Type des tores maximaux des groupes semi-simples

P. Gille

July 8, 2003

Abstract: Let G/k be a semisimple algebraic group defined over a field k with separable closure k_s. Let T a maximal k–torus of G. The Galois action on the root system $\Phi(G_{k_s}, T_{k_s})$ provides an invariant in Galois cohomology, we call it the type of T in G. We show that all possible type occur for maximal tori of quasi-split semisimple groups. [1]

1 Introduction

Soient k un corps, k_s une clôture séparable et $\Gamma_k = \mathcal{G}al(k_s/k)$ le groupe de Galois absolu de k. Soient G/k un groupe semi-simple (connexe) et G_0/k sa forme déployée supposée presque simple. On note T_0/k un k-tore maximal de G_0, B_0 un sous–groupe de Borel de G_0 contenant T_0 et $R_0 = \Phi(G_0, T_0)$ le système de racines associé de groupe de Weyl $W(R_0)$ et de groupe d'automorphismes $A(R_0)$. On note $\mathcal{T}_G/k$ la variété des tores de G, cette variété représente le foncteur des tores maximaux de G/k ([SGA3], exp. XXII, §5.8). Le but de cet article est de définir et d'étudier une application naturelle

$$\mathrm{Type}_G : \mathcal{T}_G(k) \to H^1(k, A(R_0)),$$

définie par l'action du groupe de Galois sur le système de racines $\Phi(G_{k_s}, T_{k_s})$, c'est-à-dire la donnée de déploiement du tore T par rapport à G. Par exemple, si T est k–tore maximal de GL_n , on sait que T est isomorphe à un tore induit $R_{L/k}\mathbb{G}_m$ où L/k est une algèbre étale de degré n de k, le type de T

[1] AMS Classification : 20G15

n'est alors pas autre chose que la classe d'isomorphie $[L] \in H^1(k, S_n)$, vue dans $H^1(k, S_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ si $n \geq 3$.

Le groupe des automorphismes extérieurs $\mathrm{Out}(G_0)$ de G_0 intervient dans $A(R_0)$; on rappelle que l'on a un isomorphisme $\mathrm{Aut}(G_0, B_0, T_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Out}(G_0)$ et donc un plongement ([SGA3], exp. XXIV, §1)

$$\iota : \mathrm{Out}(G_0) \hookrightarrow A(R_0)/W(R_0).$$

On rappelle la correspondance

$$\{\text{Classes d'isomorphie des groupes quasi-déployés, } k\text{-formes de } G_0\}$$
$$< -- > \quad H^1(k, \mathrm{Out}(G_0)) = \mathrm{Hom}_{ct}(\Gamma_k, \mathrm{Out}(G_0))/ \sim .$$

Si $\varphi \in \mathrm{Hom}(\Gamma_k, \mathrm{Out}(G_0))$, le groupe tordu $G := {}^{\varphi}G_0$ est le groupe quasi-déployé correspondant à $[\varphi] \in H^1(k, \mathrm{Out}(G_0))$.

Théorème 1.1 *Pour tout groupe quasi-déployé ${}^{\varphi}G_0$, l'image de application* Type_G *est la préimage de $\iota_*[\varphi]$ par l'application*

$$H^1(k, A(R_0)) \longrightarrow H^1(k, A(R_0)/W(R_0)).$$

La préimage de $\iota_*[\varphi]$ par l'application $H^1(k, A(R_0)) \to H^1(k, A(R_0)/W(R_0))$ s'identifie selon ([Se], §I.5.5, corollaire 2) à $H^1(k, {}^{\varphi}W_0)/\mathrm{Out}({}^{\varphi}G_0)(k)$. En particulier, la préimage de 1 est $H^1(k, W_0)/\mathrm{Out}(G_0)$.

Ainsi, le théorème énonce que l'image de l'application type d'un groupe quasi-déployé est aussi grande que possible, le cas de est évident dans le cas du groupe GL_n étant évident. La preuve procède par une série de réductions suivie d'une étude cas par cas incluant les groupes exceptionnels.

Remerciement : Joost Van Hamel m'a posé la question de la surjectivité du type dans le cas des groupes définis sur $\mathbb{R}$, et j'ai bénéficié de l'expertise de Skip Garibaldi pour les groupes exceptionnels. Je les remercie chaleureusement.

2 L'application type

2.1 Définition

Soit $T \subset G$ un k–tore. Le système de racines $R = \Phi(G_{k_s}, T_{k_s})$ est muni d'une action de Γ_k et est une k–forme de R_0 (muni de l'action triviale). Le yoga des k–formes ([Se], §III.1) produit une classe

$$\mathrm{Type}_G(T) \in H^1(k, A(R_0)).$$

Cette application est $\mathrm{Aut}(G)(k)$–invariante.

Remarque 2.1 *Le type de T ne dépend que du système de racines R, il est par conséquent invariant par isogénie centrale. De façon précise, si $\lambda : G' \to G$ est une isogénie centrale de groupes semi-simples, alors* $\mathrm{Type}_G(T) = \mathrm{Type}_{G'}(\lambda^* T)$.

2.2 Lien avec la variété des tores

On note $\mathcal{T}_{G_0}$ la variété des tores de G_0; on a un isomorphisme (cf. [V], §4.1) $\mathcal{T}_{G_0} = G_0/N_G(T_0)$. Alors l'application composée

$$\mathrm{Type}' : (G_0/N_{G_0}(T_0))(k) \to H^1(k, N_0) \to H^1(k, W_0) \to H^1(k, A(R_0))$$

est une autre façon de voir l'application Type.

Lemme 2.2 $\mathrm{Type} = \mathrm{Type}'$.

Démonstration. Soit T un k–tore maximal de G_0. L'invariant $\mathrm{Type}'(T)$ se calcule de la façon suivante. Soit $g \in G_0(k_s)$ satisfaisant $T_{k_s} = gT_0g^{-1}$. Alors $n_s = g^{-1}\,{}^s g$ est un 1–cocycle à valeurs dans $N_0(k_s)$ et $\mathrm{Type}'(T)$ est l'image de $[n_s]$ dans $H^1(k, A(R_0))$. L'élément g induit un isomorphisme

$$g_* : \Phi(T_{k_s}, G_{0,k_s}) \xrightarrow{\sim} \Phi(T_{0,k_s}, G_{0,k_s}).$$

Alors $(g_*)^{-1}({}^s g_*)$ est un 1–cocycle à valeurs dans $A(R_0)$ égal à l'image du cocycle n_s dans $A(R_0)$. □

3 Réductions

3.1 Extensions centrales

Une petite difficulté provient du fait que le groupe $\mathrm{Out}(G_0)$ varie dans la classe d'isogénie de G_0. Notant G_0^{sc} (resp. $G_{0,ad}$) le revêtement universel (resp. le groupe adjoint) de G_0, on a cependant $\mathrm{Out}(G_0^{sc}) = \mathrm{Out}(G_{0,ad})) \xrightarrow{\sim} A(R_0)/W_0$ et une injection $\iota : \mathrm{Out}(G_0) \hookrightarrow A(G_0)/W_0$ ([SGA3], §XXIV.2).

Lemme 3.1 *a) Soit* $1 \to \mu \to G_0' \to G_0 \to 1$ *une isogénie telle que* $\mathrm{Aut}(G_0', B_0', T_0') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(G_0, B_0, T_0)$. *Alors le théorème 1.1 vaut pour* G_0 *si et seulement si il vaut pour* G_0'.

b) Si le théorème 1.1 vaut pour le groupe adjoint $G_{0,ad}$*, alors il vaut pour* G_0. □

Démonstration. L'assertion *a*) résulte immédiatement de la remarque 2.1.
b) On note $\lambda : G_0 \to G_{0,ad}$ l'isogénie naturelle de noyau $Z(G_0)$. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{ct}(\Gamma_k, \mathrm{Out}(G_0))$. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_{\varphi G_0} & \xrightarrow{\mathrm{Type}_{\varphi G_0}} & H^1(k, A(R_0)) \\ \| & & \| \\ \mathcal{T}_{\varphi G_{0,ad}} & \xrightarrow{\mathrm{Type}_{\varphi G_{0,ad}}} & H^1(k, A(R_0)) \end{array}$$

montre que si l'image de $\mathrm{Type}_{\varphi G_{0,ad}}$ est la préimage de $\iota_*[\varphi]$ par l'application $H^1(k, A(R_0)) \to H^1(k, A(R_0)/W_0)$, il en est de même pour l'image de $\mathrm{Type}_{\varphi G_0}$.
□

3.2 Application du théorème de Steinberg

Désormais, on suppose que G_0 satisfait $\mathrm{Out}(G_0) = \mathrm{Out}(G_{0,ad}) = A(R_0)/W_0$ (encore égal à $\mathrm{Out}(G_0^{sc})$). On considère la suite exacte

$$1 \to T_0 \to N_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0) \xrightarrow{\rho} A(R_0) \to 1.$$

Proposition 3.2

$$\mathrm{Im}\Big(H^1(k, N_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0)) \xrightarrow{\rho_*} H^1(k, A(R_0))\Big) \subset \bigsqcup_{[\varphi]} \mathrm{Im}(\mathrm{Type}_{\varphi G_0}),$$

où $[\varphi]$ *parcourt* $H^1(k, \mathrm{Out}(G_0))$.

Démonstration. a) Soit $[z] \in H^1(k, N_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0))$ d'image $[\varphi] \in H^1(k, \mathrm{Out}(G_0))$. Alors le k-tore $T = {}_zT_0$ est un k–tore maximal du k-groupe tordu $G = {}_zG_0$. Par construction, on a $\mathrm{Type}_G(T) = \rho_*[z]$. Le théorème de Steinberg ([St], §1.7, 1.8 et 9) énonce qu'il existe un k–plongement $i : T \to {}^{\varphi}G_0$ et une classe

$[a] \in H^1(k,T)$ tels que $i_*[a] = [z]$. On peut donc supposer que $i_*a = z$. On note X le k–torseur sous T défini par le cocycle a. Alors il existe un isomorphisme $\phi : G_{k(X)} \xrightarrow{\sim} {}^{\varphi}G_{0,k(X)}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T_{k(X)} & \rightarrow & G_{k(X)} \\ \Big\| & & \phi \Big\downarrow \wr \\ T_{k(X)} & \xrightarrow{i} & {}^{\varphi}G_{0,k(X)} \end{array}$$

commute. On forme alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_G(k) & \xrightarrow{\text{Type}} & H^1(k, A(R_0)) \\ \Big\downarrow \wr & & \Big\| \\ \mathcal{T}_G(k(X)) & \xrightarrow{\text{Type}} & H^1(k(X), A(R_0)) \\ \phi_* \Big\downarrow \wr & & \Big\| \\ \mathcal{T}_{{}^{\varphi}G_0}(k(X)) & \xrightarrow{\text{Type}} & H^1(k(X), A(R_0)) \\ \Big\uparrow & & \Big\uparrow \\ \mathcal{T}_{{}^{\varphi}G_0}(k) & \xrightarrow{\text{Type}} & H^1(k, A(R_0)) \end{array}$$

et on note que $\phi_*(T) = T$. Puisque k est algébriquement clos dans $k(X)$, la flèche $H^1(k, A(R_0)) \to H^1(k(X), A(R_0))$ est injective et on conclut que $\text{Type}_{{}^{\varphi}G_0}(T) = \rho_*[z]$. $\square$

Remarque 3.3 *Le passage de k à $k(X)$ est inspiré par la preuve du théorème 3.2 de [BK].*

Corollaire 3.4 *Si ρ_* est surjectif, alors le théorème 1.1 est vrai pour le groupe quasi-déployé ${}^{\varphi}G_0$ pour tout $[\varphi] \in H^1(k, \text{Out}(G_0))$.* $\square$

On est donc ramené à étudier la surjectivité de l'application

$$H^1(k, N_0 \rtimes \text{Out}(G_0)) \xrightarrow{\rho_*} H^1(k, W_0 \rtimes \text{Out}(G_0)).$$

Si la suite exacte $1 \to T_0 \to N_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0) \to A(R_0) \to 1$ est scindée, alors ρ_* est à l'évidence surjectif. Ce n'est pas toujours le cas mais on a toutefois l'information suivante.

Proposition 3.5 *(Tits, [T], introduction) L'extension*

$$1 \to T_0 \to N_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0) \to A(R_0) \to 1$$

est d'exposant au plus 2. $\square$

On dispose d'une obstruction à relever les éléments de $H^1(k, W_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0))$ dans $H^1(k, N_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0))$. En effet, si $[c] \in H^1(k, W_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0))$, il existe une classe $\Delta(c) \in H^2(k, {}_cT_0)$ telle que $\Delta(c) = 0$ si et seulement si $[c] \in \mathrm{Im}(\rho_*)$ ([Se], §5.6). A notre connaissance, cette obstruction ne semble pas avoir été étudiée auparavant.

4 L'application ρ_*

En utilisant la classification, nous allons montrer le résultat suivant qui implique le théorème principal suivant le corollaire 3.4.

Théorème 4.1 *On suppose que* $\mathrm{Out}(G_0) = \mathrm{Out}(G_{0,ad}) = A(R_0)/W_0$. *Alors l'application*

$$\rho_* : H^1(k, N_{G_0}(T_0) \rtimes \mathrm{Out}(G_0)) \to H^1(k, A(R_0))$$

est surjective.

4.1 2–Sylow des groupes de Weyl

Nous allons tirer quelques conséquences de la proposition 3.5.

Lemme 4.2 *a) Pour tout* $[c] \in H^1(k, A(R_0))$, $2\Delta(c) = 0$ *dans* $H^2(k, {}_cT_0)$.

b) Soit $W_0^{(2)} \rtimes \mathrm{Out}(G_0)^{(2)}$ *un* 2*–Sylow de* $W_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0)$. *On suppose que pour toute extension finie* L/k *et pour tout* $[c] \in H^1(L, W_0^{(2)} \rtimes \mathrm{Out}(G_0)^{(2)})$, *on a* $\Delta(c) = 0$ *dans* $H^2(L, {}_cT_0)$. *Alors pour tout* $[c] \in H^1(k, W_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0))$, $\Delta(c) = 0$ *dans* $H^2(k, {}_cT_0)$.

Démonstration. a) Suivant la proposition 3.5, la classe de l'extension de groupes à noyau abélien $1 \to T_0(k) \to (N_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0))(k) \to W_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0) \to 1$ est de 2-torsion, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & T_0(k) \arrow[r] \arrow[d, "\times 2"'] & N_0(k) \rtimes \mathrm{Out}(G_0) \arrow[r] \arrow[d] & A(R_0) \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl] & 1 \\
1 \arrow[r] & T_0(k) \arrow[r] & E \arrow[r] & A(R_0) \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

où E est l'extension poussée. Si $[c] \in H^1(k, A(R_0))$, on en déduit que $2\Delta([c]) = 0$ dans $H^2(k, {}_cT)$. Par restriction-corestriction, on en déduit aussitôt le b). □

Corollaire 4.3 *On suppose que* $\mathrm{Out}(G_0) = 0$. *Soit* H_0 *un sous–groupe semi-simple déployé de* G_0 *contenant* T_0. *On suppose que* $[W_{G_0}(T_0) : W_{H_0}(T_0)]$ *est impair. Alors la surjectivité de* ρ_{*,H_0} *(sur toute extension de* k*) entraîne celle de* ρ_{*,G_0}.

Démonstration. Par hypothèse, un 2–groupe de Sylow $W_{H_0}(T_0)^{(2)}$ de $W_{H_0}(T_0)$ est un 2–groupe de Sylow de $W_{G_0}(T_0)$. Soit $[c] \in H^1(k, W_0) = Hom_{ct}(\Gamma_k, W_0)/\mathrm{Int}(W_0)$. On veut montrer que la classe $\Delta(c) \in H^2(k, {}_cT_0)$ est nulle. Pour cela, par restriction-corestriction, il suffit de le voir après une extension de corps k'/k de degré impair. Ainsi, quitte à étendre k de cette façon, on peut supposer que l'homomorphisme $c : \Gamma_k \to W_0$ est à valeurs dans $W_{G_0}(T_0)^{(2)}$ et donc dans $W_{H_0}(T_0)$. Comme ρ_{*,H_0} est surjectif (par hypothèse), on a donc $\Delta(c) = 0 \in H^2(k, {}_cT_0)$. □

4.2 Représentations

Lemme 4.4 *Soit* $f : G_0 \to G_0'$ *un plongement de* G_0 *dans un groupe réductif (connexe) déployé. On fait les hypothèses suivantes :*

i) $Z_{G_0'}(T_0)$ *est un* k*–tore déployé maximal* T_0' *de* G_0',
ii) Le morphisme f *s'étend en un morphisme injectif* $G_0 \rtimes \mathrm{Aut}(G_0, B_0, T_0) \to G_0'$.
iii) L'application $H^1(k, N_{G_0'}(T_0')) \to H^1(k, N_{G_0'}(T_0')/T_0')$ *est surjective.*

Alors l'application $\rho_* : H^1(k, N_{G_0}(T_0)) \to H^1(k, A(R_0))$ *est surjective.*

Démonstration. Tout d'abord, on observe que le k–groupe $T'_0 \cap G_0$ est un k–sous–groupe de type multiplicatif de G_0 contenant T_0; on a donc $T_0 = T'_0 \cap G_0$. Par hypothèse, on a une inclusion

$$N_{G_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0)}(T_0) \subset N_{G'_0}(T'_0)$$

induisant un plongement

$$A(R_0) \hookrightarrow W'_0 := N_{G'_0}(T'_0)/T'_0,$$

où W'_0 désigne le groupe de Weyl de (G'_0, T'_0). On note $\widetilde{N}_{G'_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0)}(T'_0)$ l'image inverse de $A(R_0)$ par le morphisme $N_{G'_0}(T'_0) \to W'_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0)$. On a donc le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & T_0 & \to & N_{G_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0)}(T_0) & \to & A(R_0) & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
1 & \to & T'_0 & \to & \widetilde{N}_{G'_0}(T'_0) & \to & A(R_0) & \to & 1 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & T'_0 & \to & N_{G'_0}(T'_0) & \to & W'_0 & \to & 1.
\end{array}$$

Le sous-lemme suivant résulte immédiatement de la caractérisation par la torsion de l'image de l'application changement de groupe pour les torseurs ([Se], §I.5, proposition 37).

Sous-lemme 4.5 *Le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
H^1(k, \widetilde{N}_{G'_0}(T'_0)) & \to & H^1(k, A(R_0)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^1(k, N_{G'_0}(T'_0)) & \to & H^1(k, W'_0).
\end{array}$$

est carthésien. □

Par ailleurs, on a la suite exacte

$$1 \to N_{G_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0)}(T_0) \to \widetilde{N}_{G'_0}(T'_0) \to T'_0/T_0 \to 1,$$

et comme le tore T'_0/T_0 est déployé, le théorème 90 de Hilbert montre que la flèche $H^1(k, N_{G_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0)}(T_0)) \to H^1(k, \widetilde{N}_{G'_0}(T'_0))$ est surjective. Cela s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^1(k, N_{G_0 \rtimes \mathrm{Out}(G_0)}(T_0)) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & H^1(k, A(R_0)) \arrow[d, equal] \\
H^1(k, \widetilde{N}_{G'_0}(T'_0)) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & H^1(k, A(R_0)) \arrow[d] \\
H^1(k, N_{G'_0}(T'_0)) \arrow[r, two heads] & H^1(k, W'_0).
\end{tikzcd}$$

L'hypothèse *iii*) (i.e. la surjectivité de l'horizntale inférieure) jointe au sous-lemme montre que la flèche horizontale médiane est surjective; on conclut que la flèche horizontale supérieure l'est aussi. $\square$

5 Étude cas par cas

En suivant les tables des systèmes de racines [Bou], on va établir cas par cas le théorème 4.1, c'est-à-dire, suivant la proposition 3.2, la surjectivité de

$$\rho_* : H^1(k, N_{G_0}(T_0) \rtimes \mathrm{Out}(G_0)) \to H^1(k, A(R_0))$$

en distinguant les groupes classiques des groupes exceptionnels.

5.1 Les groupes classiques

Type A_n: En rang 1, le groupe $G_0 = PGL_2$ n'a pas d'automorphisme extérieur et $W_0 = A(R_0) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donc $H^1(k, A(R_0))$ décrit les extensions quadratiques séparables de k. Pour toute extension quadratique séparable L/k, le k-tore maximal $R_{L/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$ de PGL_2 est de type $[L]$, donc l'application type est surjective.

Si $n \geq 2$, on prend $G_0 = PGL_{n+1}$, alors $A(R_0) = S_{n+1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La suite exacte $1 \to T_0 \to N_0 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to S_{n+1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1$ est scindée en envoyant S_{n+1} sur la représentation régulière de S_n et par l'isomorphisme

$\mathrm{Aut}(G_0, B_0, T_0) = \mathrm{Out}(G_0)$. La remarque suivant le corollaire 3.4 montre que ρ_* est surjectif pour le type A_n.

Type B_n: Il n'y a pas d'automorphismes extérieurs. On prend $G_0 = SO(q_0) \subset GL_{2n+1} = G'_0$ où q_0 est la forme quadratique de dimension $2n+1$ définie par

$$q_0(X_1, Y_1, \cdots, X_n, Y_n, X_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i + X_{n+1}^2.$$

Le sous–tore T_0 de $(\mathbb{G}_m)^{2n+1}$ défini par les équations $\lambda_i \lambda_{2n+1-i} = 1$ (pour $i = 1, .., n$) est un tore déployé maximal de G_0 satisfaisant $Z_{SL_{2n+1}}(T_0) = (\mathbb{G})_m^{2n+1}$. Le lemme 4.4 s'applique et montre que ρ_{*,B_n} est surjectif.

Type C_n : On prend $G_0 = Sp_{2n} \subset GL_{2n}$, le groupe des automorphismes spéciaux préservant la forme antisymétrique standard

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(X_i X_{n+1-i} - X_{n+i} X_{2n+1-i} \Big).$$

Le sous–tore T_0 de $(\mathbb{G}_m)^{2n}$ défini par $\lambda_i \lambda_{2n+1-i} = 1$ (pour $i = 1, .., n$) est un tore déployé maximal de G satisfaisant $Z_{GL_{2n}}(T_0) = (\mathbb{G}_m)^{2n}$. Le même argument que précédemment s'applique, d'où $\rho_{,*C_n}$ est surjectif.

Type D_n $(n \geq 5)$: On peut prendre $G_0 = SO(q_0) \subset GL_{2n} = G'_0$ où q_0 est la forme quadratique de dimension $2n$ définie par

$$q_0(X_1, Y_1, \cdots, X_n, Y_n) = \sum_{i=1,..n} X_i Y_i.$$

On rappelle que $\mathrm{Aut}(G_0) = O(q_0)/\mu_2 \subset \mathrm{Int}(GL_{2n})$ et $\mathrm{Out}(G_0) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le sous–tore T_0 de $(\mathbb{G}_m)^{2n}$ défini par $\lambda_i \lambda_{2n+1-i} = 1$ (pour $i = 1, .., n$) est un tore déployé maximal de G satisfaisant $Z_{GL_{2n}}(T_0) = (\mathbb{G}_m)^{2n}$. De plus, le morphisme $G_0 = SO(q_0) \subset GL_{2n} = G'_0$ se prolonge en un morphisme $SO(q_0) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset GL_{2n}$. Le lemme 4.4 s'applique et montre que ρ_* est surjectif pour le type D_n.

5.2 Les groupes exceptionnels

Type E_6: La représentation usuelle $G_0 \to G'_0 = GL_{27} = G'_0$ est sans multiplicité (calcul avec le logiciel LIE communiqué par S. Garibaldi) et l'automorphisme extérieur de (G_0, T_0) est induit par un automorphisme de (G'_0, T'_0). Les conditions du lemme 4.4 sont satisfaites, ainsi ρ_* est surjectif pour le type E_6.

Type E_7 : Le groupe déployé de type E_7 admet un sous–groupe maximal H_0 de type $D_6 \times A_1$ contenant T_0. On a $\sharp W_{G_0}(T_0)^{(2)}/\sharp W_{H_0}(T_0)^{(2)} = 2^{10}/(2^9 \times 2) = 1$. Le lemme 4.3 s'applique et ρ_* est surjectif.

Type E_8 : Le groupe déployé de type E_8 admet un sous–groupe maximal H_0 de type D_8 contenant T_0. On a $\sharp W_{G_0}(T_0)^{(2)}/\sharp W_{H_0}(T_0)^{(2)} = 2^{14}/2^{14} = 1$. Le lemme 4.3 s'applique et ρ_* est surjectif.

Type F_4 : Le groupe déployé de type F_4 admet le sous-groupe maximal H_0 de type B_4 contenant T_0. On a $\sharp W_{G_0}(T_0)^{(2)}/\sharp W_{H_0}(T_0)^{(2)} = 2^7/2^7 = 1$. Le lemme 4.3 s'applique et ρ_* est surjectif.

Type D_4 : On note $G_0 = D_4$ le groupe déployé simplement connexe de type D_4 et $G'_0 = F_4$. On rappelle que l'on a un plongement $D_4 \rtimes S_3 \subset F_4$. Le lemme 4.4 s'applique et ρ_* est surjectif pour D_4.

Ceci achève la démonstration du théorème 4.1.

Références

[BK] M. Borovoi et B. Kunyavskiĭ, *Birational arithmetical invariants of linear algebraic groups on 2–dimensional geometric fields*, prépublication (2002).

[Bou] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie, Ch. IV, V et VI*, Masson (1981).

[Se] J.–P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Math. **5**, 5-ième édition (1994), Springer–Verlag.

[St] R. Steinberg, *Regular elements of semisimple algebraic groups*, Pub. Math. IHES **25** (1965), 281–312.

[SGA3] *Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S., 1963-1964, schémas en groupes, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck*, Lecture Notes in Math. **151-153**, Springer (1970).

[T] J. Tits, *Normalisateurs de tores I: Groupes de Coxeter étendus*, J. of Algebra **4** (1966), 96–116.

[V] V.E Voskresenskiĭ, *Algebraic groups and their birational invariants*, Trans. of Math. of Monographs, vol **179** (1998), AMS.

Philippe Gille, UMR 8628 du C.N.R.S., Mathématiques, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, F-91405 Orsay, France. Courriel : gille@math.u-psud.fr.