# Des mammouths à la $K$-théorie algébrique

(Notes d'exposé)

**Jean-Louis Loday**

Il n'est sans doute plus besoin de démontrer que, en mathématique, si une notion est fondamentale, on a toutes les chances de la voir resurgir dans des domaines éloignés du champ dans lequel elle a été découverte. Et pourtant, il est difficile d'imaginer un lien étroit entre la $K$-théorie algébrique, théorie abstraite s'il en est, et l'étude de la couleur des cristaux, sujet on ne peut plus concret. D'autant plus difficile que les mammouths (dûment dégraissés) viennent y jouer un rôle non négligeable.

**1. De la $K$-théorie algébrique [L1].** Le déterminant est une jolie fonction possédant la propriété fantastique suivante: pour toutes matrices carrées $\alpha$ et $\beta$ on a les identités

$$det \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = det(\alpha)det(\beta) = det(\alpha\beta).$$

Y aurait-il d'autres fonctions satisfaisant à la même propriété ? Si les coefficients sont dans un corps la réponse est (essentiellement) non ; par contre si les coefficients sont dans un anneau, il se peut que la réponse soit oui. Par exemple pour les matrices à coefficients dans $\mathbf{Z}[\mathbf{Z}/\mathbf{5}]$. De manière générale, si l'on note $GL_n(A)$ le groupe des matrices inversibles à coefficients dans l'anneau $A$, et $GL(A)$ la réunion de tous les $GL_n(A)$, il existe une application universelle

$$f : GL(A) \to K_1(A)$$

possédant les propriétés du déterminant, où le groupe abélien $K_1(A)$ n'est rien d'autre que l'abélianisé du groupe $GL(A)$ (i.e. le groupe $GL(A)$ divisé par son sous-groupe des commutateurs). Lorsque $A$ est commutatif ce groupe est de la forme $K_1(A) = A^{\times} \times ?$, où $A^{\times}$ est le groupe des unités de $A$ et ? est un groupe abélien qui peut être nul (par exemple si $A$ est un corps) ou non (par exemple si $A = \mathbf{Z}[\mathbf{Z}/\mathbf{5}]$). Ce groupe (plus précisément ? ) est difficile à calculer. En fait il appartient à une famille d'invariants des anneaux $K_n(A)$, appelés les groupes de $K$-théorie algébrique de $A$. Cette famille a été introduite par Daniel Quillen dans les années 70. Elle avait été précédée d'une famille analogue pour les espaces topologiques, ceux-ci ayant l'heureuse propriété d'être périodique de période 2 (en $n$).

Bien que l'on se soit aperçu assez vite que les groupes de $K$-théorie algébrique n'étaient pas périodiques, on a remarqué certains phénomènes de périodicité sans pouvoir vraiment les expliquer.

Si l'on remplace le déterminant par la trace, les identités deviennent

$$tr \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = tr(\alpha) + tr(\beta) \quad \text{et} \quad tr(\alpha\beta) = tr(\beta\alpha).$$

On peut développer alors une théorie analogue dans laquelle le groupe linéaire est remplacé par l'algèbre de Lie des matrices et (après bien des calculs) la $K$-théorie algébrique par un nouveau type d'invariants des anneaux appelé l' *homologie cyclique* : $HC_n(A)$. La question de la périodicité a, dans ce contexte, une réponse très précise grâce à la suite exacte de Connes:

$$... \to HC_{n+1}(A) \to HC_{n-1}(A) \to HH_n(A) \to HC_n(A) \to HC_{n-2}(A) \to ...$$

qui montre que l'obstruction à la périodicité est l'homologie de Hochschild $HH_n(A)$. En particulier si jamais l'homologie de Hochschild est nulle, alors l'homologie cyclique est périodique de période 2.

Il est alors naturel d'essayer d'utiliser l'analogie précédente pour étudier le problème de périodicité en $K$-théorie algébrique. Il faut pour cela dire quelques mots sur le lien étroit reliant groupe linéaire et $K$-groupes d'une part, algèbre de Lie des matrices et homologie cyclique d'autre part. Celui-ci s'établit via l'homologie des groupes discrets d'une part, l'homologie des algèbres de Lie d'autre part. Plus précisément l'homologie du groupe $GL(A)$ peut se calculer en fonction des groupes de $K$-théorie de $A$ (et réciproquement), l'homologie de l'algèbre de Lie $gl(A)$ peut se calculer en fonction de l'homologie cyclique de $A$ (et réciproquement).

C'est alors qu'intervient un résultat nouveau: il existe une nouvelle théorie d'homologie des algèbres de Lie, appelée *homologie de Leibniz*, qui joue le même rôle que l'homologie classique des algèbres de Lie, mais pour l'homologie de Hochschild :

| | $gl(A) =$ algèbre de Lie | $GL(A) =$ groupe discret |
|---|---|---|
| commutatif | $H_*(gl(A), \mathbf{Q}) = \Lambda^*(HC_{*-1}(A))$ | $H_*(GL(A), \mathbf{Q}) = \Lambda^*(K_*(A)_{\mathbf{Q}})$ |
| non commut. | $HL_*(gl(A), \mathbf{Q}) = T^*(HH_{*-1}(A))$ | ??? |

A la vue de ce tableau il est naturel de conjecturer l'existence d'une théorie d'*homologie de Leibniz des groupes* qui serait telle que

$$HL_*(GL(A), \mathbf{Q}) = T^*(KL_*(A)_{\mathbf{Q}})$$

pour une certaine théorie (conjecturale) $KL_*(A)$. Cette dernière devrait jouer le role d'obstruction à la périodicité en $K$-théorie algébrique. D'où la question naturelle: existe-t-il une homologie de Leibniz des groupes ?

**2. De nouvelles algèbres et des arbres [L2, L-R].** On examine plus particulièrement le problème d'étendre la théorie $HL$ des algèbres de Lie aux groupes discrets. A ce stade il faut savoir que cette homologie de Leibniz est en fait la théorie d'homologie naturelle pour une classe d'algèbres, appelées les *algèbres de Leibniz*, qui contient en son sein les algèbres de Lie (c'est pourquoi on peut appliquer l'homologie de Leibniz aux algèbres de Lie). Plus précisément une algèbre de Leibniz est un espace vectoriel muni d'un produit $[-,-]$ qui est une dérivation pour lui-même, c'est-à-dire vérifie

$$[[x,y],z] = [[x,z],y] + [x,[y,z]].$$

On notera que l'on n'a pas supposé ici que le crochet est antisymétrique, sinon on aurait eu tout simplement une algèbre de Lie.

La stratégie pour tenter de construire l'homologie de Leibniz des groupes est alors la suivante: trouver un nouveau type d'objet algébrique qui est aux algèbres de Leibniz, ce que les groupes sont aux algèbres de Lie. En fait, entre algèbres de Lie et groupes il y a un type d'objet intermédiaire qui est les algèbres associatives (algèbres enveloppantes). D'où la première question: quel objet algébrique est aux algèbres de Leibniz ce que les algèbres associatives sont aux algèbres de Lie ?

La réponse est donnée par les *digèbres* (*dialgebras* en anglais). Une digèbre $D$ est un espace vectoriel muni de deux opérations associatives $\dashv$ et $\vdash$ (qualifiées de gauche et droite) satisfaisant les 3 axiomes supplémentaires ci-dessous:

$$\begin{cases} x \dashv (y \dashv z) = x \dashv (y \vdash z) \\ (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z) \\ (x \dashv y) \vdash z = (x \vdash y) \vdash z. \end{cases}$$

On est donc dans la situation suivante:

$$\begin{array}{ccccc} \text{algèbres de Lie} & \rightleftarrows & \text{algèbres associatives} & \rightleftarrows & \text{groupes} \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \text{algèbres de Leibniz} & \rightleftarrows & \text{digèbres} & \rightleftarrows & ?? \end{array}$$

Rappelons nous que le but est de construire une théorie d'homologie de Leibniz de groupes. Donc il nous faut connaître la théorie d'homologie associée aux digèbres. Pour ce faire il y a un moyen théorique connu, fondé sur la dualité de Koszul des opérades (due à Ginzburg et Kapranov). Cette théorie dit, entre autres, que pour certains types d'algèbres il existe un type *dual*, et c'est ce type dual qui permet de construire la théorie d'homologie cherchée. Par exemple pour les algèbres de Lie le type dual est: les algèbres associatives et commutatives. Les algèbres associatives sont un type auto-dual. Pour les digèbres le type dual est formé des *algèbres dendriformes.*

Une algèbre dendriforme est un espace vectoriel muni de deux opérations $\prec$ et $\succ$ (qualifiées de gauche et droite) satisfaisant aux 3 axiomes suivants:

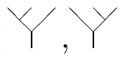
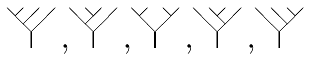
$$\begin{cases} x \prec (y \prec z) = x \prec (y \prec z) + x \prec (y \succ z) \\ (x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z) \\ (x \prec y) \succ z = (x \succ y) \succ z + (x \prec y) \succ z. \end{cases}$$

Le fait qu'une algèbre associative soit un cas particulier de digèbre a un énoncé dual: pour une algèbre dendriforme le produit

$$x * y := x \prec y + x \succ y$$

est associatif. Donc une algèbre dendriforme n'est autre qu'une algèbre associative dont le produit est donné de manière un peu spéciale.

Pour construire explicitement le complexe de chaînes donnant l'homologie d'une digèbre il faut une connaissance fine de l'algèbre dendriforme libre. Sa description se fait joliment à partir des *arbres binaires planaires.* Notons $Y_n$ l'ensemble des arbres binaires planaires à $(n+1)$ feuilles et une racine. En bas degré on a :

$Y_0 = \{|\},\ Y_1 = \{$  $\},\ Y_2 = \{$  $\},\ Y_3 = \{$  $\}.$

Le greffage de deux arbres $x \in Y_p$ et $y \in Y_q$ consiste à relier leur racine à un nouveau sommet, d'où part une nouvelle racine. On note $x \vee y \in Y_{p+q+1}$ ce nouvel arbre. Tout élément $x \in Y_n, n \neq 0$, s'écrit de manière unique $x = x^l \vee x^r$. On montre que l'algèbre dendriforme libre sur un générateur a pour base, en tant qu'espace vectoriel, les arbres binaires planaires :

$$Dend(\mathbf{Q}) := \mathbf{Q}[Y_1] \oplus \mathbf{Q}[Y_2] \oplus \mathbf{Q}[Y_3] \oplus ...$$

Les produits gauche et droit se définissent par récurrence à l'aide de l'opération de greffage sur les arbres :

$$y \prec z := y^l \vee (y^r * z),$$
$$y \succ z := (y * z^l) \vee z^r.$$

On commence la récurrence en posant : $x \prec | := x =: | \succ x$ and $x \succ | := 0 =: | \prec x$.

En conclusion, l'étude de la périodicité en $K$-théorie algébrique nous a mené à mettre en évidence une structure d'algèbre associative sur l'espace vectoriel ayant pour base les arbres binaires planaires :

$$y * z := y^l \vee (y^r * z) + (y * z^l) \vee z^r.$$

Il se trouve que cette algèbre associative est munie d'une structure supplémentaire, à savoir un coproduit, qui est en fait une algèbre de Hopf (cf. [L-R]) :

$$\Delta(x) = \sum (x^l_{(1)} * x^r_{(1)}) \otimes (x^l_{(2)} \vee x^r_{(2)}) \; + \; x \otimes |,$$

avec la notation de Sweedler $\Delta(x) \equiv \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$.

Pour ce qui est du problème initial (périodicité en $K$-théorie algébrique) l'histoire en est là au jour d'aujourd'hui. Par contre l'algèbre des arbres binaires planaires est au coeur de bien d'autres questions.

**3. Mammouths et couleur des cristaux [Br].** Voici un extrait d'un message électronique de Christian Brouder (laboratoire de Minéralogie et Cristallographie, Paris) :

"Il y a treize millions d'années un troupeau de mastodontes est mort noyé, sans doute lors d'une crue de la rivière. Tout cela s'est passé près d'un endroit qui allait devenir Cimorre, dans le Gers. Au cours des treize millions d'années qui ont suivi, les dents ont subi une transformation (la *diagénèse*) au cours de laquelle elles se sont chargées en métaux (fer, chrome, manganèse, terres rares, etc.) et elles ont remplacé les groupements $OH^-$ de l'apatite (le minéral qui forme les dents) par du fluor. Au cours du moyen-âge, quelqu'un a remarqué que, lorsqu'on chauffait des débris de ces dents, ils devenaient bleu turquoise. Les moines d'une abbaye voisine ont alors construit des fours pour faire une production semi-industrielle de fausses turquoises qu'ils ont vendues. Depuis quelques semaines, Ina Reiche, doctorante, a fait un tour dans les collections du Louvre, et a trouvé de nombreux objets du moyen-âge dans lesquels les turquoises étaient en fait des *odontolites* (c'est le nom qu'on donne à ces dents bleues). La question était : comment se fait-il que des dents deviennent bleues quand on les chauffe à 650 degrés ? Maintenant Ina Reiche a trouvé la réponse, c'est le manganèse 2+ qui se trouvait à la place du calcium dans l'apatite, et qui devient manganèse 5+ en se substituant au phosphore. La formule de l'apatite est

$$\mathrm{Ca_5OH(PO_4)_3}$$

Le manganèse 5+ est une valence très rare qui donne sa teinte turquoise a l'odontolite. Au cours des expériences de la semaine dernière `[février 2000]`, nous avons comparé des ivoires fossiles chauffés et non chauffés, et nous avons vu le manganèse passer d'un état 2+ à un état 5+ ."

Afin de comprendre pourquoi le chauffage des dents de mammouths les fait changer de couleur (ainsi que pour analyser d'autres phénomènes du même genre, comme la couleur du pigment bleu fabriqué par les Egyptiens il y a 4500 ans), les cristallographes ont à leur disposition de nombreux modèles mathématiques. Si nombreux, en fait, que Christian Brouder a essayé d'y mettre un peu d'ordre. Pour ce faire il a été amené à résoudre une équation différentielle appelée "Equation de Schwinger linéaire":

$$X = A + F\big(X, \frac{\delta X}{\delta v(z)}\big)$$

$X$ = fonctionelle, $A$ = données initiales, $F$ est linéaire en chaque variable.

En dérivant on obtient une famille infinie d'équations différentielles :

$$\begin{aligned} \frac{\delta X}{\delta v(z_1)} &= \frac{\delta A}{\delta v(z_1)} + F\big(\frac{\delta X}{\delta v(z_1)}, \frac{\delta X}{\delta v(z)}\big) + F\big(X, \frac{\delta^2 X}{\delta v(z)\delta v(z_1)}\big) \\ \frac{\delta^2 X}{\delta v(z_1)\delta v(z_2)} &= \cdots \\ &\cdots \end{aligned}$$

Classiquement ce genre d'équations admet une solution qui s'exprime à l'aide des diagrammes de Feynman. Mais devant la complexité de cette formulation, Brouder a recherché un autre type de solution, et il en a trouvé une nouvelle en faisant appel aux *arbres binaires planaires.* Ainsi sa solution s'exprime comme une série indexée, non pas par les entiers positifs, mais par les arbres binaires planaires:

$$\frac{\delta^n X}{\delta v(z_1)\cdots\delta v(z_n)} = \sum_{\sigma\in\Sigma_n}\sum_{t\in Y_\infty} \phi^n(t; z_{\sigma(1),\cdots\sigma(n)})$$

où $\phi^n$ se calcule par les formules de récurrence :

$$\phi^n(t; z_1, \cdots, z_n) = \sum_k F(\phi^k(t^r, z_1, \cdots, z_k); \phi_\Sigma^{n-k-1}(t^l; z, z_{k+1}, \cdots, z_n)),$$

où $t = t^l \vee t^r$.

En fait, Brouder donne une formule plus compacte pour $\phi(t)$ en faisant appel aux propriétés de l'algèbre des arbres :

$$\phi(t) = F \circ (Id \otimes d(z)) \circ (\phi(t_1) \otimes \phi(t_2)) \circ \Delta,$$

où $d(z)\phi^n(t; z_1, \cdots, z_n) = \phi_\Sigma^{n+1}(t; z, z_1, \cdots, z_n)$ et $\Delta$ est la déconcaténation (voir [Br] et [Br-F] pour plus de détails).

Ainsi, des problèmes aux origines complètement différentes ont mené à étudier le même type d'objet, à savoir l'algèbre des arbres binaires planaires.

Pour terminer signalons que, dans un contexte analogue de renormalisation Connes et Kreimer [C-K] ont mis à jour une algèbre basée sur les arbres enracinés (pas forcément planaires, ni binaires). Comme dans notre cas cet objet est universel pour une certaine structure d'algèbre, qui est ici la notion de *pre-Lie algèbre* (c'est-à-dire une algèbre dendriforme anti-symmétrisée), comme l'ont démontré Chapoton et Livernet [Ch-L].

### Références


[Br] Chr. Brouder, *On the trees of quantum fields*, Euro. Phys. J. C vol 12 (2000), 535–549. `[hep-th/9904014]`

[Br-F] Chr. Brouder and A. Frabetti, *Renormalization of QED with planar binary trees*, preprint 2000.

[Ch-L] F. Chapoton and M. Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, preprint 2000. `[ arXiv:math.QA/0002069 ]`

[C-K] A. Connes and D. Kreimer, *Hopf algebras, renormalization and non-commutative geometry.* Comm. Math. Phys. 199 (1998), no. 1, 203–242. `[ hep-th 9808042 ]`

[L1] J.-L. Loday, Cyclic homology. Grund. math. Wiss., 301. Springer-Verlag, Berlin, Second edition 1998 (513 p.).

[L2] J.-L. Loday, *Dialgebras*, preprint Irma 1999.
`[ http://irmasrv1.u-strasbg.fr/~loday/DIAS.tot.ps ]`

[L-R] J.-L. Loday and M.O. Ronco, *Hopf algebra of the planar binary trees.* Adv. in Maths 139 (1998), 293–309.


`http://www-irma.u-strasbg.fr/~loday/`

`[mammouth]` 20 mars 2000 (Printemps)