3 Spuren und Maße

#### 3.1 Isotrope Maße

Nach Proposition 3 aus 2.3 reduziert sich die Frage der Beschränktheit der Operatoren  $B_s$  und  $B$  in (2.27) und (2.28) auf die Frage ob der Spuroperator  $tr_\mu$  in (2.24) beschränkt ist. Für allgemeine endliche Radonsche Maße im  $\mathbb{R}^n$  (und allgemeinere Funktionenräume) findet man in [42], Theorem 9.3, S. 125, ein etwas implizites Kriterium, das in [42], Corollary 9.8, S. 129/130, durch einfachere hinreichende Bedingungen ergänzt wurde. Es zeigt sich, daß man darüber hinaus für isotrope Radonsche Maße ein gleichermaßen einfaches wie abschließendes Kriterium angeben kann. In Verallgemeinerung von (2.3) nennen wir ein Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit

$$(3.1) \quad \Gamma = \text{supp } \mu \text{ kompakt und } 0 < \mu(\Gamma) = \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$$

isotrop, falls es eine im Intervall  $(0, 1]$  definierte positive Funktion  $h(r)$  mit

$$(3.2) \quad \mu(B(\gamma, r)) \sim h(r), \quad \gamma \in \Gamma, \quad 0 < r \leq 1,$$

gibt, wobei  $B(\gamma, r)$  eine Kugel mit Mittelpunkt  $\gamma$  und Radius  $r$  ist. Wir erinnern an den Gebrauch des Äquivalenzzeichens  $\sim$  gemäß (2.4).

**Proposition 4.** (M. Bricchi, [5], [6], [7], [8]) *Es sei  $h$  eine im Intervall  $(0, 1]$  positive stetige monoton wachsende Funktion. Es existiert ein isotropes Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit (3.1), (3.2), dann und nur dann wenn es eine im Intervall  $(0, 1]$  positive stetige monoton wachsende Funktion  $\tilde{h}$  mit*

$$\tilde{h}(r) \sim h(r), \quad 0 < r \leq 1,$$

und

$$\frac{\tilde{h}(2^{-j-k})}{\tilde{h}(2^{-j})} \geq 2^{-kn} \quad \text{für } j \in \mathbb{N}_0 \text{ und } k \in \mathbb{N}_0$$

gibt.

**Bemerkung 3.** Hierbei ist  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  die Gesamtheit der nicht-negativen ganzen Zahlen. *Monoton wachsend* heißt nicht fallend, die Funktion kann also auf Teilintervallen konstant sein. Prototypen sind die schon in 2.1 erwähnten so-geannten  $d$ -Mengen (nunmehr im  $\mathbb{R}^n$ ), also

$$(3.3) \quad h(r) = r^d, \quad 0 \leq d \leq n, \quad 0 < r \leq 1.$$

Weitere Beispiele sind Störungen von (3.3), etwa

$$(3.4) \quad h(r) = r^d \left| \log \frac{r}{2} \right|^b, \quad 0 < d < n, \quad b \in \mathbb{R}, \quad 0 < r \leq 1,$$

als Spezialfälle so-geannter  $(d, \Psi)$ -Mengen. Die endgültige Fassung der obigen Proposition findet man in [8], einschließlich von Nicht-Standard-Beispielen. Hierbei wurden die Resultate genutzt, um eine diesbezügliche Theorie entsprechender Funktionenräume aufzubauen. Im Falle der  $(d, \Psi)$ -Mengen und insbesondere Funktionen  $h$  mit (3.4) verweisen wir auf [42], Section 22, die dort angegebene Literatur und insbesondere auf [31], [32].

### 3.2 Spuren

Wie in der Einleitung schon angedeutet, beschränken wir uns auf die für uns interessantesten Fälle, das sind der Operator  $B$  aus (2.28) in der Ebene, also  $n = 2$ , und die Operatoren  $B_s$  aus (2.27) mit  $s = \frac{n}{2}$ . In beiden Fällen ist das die Frage nach der Existenz von  $tr_\mu$  gemäß (2.24), (2.23) mit  $s = \frac{n}{2}$ , d. h. der Stetigkeit von  $tr_\mu$ . Wir erinnern daran, daß  $\mathbb{N}$  die Gesamtheit der natürlichen Zahlen bezeichnet und daß  $\mathbb{R}^n$  der  $n$ -dimensionale euklidische Raum ist.

**Satz 1.** *Es sei  $\mu$  ein isotropes Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit (3.1), (3.2). Dann sind folgende 3 Aussagen äquivalent:*

- (i)  $tr_\mu : H_2^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_2(\Gamma, \mu)$  ist stetig,
- (ii)  $tr_\mu : H_2^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_2(\Gamma, \mu)$  ist kompakt,
- (iii)  $\sum_{j=0}^{\infty} h(2^{-j}) < \infty$ .

**Bemerkung 4.** Ein Beweis dieses überraschend einfachen und abschließenden Satzes wird später publiziert, [47]. Er ist ein Spezialfall folgender allgemeiner Aussage, die ebenfalls in [47] bewiesen wird. Es seien

$$B_p^s(\mathbb{R}^n) = B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit } s > 0 \text{ und } 1 < p < \infty$$

die bekannten speziellen Besov-Räume mit  $H^s(\mathbb{R}^n) = B_2^s(\mathbb{R}^n)$ . Wie üblich sei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Dann ist der Spuroperator  $tr_\mu$ ,

$$tr_\mu : B_p^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{p'}(\Gamma, \mu),$$

genau dann stetig, wenn er kompakt ist und dieser Fall tritt genau dann ein, wenn

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-jp'(s-\frac{n}{p})} h(2^{-j})^{p'-1} < \infty$$

gilt. Das macht die Sonderstellung von  $p = p' = 2$  und  $s = \frac{n}{2}$  im obigen Satz klar.

**Satz 2.** Es sei  $\mu$  ein isotropes Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit (3.1), (3.2) und

$$(3.5) \quad \sum_{j=0}^{\infty} h(2^{-j}) < \infty.$$

(a) Dann ist der Operator

$$(3.6) \quad B_{\frac{n}{2}} = (id - \Delta)^{-\frac{n}{2}} \circ id^{\mu} : H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$$

gemäß (2.26), (2.27) kompakt.

(b) Es sei zusätzlich  $n = 2$  und  $\Omega$  sei ein beschränktes  $C^{\infty}$  Gebiet in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ . Ferner sei  $\Gamma \subset \Omega$ , wobei  $\Gamma$  der Träger von  $\mu$  gemäß (3.1) ist. Dann ist der Operator

$$(3.7) \quad B = (-\Delta)^{-1} \circ id^{\mu} : \mathring{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathring{H}^1(\Omega)$$

aus (2.26), (2.28) kompakt.

**Beweis.** Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus dem obigen Satz 1 und dem Beweis von Proposition 3 aus 2.3.

**Bemerkung 5.** Insbesondere sind die Operatoren  $B_{\frac{n}{2}}$  und  $B$  aus (3.6) und (3.7) kompakt, wenn  $\Gamma$  eine  $d$ -Menge gemäß (3.3) mit  $0 < d \leq \frac{n}{2}$  ist ( $n = 2$  im Fall von  $B$ ). Das gilt auch für die speziellen  $(d, \Psi)$ -Mengen mit (3.4).

**Bemerkung 6.** Nach Bemerkung 4 ist für  $s > 0$ ,

$$tr_{\mu} : H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_2(\Gamma, \mu)$$

genau dann kompakt, wenn

$$(3.8) \quad \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-2j(s-\frac{n}{2})} h(2^{-j}) < \infty$$

gilt. Dann ist nach Proposition 3 aus 2.3 der Operator

$$B_s = (id - \Delta)^{-s} \circ id^{\mu} : H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$$

gemäß (2.26), (2.27) kompakt. Wegen der Beschränktheit der Folge  $h(2^{-j})$  ist (3.8) für  $s > \frac{n}{2}$  immer erfüllt. Erst für  $s \leq \frac{n}{2}$  stellt (3.8) eine zusätzliche Bedingung dar. Gemäß Satz 2 sind wir hier ausschließlich (abgesehen von den obigen Bemerkungen) an dem Limes-Fall  $s = \frac{n}{2}$  interessiert.

## 4 Die fraktale Trommel

### 4.1 Einleitung

Das Wort *fraktale Trommel* kann man auf verschiedene Weisen interpretieren. Man kann etwa an ein Fraktal oder eine fraktale Menge und die Spektraltheorie zugehöriger Laplace-Operatoren denken. Dem entspricht die in [26] dargestellte Theorie. Besser bekannt unter diesem Namen ist die Spektraltheorie des Dirichlet-Laplace Operators  $-\Delta$  in beschränkten Gebieten  $\Omega$  im  $\mathbb{R}^n$  (mit  $n = 2$  als herausragendem Fall) mit fraktalem Rand  $\partial\Omega$ . Die erste weitreichende Arbeit hierzu stammt von M. L. Lapidus, [27]. Weitere Literaturangaben findet man in [41], 26.2, S. 200. Für neuere Aspekte in dieser Richtung verweisen wir auf [28]. Genauer gesagt handelt es sich um

*Trommeln mit fraktalem Rand.*

Im Gegensatz hierzu entwickeln wir in [41], [42] und in dieser Arbeit eine Spektraltheorie von

*Trommeln mit fraktaler Membran.*

Es ist die Spektraltheorie des Operators  $B$  aus Proposition 3(b) aus 2.3 mit  $n = 2$ , also bezüglich beschränkter  $C^\infty$  Gebiete  $\Omega$  in der Ebene.

### 4.2 Vorbereitungen

Es sei  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ . Dann rüsten wir den Raum  $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$  aus (2.14) mit dem Skalarprodukt

$$(4.1) \quad (f, g)_{\overset{\circ}{H}^1(\Omega)} = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_j} dx$$

aus. Ferner benötigen wir die Hölder-Zygmund Räume  $C^s(\Omega)$  mit  $0 < s < 2$ . Ist  $0 < s < 1$ , so kann man  $C^s(\Omega)$  durch

$$(4.2) \quad \|f\|_{C^s(\Omega)}^* = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| + \sup \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^s}$$

normieren mit  $x \in \Omega, y \in \Omega, x \neq y$ , im zweiten Supremum. Für  $0 < s < 2$  kann man

$$(4.3) \quad \|f\|_{C^s(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| + \sup \frac{|f(x) - 2f(\frac{x+y}{2}) + f(y)|}{|x - y|^s}$$

als Norm wählen mit  $x \in \Omega, y \in \Omega, \frac{x+y}{2} \in \Omega, x \neq y$ , im zweiten Supremum. (Ist  $0 < s < 1$ , so sind die beiden Normen in (4.2) und (4.3) äquivalent). Mit anderen Worten,  $C^s(\Omega)$  ist die Gesamtheit der komplex-wertigen stetigen Funktionen in  $\bar{\Omega}$ , so daß die Norm in (4.3) endlich ist.

**Bemerkung 7.** Man bezeichnet  $C^1(\Omega)$  auch als Zygmund-Klasse. Hierbei treten erstmals zweite Differenzen auf. Dieser Raum wurde in [52] untersucht. Wie dort angedeutet hat aber schon B. Riemann 1854 in seiner Habilitationsschrift [36] im Zusam-

menhang mit trigonometrischen Reihen nachhaltig darauf hingewiesen, daß man für Räume der Glattheit 1 erste Differenzen durch zweite Differenzen ersetzen sollte.

### 4.3 $d$ -Membrane

In diesem Abschnitt betrachten wir fraktale Trommeln (oder gemäß 4.1 Trommeln mit fraktaler Membran), wobei die Membran  $\Gamma$  eine  $d$ -Menge ist. Entsprechend den obigen Betrachtungen ist somit  $\Gamma$  eine kompakte Menge in  $\mathbb{R}^2$  zu der es ein isotropes Radonsches Maß  $\mu$  in  $\mathbb{R}^2$  gibt mit

$$(4.4) \quad \Gamma = \text{supp } \mu, \quad \mu(B(\gamma, r)) \sim r^d, \quad \gamma \in \Gamma, \quad 0 < r \leq 1,$$

wobei  $B(\gamma, r)$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $\gamma$  und Radius  $r$  ist. Wie im Zusammenhang mit (2.5) ausgeführt, kann man  $\mu$  mit  $\mu = \mathcal{H}^d|_{\Gamma}$  identifizieren, der Einschränkung des Hausdorff-Maßes  $\mathcal{H}^d$  in der Ebene auf  $\Gamma$ . Dann ist klar, daß  $0 \leq d \leq 2$  ist. Ferner sei  $\Gamma \subset \Omega$ , wobei  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet in  $\mathbb{R}^2$  ist. Das führt auf den Operator  $B$  aus Satz 2(b) in 3.2. Die Bedingung (3.5) erfordert  $d > 0$ . Da wir am regulären Fall nicht interessiert sind und  $|\Gamma| = 0$  verlangen, schließen wir auch  $d = 2$  aus. Dann bezeichnen wir  $\Gamma$  als  $d$ -Membran. Nach Satz 2(b) in 3.2 ist der zugehörige Operator  $B$  in  $\mathring{H}^1(\Omega)$  kompakt. Es sei  $\omega = \Omega \setminus \Gamma$  und

$$(4.5) \quad \mathring{H}^1(\omega) = \left\{ f \in \mathring{H}^1(\Omega) : \text{tr}_\mu f = 0 \right\}.$$

Die Spur existiert, da  $d > 0$  ist und (3.5) mit (iii) in Satz 1 aus 3.2 übereinstimmt. Obwohl  $\omega$  eine offene Menge mit irregulärem Rand  $\partial\Omega \cup \Gamma$  ist, ergibt sich, daß  $C_0^\infty(\omega)$  dicht in  $\mathring{H}^1(\omega)$  ist, was die Schreibweise (4.5) rechtfertigt. Wir verweisen auf [42], 19.5, S. 260, wobei wir in dem dortigen Beweis wesentliche Resultate aus [1] verwendet haben.

**Satz 3.** *Es sei  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  und es sei  $\Gamma$  eine kompakte  $d$ -Menge mit  $\Gamma \subset \Omega$  und  $0 < d < 2$ . Ferner sei  $\mu$  ein zugehöriges Radonsches Maß gemäß (4.4). Dann ist der Operator*

$$(4.6) \quad B = (-\Delta)^{-1} \circ \text{id}^\mu : \mathring{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathring{H}^1(\Omega),$$

aus (3.7) ein nicht-negativer kompakter selbstadjungierter Operator in  $\mathring{H}^1(\Omega)$  mit dem Nullraum (Kern)

$$(4.7) \quad N(B) = \mathring{H}^1(\omega)$$

gemäß (4.5). Der Operator  $B$  wird durch die quadratische Form

$$(4.8) \quad (Bf, g)_{\mathring{H}^1(\Omega)} = \int_{\Gamma} f(\gamma) \overline{g(\gamma)} \mu(d\gamma), \quad f \in \mathring{H}^1(\Omega), \quad g \in \mathring{H}^1(\Omega),$$

bezüglich des Skalarprodukts aus (4.1) mit  $n = 2$  erzeugt. Es seien  $\varrho_k$  die positiven Eigenwerte von  $B$ , gezählt gemäß ihren Vielfachheiten, und der Größe nach geordnet,

$$(4.9) \quad \varrho_1 \geq \varrho_2 \geq \varrho_3 \geq \dots, \quad \varrho_k \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

und  $u_k$  die zugehörigen Eigenfunktionen, also

$$(4.10) \quad Bu_k = \varrho_k u_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Der größte Eigenwert  $\varrho_1$  ( $> 0$ ) ist einfach und die zugehörigen Eigenfunktionen  $u_1(x)$  haben keine Nullstellen in  $\Omega$ , also

$$(4.11) \quad u_1(x) = c u(x) \quad \text{mit } c \in \mathbb{C} \text{ und } u(x) > 0 \text{ in } \Omega$$

(Courantsche Eigenschaft). Es gilt

$$(4.12) \quad \varrho_k \sim k^{-1} \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}$$

(Weylsche Eigenschaft). Die Eigenfunktionen  $u_k$  sind in  $\omega = \Omega \setminus \Gamma$  klassische harmonische Funktionen,

$$(4.13) \quad \Delta u_k(x) = 0 \quad \text{für } x \in \omega.$$

Ferner ist

$$(4.14) \quad u_k \in C^s(\Omega) \quad \text{genau dann, wenn } s \leq d,$$

gilt.

**Bemerkung 8.** Dieser Satz ist ein Spezialfall von Theorem 19.7 in [42], S. 264/265, einschließlich seines Beweises. Wir hatten in 2.2 die klassische Theorie in den dortigen Punkten (a), (b), (c) geschildert. Das Weylsche Verhalten (2.11) vom klassischen Fall überträgt sich gemäß (4.12) auf  $d$ -Membrane. Gleichermäßen bemerkenswert ist, daß sich die klassischen Aussagen aus 2.2(b) auf  $d$ -Membrane übertragen: Der größte Eigenwert  $\varrho_1$  ist einfach und die zugehörige Eigenfunktion  $u(x)$  ist (abgesehen von einer multiplikativen Konstanten) in  $\Omega$  positiv. Die globalen Glattheitseigenschaften der Eigenfunktionen  $u_k$  aus (2.13) haben jetzt im Fall von  $d$ -Membranen ihr Gegenstück in der scharfen Aussage  $u_k \in C^d(\Omega)$  und in (4.13).

**Bemerkung 9.** Es ist bemerkenswert, daß zumindest für die Funktion  $u$  aus (4.11) die best mögliche Glattheitsaussage (4.14) auch lokal gilt: Es sei  $B(\gamma, r)$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $\gamma \in \Gamma$ , Radius  $r > 0$ , und  $B(\gamma, r) \subset \Omega$ . Dann gilt

$$(4.15) \quad u \in C^s(B(\gamma, r)) \quad \text{genau dann, wenn } s \leq d$$

gilt. Die maximale lokale Glattheit von  $u$ , also  $s = d$ , ist somit ein getreues Spiegelbild der Fraktalität von  $\Gamma$ . Diese bemerkenswerte Eigenschaft haben wir beim Abfassen von 19.7–19.10 in [42], S. 264–272, übersehen, obwohl sie unmittelbar aus dem Beweis von Theorem 19.7 folgt. Wir kommen auf diesen Punkt in 4.6 zurück.

#### 4.4 Weylsche Maße

Satz 3 aus 4.3 wirft die Frage auf, ob die Weylsche Eigenschaft (4.12) auch für andere Maße  $\mu$  als  $\mathcal{H}^d|_{\Gamma}$  mit  $0 < d < 2$  gilt. Die abschließende Klärung dieses Problems scheint

kompliziert zu sein und ein (notwendiges und hinreichendes) Kriterium ist nicht in Sicht. Wie in 2.1 setzen wir voraus, daß  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  und  $\mu$  ein Radonsches Maß mit

$$(4.16) \quad \text{supp } \mu = \Gamma \subset \Omega, \quad |\Gamma| = 0, \quad 0 < \mu(\Gamma) < \infty,$$

sind. Damit die rechte Seite von (4.8), nunmehr für ein allgemeines Radonsches Maß mit (4.16), eine stetige Bilinearform in  $\mathring{H}^1(\Omega)$  ist, muß

$$(4.17) \quad tr_\mu : \mathring{H}^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Gamma, \mu)$$

ein linearer und stetiger Spuroperator gemäß 2.3 und Proposition 3(b) sein. Ist dies der Fall, dann ergibt sich auch für die obigen Maße, daß

$$(4.18) \quad B = (-\Delta)^{-1} \circ id^\mu : \mathring{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathring{H}^1(\Omega)$$

gilt und daß  $B$  ein nicht-negativer selbstadjungierter Operator ist. Mit anderen Worten, auch im obigen allgemeinen Fall gelten (4.6), (4.7), (4.8).

**Definition 1.** Es sei  $\mu$  ein endliches Radonsches Maß in  $\mathbb{R}^2$  mit kompaktem Träger  $\Gamma$ . Dann heißt  $\mu$  Weylsches Maß, falls für jedes beschränkte  $C^\infty$  Gebiet  $\Omega$  mit (4.16) der Spuroperator  $tr_\mu$  aus (4.17) existiert, der Operator  $B$  aus (4.18) kompakt ist und für seine positiven Eigenwerte  $\varrho_k$ , geordnet gemäß (4.9), einschließlich Vielfachheiten,

$$\varrho_k \sim k^{-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

gilt.

**Bemerkung 10.** Nach Satz 3 aus 4.3 ist  $\mu = \mathcal{H}^d|_\Gamma$  für jede kompakte  $d$ -Menge  $\Gamma$  mit  $0 < d < 2$ , ein Weylsches Maß. Es sei

$$\mu = \sum_{j=1}^N \mu_j, \quad \mu_j = \mathcal{H}^{d_j}|_{\Gamma_j}, \quad j = 1, \dots, N,$$

wobei  $\Gamma_j$  kompakte  $d_j$ -Mengen mit  $0 < d_j < 2$  sind. Dann ist  $\mu$  ein Weylsches Maß. Diese Aussage findet man in [42], 19.12, S. 274, unter der Voraussetzung, daß die Mengen  $\Gamma_j$  paarweise punktfremd sind. Diese Zusatzvoraussetzung ist aber nicht nötig, wie in [46], Corollary 2, gezeigt wurde.

**Bemerkung 11.** Ist  $\mu$  ein isotropes Maß mit (4.16), so erhält man durch Satz 1 aus 3.2 ein abschließendes Kriterium wann  $tr_\mu$  existiert. Ist  $\mu$  ein allgemeines (nicht notwendig isotropes) Maß mit (4.16), so gibt es ebenfalls notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von  $tr_\mu$ . Wir verweisen auf [42], Theorem 9.3, S. 125/126. Sie sind aber etwas implizit. Aus ihnen kann man als Spezialfall folgende Aussage herleiten. Es sei  $Q_{jm}$  das Quadrat in  $\mathbb{R}^2$  mit Mittelpunkt  $2^{-j}m$  und Kantenlänge  $2^{-j+1}$ . Hierbei ist  $j \in \mathbb{N}_0$  und  $m \in \mathbb{Z}^2$ , wobei  $\mathbb{Z}^2$  das Gitter der Punkte in  $\mathbb{R}^2$  mit ganzzahligen Koordinaten ist. Ferner sei  $\mu$  ein endliches Radonsches Maß in  $\mathbb{R}^2$  mit (4.16). Es sei

$$\mu_j = \sup_{m \in \mathbb{Z}^2} \mu(Q_{jm}), \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Existiert  $tr_\mu$  gemäß (4.17), so folgt,

$$(4.19) \quad \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \mu(Q_{jm})^2 < \infty$$

(notwendige Bedingung). Ist umgekehrt

$$(4.20) \quad \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \mu_j < \infty,$$

so existiert  $tr_\mu$  (hinreichende Bedingung). Wir verweisen auf [47], Lemma 2.1, das seinerseits auf [42], Theorem 9.9, S. 131 und (9.47), S. 130, beruht. Insbesondere folgt aus (4.19), daß ein Maß mit (4.17) keine Atome haben kann, also

$$(4.21) \quad \mu(\{x\}) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2$$

gilt.

In Anlehnung an [4], §5.10, S. 61, und [14], 13.18, S. 215, nennt man Maße ohne Atome gemäß (4.21) auch *diffuse* Maße.

**Definition 2.** Es sei  $\mu$  ein endliches Radonsches Maß in  $\mathbb{R}^2$  mit kompaktem Träger  $\Gamma$ . Ferner soll  $\mu$  der Verdopplungsbedingung genügen, wonach es eine Zahl  $c > 0$  gibt, so daß für alle  $\gamma \in \Gamma$  und alle  $r$  mit  $0 < r \leq 1$ ,

$$(4.22) \quad \mu(B(\gamma, 2r)) \leq c \mu(B(\gamma, r))$$

gilt. Dann heißt  $\mu$  *streng diffus*, wenn es eine Zahl mit  $0 << 1$  gibt, so daß

$$(4.23) \quad \mu(Q_1) \leq \frac{1}{2} \mu(Q_0), \quad Q_1 \subset Q_0,$$

für alle Quadrate  $Q_0$  mit Mittelpunkt  $\gamma_0 \in \Gamma$  und Kantenlänge  $r$ ,  $0 < r \leq 1$ , und alle Quadrate  $Q_1$  mit Mittelpunkt  $\gamma_1 \in \Gamma$  und Kantenlänge  $\kappa r$  gilt.

**Bemerkung 12.** In (4.22) ist wiederum  $B(\gamma, r)$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $\gamma$  und Radius  $r$ . Beispiele streng diffuser Maße sind  $\mu = \mathcal{H}^d|_\Gamma$ , also

$$(4.24) \quad \mu(B(\gamma, r)) \sim r^d, \quad \gamma \in \Gamma, \quad 0 < r \leq 1,$$

wobei  $\Gamma$  eine kompakte  $d$ -Menge gemäß (4.4) ist mit  $0 < d < 2$ . Natürlich ist die obige Forderung, daß der Träger von  $\mu$  kompakt ist unwesentlich. Ferner kann man in (4.24) auch  $d = n = 2$  mit dem Lebesgueschen Maß als Prototyp zulassen. Ansonsten verweisen wir auf [42], 19.15, S. 276–278, wo der Begriff des streng diffusen Maßes eingeführt und diskutiert wurde.

**Satz 4.** Jedes streng diffuse Maß (in  $\mathbb{R}^2$ ) ist ein Weylsches Maß.

**Bemerkung 13.** Einen (relativ langen) Beweis dieses Satzes findet man in [42], 19.17, S. 280–288. Wir erinnern daran, daß wir in den obigen Definitionen 1 und 2 a priori gefordert hatten, daß  $\mu$  ein endliches Radonsches Maß mit kompaktem Träger ist. Bezüglich weiterer Diskussionen hierzu und weiterer Punkte verweisen wir auf [42], 19.18, S. 288–291.

**Problem 2.** Nach Bemerkung 12 ist  $\mu = \mathcal{H}^d|_{\Gamma}$  mit  $0 < d < 2$  streng diffus. Somit ist die Weylsche Eigenschaft (4.12) für  $d$ -Membrane eine unmittelbare Folgerung aus Satz 4. Andererseits ist (4.23) eine, wenn auch abgeschwächte, Isotropie-Bedingung. Bekanntlich kann man in der Ebene herrliche Farne, Gräser usw. durch IFS (Iterated Function Systems), basierend auf affinen kontrahierenden Abbildungen, in  $\mathbb{R}^2$  erzeugen. Das findet man in vielen Büchern über fraktale Geometrie. Eine kurze Darstellung einschließlich entsprechender Literaturhinweise wurde in [41], Section 4, gegeben. Die zugehörigen (anisotropen oder nicht-isotropen) Radonschen Maße erfüllen i.a. nicht die Bedingung (4.23). Es ist (zumindest für den Autor) vollkommen unklar, ob die zugehörigen (anisotropen oder nicht-isotropen) Radonsche Maße auch Weylsche Maße sind. Daraus ergeben sich folgende Probleme:

*Wie klingt die Musik der Farne?*  
 und, allgemeiner,  
*wann ist ein Radonsches Maß in  $\mathbb{R}^2$  ein Weylsches Maß?*

#### 4.5 $h$ -Membrane

In 4.3 haben wir  $d$ -Membrane betrachtet, wobei  $d$  eine Zahl mit  $0 < d < 2$  ist. Im Unterschied hierzu ist  $h(\cdot)$  eine ein isotropes Maß erzeugende Funktion,

$$(4.25) \quad \mu(B(\gamma, r)) \sim h(r), \quad \gamma \in \Gamma, \quad 0 < r \leq 1,$$

wobei wir auf 3.1 verweisen. Nach Satz 1 und insbesondere Satz 2(b) aus 3.2 ist

$$(4.26) \quad B = (-\Delta)^{-1} \circ id^\mu : \mathring{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathring{H}^1(\Omega)$$

kompakt, sofern

$$(4.27) \quad \sum_{j=0}^{\infty} h(2^{-j}) < \infty$$

gilt. Ansonsten ist dies ein Spezialfall von (4.16)–(4.18). Somit ist  $B$  ein kompakter, nicht-negativer selbstadjungierter Operator in  $\mathring{H}^1(\Omega)$  mit (4.6)–(4.11) und (4.13).

**Satz 5.** *Es sei  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  und es sei  $\mu$  ein isotropes Radonsches Maß mit (4.16), (4.25). Gelten sowohl*

$$(4.28) \quad \sum_{j=J}^{\infty} h(2^{-j}) \sim h(2^{-J}), \quad J \in \mathbb{N}_0,$$

als auch

$$(4.29) \quad \sum_{j=0}^J h^{-1}(2^{-j}) \sim h^{-1}(2^{-J}), \quad J \in \mathbb{N}_0,$$

so ist  $\mu$  ein Weylsches Maß gemäß Definition 1 aus 4.4.

**Bemerkung 14.** Für  $J = 0$  ist (4.27) in (4.28) enthalten. Entsprechend der früheren Vereinbarung bedeutet  $\sim$  in (4.28) und (4.29), daß die beiden Seiten gegeneinander zu Lasten positiver von  $J$  unabhängiger Konstanten abschätzbar sind (jeweils eine Richtung ist trivial). Im Anschluß an [41] und [42] haben wir Weylsche Maße in [46] und [47] untersucht. Das obige Resultat wird hier erstmals publiziert und folgt aus entsprechenden Ergebnissen in [47]. Während (4.27) notwendig und hinreichend für die Beschränktheit von  $B$  aus (4.26) ist, ist nicht klar, ob die hinreichenden Bedingungen (4.28), (4.29) auch notwendig dafür sind, daß  $\mu$  ein Weylsches Maß ist.

## 4.6 Courant Indikatoren

Wie in Bemerkung 9 in 4.3 angedeutet, gilt zumindest für die Eigenfunktion  $u(x)$  aus (4.11), daß die globale Glattheitseigenschaft (4.14) für alle Eigenfunktionen  $u_k$  auch lokal gemäß (4.15) gilt. Hierbei ist  $\Gamma$  eine  $d$ -Menge mit  $0 < d < 2$  und  $\mu = \mathcal{H}^d \llcorner \Gamma$ . Die Eigenfunktion  $u(x)$  ist also in jedem Punkt  $\gamma \in \Gamma$  ein getreues Spiegelbild der lokalen Fraktalität (zumindest was die Zahl  $d$  anbelangt). Anscheinend kann man diese zum größten Eigenwert  $\varrho_1$  gehörige in  $\Omega$  positive Eigenfunktion  $u(x)$  auch in allgemeineren Fällen benutzen, um Informationen darüber zu bekommen wie fraktal  $\Gamma$  in jedem Punkt  $\gamma \in \Gamma$  ist. Es ist eines der zentralen Anliegen der fraktalen Geometrie, globale, lokale und punktale Aussagen über fraktale Mengen und Maße zu machen. Wir verweisen auf die in der Einleitung genannten Bücher, insbesondere [17], [18], [29], [19]. Fraktale Charakteristika vom Standpunkt der Funktionenräume findet man in [44], einschließlich weiterer Literaturangaben. Wie angedeutet kann man das Verhalten der Eigenfunktion  $u(x)$  nutzen, um weitere fraktale Charakteristika einzuführen. Wir hoffen auf diesen Gegenstand später genauer und systematischer zurück zu kommen, [48]. Im Moment skizzieren wir einige erste Resultate, die im direkten Zusammenhang mit den obigen Betrachtungen stehen.

Es sei wiederum  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  und  $\mu$  sei ein Radonsches Maß mit

$$(4.30) \quad \text{supp } \mu = \Gamma \subset \Omega, \quad |\Gamma| = 0, \quad 0 < \mu(\Gamma) < \infty.$$

Wir nehmen an, daß es Zahlen  $c > 0$  und  $\varepsilon > 0$  mit

$$(4.31) \quad \mu(B(\gamma, r)) \leq cr^\varepsilon, \quad \gamma \in \Gamma, \quad 0 < r \leq 1,$$

gibt. Dann folgt aus (4.20) und (4.16)–(4.18), daß

$$B = (-\Delta)^{-1} \circ id^\mu : \quad \mathring{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathring{H}^1(\Omega)$$

ein nicht-negativer selbstadjungierter Operator ist. Aus dem Beweis des obigen Satzes 3 in [42], 19.7, und (4.31) folgt ferner, daß  $B$  kompakt ist. Die positiven Eigenwerte  $\varrho_k$  können gemäß (4.9) geordnet werden, der größte Eigenwert  $\varrho_1$  ist einfach und es gelten (4.11) und (4.13). Ferner ist in Analogie zu (4.14)

$$(4.32) \quad u_k \in C^\varepsilon(\Omega), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Das gilt insbesondere für die in  $\Omega$  positive Eigenfunktion  $u$ .

**Definition 3.** (Courant-Indikator) *Unter den obigen Voraussetzungen sei für  $\gamma \in \Gamma$ ,*  
 (4.33)  $\text{Ind}_\infty(\gamma) = \sup \{s : u \in C^s(B(\gamma, r)) \text{ mit } 0 < r \leq 1\}.$

**Bemerkung 15.** Der Courant-Indikator mißt in jedem Punkt  $\gamma \in \Gamma$  die bestmögliche lokale Glattheit der positiven Eigenfunktion  $u(x)$  zum größten Eigenwert  $\varrho_1$  von  $B$ . Nach (4.32) gilt zumindest

$$\text{Ind}_\infty(\gamma) \geq \varepsilon \quad \text{für } \gamma \in \Gamma.$$

**Proposition 5.** (*d*-Membrane) *Es sei  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  und es sei  $\Gamma$  eine kompakte  $d$ -Menge mit  $\Gamma \subset \Omega$  und  $0 < d < 2$ . Ferner sei  $\mu$  ein zugehöriges Radonsches Maß,*

$$\Gamma = \text{supp } \mu, \quad \mu(B(\gamma, r)) \sim r^d, \quad \gamma \in \Gamma, \quad 0 < r \leq 1.$$

*Dann ist*

$$\text{Ind}_\infty(\gamma) = d \quad \text{für } \gamma \in \Gamma.$$

**Bemerkung 16.** Diese Aussage stimmt mit Bemerkung 9 im Anschluß an Satz 3 aus 4.3 überein. Insbesondere ist die globale Glattheitsvoraussetzung (4.32) mit  $\varepsilon = d$  erfüllt. In diesem Fall ist das Supremum in (4.33) zugleich ein Maximum.

**Problem 3.** Für *d*-Membrane hat man also die obige abschließende Antwort. Ist  $\mu$  ein isotropes Maß, das zu einer *h*-Membran gemäß 4.5 führt, so kann man erwarten, daß  $\text{Ind}_\infty$  auf  $\Gamma$  konstant ist, sofern (4.32) erfüllt ist. Ist  $\mu$  ein allgemeines (nicht notwendig isotropes) Maß, das den obigen Voraussetzungen genügt, also etwa (4.16)–(4.18) und (4.20), so daß  $B$  kompakt ist, dann sollte  $\text{Ind}_\infty$  (sofern überhaupt definiert) die lokale Fraktalität in jedem Punkt  $\gamma \in \Gamma$  widerspiegeln. Spätestens beim Übergang von isotropen Maßen zu allgemeineren Maßen ist es aber zweckmäßig, vielleicht sogar notwendig, den Indikator  $\text{Ind}_\infty$  zu ersetzen durch die Indikatorenschar

$$\text{Ind}_p(\gamma) = \sup \left\{ s : u \in B_p^s(B(\gamma, r)) \text{ mit } 0 < r \leq 1 \right\},$$

mit  $1 < p \leq \infty$ , wobei  $B_p^s = B_{pp}^s$  spezielle Besov-Räume sind. Das wird nahegelegt durch entsprechende fraktale Charakteristika in [44], [45] und der dort angegebenen Literatur. Im Falle von *d*-Membranen gemäß Proposition 5 ergibt sich

$$\text{Ind}_p(\gamma) = d + \frac{2-d}{p}, \quad \gamma \in \Gamma, \quad 1 < p \leq \infty.$$

Das folgt aus [42], Theorem 19.7, S. 264–265. Es entsteht also das Problem, was die so definierten fraktalen Indikatoren  $\text{Ind}_\infty$  und, allgemeiner,  $\text{Ind}_p$  aussagen und in welcher Relation sie zu anderen fraktalen Charakteristika stehen. Wir kommen in [48] auf diese Problematik zurück.

Wir formulieren hier ein erstes Resultat auf das wir dann in [48] noch genauer eingehen werden. Unter den obigen Voraussetzungen an  $\Gamma$ ,  $\Omega$ , und  $\mu$ , also (4.30), (4.31) setzen wir

$$(4.34) \quad \dim_H(\gamma) = \lim_{j \rightarrow \infty} \dim_H(\Gamma \cap B(\gamma, 2^{-j})), \quad \gamma \in \Gamma,$$

wobei  $\dim_H(M)$  die Hausdorff-Dimension einer Menge  $M$  ist. Ferner sei

$$\mu(B(\gamma', r)) \leq c_j r^{d_j(\gamma)} \quad \text{für } \gamma \in \Gamma, |\gamma - \gamma'| \leq 2^{-j} \quad \text{und} \quad 0 < r \leq 2^{-j}$$

und

$$(4.35) \quad d(\gamma) = \lim_{j \rightarrow \infty} d_j(\gamma), \quad \gamma \in \Gamma.$$

Die Folge auf der rechten Seite von (4.34) ist monoton fallend (d. h. nicht wachsend), die Folge auf der rechten Seite von (4.35) ist monoton wachsend (d. h. nicht fallend) und es gilt

$$(4.36) \quad d(\gamma) \leq \dim_H(\gamma), \quad \gamma \in \Gamma.$$

Im Falle einer  $d$ -Menge sind beide Zahlen in (4.36) gleich  $d$ .

**Satz 6.** *Es sei  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet in  $\mathbb{R}^2$  und es sei  $\mu$  ein Radonsches Maß mit (4.30), (4.31). Dann ist*

$$(4.37) \quad d(\gamma) \leq \text{Ind}_\infty(\gamma) \leq \dim_H(\gamma), \quad \gamma \in \Gamma.$$

**Bemerkung 17.** Einen Beweis publizieren wir zu einem späteren Zeitpunkt im Rahmen einer umfassenderen Theorie, [48]. Proposition 5 ist ein Spezialfall von (4.37).

**Problem 4.** Im Zusammenhang mit der Einführung von  $\text{Ind}_\infty$  in Definition 3, der oben angedeuteten Verallgemeinerung  $\text{Ind}_p$  und Satz 6 entsteht das folgende Problem. Bisher haben wir stillschweigend angenommen, daß  $\mu$  (also auch  $\Gamma$ ) und  $\Omega$  gemäß (4.30) gegeben sind. Es erhebt sich aber die Frage wie weit  $\text{Ind}_p$  bei gegebenem  $\mu$  von  $\Omega$  abhängt. Es ist somit angebracht, diese mögliche Abhängigkeit zu kennzeichnen, also

$$\text{Ind}_p(\gamma) \implies \text{Ind}_p^\Omega(\gamma) \implies \text{Ind}_p^{\mu, \Omega}(\gamma), \quad \gamma \in \Gamma = \text{supp } \mu,$$

zu schreiben. Anschließend kann man fragen, ob  $\text{Ind}_p^{\mu, \Omega}$  von  $\Omega$  unabhängig ist. Nach Proposition 5 und Problem 3 gilt dies, wenn  $\Gamma$  eine  $d$ -Menge ist. Möglicherweise ist das auch für allgemeine isotrope Radonsche Maße richtig, sofern etwa die in Problem 3 genannten Konditionen erfüllt sind. Ist  $\mu$  nicht isotrop, so ist die Unabhängigkeit von  $\Omega$  zumindest fraglich.

*Ist  $\text{Ind}_p^{\mu, \Omega}$  zu gegebenem  $\mu$  und gegebenem  $p$  von  $\Omega$  genau dann unabhängig, wenn  $\mu$  isotrop ist?*

Und was möchte uns dann zu gegebenem (nicht isotropen) Maß  $\mu$  die Gesamtheit der Indikatoren  $\text{Ind}_p^{\mu, \Omega}$  über  $\mu$  und  $\Gamma = \text{supp } \mu$  mitteilen und in welcher Sprache?

## 5 $n$ -dimensionale Weylsche Maße

### 5.1 Einleitung und Definitionen

Es ist fast selbstverständlich, daß die im Abschnitt 4 skizzierte Theorie für den Operator  $B$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  ein  $n$ -dimensionales Gegenstück hat. So findet man in [42], Theorem 19.7, S. 264/265, die  $n$ -dimensionale Verallgemeinerung des obigen Satzes 3 aus 4.3. In die entsprechenden Voraussetzungen und Resultate geht nunmehr die Zahl  $n$  ein. So lautet etwa das Gegenstück von (4.12),

$$(5.1) \quad \varrho_k \sim k^{-1 + \frac{n-2}{d}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad n-2 < d < n,$$

(mit  $0 < d < 1$  für  $n = 1$ ). Es ist aber nicht unsere Absicht, möglichst allgemeine Aussagen zu formulieren. Vielmehr möchten wir uns im Sinne von Bemerkung 6 und Satz 2 aus 3.2 auf die besonders interessanten Limesfälle

$$(5.2) \quad B_n = (id - \Delta)^{-\frac{n}{2}} \circ id^\mu : H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n),$$

konzentrieren. Ist  $n = 2$ , so bedeutet das, daß der Operator  $B$  aus (4.18) durch den Operator  $B_1$  aus (5.2) ersetzt wird. Das Gebiet  $\Omega$  tritt dann nicht mehr in Erscheinung und die physikalische Interpretation als fraktale Trommel (oder Trommel mit fraktaler Membran) geht verloren. Andererseits übertragen sich nach den notwendigen technischen Modifikationen viele Aussagen für den Operator  $B$  aus dem Abschnitt 4 auf den Operator  $B_1$  (in  $\mathbb{R}^2$ ).

Im  $n$ -dimensionalen Fall hatten wir in den Abschnitten 2 und 3 bereits die notwendigen vorbereitenden Aussagen für  $B_n$  und, allgemeiner, für

$$B_s = (id - \Delta)^{-s} \circ id^\mu : H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n),$$

$s > 0$ , parallel zum Operator  $B$  aus Abschnitt 4 getroffen. Wir verweisen auf Proposition 3(a) aus 2.3 und auf die Sätze 1 und 2(a) aus 3.2. In Analogie zu (4.1) führen wir in  $H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$  das spezifische Skalarprodukt

$$(5.3) \quad (f, g)_{H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (id - \Delta)^{\frac{n}{4}} f(x) \cdot (id - \Delta)^{\frac{n}{4}} g(x) dx$$

ein. Dann ist  $B_n$  mit (5.2), in Analogie zum Operator  $B$  aus Abschnitt 4, ein nicht-negativer kompakter selbstadjungierter Operator in  $H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ . Seine positiven Eigenwerte  $\varrho_k$ , gezählt gemäß ihren Vielfachheiten, können der Größe nach geordnet werden,

$$(5.4) \quad \varrho_1 \geq \varrho_2 \geq \varrho_3 \geq \dots, \quad \varrho_k \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty.$$

Wir erinnern daran, daß (5.2) gemäß (2.24) und Proposition 3(a) aus 2.3 äquivalent dazu ist, daß der Spuroperator

$$(5.5) \quad tr_\mu : H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_2(\Gamma, \mu)$$

existiert. In Analogie zu Definition 1 aus 4.4 können wir jetzt im  $\mathbb{R}^n$  Weylsche Maße wie folgt einführen.

**Definition 4.** Es sei  $\mu$  ein endliches Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit kompaktem Träger  $\Gamma$ . Dann heißt  $\mu$  ein Weylsche Maß, falls der Spuroperator  $tr_\mu$  aus (5.5) existiert, der Operator  $B_{\frac{n}{2}}$  aus (5.2) kompakt ist und für seine positiven Eigenwerte  $\varrho_k$ , geordnet gemäß (5.4), einschließlich Vielfachheiten,

$$\varrho_k \sim k^{-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

gilt.

**Bemerkung 18.** Es ist leicht zu sehen, daß  $\mu$  genau dann ein Weylsches Maß in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  gemäß Definition 1 ist, wenn es ein Weylsches Maß nach Definition 4 ist.

## 5.2 Isotrope Weylsche Maße

Es zeigt sich, daß man Satz 5 aus 4.5 fast wörtlich übertragen kann. Aus Vollständigkeitsgründen geben wir eine explizite Formulierung. Gemäß (3.1), (3.2) aus 3.1 sei  $\mu$  ein endliches isotropes Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit

$$\sum_{j=0}^{\infty} h(2^{-j}) < \infty.$$

Dann ist der Operator  $B_{\frac{n}{2}}$  aus (5.2) im Raum  $H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , versehen mit dem Skalarprodukt aus (5.3), kompakt, selbstadjungiert und nicht-negativ. Das folgt aus den Betrachtungen in 5.1 und den Sätzen 1 und 2(a) aus 3.2.

**Satz 7.** Es sei  $\mu$  ein isotropes Radonsches Maß mit (3.1), (3.2). Gelten sowohl

$$\sum_{j=J}^{\infty} h(2^{-j}) \sim h(2^{-J}), \quad J \in \mathbb{N}_0,$$

als auch

$$\sum_{j=0}^J h^{-1}(2^{-j}) \sim h^{-1}(2^{-J}), \quad J \in \mathbb{N}_0,$$

so ist  $\mu$  ein Weylsches Maß gemäß Definition 4 aus 5.1.

**Bemerkung 19.** Das ist das genaue Gegenstück zu Satz 5 aus 4.5. Das trifft auch auf Bemerkung 14 in 4.5 und die dort gemachten Erläuterungen und Literaturhinweise zu. Im Gegensatz zu Satz 5 haben wir hier nicht  $|\Gamma| = 0$  für  $\Gamma = \text{supp } \mu$  gefordert. Das ist aber unwesentlich. Auch Satz 5 gilt ohne diese Voraussetzung. Im Abschnitt 4 waren aber gerade die singulären Maße mit  $|\Gamma| = 0$  von Interesse.

## 6 Methoden

### 6.1 Einleitung

Die Techniken, die letztendlich zu Resultaten der oben beschriebenen Art führten, haben ihren Anfang in [16] genommen. Kernpunkt in [16] sind quantitative Aussagen über kompakte Einbettungsoperatoren zwischen Funktionenräumen etwa der Form

$$(6.1) \quad id : B_{p_1}^{s_1}(\Omega) \hookrightarrow B_{p_2}^{s_2}(\Omega), \quad s_1 - \frac{n}{p_1} > s_2 - \frac{n}{p_2},$$

$0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$ , beschrieben durch Entropie-Zahlen und Approximations-Zahlen. Hierbei ist  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ . Die in dieser Arbeit auftretenden Räume  $H^s = B_2^s$  und  $C^s = B_\infty^s$  sind Spezialfälle. Die genaue Kenntnis der Entropie-Zahlen und Approximations-Zahlen führte dann in [16] zu einer Spektraltheorie (entarteter) elliptischer (Pseudo-) Differentialoperatoren. Aussagen über Einbettungsoperatoren  $id$  der Form (6.1) basierten in [16] auf den Fourier-analytischen Definitionen der Räume  $B_p^s(\mathbb{R}^n)$  und ihrer Einschränkungen auf Gebiete  $\Omega$  in  $\mathbb{R}^n$ . Der Schritt von Gebieten  $\Omega$  und (entarteten) elliptischen Operatoren zu Fraktalen und entsprechenden fraktalen elliptischen Operatoren wurde in [41] vollzogen. Er besteht in einer Charakterisierung von Funktionenräumen durch subatomare Zerlegungen (quarkonial decompositions). Die hohe Flexibilität dieser Technik erlaubt nicht nur eine Diskretisierung von Räumen der Form  $B_p^s(\Omega)$ , sondern auch entsprechende Räume auf fraktalen Mengen einzuführen. Ist etwa  $\Gamma$  eine kompakte  $d$ -Menge im  $\mathbb{R}^n$  mit  $0 < d \leq n$ , so kann man Räume  $B_p^s(\Gamma)$  subatomar einführen und quantitative Aussagen über Entropie-Zahlen und Approximations-Zahlen für kompakte Einbettungen der Form

$$id : B_{p_1}^{s_1}(\Gamma) \hookrightarrow B_{p_2}^{s_2}(\Gamma), \quad s_1 - \frac{d}{p_1} > s_2 - \frac{d}{p_2},$$

$0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$ , machen. Das führt dann zu einer Spektraltheorie fraktaler elliptischer Operatoren, die das Kernstück der obigen Betrachtungen ist. Diese Untersuchungen haben wir in [42] und danach in den im Literaturverzeichnis genannten Arbeiten fortgesetzt. In dieser Arbeit ist die genaue Beschreibung dieser Techniken und ihrer Wirkungsweisen nicht möglich. Wir beschränken uns hier in 6.2 auf die Darlegung der Zusammenhänge von Entropie-Zahlen, Approximations-Zahlen und Spektraltheorie, in 6.3 auf eine Beschreibung einiger subatomarer Zerlegungen in Funktionenräumen und schließlich in 6.4 auf skizzenhafte Andeutungen wie diese Instrumente im Kontext der in dieser Arbeit beschriebenen Resultate genutzt werden.

### 6.2 Entropie-Zahlen und Approximations-Zahlen

Es sei  $T$  ein kompakter Operator im komplexen Banachraum  $A$ . Ferner sei  $TU_A$  das präkompakte Bild des Einheitskugel  $U_A$  in  $A$ . Mit  $k \in \mathbb{N}$  ist die Entropie-Zahl  $e_k(T)$  das Infimum aller Zahlen  $\varepsilon > 0$ , so daß  $TU_A$  durch  $2^{k-1}$  Kugeln in  $A$  vom Radius  $\varepsilon$  überdeckt werden kann. Da  $T$  kompakt ist, besteht das Spektrum von  $T$  außerhalb des

Nullpunktes von  $A$  aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten  $\varrho_k$  endlicher algebraischer Vielfachheit, die einschließlich ihrer algebraischen Vielfachheiten durch

$$(6.2) \quad |\varrho_1| \geq |\varrho_2| \geq |\varrho_3| \geq \cdots, \quad \varrho_k \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

geordnet werden können (wobei die letzte Aussage entfällt, falls es nur endlich viele oder keine Eigenwerte gibt).

**Proposition 6.** (Ungleichung von Carl) *Unter den obigen Voraussetzungen gilt die Unschärferrelation*

$$\sqrt{2} |\varrho_k|^{-1} e_k(T) \geq 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Bemerkung 20.** Bei Kenntnis der geometrischen Größen  $e_k(T)$  kann man die Eigenwerte betragsmäßig nach oben abschätzen. Diese Ungleichung geht auf [11], [9] zurück. Beweise und weitere Ausführungen findet man in [10] und [16].

Neben Entropie-Zahlen benötigt man Approximations-Zahlen. Es sei  $T$  wiederum ein kompakter Operator im komplexen Banachraum  $A$ . Mit  $k \in \mathbb{N}$  ist

$$a_k(T) = \inf\{\|T - L\| : L \in L(A), \text{rank } L < k\},$$

die  $k$ te Approximations-Zahl, wobei  $L(A)$  die Gesamtheit der linearen und stetigen Operatoren in  $A$  ist, und  $\text{rank } L$  die Dimension des Bildes von  $L$  ist.

**Proposition 7.** *Es sei  $T$  ein kompakter nicht-negativer selbstadjungierter Operator im Hilbertraum  $H$  und es seien  $\varrho_k$  seine positiven Eigenwerte geordnet gemäß (6.2). Dann ist*

$$a_k(T) = \varrho_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Bemerkung 21.** Das ist ein Spezialfall einer wohlbekannten klassischen Aussage. Wir verweisen auf [15], S. 91.

### 6.3 Subatomare Zerlegungen

Als entscheidendes Instrument im Kontext der in dieser Arbeit beschriebenen Resultate erweisen sich subatomare Zerlegungen (quarkonial decompositions) von Funktionenräumen. Sie wurden eigens zu diesem Zweck entwickelt und erstmals in [41] dargestellt. In der Folgezeit zeigte sich, daß diese Techniken auch auf andere Probleme angewandt werden können. Sie führten schließlich in [42] zu einem neuen konstruktiven oder *Weierstraßschen Zugang* zur Theorie der Funktionenräume, einschließlich *Taylorentwicklungen von Distributionen*. Die Grundidee etwa für Funktionenräume im  $\mathbb{R}^n$  besteht darin, daß man die wohlbekannte wavelet-Philosophie mit der Philosophie der Taylor-Entwicklungen verknüpft, also

$$(6.3) \quad \psi(x) \implies \psi(2^j x - m) \quad \text{mit} \quad \psi(x) \implies x^\beta \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei  $j \in \mathbb{N}_0$ ,  $m \in \mathbb{Z}^n$ ,  $\beta \in \mathbb{N}_0^n$  und  $x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$  ist. Hierbei ist wiederum  $\mathbb{N}_0$  die Gesamtheit der nicht-negativen ganzen Zahlen,  $\mathbb{Z}^n$  das Gitter im  $\mathbb{R}^n$  bestehend aus den Punkten  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  mit ganzzahligen Komponenten, und  $\mathbb{N}_0^n$  die Gesamtheit der Multi-indices  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$  mit  $\beta_j \in \mathbb{N}$ . Gesucht sind Elementarbausteine  $\psi$ , so daß man mit Hilfe von (6.3) Frames in den entsprechenden Funktionenräumen erhält, wobei die Frame-Koeffizienten (komplexe Zahlen) in abschließender Weise Auskunft darüber geben zu welchen Funktionenräumen die so konstruktiv entwickelte Distribution gehört. Diese Techniken sind überaus flexibel und erlauben konstruktive Zugänge nicht nur für alle Funktionenräume vom Typ  $B_{pq}^s$  und  $F_{pq}^s$  für alle zugelassenen Parameter  $s, p, q$  im  $\mathbb{R}^n$ , sondern auch für diesbezügliche Räume in Gebieten  $\Omega$  im  $\mathbb{R}^n$ , auf Mannigfaltigkeiten und insbesondere auf Fraktalen. Um einen Eindruck zu vermitteln, beschreiben wir einen relativ einfachen, aber typischen Fall.

Es seien

$$(6.4) \quad B_p^s(\mathbb{R}^n) = B_{pp}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit} \quad s > 0 \quad \text{und} \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

die wohlbekanntesten speziellen Besov-Räume. Wir verzichten auf eine explizite Definition und erinnern daran, daß

$$H^s(\mathbb{R}^n) = B_2^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad C^s(\mathbb{R}^n) = B_\infty^s(\mathbb{R}^n), \quad s > 0,$$

die in dieser Arbeit benutzten Sobolev-Räume (fractional Sobolev spaces) und Hölder-Zygmund-Räume sind. Bezüglich der Grundlagen der Theorie der Funktionenräume verweisen wir ansonsten auf [39], [40]. Es sei  $\psi$  eine nicht-negative  $C^\infty$  Funktion im  $\mathbb{R}^n$  mit

$$\text{supp } \psi \subset \{y : |y| < 2^J\}$$

und

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \psi(x - m) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

für eine geeignete Zahl  $J \in \mathbb{N}$  (Zerlegung der Einheit im  $\mathbb{R}^n$ ). Es seien

$$\psi^\beta(x) = (2^{-J}x)^\beta \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Zu vorgegebenen  $s$  und  $p$  werden gemäß (6.3) die Elementarbausteine,  $\beta$ -quarks,

$$(6.5) \quad (\beta\text{-qu})_{jm}(x) = 2^{-j(s-\frac{n}{p})} \psi^\beta(2^j x - m), \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{Z}^n, \quad \beta \in \mathbb{N}_0^n,$$

eingeführt. Die Normierung erklärt sich aus

$$(6.6) \quad \|(\beta\text{-qu})_{jm} | B_p^s(\mathbb{R}^n) \| \sim 1,$$

wobei die Äquivalenzkonstanten in (6.6) von  $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ , nicht aber von  $j \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n$ , abhängen können. Eine Funktion  $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$  gehört dann und nur dann zu  $B_p^s(\mathbb{R}^n)$ , falls sie darstellbar ist als

$$(6.7) \quad f(x) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n} \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{jm}^\beta (\beta\text{-qu})_{jm}(x),$$

mit  $(\beta\text{-qu})_{jm}$  aus (6.5) und

$$(6.8) \quad \|\lambda|_{\ell_p}\| = \left( \sum_{\beta, j, m} |\lambda_{jm}^\beta|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

(mit der üblichen Modifikation für  $p = \infty$ ). Hierbei konvergiert (6.7) mit (6.8) in  $L_p(\mathbb{R}^n)$  absolut (und somit unbedingt). Ferner ist

$$(6.9) \quad \|f|_{B_p^s(\mathbb{R}^n)}\| \sim \inf \|\lambda|_{\ell_p}\|,$$

wobei das Infimum über alle Darstellungen (6.7) mit (6.8) genommen wird (äquivalente Normen). Es gibt Funktionen  $\Phi^\beta \in S(\mathbb{R}^n)$  (der übliche Schwartz-Raum) und eine Zahl  $\kappa \in \mathbb{R}$ , so daß (6.7) mit

$$\lambda_{jm}^\beta = \lambda_{jm}^\beta(f) = (f, 2^{j\kappa} \Phi^\beta(2^j \cdot -m))$$

eine optimale Frame-Darstellung in  $B_p^s(\mathbb{R}^n)$  ist, also (in naheliegender Schreibweise)

$$\|\lambda(f)|_{\ell_p}\| \sim \|f|_{B_p^s(\mathbb{R}^n)}\|.$$

Nach Vorarbeiten in [41] ist diese Theorie systematisch in [42] entwickelt worden. Die obige Fassung ist eine Modifikation und Spezialisierung entsprechend der Darstellung in [45], wo wir insbesondere die Funktionen  $\Phi^\beta$  explizit ausgerechnet haben. Wir verweisen auch auf [43], wo wir einen Überblick über verschiedene Arten von wavelet Frames gegeben haben. Darstellungen der obigen Art gibt es nicht nur für alle Räume  $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$  und  $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ , sondern auch für diesbezügliche Räume in Gebieten und auf Fraktalen. Entscheidend ist hierbei, daß man im  $\mathbb{R}^n$  das reguläre Gitter  $\mathbb{Z}^n$  in (6.7) durch irreguläre Gitter ersetzen kann, die man dann beim Übergang zu fraktalen Mengen optimal anpassen kann.

## 6.4 Beweismethoden

Zentraler Punkt der Untersuchungen in [41], [42] und auch in den obigen Darlegungen ist die Spektraltheorie fraktaler Operatoren, also Aussagen der Form (4.12) oder der andeuteten Verallgemeinerung (5.1), sowie die Frage wann ein Maß  $\mu$  ein Weylsches Maß ist. In vereinfachter Form erläutern wir an einem Beispiel das Zusammenspiel der in 6.2 und 6.3 beschriebenen Resultate.

Entsprechend Satz 3 aus 4.3 sei  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  und  $\Gamma$  sei eine kompakte  $d$ -Menge mit  $0 < d < 2$  und  $\Gamma \subset \Omega$ . Es sei  $\mu = \mathcal{H}^d|_\Gamma$  das zugehörige Maß und

$$B = (-\Delta)^{-1} \circ id_\mu \circ tr_\mu : \mathring{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathring{H}^1(\Omega)$$

der Operator aus (4.6). Es sei

$$tr_\mu \mathring{H}^1(\Omega) = H^{\frac{d}{2}}(\Gamma, \mu),$$

wobei wir (ohne weitere Erläuterungen) die Terminologie aus der oben angegebenen Literatur, insbesondere aus [41], [42] benutzen. Hierbei ist  $H^{\frac{d}{2}}(\Gamma, \mu)$  ein Sobolev-Raum auf  $\Gamma$  für den es eine subatomare Zerlegung auf  $\Gamma$  in Analogie zu (6.7)–(6.9) gibt. Die Einbettung

$$(6.10) \quad id : H^{\frac{d}{2}}(\Gamma, \mu) \hookrightarrow L_2(\Gamma, \mu)$$

ist kompakt. In naheliegender Verallgemeinerung des Beginns von 6.2 kann man Entropie-Zahlen für kompakte Operatoren zwischen Banachräumen einführen. Für  $id$  aus (6.10) ergibt sich

$$(6.11) \quad e_k(id) \sim k^{-\frac{1}{2}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Der Beweis von (6.11) beruht auf subatomaren Zerlegungen in  $H^{\frac{d}{2}}(\Gamma, \mu)$  und der dadurch gegebenen Möglichkeit, Probleme der Art (6.11) auf Entropie-Zahlen zwischen gewichteten  $\ell_2$ -Räumen zurückzuführen. Diese kann man dann berechnen. Andererseits zeigt sich, daß sich die positiven Eigenwerte von  $\sqrt{B}$ , also  $\varrho_k^{\frac{1}{2}}$ , unter Verwendung von Proposition 6 aus 6.2 durch  $e_k(id)$  nach oben abschätzen lassen, also

$$\varrho_k^{\frac{1}{2}} \leq c e_k(id) \sim k^{-\frac{1}{2}}.$$

Ferner kann man in ähnlicher Weise die entsprechenden Approximations-Zahlen  $a_k(id)$  nach unten abschätzen. Unter Verwendung von Proposition 7 aus 6.2 führt das letztendlich zu

$$\varrho_k \sim k^{-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

also (4.12). Details findet man in der angegebenen Literatur. Die obigen Andeutungen sollen lediglich einen ersten Eindruck vom Zusammenspiel der in 6.2 und 6.3 skizzierten Aussagen vermitteln.

## 7 Epilog

Nach den Zitaten aus der Einleitung befinden sich fraktale Geometrie und fraktale Analysis auf der Suche nach Wegen durch die fraktale Wildnis. Gestützt auf die obigen Darlegungen hoffen wir, daß die heutige Theorie der Funktionenräume einen neuen Pfad erschließt: Abseits vom geschäftigen Treiben im Selbstähnlichen und IFS (iterated function systems), vorzugsweise im Isotropen wandelnd und scheue Blicke in den umgebenden nicht-isotropen Dschungel werfend. Kernstück sind subatomare Zerlegungen der Form (6.7) im  $\mathbb{R}^n$  und auf fraktalen Mengen  $\Gamma$  im  $\mathbb{R}^n$ , die letztendlich zu Räumen vom Typ

$$B_p^s(\Gamma), \quad s \in \mathbb{R}, \quad 1 < p \leq \infty,$$

und zu einer  $C^\infty$ -Theorie oder, besser,  $(D(\Gamma), D'(\Gamma))$ -Theorie auf  $\Gamma$  führen. Wie in [49], 3.3, angedeutet (aber bislang nicht weiter ausgeführt) kann man eine solche Theorie mittels *euklidischer Karten* (in Analogie zu Atlanten lokaler Karten Riemannscher Mannigfaltigkeiten) und *snowflaked transforms* auf gewisse abstrakte quasi-metrische Räume übertragen und als Grundstrukturen einer diesbezüglichen Analysis verwenden. Ein solcher Weg ist gekennzeichnet durch das symbiotische Wechselspiel

- (i) *des Glatten mit dem Nicht-Glatten,*
- (ii) *der Dimensionalität mit der Fraktalität,*
- (iii) *der fraktalen Geometrie mit der fraktalen Analysis.*

Hierbei profitieren die linken Seiten von (i)–(iii) von den rechten Seiten und umgekehrt. Einer der spektakulärsten Beweise des letzten Jahrhunderts von einem der berühmtesten Probleme der Mathematik ist mit verdrehten, twisted (*spiralling*, [34]) oder, in heutiger Sprechweise, *fraktalen* Einbettungen abstrakter Strukturen in den euklidischen Raum verbunden. J. Nash bewies in [34], [35], daß jede  $n$ -dimensionale Riemannsche  $C^\infty$  Mannigfaltigkeit isometrisch in einen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^N$  mit  $2N = n(n+1)(3n+11)$  eingebettet werden kann. Für Details verweisen wir auf [3], S. 123. Dieses Ziel wurde in [35] erreicht aufbauend auf der vorhergehenden Arbeit [34]. Es sind die dort behandelten  $C^1$ -Isometrien, die zu fraktalen Einbettungen in Beziehung stehen. Wir zitieren aus [33], S. 158:

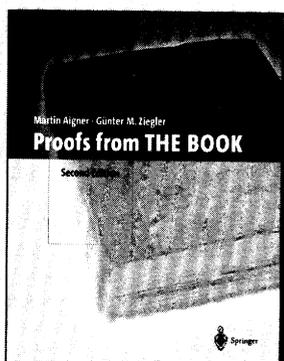
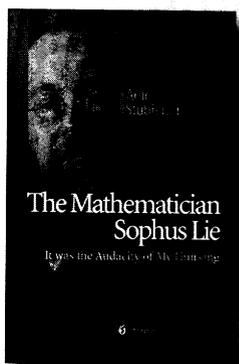
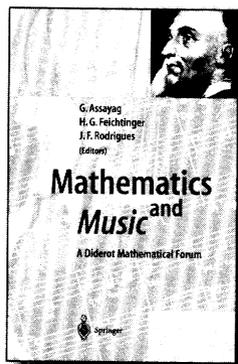
*He (Nash) showed that you could fold the manifold like a silk handkerchief, without distorting it. Nobody would have expected Nash's theorem to be true. In fact, everyone would have expected it to be false. M. Gromov (Interview, 1997): Psychologically the barrier he broke is absolutely fantastic . . . There has been some tendency in recent decades to move from harmonic to chaos. Nash says chaos is just around the corner. J. Conway (Interview, 1994) called Nash's result one of the most important pieces of mathematical analysis of this century.*

## Literatur

- [1] D.R. Adams, L.I. Hedberg. Function spaces and potential theory. Springer, Berlin, 1996
- [2] S. Albeverio, P. Kurasov. Singular perturbations of differential operators. Cambridge Univ. Press, 2000
- [3] T. Aubin. Some nonlinear problems in Riemannian geometry. Springer, Berlin, 1998
- [4] N. Bourbaki. Éléments de Mathématiques. XXI, Livre VI, Ch. 5, Intégration des mesures. Hermann, Paris, 1956
- [5] M. Bricchi. Tailored function spaces and related  $h$ -sets. PhD Thesis, Jena, 2001
- [6] M. Bricchi. Existence and properties of  $h$ -sets. Georgian Math. Journ. **9** (2002), 13–32
- [7] M. Bricchi. Tailored Besov spaces and  $h$ -sets. Math. Nachr. (to appear)
- [8] M. Bricchi. Complements and results on  $h$ -sets. Proc. Conf. *Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis*, Teistungen 2001, (to appear)
- [9] B. Carl. Entropy numbers,  $s$ -numbers and eigenvalue problems. Journ. Funct. Analysis **41** (1981), 290–306
- [10] B. Carl, I. Stephani. Entropy, compactness and the approximation of operators. Cambridge Univ. Press, 1990
- [11] B. Carl, H. Triebel. Inequalities between eigenvalues, entropy numbers, and related quantities of compact operators in Banach spaces. Math. Ann. **251** (1980), 129–133
- [12] R. Courant, D. Hilbert. Methoden der mathematischen Physik. Springer, Berlin, 1993 (4. Auflage), (1. Auflage, 1924)
- [13] G. David, S. Semmes. Fractured fractals and broken dreams. Clarendon Press, Oxford, 1997
- [14] J. Dieudonné. Grundzüge der modernen Analysis 2. VEB Deutscher Verl. Wissenschaften, Berlin, 1975
- [15] D.E. Edmunds, W.D. Evans. Spectral theory and differential operators. Clarendon Press, Oxford, 1987
- [16] D.E. Edmunds, H. Triebel. Function spaces, entropy numbers, differential operators. Cambridge Univ. Press, 1996
- [17] K.J. Falconer. The geometry of fractal sets. Cambridge Univ. Press, 1985
- [18] K.J. Falconer. Fractal geometry. Wiley, Chichester, 1990
- [19] K.J. Falconer. Techniques in fractal geometry. Wiley, Chichester, 1997

- [20] P. Hajtasz, P. Koskela. Sobolev met Poincaré. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **145**, 688. Amer. Math. Soc., Providence, 2000
- [21] Y.S. Han, E.T. Sawyer. Littlewood-Paley theory on spaces of homogeneous type and the classical function spaces. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **110**, 530. Amer. Math. Soc., Providence, 1994
- [22] Y. Han, D. Yang. New characterizations and applications of inhomogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces on homogeneous type spaces and fractals. *Dissertationes Math.* **403** (2002)
- [23] J. Heinonen. *Lectures on analysis on metric spaces*. Springer, New York, 2001
- [24] J.E. Hutchinson. Fractals and self similarity. *Indiana Univ. Math. Journ.* **30** (1981), 713–747
- [25] J. Jost, W. Kendall, U. Mosco, M. Röckner, K.-T. Sturm. *New directions in Dirichlet forms*. Amer. Math. Soc., Providence, 1998
- [26] J. Kigami. *Analysis on fractals*. Cambridge Univ. Press, 2001
- [27] M.L. Lapidus. Fractal drums, inverse spectral problems for elliptic operators and a partial resolution of the Weyl-Berry conjecture. *Trans. AMS* **325** (1991), 465–529
- [28] M.L. Lapidus, M. van Frankenhuysen. *Fractal geometry and number theory*. Birkhäuser, Boston, 2000
- [29] P. Mattila. *Geometry of sets and measures in euclidean spaces*. Cambridge Univ. Press, 1995
- [30] U. Mosco. Dirichlet forms and self-similarity. In: [25], 117–155
- [31] S. Moura. *Function spaces of generalised smoothness, entropy numbers, applications*. PhD Thesis, Coimbra, 2001
- [32] S. Moura. *Function spaces of generalised smoothness*. *Dissertationes Math.* **398** (2001)
- [33] S. Nasar. *A beautiful mind*. Faber and Faber, London, 1998
- [34] J. Nash.  $C^1$  isometric imbeddings. *Ann. Math.* **60** (1954), 383–396
- [35] J. Nash. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. Math.* **63** (1956), 20–63
- [36] B. Riemann. Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. *Habilitationschrift*, Univ. Göttingen, 1854. (In: Bernhard Riemann, *Gesammelte math. Werke*, wissenschaftl. Nachlass und Nachträge. Leipzig, Teubner-Verlag, 1990, 227–264)
- [37] Yu. Safarov, D. Vassiliev. *The asymptotic distribution of eigenvalues of partial differential operators*. Amer. Math. Soc., Providence, 1997
- [38] S. Semmes. *Some novel types of fractal geometry*. Clarendon Press, Oxford, 2001
- [39] H. Triebel. *Theory of function spaces*. Birkhäuser, Basel, 1983
- [40] H. Triebel. *Theory of function spaces II*. Birkhäuser, Basel, 1992
- [41] H. Triebel. *Fractals and spectra*. Birkhäuser, Basel, 1997
- [42] H. Triebel. *The structure of functions*. Birkhäuser, Basel, 2001
- [43] H. Triebel. Towards a Gausslet analysis: Gaussian representations of functions. In *Function Spaces, Interpolation Theory and Related Topics*, Proc. Conf. Lund 2000. W. de Gruyter, Berlin, 2002, 425–449
- [44] H. Triebel. Fractal characteristics of measures, an approach via function spaces. *Journ. Fourier Analysis Applications* (to appear)
- [45] H. Triebel. Wavelet frames for distributions; local and pointwise regularity. *Studia Math.* (to appear)
- [46] H. Triebel. The distribution of eigenvalues of some fractal elliptic operators and Weyl measures. Submitted
- [47] H. Triebel. Some observations on traces, distributions of eigenvalues, and Weyl measures. Preprint, Jena, 2002
- [48] H. Triebel. Courant indicators: new fractal characteristics. In preparation
- [49] H. Triebel, D. Yang. Spectral theory of Riesz potentials on quasi-metric spaces. *Math. Nachr.* **238**, (2002), 160–184
- [50] H. Weyl. Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran von deren Begrenzung. *J. Reine Angew. Mathematik* **141** (1912), 1–11
- [51] H. Weyl. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen. *Math. Ann.* **71** (1912), 441–479
- [52] A. Zygmund. Smooth functions. *Duke Math. Journ.* **12** (1945), 47–76

# General reading titles from Springer



**G. Assayag, H.-G. Feichtinger, J. F. Rodrigues (Eds.)**

## Mathematics and Music

A Diderot Mathematical Forum

This book offers a journey into recent work relating music and mathematics. It contains a large variety of articles, covering the historical aspects, the influence of logic and mathematical thought in composition, perception and understanding of music and the computational aspects of musical sound processing.

2002. XVIII, 288 p. Hardcover € 64.95, £ 45.50; sFr 108.00  
ISBN 3-540-43727-4

**A. Stubhaug**

## The Mathematician Sophus Lie

It was the Audacity of My Thinking

In his comprehensive biography the author let us come close to both the person Sophus Lie and his time. We follow him through childhood at the vicarage in Nodfjordeid, his growing up in Moss, school and studying in Christiania, travelling in Europe and his contacts with the leading mathematicians of his time.

2002. XI, 555 p. 105 illus., 8 in color. Hardcover  
€ 39.95; £ 28.00; sFr 68.50 ISBN 3-540-42137-8

Also by **A. Stubhaug**

## NIELS HENRIK ABEL and his Times

Called Too Soon by Flames Afar

2000. X, 580 p. 51 illus., 13 in color. Hardcover  
€ 44.95; £ 31.50; sFr 77.00 ISBN 3-540-66834-9

**M. Aigner, G. M. Ziegler**

## Proofs from THE BOOK

From the reviews:

"...Clearly this second edition is dangerously well suited to infect the reader with the enthusiasm of the authors."

*(J.Elstrodt in Zentralblatt MATH)*

2nd ed. 2001. Corr. 2nd printing 2002. VIII, 215 p. 240 illus.,  
5 in color. Hardcover € 24.95, £ 17.50; sFr 43.00  
ISBN 3-540-67865-4

**P. Hilton, D. Holton, J. Pedersen**

## Mathematical Vistas

From a Room with Many Windows

Mathematical Vistas stimulates the interest of bright people in mathematics. The book consists of nine related mathematical essays which will intrigue and inform the curious reader. In order to offer a broad spectrum of exciting developments in mathematics, topics are treated at different levels of depth and thoroughness.

2002. XIV, 335 p. 162 illus. (Undergraduate Texts in Mathematics)  
Hardcover € 69.95, £ 49.00; sFr 116.50  
ISBN 0-387-95064-8

[www.springer.de/math](http://www.springer.de/math)

Please order from

Springer · Customer Service · Haberstr. 7 · 69126 Heidelberg, Germany  
Tel.: +49 (0) 6221 - 345 - 0 · Fax: +49 (0) 6221 - 345 - 4229  
e-mail: [orders@springer.de](mailto:orders@springer.de) or through your bookseller

All Euro and GBP prices are net-prices subject to local VAT, e.g. in Germany 7% VAT for books and 16% VAT for electronic products. Prices and other details are subject to change without notice. d&p · 9108/SF



Springer

D. Eisenbud, D. R. Grayson  
M. Stillman, B. Sturmfels

**Computations in  
Algebraic Geometry  
with Macaulay 2**

Algorithms and  
Computation in Mathematics 8

D. Eisenbud, D. R. Grayson,  
M. Stillman,

B. Sturmfels

**Computations in  
Algebraic Geometry  
with Macaulay 2**

Algorithms and  
Computation in Mathematics 8

New York u. a.: Springer-Verlag 2002,  
329 S., EUR 39,95

In der Geschichte der Algebraischen Geometrie hat es immer Verfahren gegeben, die im Prinzip algorithmisch waren, wie z. B. im Beweis des Noetherschen Normalisierungssatzes. Durch Buchbergers Entdeckung der Gröbnerbasen ist aber klargeworden, dass man mit Polynomidealen sehr viel weitgehender und effektiv algorithmisch rechnen kann. Parallel zur Entwicklung der Leistungsfähigkeit von Computern entstanden ab den 80er Jahren spezialisierte Computeralgebrasysteme wie Macaulay, Singular und Cocoa. Bereits um 1990 hatte Macaulay, entwickelt von Bayer und Stillman, eine solche Rechenstärke entwickelt, dass viele Algebraische Geometer es benutzen, um experimentell die Richtigkeit von Vermutungen zu testen. Legendär waren einige Skripten von Eisenbud und anderen. Mittlerweile sind die Programme so leistungsfähig und vielseitig, dass man damit auch in lokalen Algebren und algebraischen Erweiterungen rechnen kann. Neueste Entwicklungen gehen dahin, dass man auch D-Moduln, d. h. nicht-kommutative Algebra, behandeln kann. Die aktuellen Versionen von Macaulay 2 (Grayson und Stillman) und Singular (Greuel, Pfister, Schönemann) sind als open source verfügbar. Es war jahrelang ein gewisses Insiderwissen gefragt, um diese Programme benutzen zu können. Mittlerweile gibt es aber mehrere Bücher, etwa das vorliegende, die auch die praktische Bedienung erklären. Es

gibt bereits ein Buch über Cocoa [2] und demnächst erscheint im Springer Verlag ein Band über Singular mit etwa dem gleichen Ziel [1]. Man beachte den Unterschied zu Programmen wie Mathematica oder Maple, die nicht in diesem spezialisierten Umfeld mithalten können und außerdem nicht frei für alle Plattformen verfügbar sind.

Hier einige Kostproben aus dem Inhalt: alle Beiträge in Teil I sind zur Einführung in Macaulay 2 gedacht. Schon in der Einleitung wird erklärt, wie man einen Modul als Co-Kern definiert und dann eine projektive Auflösung berechnet. Im ersten Artikel von Sturmfels werden Beispiele betrachtet: Raumkurven und deren Schnittpunkte der Kurven mit Flächen sowie – zur Unterhaltung – ein lustiges Anwendungsproblem mit Münzen. Der zweite Beitrag von Eisenbud behandelt komplexere Beispiele innerhalb der Algebraischen Geometrie: zuerst „twisted cubics“, dann das Tangentialbündel des  $\mathbb{P}^3$  und allgemeiner die Cotangentialgarbe beliebiger Varietäten. Dabei lernt der Anfänger, mit dem Programm umzugehen und eine Betti-Tabelle zu lesen, also die notwendige Information auch aus dem Output abzulesen. Eisenbud behandelt auch Schnitttheorie mit der Serreschen Tor-Formel und untersucht ein Beispiel. Schließlich wird die „Mystery Variety“ studiert und ein Einblick in die Mathematik gegeben, die dahinter steckt. Der nächste Beitrag von den Entwicklern Grayson und Stillman ist eine richtige Bedienungsanleitung zu Macaulay 2, für Anfänger wie auch für den fortgeschrittenen User, der wissen will, wie Daten repräsentiert werden und wie er Teile des Source Codes finden kann. Der letzte Artikel in Teil I (von Smith und Sturmfels) behandelt die Lösung von zehn relativ schwierigen Übungsaufgaben aus einer Vorlesung von Sturmfels.

Teil II des Buches wird „Mathematical Computations“ genannt, da die theoretischen Erklärungen hier ohne Ausnahme mit Beispielen illustriert werden, die interessant für die gegenwärtige Forschung sind. Der erste Artikel von Hosten und Smith behandelt monomiale Ideal und die verwandten

Themen Stanley-Reisner Ideale,  $f$ -Vektoren, Primärzerlegung, Graphentheorie, Komplexitätstheorie, torische Ideale und generische Initialideale. Als besonders gelungene Anwendung wird ein Zusammenhangssatz über Hilbertschemata bewiesen. Der zweite Beitrag von Sottile betrachtet enumerative projektive Geometrie (Schubert Kalkül) vom einem reellen Standpunkt aus, d. h. durch das Auffinden reeller Lösungen eines Gleichungssystems von Polynomen. Als Höhepunkt löst Sottile das Problem, ob 12 Geraden in einem enumerativen Problem von Aluffi und Fulton auch reell gewählt werden können. Der Beitrag von Avramov und Grayson behandelt Ringe vom Typ  $B = k[x_1, \dots, x_n]/J$ , wobei  $J$  durch eine homogene reguläre Folge erzeugt wird. Es wird eine Routine in Macaulay beschrieben, die die Ext-Gruppen  $\text{Ext}_B^i(M, N)$  für je zwei e.e.  $B$ -Moduln  $M$  und  $N$  berechnet. Die Darstellung benutzt homologische Algebra und kohomologische Operationen (eine Neuerung in algorithmischer Algebra). Es wird der entsprechende Source Code erklärt und schließlich mehrere konkrete Anwendungen dieser Routine gegeben. Das torische Hilbertschema ist ein geometrisches Objekt, das Algebren mit gewisser festgelegter graduierter Struktur parametrisiert. In dem Abschnitt von Stillman, Sturmfels und Thomas werden die Definitionen und Eigenschaften solcher Hilbertschemata erklärt. Es gibt vielfältige Beziehungen zur Geometrie, Kombinatorik und mathematischer Physik. Im Beitrag von Decker und Eisenbud wird globale Garben- und Vektorbündeltheorie auf dem Niveau der derivierten Kategorie auf einer projektiven Varietät behandelt (eine globale Variante des Artikels von Avramov und Grayson). Es wird die Bernstein-Gelfand-Gelfand Korrespondenz erklärt und die Theorie bis zu neuen Arbeiten von Eisenbud-Floystad-Schreyer weitergeführt. Zentraler Begriff ist die „Beilinson Monade“: wie bekommt man eine Garbe, wenn man nur ihre Kohomologie kennt? Die explizite Konstruktion von Komplexen, die diese Garben als einzige Homologie haben, liefern eine erfolgreiche Stra-

ategie, um Garben zu konstruieren, wenn man zum Beispiel nur ihre Kohomologie erraten kann. Der Artikel von Schreyer und Tonoli beschäftigt sich mit der Lösung von drei konkreten Problemen, die mit einer Methode von Schreyer angegangen werden, die darin besteht, zuerst nach zufälligen Lösungen über endlichen Körpern zu suchen. Hier werden erst Kurven vom Geschlecht  $\leq 14$  über  $F_q$  zufällig erzeugt. Dann werden diese Kurven benutzt, um die Greensche Vermutung zu testen. Ähnliche Methoden werden dann benutzt, um mit der Pfaffschen Methode Calabi-Yau 3-Faltigkeiten in  $\mathbf{P}^6$  zu erzeugen und die Komponenten des Hilbertschemata zu studieren. Dieser Artikel beweist einmal mehr die Stärke der Computermethoden, um wirklich schwierige Geometrie zu betreiben. Zu guter Letzt findet sich im Buch ein Artikel von Walther über D-Moduln. Neben Polynomringen besitzen auch Ideale in der Weyl-Algebra  $k[x_1, \dots, x_n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}]$  eine Gröbnerbasis bzgl. einer Termordnung. Dies kann benutzt werden, um D-Moduln zu studieren. Walther erklärt Gröbnerbasen über der Weyl-Algebra und berechnet damit lokale Kohomologie von holonomen D-Moduln. Dann wird auf die Bernstein-Sato Polynome eingegangen und Algorithmen zu ihrer Berechnung erläutert. Der Artikel schließt mit Beispielen und offenen Fragen.

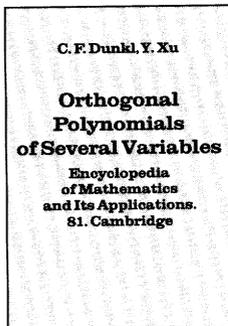
Fazit: das Buch ist kein Lehrbuch im traditionellen Sinn. Sicherlich ist Teil I eine gelungene Einführung, wenn man schon die elementaren Grundlagen der Algebraischen oder Analytischen Geometrie kennt. In Teil II ist das Buch aber eher wie ein Tagungsband, in dem einzelne Spezialisten ihre Themen vorstellen. Hier kann man sich etwas aussuchen, denn die Artikel sind unabhängig voneinander. Darin unterscheidet sich das Buch wesentlich von [1] und [2]. Ich habe beim Lesen viele interessante Stellen gefunden, die man beim flüchtigen Durchblättern übersehen kann. Man muss sich Zeit nehmen, dann wird der Band wirklich zum Gewinn für alle, die Interesse an Algebraischer Geometrie haben.

## References

- [1] Gerd-Martin Greuel und Gerhard Pfister: *A Singular Introduction to commutative algebra*, erscheint im Springer Verlag 2002.
- [2] Martin Kreuzer und Lorenzo Robbiano: *Computational commutative algebra I*, Springer Verlag 2000.

Essen

S. Müller-Stach



C. F. Dunkl, Y. Xu  
**Orthogonal Polynomials of Several Variables**  
 Encyclopedia of Mathematics and Its Applications.  
 81. Cambridge

Cambridge University Press. xv, 390 p., \$ 80.00 (2001).

Obwohl sich in den letzten Jahrzehnten eine große Zahl von Veröffentlichungen mit unterschiedlichen Aspekten mehrdimensionaler orthogonaler Polynome befaßt hat, ist der vorliegende Band die erste moderne Monographie zu diesem Thema. Wer hierzu bisher eine Übersicht suchte, mußte sich entweder mit dem Stand der zwanziger Jahre begnügen, der sich in dem Buch von Appell und de Fériet widerspiegelt, oder sich auf die Teilaspekte einschränken, die in den Büchern und Monographien zur mehrdimensionalen numerischen Integration und Approximation vorgestellt wurden. Die vorliegende Arbeit schließt deshalb eine Lücke und wird ausgesprochen willkommen sein.

Natürlich können nicht alle Facetten des inzwischen doch sehr umfangreichen Gebietes angesprochen werden. Es ist den Autoren aber gelungen, die Schwerpunkte des Gebietes deutlich herauszuarbeiten. Dabei gelingt es ihnen auch, die historische Entwicklung

kurz und verständlich zu umreißen. Einmal durch eine hilfreiche Einführung in die einzelnen Kapitel, dann durch *Notes* mit denen die Kapitel abschließen, wobei auf maßgebliche Arbeiten und ihre Bedeutung hingewiesen wird. Somit liegt eine vernünftige Behandlung des Stoffes vor: es werden die wesentlichen Ideen vollständig entwickelt, auf relevante sowie weiterführende Literatur wird verwiesen. Die vielen Details zu konkreten Beispielen mehrdimensionaler orthogonaler Systeme sind eine Fundgrube für den Anwender. Aus diesen Gründen werden die Bedürfnisse von Spezialisten und Nichtspezialisten gleichermaßen angesprochen.

Das erste Kapitel beschäftigt sich mit den Dingen aus der eindimensionalen Theorie, die später benötigt werden. So Gamma- und Beta-Funktionen, hypergeometrische Reihen, die Rekursionsformel und die klassischen orthogonalen Polynome.

Spezielle orthogonale Systemen im Höherdimensionalen werden im zweiten Kapitel untersucht. Es werden die klassischen Ergebnisse von Appell und de Fériet, Erdélyi und anderen in moderner Form dargestellt, aber auch die weiteren Entwicklungen werden berücksichtigt. Die meisten mehrdimensionalen *klassischen* orthogonalen Polynome können als Eigenfunktionen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung charakterisiert werden.

In Kapitel 3 werden allgemeine Eigenschaften orthogonaler Polynome untersucht. Eine besondere Rolle spielt hierbei die Rekursion, die in allgemeiner Form angegeben werden kann. Für jede Variable gibt es Matrizen, die eine Rekursion mit drei Vektoren erlauben, deren Koordinaten orthogonale Polynome vom Grad  $n + 1$ ,  $n$  bzw.  $n - 1$  sind. Die Gestalt dieser Matrizen und ihre Beziehungen untereinander charakterisieren weitere grundlegende Eigenschaften der orthogonalen Polynome. Neben einer Verallgemeinerung des Satzes von Favard werden reproduzierende Kerne, Fourier-Reihen und das Problem der gemeinsamen Nullstellen orthogonaler Polynome betrachtet. Das Dilemma der Gauß-Kubatur wird an einer

Klasse von Integralen verdeutlicht, die Kornwinder untersucht hat: für diese Integrale läßt sich die Gauß-Quadratur mit allen ihren schönen Eigenschaften direkt ins Mehrdimensionale übertragen. Bei den klassischen Integralen ist eine Verallgemeinerung in dieser Form nicht möglich und nur wenig Konkretes bekannt.

Kapitel 4 befaßt sich mit Coxeter-Gruppen ohne spezielle Kenntnisse der Darstellungstheorie vorauszusetzen. Hier und im Folgenden bilden Dunkl- (Differential-Differenz-) Operatoren und intertwining Operatoren mit den zugehörigen fundamentalen Sätzen die Schwerpunkte.

Die Verallgemeinerung des Laplace-Operator durch Summen der Quadrate der Dunkl-Operatoren führt zu den  $h$ -harmonischen Polynomen, die in Kapitel 5 behandelt werden. Die zugehörigen reproduzierende Kerne und der Poisson-Kern werden untersucht und spezielle Beispiele vorgestellt.

In Kapitel 6 werden verallgemeinerte klassische orthogonale Polynome vorgestellt. Das sind Polynome, die – analog zu den meisten eindimensionalen – eine Differential-Differenzen Gleichung zweiter Ordnung erfüllen. Beispiele hierzu werden hergeleitet, so verallgemeinerte Hermite- und Laguerre-Polynome, aber auch verallgemeinerte klassische orthogonale Polynome über der Kugel oder dem Simplex.

Die Summierbarkeit orthogonaler Entwicklungen nach den  $h$ -harmonischen und verallgemeinerten klassischen orthogonalen Polynomen wird in Kapitel 7 behandelt.

Kapitel 8 beschäftigt sich mit nicht-symmetrischen Jack-Polynomen bezüglich unterschiedlicher Skalarprodukte. Es wird eine Klasse von Operatoren angegeben, für die die Jack-Polynome gemeinsame Eigenfunktionen sind. Dies wird im letzten Kapitel in Zusammenhang mit der Symmetriegruppe des Hyperoktahedrons ausgenutzt. Gleichzeitig werden verschiedene Anwendungen diskutiert.

Das Literatur- und Autorenverzeichnis ist sehr zufriedenstellend, das Stichwortverzeichnis nicht. Ein solches Verzeichnis im

Umfang von zwei Seiten steht in keinem guten Verhältnis zu knapp 400 Seiten Text; man stellt auch schnell fest, daß wesentliche Stichpunkte fehlen. Wegen der wachsenden Bedeutung mehrdimensionaler orthogonaler Polynome in Theorie und Anwendung wird das Buch sicher weitere Auflagen erleben. So kann das Stichwortverzeichnis ergänzt und einige (durch die notwendigerweise komplizierten Bezeichnungen bedingte) Tippfehler können verbessert werden. Ob es dann auch sinnvoll ist, den trigonometrischen Fall oder Verallgemeinerungen, die nicht auf rationalen Dunkl-Operatoren beruhen, einzubeziehen, erscheint mir eher fraglich.

Erlangen

H. J. Schmid

### Erratum zu Heft 3, Seite 52–54

Leider wurde zu der Buchbesprechung W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber und F. Neubrander „Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems“ von Rainer Nagel ein falscher Titel abgedruckt.

# New releases

V. Gromak / Ilpo Laine / S. Shimomura

## ■ Painlevé Differential Equations in the Complex Plane

2002. VIII, 303 pages. Hardcover.

€ 88,- / sFr. 141,- / for USA, Mexico and Canada US\$ 89,95

ISBN 3-11-017379-4

(de Gruyter Studies in Mathematics 28)

This book is the first comprehensive treatment of Painlevé differential equations in the complex plane. Starting with a rigorous presentation for the meromorphic nature of their solutions, the Nevanlinna theory will be applied to offer a detailed exposition of growth aspects and value distribution of Painlevé transcendents.

## ■ Algebraic Geometry

### A Volume in Memory of Paolo Francia

Edited by M. C. Beltrametti, F. Catanese, C. Ciliberto, A. Lanteri, C. Pedrini

2002. X, 356 pages. Hardcover.

€ 148,- / sFr 237,- / for USA, Mexico and Canada US\$ 148.95

ISBN 3-11-017180-5

(Proceedings)

The volume consists of invited refereed research papers. The contributions cover a wide spectrum in algebraic geometry, from motives theory to numerical algebraic geometry and are mainly focused on higher dimensional varieties and Minimal Model Program and surfaces of general type. A part of the articles grew out of a Conference in memory of Paolo Francia (1951–2000) held in Geneva in September 2001 with about 70 participants.

Friedrich von Haeseler

## ■ Automatic Sequences

2002. VIII, 191 pages. Hardcover.

€ 84,- [D] / sFr 134,- / for USA, Canada and Mexico US \$ 89,95

ISBN 3-11-015629-6

(de Gruyter Expositions in Mathematics 36)

Automatic sequences are sequences which are produced by a finite automaton. Although they are not random they may look as being random. They are complicated, in the sense of not being ultimately periodic, they may look rather complicated, in the sense that it may not be easy to name the rule by which the sequence is generated, however there exists a rule which generates the sequence.



de Gruyter  
Berlin · New York

[www.deGruyter.de](http://www.deGruyter.de)

*Bitte bestellen Sie bei Ihrer Buchhandlung  
oder direkt beim Verlag.  
Preisänderungen vorbehalten.*

WALTER DE GRUYTER GMBH & CO. KG · Genthiner Straße 13 · 10785 Berlin  
Telefon +49-(0)30-2 60 05-0 · Fax +49-(0)30-2 60 05-251 · E-mail [wdg-info@deGruyter.de](mailto:wdg-info@deGruyter.de)

