Zéro-cycles sur les surfaces sur un corps p-adique : Quelques résultats obtenus au moyen de la K-théorie algébrique

(Notes préparées pour la conférence de Sestri Levante)

J.-L. Colliot-Thélène

On s'intéresse ici principalement au cas des surfaces, mais certains résultats valent pour les cycles de codimension 2 sur une variété de dimension quelconque, ou pour les cycles de dimension zéro sur une variété de dimension quelconque.

L'énoncé suivant (CT/Sansuc/Soulé) est une conséquence directe du théorème de Merkur'ev et Suslin et de la méthode de Bloch.

Théorème 1 *Soit k un corps local de caractéristique zéro, soit $p > 0$ la caractéristique résiduelle. Soit X/k une k-variété lisse.*

(i) Pour tout entier $n > 0$, le groupe ${}_nCH^2(X)$ est un groupe fini.

ii) Pour tout l premier, le groupe de torsion l-primaire $CH^2(X)\{l\}$ est un groupe de cotype fini (somme d'un groupe fini l-primaire et d'un groupe $(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^N$).

Démonstration Pour $n > 0$ premier à la caractéristique de k, le groupe ${}_nCH^2(X)$ est un sous-quotient de $H^3_{\text{ét}}(X, \mu_n^{\otimes 2})$. La finitude de ce groupe pour un corps local est bien connue. Elle implique que le groupe $H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ est un groupe de cotype fini, et donc aussi tout sous-quotient.

Remarque Pour n et l premiers à p, la même démonstration donne les mêmes résultats pour k un corps local supérieur à la Kato/Parshin, de caractéristique résiduelle p. Il suffit d'observer que pour k local supérieur, on a la propriété : Si F est un module galoisien fini d'ordre premier à p, alors $H^n(k, F)$ est fini pour tout entier n.

Surfaces

Les énoncés (iii), (iv) et (v) du théorème suivant sont essentiellement dus à Saito et Sujatha (voir CTBordeaux).

Théorème 2 *Soit k un corps local (usuel), de caractéristique zéro et de caractéristique résiduelle $p > 0$. Soit X une k-surface projective lisse, géométriquement intègre.*

(i) Pour tout entier positif n, le groupe ${}_nA_0(X)$ est un groupe fini.

(ii) Pour tout l premier, le groupe de torsion l-primaire $A_0(X)\{l\}$ est un groupe de cotype fini (somme d'un groupe fini l-primaire et d'un groupe $(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^N$).

(iii) Pour l premier, $l \neq p$, le groupe $A_0(X)$ est somme de son sous-groupe l-divisible maximal et d'un groupe fini l-primaire.

(iv) Pour $n > 0$ premier à p, le groupe $A_0(X)/n$ est fini.

(v) Pour $n > 0$ premier à p, le groupe $H^3_{nr}(k(X), \mu_n^{\otimes 2})$ est fini.

Démonstration Pour X une surface projective lisse géométriquement connexe, on a l'égalité $CH_0(X) = CH^2(X)$, et le groupe $A_0(X)$ est le noyau de l'application degré $CH_0(X) \to \mathbf{Z}$. Les énoncés sont des cas particuliers du théorème ci-dessus. Pour la torsion première à p, ils valent aussi sur un corps local supérieur. Ceci établit (i) et (ii).

Pour X une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps p-adique usuel, pour tout entier $n > 0$, l'application $A_0(X)\{l\}/l^n \to A_0(X)/l^n$ est une bijection. Que ce soit une injection est claire, pour la surjection on se ramène par le théorème de Bertini au cas où X est une courbe projective lisse géométriquement intègre, et l'assertion résulte alors de la structure du groupe des points d'une variété abélienne sur un corps p-adique.

Si X est de plus une surface, alors d'après (ii) on peut écrire $A_0(X)\{l\} = (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^N \oplus F_l$ avec F_l un groupe abélien fini annulé par une puissance l^t de l, et $N \geq 0$. L'application composée $F_l \to A_0(X) \to A_0(X)/l^t$ est alors un isomorphisme. On en déduit que dans la suite exacte

$$0 \to D_l \to A_0(X) \to A_0(X)/l^t \to 0$$

définissant D_l, la projection $A_0(X) \to A_0(X)/l^t$ est scindée, d'où $A_0(X) \simeq D_l \oplus F_l$, avec $D_l/l = 0$. Le groupe D_l est donc le sous-groupe l-divisible maximal de $A_0(X)$. Ceci établit (iii), et l'énoncé (iv) suit.

L'énoncé de finitude de (v) résulte de la suite exacte (valable pour toute variété intègre lisse sur un corps k)

$$H^3_{\text{ét}}(X, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^3_{nr}(k(X), \mu_n^{\otimes 2}) \to CH^2(X)/n \to H^4_{\text{ét}}(X, \mu_n^{\otimes 2})$$

qui montre que, sur un corps local k, la finitude $CH^2(X)/n$ équivaut à celle de $H^3_{nr}(k(X), \mu_n^{\otimes 2})$.

Remarque On pensera à l'exemple du produit d'une courbe elliptique E et de la droite projective, sur le corps $\mathbf{Q}_p$. Dans ce cas, le groupe $A_0(X)$ s'identifie à $E(\mathbf{Q}_p)$, qui est une extension d'un groupe fini par un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}_p$. On ne peut donc s'attendre à ce que le groupe $A_0(X)$ soit la somme d'un groupe divisible et d'un groupe fini. Les énoncés (iv) et (v) valent peut-être (pour une surface) pour tout entier $n > 0$.

Surfaces avec bonne réduction

Soit O l'anneau des entiers d'un corps p-adique k, de corps résiduel $\mathbf{F}$. Soit $\mathcal{X}$ un O-schéma intègre, projectif et lisse, de fibre générique X/k géométriquement intègre , et soit $Y/\mathbf{F}$ la fibre spéciale.

Proposition 3 *Pour l premier, $l \neq p$, l'application de réduction $A_0(X)\{l\} \to A_0(Y)\{l\}$ est surjective.*

Démonstration On dispose d'une application de spécialisation

$$A_0(X) \to A_0(Y)$$

qui est surjective (lemme de Hensel). Soit $m > 0$. On a vu dans la démonstration du point (iii) du théorème ci-dessus que l'application $A_0(X)\{l\}/l^m \to A_0(X)/l^m$ est surjective. L'application composée $A_0(X)\{l\}/l^m \to A_0(X)/l^m \to A_0(Y)/l^m$ est donc surjective. Le groupe $A_0(Y)$ est fini (théorème de Kato et Saito). Prenant alors m tel que l^m annule la partie l-primaire de $A_0(Y)$, on obtient l'énoncé.

Pour $\mathcal{X}/O$ comme ci-dessus, on a la suite exacte de localisation

$$H^1(X, \mathcal{K}_2) \to Pic(Y) \to CH^2(\mathcal{X}) \to CH^2(X) \to 0.$$

Notons $\delta : H^1(X, \mathcal{K}_2) \to Pic(Y)$ et Σ le conoyau de δ, qui est aussi le noyau de la restriction $CH^2(\mathcal{X}) \to CH^2(X)$.

Le groupe $Pic(Y)$ est un groupe de type fini (théorème de Néron-Severi et finitude du groupe des points rationnels d'une variété abélienne sur un corps fini). Le théorème de Mordell-Weil assure encore le même résultat lorsque k est un corps de type fini sur le corps premier. Les hypothèses suivantes sont donc équivalentes, on notera (H) l'une quelconque d'entre elles.

(i) Le groupe Σ est fini.

(ii) Le groupe Σ est de torsion.

(iii) $\Sigma \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} = 0$.

L'énoncé suivant regroupe des résultats de Raskind, Raskind et l'auteur, Spiess.

Théorème 4 *Avec les notations ci-dessus, supposons satisfaite l'hypothèse (H). Alors*
(i) Le groupe Σ *est un* p*-groupe fini.*
(ii) L'application de spécialisation $CH_0(X) \to CH_0(Y)$ *induit un isomorphisme sur les sous-groupes de torsion première à* p*.*
(iii) Le groupe $A_0(X)$ *est la somme directe d'un groupe fini d'ordre premier à* p *et d'un groupe uniquement divisible par tout entier* n *premier à* p*. Pour tout* l *premier distinct de* p*, le groupe* D_l *ci-dessus est uniquement* l*-divisible.*
(iv) Pour $n > 0$ *premier à* p*, l'application cycle*

$$CH^2(X)/n \to H^4_{\text{ét}}(X, \mu_n^{\otimes 2})$$

est injective.
(v) L'accouplement

$$A_0(X) \times Br(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

a son noyau formé d'éléments divisibles par tout entier $n > 0$ *premier à* p*.*
(vi) Pour l *premier,* $l \neq p$*, on a un isomorphisme entre le groupe de cohomologie non ramifié* $H^3_{nr}(k(X), \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ *et le groupe* $Br(Y)\{l\}$*. Ces groupes sont finis si la conjecture de Tate est vraie pour la surface* Y*.*

Démonstration La méthode de Bloch, étendue au cas d'un schéma propre et lisse au-dessus d'un anneau de valuation discrète, grâce à un résultat de Gillet (non publié, une démonstration alternative est donnée dans [CT/Rask91]), donne le diagramme commutatif suivant de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & H^1(\mathcal{X}, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l & \to & H^1(\mathcal{X}, \mathcal{H}^2(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))) & \to & CH^2(\mathcal{X})\{l\} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & H^1(Y, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l & \to & H^1(Y, \mathcal{H}^2(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))) & \to & CH^2(Y)\{l\} & \to & 0
\end{array}$$

et des applications injectives $H^1(\mathcal{X}, \mathcal{H}^2(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))) \hookrightarrow H^3_{\text{ét}}(\mathcal{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ d'une part, $H^1(Y, \mathcal{H}^2(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))) \hookrightarrow H^3_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ d'autre part.

Le groupe $H^3_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ est fini (sous la seule hypothèse que Y est une variété propre et lisse sur un corps fini de caractéristique différente de l). Le théorème de changement de base propre assure que la flèche $H^3_{\text{ét}}(\mathcal{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) \to H^3_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ est un isomorphisme. Ainsi les deux groupes sont finis. Mais alors toute flèche d'un groupe divisible vers un tel groupe est nulle. Le diagramme ci-dessus implique donc $H^1(Y, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l = 0$ et $H^1(\mathcal{X}, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l = 0$, et on a des isomorphismes compatibles

$$\begin{array}{ccc}
H^1(\mathcal{X}, \mathcal{H}^2(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))) & \simeq & CH^2(\mathcal{X})\{l\} \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^1(Y, \mathcal{H}^2(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))) & \simeq & CH^2(Y)\{l\}
\end{array}$$

soit encore

$$\begin{array}{ccc} NH^3_{\text{ét}}(\mathcal{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) & \simeq & CH^2(\mathcal{X})\{l\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ NH^3_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) & \simeq & CH^2(Y)\{l\}. \end{array}$$

L'hypothèse que Σ est de torsion implique que l'on a une suite exacte

$$0 \to \Sigma\{l\} \to CH^2(\mathcal{X})\{l\} \to CH^2(X)\{l\} \to 0.$$

La flèche de spécialisation $CH^2(\mathcal{X}) \to CH^2(Y)$ passe au quotient par l'application $CH^2(\mathcal{X}) \to CH^2(X)$ (Fulton, Intersection theory). On conclut que $\Sigma\{l\} = 0$, que l'application de restriction $CH^2(\mathcal{X})\{l\} \to CH^2(X)\{l\}$ est un isomorphisme et que la flèche de spécialisation $CH^2(X) \to CH^2(Y)$ induit une application injective $CH^2(X)\{l\} \hookrightarrow CH^2(Y)\{l\}$.

Jusqu'à ce point, tout ce qui a été dit s'applique à un O-schéma $\mathcal{X}$ propre et lisse, à fibres intègres de dimension quelconque. Pour un tel schéma, on sait par ailleurs (lemme de Hensel) que l'application de spécialisation $CH_0(X) \to CH_0(Y)$ (induite par $CH_1(\mathcal{X}) \to CH_0(X)$) est surjective.

Utilisons maintenant le fait que la dimension relative est 2.

L'application de spécialisation $A_0(X) \to A_0(Y)$ est surjective, et le groupe $A_0(Y)$ est fini (théorie du corps de classes). On sait (théorème ci-dessus) que le groupe $A_0(X)$ est somme de son sous-groupe l-divisible maximal D_l et d'un groupe fini F_l. Pour tout entier $n > 0$, l'application composée $D_l \hookrightarrow A_0(X) \to A_0(Y) \to A_0(Y)/l^n$ est nulle, donc l'application composée $F_l \hookrightarrow A_0(X) \to A_0(Y)/l^n$ est surjective, et a fortiori l'application composée $A_0(X)\{l\} \to A_0(Y)/l^n$. Mais pour n assez grand, l'application naturelle $A_0(Y)\{l\} \to A_0(Y)/l^n$ est un isomorphisme (rappelons que $A_0(Y)$ est un groupe fini). Ainsi l'application de spécialisation $A_0(X)\{l\} \to A_0(Y)\{l\}$ est un isomorphisme. (Pour une démonstration de la surjectivité pour la torsion, sous l'hypothèse $H^2(Y, O_Y) = 0$, voir CT/R91, Thm. 6.3). Le groupe $A_0(Y)\{l\}$ est un sous-groupe de $H^3_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ (il est même égal à ce sous-groupe; ceci utilise le fait que Y est une surface, et sera appliqué ci-dessous). Il est donc nul pour presque tout premier l. On conclut que pour la surface X, le groupe F_l est nul pour presque tout l. La démonstration montre plus. Elle établit que le groupe $A_0(X)$ est somme d'un groupe fini d'ordre premier à p et d'un groupe D uniquement divisible par les premiers $l \neq p$.

Nous avons maintenant établi les points (i) à (iii) du théorème.

Comme rappelé ci-dessus, la théorie du corps de classes non ramifié pour la surface Y sur le corps fini $\mathbf{F}$ assure que l'inclusion $NH^3_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) \subset H^3_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ est un isomorphisme. Du diagramme

$$\begin{array}{ccc} NH^3_{\text{ét}}(\mathcal{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) & \simeq & CH^2(\mathcal{X})\{l\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ NH^3_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) & \simeq & CH^2(Y)\{l\} \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est induite par l'isomorphisme (changement de base propre) $H^3_{\text{ét}}(\mathcal{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) \simeq H^3_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$, et où la flèche verticale de droite est, comme on a établi, un isomorphisme, on conclut que l'inclusion $NH^3_{\text{ét}}(\mathcal{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) \subset H^3_{\text{ét}}(\mathcal{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ est un isomorphisme, en d'autres termes la flèche $H^3_{\text{ét}}(\mathcal{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) \to H^0(\mathcal{X}, \mathcal{H}^3(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)))$ est nulle.

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} CH^2(\mathcal{X})\otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l & \to & CH^2(X)\otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l & \to & \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^4_{\text{ét}}(\mathcal{X},\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) & \to & H^4_{\text{ét}}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) & \to & H^4_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)). \end{array}$$

Dans ce diagramme les deux flèches verticales de gauche sont obtenues par passage à la limite inductive à partir des applications “classe de cycle” $CH^2(X)/l^n \to H^4(X,\mu_{l^n}^{\otimes 2})$ et $CH^2(\mathcal{X})/l^n \to H^4_{\text{ét}}(\mathcal{X},\mu_{l^n}^{\otimes 2})$. La flèche horizontale de droite est induite par l'application degré sur les zéro-cycles. De l'hypothèse (H) suit que la flèche $CH^2(\mathcal{X})\otimes\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \to CH^2(X)\otimes\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$ est un isomorphisme, et de $A_0(X)\otimes\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l = \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$ (qui résulte du théorème général sur les surfaces initial, et se réduit par Bertini au cas évident des courbes), on conclut que la flèche $CH^2(X)\otimes\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \to \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$ est un isomorphisme. Plus précisément, comme $Y/\mathbf{F}$ est géométriquement intègre, il existe sur Y un zéro-cycle de degré 1, et on peut relever un tel zéro-cycle en un zéro-cycle de degré 1 sur X/k. La flèche $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \to H^4_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ dans le diagramme est alors un isomorphisme. On en conclut que l'application classe de cycle $CH^2(\mathcal{X})\otimes\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \to H^4_{\text{ét}}(\mathcal{X},\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ est injective.

La méthode de Bloch, dans la variante résultant du théorème de Gillet, donne naissance à une suite exacte (on passe à la limite inductive sur les suites analogues à coefficients $\mathbf{Z}/l^n$)

$$H^3_{\text{ét}}(\mathcal{X},\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) \to H^0(\mathcal{X},\mathcal{H}^3(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))) \to CH^2(\mathcal{X})\otimes\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \to H^4_{\text{ét}}(\mathcal{X},\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)).$$

Combinant les deux résultats établis ci-dessus, on conclut $H^0(\mathcal{X},\mathcal{H}^3(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)))=0$. Le théorème de Merkur'ev et Suslin assure alors qu'à niveau fini, on a aussi $H^0(\mathcal{X},\mathcal{H}^3(\mu_{l^n}^{\otimes 2}))=0$.

La suite exacte de la théorie de Bloch, dans la variante Gillet, est, à niveau fini :

$$0 \to H^1(\mathcal{X},\mathcal{H}^2(\mu_{l^n}^{\otimes 2})) \to H^3_{\text{ét}}(\mathcal{X},\mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to H^0(\mathcal{X},\mathcal{H}^3(\mu_{l^n}^{\otimes 2})) \to CH^2(\mathcal{X})/l^n \to H^4_{\text{ét}}(\mathcal{X},\mu_{l^n}^{\otimes 2}).$$

Considérons alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} CH^2(\mathcal{X})/l^n & \to & H^4_{\text{ét}}(\mathcal{X},\mu_{l^n}^{\otimes 2}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ CH^2(X)/l^n & \to & H^4_{\text{ét}}(X,\mu_{l^n}^{\otimes 2}). \end{array}$$

D'après ce qui précède, la flèche horizontale supérieure est injective. La flèche verticale de gauche est surjective, l'application étant induite par la restriction, surjective, $CH^2(\mathcal{X}) \to CH^2(X)$ (les cycles s'étendent).

La flèche verticale de droite est injective. C'est un cas classique de la conjecture de Gersten, on utilise le théorème de pureté en cohomologie étale et le fait que l'application résidu $H^3_{\text{ét}}(X,\mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to H^2_{\text{ét}}(Y,\mu_{l^n})$ est surjective (l'application de changement de base $H^2_{\text{ét}}(\mathcal{X},\mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to H^2_{\text{ét}}(Y,\mu_{l^n})$ est un isomorphisme, on considère le cup-produit d'un élément de $H^2_{\text{ét}}(\mathcal{X},\mu_{l^n})$ avec la classe d'une uniformisante de O, vue dans $H^1_{\text{ét}}(k,\mu_{l^n})$.

On en conclut que l'application cycle $CH^2(X)/l^n \to H^4_{\text{ét}}(X,\mu_{l^n}^{\otimes 2})$ est injective, ce qui est l'énoncé (iv).

L'énoncé (v) résulte de (iv) et du fait que sur la surface X projective, lisse et géométriquement intègre sur le corps p-adique k, pour tout entier $n>0$, l'accouplement de cup-produit

$$H^4_{\text{ét}}(X,\mu_n^{\otimes 2}) \times H^2_{\text{ét}}(X,\mu_n) \to H^6_{\text{ét}}(X,\mu_n^{\otimes 3}) = \mathbf{Z}/n$$

est une dualité parfaite (combinaison de la dualité de Poincaré au niveau $\overline{k}$ et de la dualité du corps de classes local), et que l'accouplement induit

$$CH_0(X)/n \times H^2_{\text{ét}}(X, \mu_n) \to \mathbf{Z}/n$$

induit un accouplement

$$CH_0(X)/n \times {}_nBr(X) \to \mathbf{Z}/n.$$

Les applications résidu définissent une flèche naturelle $H^0(X, \mathcal{H}^3(\mu_{l^n}^{\otimes 2})) \to H^0(Y, \mathcal{H}^2(\mu_{l^n}))$ de noyau le groupe $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{H}^3(\mu_{l^n}^{\otimes 2}))$. Par le théorème de pureté pour le groupe de Brauer de la surface lisse Y, le groupe $H^0(Y, \mathcal{H}^2(\mu_{l^n}))$ s'identifie à ${}_{l^n}Br(Y)$. On obtient ainsi une injection

$$H^3_{nr}(k(X), \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \hookrightarrow {}_{l^n}Br(Y).$$

Je renvoie à l'article de Spieß pour le fait que cette flèche est surjective.

Applications

Pour autant que l'on sache, l'hypothèse (H) pourrait toujours être valable. Mais elle semble très difficile à établir. Voici deux cas où elle a été établie.

a) Le cas où $H^2(Y, O_Y) = 0$ (et donc aussi $H^2(X, O_X) = 0$). C'est le cas le plus simple. Dans ce cas le conoyau de la flèche composée $Pic(X) \otimes k^* \to H^1(X, \mathcal{K}_2) \to Pic(Y)$ est nul, car la flèche de restriction $Pic(\mathcal{X}) \to Pic(Y)$ est surjective. Ce cas fut considéré par Raskind, Coombes, CT-Raskind.

b) Le cas où $\mathcal{X}$ est le produit fibré de deux courbes elliptiques avec bonne réduction (Spieß).

c) Le cas où X a bonne réduction et le rang du groupe de Néron-Severi gémétrique ne grandit pas par spécialisation (Raskind).

Dans le cas b) il faut, pour établir (H), trouver des éléments "indécomposables" dans $H^1(X, \mathcal{K}_2)$, i.e. d'autres éléments que que les évidents provenant de $Pic(X) \otimes k^*$. Spieß utilise certaines correspondances entre courbes elliptiques provenant de travaux de Frey et Kani.

Il y a dans cette direction une série de travaux importants, qui reposent souvent sur une arithmétique très fine des variétés considérées (par exemple des produits de courbes modulaires). Il y a eu des travaux de Flach, Mildenhall, Shuji Saito, Langer, Raskind, Otsubo, Kanetomo Sato. Citons par exemple le

Théorème (Otsubo) *Soit $X/\mathbf{Q}$ la surface quartique d'équation $x^4 + y^4 = z^4 + t^4$. Alors sur tout corps p-adique k avec $p \neq 2$, la torsion première à p de $CH_0(X)$ est un groupe fini et pour tout entier $n > 0$ premier à p, le groupe $CH_0(X)/n$ est fini.*

Mentionnons aussi ici une prépublication récente de Murre et Ramakrishnan sur le groupe de Chow de la surface produit de deux courbes elliptiques sur un corps p-adique.

Surfaces de genre géométrique nul

Dans le théorème suivant, qui regroupe des travaux de CT/Raskind, Salberger et Shuji Saito, on autorise X à avoir, dans une certaine mesure, mauvaise réduction.

Théorème 5 *Soit k un corps local de caractéristique zéro. Soit X/k une surface projective et lisse, géométriquement intègre sur un corps p-adique. Supposons $H^2(X, O_X) = 0$. Alors*

(i) Le groupe $A_0(X)_{tors}$ est fini.

(ii) Si la flèche naturelle $A_0(\overline{X}) \simeq Alb_X(\overline{k})$ est un isomorphisme (ce qui résulterait de $H^2(X, O_X) = 0$ suivant une conjecture de S. Bloch), alors le groupe $A_0(X)$ est extension d'un

sous-groupe ouvert de $Alb_X(k)$ par un groupe fini. En particulier, pour tout entier $n > 0$, le quotient $A_0(X)/n$ est fini, et $A_0(X)/l = 0$ pour presque tout premier l.

(iii) Si la variété d'Albanese a bonne réduction, l'accouplement $A_0(X)_{tors} \times Br(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est non dégénéré à gauche.

(iv) Sous l'ensemble des hypothèses ci-dessus, l'accouplement $A_0(X) \times Br(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est non dégénéré à gauche.

Démonstration Une méthode qui remonte à Bloch dans le cas des surfaces rationnelles, et qui a été beaucoup développée dans un article de Raskind et l'auteur (Math. Annalen 270 (1985)).

En faisant agir le groupe de Galois absolu G de k sur la résolution de Gersten du faisceau $\mathcal{K}_2$ sur $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$, on obtient une longue suite exacte dont une partie est :

$$\cdots \to H^1(G, K_2\overline{k}(X)/H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \to Ker[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})] \to H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \to \cdots$$

Le théorème de Hilbert 90 pour K_2, dans sa version cohomologie galoisienne telle que je l'ai établie (Invent. math., 1983) implique $H^1(G, K_2\overline{k}(X)) = 0$ (ceci vaut pour toute variété géométriquement intègre lisse X sur un corps de car. zéro, si cette variété possède un k-point, ou si k est un corps p-adique, ou si plus généralement (B. Kahn) la dimension cohomologique de k est au plus 2). le groupe $H^1(G, K_2\overline{k}(X)/H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$ s'identifie donc avec le noyau de l'application $H^2(G, H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \to H^2(G, K_2\overline{k}(X))$. Des travaux de Suslin sur la torsion du groupe K_2, on déduit que ce noyau s'identifie au noyau de l'application $H^2(G, H^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^2(G, H^1_{\text{ét}}(\overline{k}(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$. Salberger a montré que ce groupe est fini. Pour cela, il procède par réduction au cas des courbes, par un argument de type Lefschetz. Comme k est un corps p-adique, pour tout G-module fini M et tout entier $i > 0$, le groupe de cohomologie $H^i(G, M)$ est fini. Si $Y \subset X$ est une section hyperplane lisse, la flèche de restriction $H^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^0 \to H^1_{\text{ét}}(\overline{Y}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^0$, où l'exposant zéro désigne la partie divisible (d'indice fini dans chaque groupe considéré), admet une presque rétraction : il existe une flèche G-équivariante $H^1_{\text{ét}}(\overline{Y}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^0 \to H^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^0$ qui composée avec la flèche de restriction est la multiplication par un entier strictement positif : ceci résulte du théorème de complète réductibilité de Poincaré pour les variétés abéliennes (voir CT/R Invent. math. 1991). On se ramène ainsi au cas où X est une courbe, dans ce cas le résultat a été établi par Raskind en utilisant la théorie du corps de classes des courbes sur un corps local, due à S. Saito. On peut aussi procéder directement (voir les articles de Salberger et de K. Sato). En conclusion, pour toute variété projective et lisse sur un corps p-adique, le groupe $H^1(G, K_2\overline{k}(X)/H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$ est fini.

Considérons alors le groupe $H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$. Dans [CT/R85], en utilisant les travaux de Suslin sur la torsion dans K_2, nous avons, sous l'hypothèse $H^2(X, O_X) = 0$, étudié l'application naturelle $Pic(\overline{X}) \otimes \overline{k}^* \to H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$. Le noyau de cette application est un groupe uniquement divisible, et le conoyau est somme directe d'un groupe fini et d'un groupe uniquement divisible. L'hypothèse $H^2(X, O_X) = 0$ sert à assurer que le conoyau de l'application $Pic(\overline{X}) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(1) \to H^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ est fini et nul pour presque tout l (la démonstration de ce fait utilise la théorie de Hodge, et donc n'est valable qu'en caractéristique zéro). Le groupe $Pic(\overline{X})$ est extension d'un groupe de type fini (le groupe de Néron-Severi) par un groupe divisible, le groupe $Pic^0(\overline{X})$ des $\overline{k}$-points de la variété de Picard de X. Le groupe $Pic^0(\overline{X}) \otimes \overline{k}^*$ est uniquement divisible, car produit tensoriel de deux groupes divisibles. C'est alors un exercice simple de cohomologie galoisienne de montrer que le groupe $H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$ est fini.

Les arguments donnés jusqu'à ce point établissent la finitude de $Ker[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})]$ pour une variété X projective et lisse sur un corps p-adique, en dimension quelconque.

Considérons maintenant le cas où X est une surface. Soit Alb_X la variété d'Albanese de X. L'application naturelle $A_0(\overline{X}) \to Alb_X(\overline{k})$ est équivariante sous l'action du groupe de Galois

G, et on sait (théorème de Roitman) qu'elle induit un isomorphisme sur la torsion. Comme le groupe des points rationnels de torsion d'une variété abélienne sur un corps local est un groupe fini, on conclut que le groupe $A_0(\overline{X})^G$ est fini. On a vu ci-dessus que sous l'hypothèse $H^2(X, O_X) = 0$, le noyau de l'application de restriction $A_0(X) \to A_0(\overline{X})$ est fini. On conclut que le sous-groupe de torsion de $A_0(X)$ est fini, c'est à dire l'énoncé (i).

L'énoncé (ii) résulte simplement du précédent. L'application naturelle $A_0(X) \to Alb_X(k)$ a, sous l'hypothèse de (ii), un noyau de torsion, et par le (i), le groupe de torsion est fini. Pour voir l'image de $\theta : A_0(X) \to Alb_X(k)$, on considère une courbe section hyperplane géométriquement intègre et lisse $Y \subset X$. L'image de θ contient alors l'image de l'application composée $A_0(Y) \to Alb_Y(k) \to Alb_X(k)$, elle contient donc un sous-groupe ouvert (= d'indice fini) de $Alb_X(k)$, c'est donc un sous-groupe ouvert (= d'indice fini) de $Alb_X(k)$. La structure du groupe $Alb_X(k)$ donne alors les autres assertions de l'énoncé (ii). (On observera que pour $n > 0$ premier à p, la finitude de $A_0(X)/n$ est connue (voir plus haut) pour toute surface projective et lisse sur un corps p-adique.

Je ne donnerai pas ici la démonstration des points (iii) et (iv) (dus à S. Saito), renvoyant à l'article de Saito ou à mes notes du CIME. Indiquons simplement que la démonstration de Saito utilise un théorème général, dont l'énoncé est reproduit ci-dessous.

Remarque Le théorème de Salberger, à savoir le fait que sur un corps local, le noyau de $H^2(G, H^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^2(G, H^1_{\text{ét}}(\overline{k}(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ est un groupe fini, est établi par lui de manière différente dans son article. Ce théorème admet une généralisation, considérée en particulier par Kanetomo Sato (DMJ 104 (2000)) : ce dernier considère l'application composée

$$H^2(G, H^{n-1}_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n)) \to H^{n+1}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n)) \to H^{n+1}_{\text{ét}}(k(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n))$$

pour $n \geq 2$, et il montre qu'elle a un noyau fini. On a une application naturelle

$$H^2(G, H^{n-1}_{\text{ét}}(\overline{k}(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n)) \to H^{n+1}_{\text{ét}}(k(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n)),$$

le résultat de K. Sato est a priori, même pour $n = 2$, plus fort que le résultat évoqué ci-dessus. La démonstration de K. Sato utilise en un point une réduction du type Lefschetz comme le fait celle de Salberger, mais elle requiert des outils élaborés (théorème d'altération de de Jong, travail de Rapoport-Zink, techniques p-adiques fines ...).

Remarque Mis à part le cas de bonne réduction sous l'hypothèse forte que le rang du groupe de Néron-Severi géométrique ne change pas par spécialisation (Raskind), la méthode ne semble rien donner lorsque $H^2(X, O_X) \neq 0$, par exemple pour une surface $K3$. Dans ce cas le groupe $A_0(X)_{tors}$ s'injecte dans $H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$, groupe qui est un quotient de $H^1(G, H^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$. Pourrait-on dire quelque chose dans le cas de bonne réduction, en admettant la conjecture de Tate pour la surface obtenue par réduction ?

Voici le théorème général de S. Saito qui permet d'établir l'énoncé (iii) du théorème ci-dessus.

Théorème 6 *Soit X une variété intègre, lisse sur un corps k de caractéristique zéro. Faisons l'hypothèse*

(H_1) Le groupe $\Theta = Coker[H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))]$ est d'exposant fini, annulé par l'entier $N > 0$.

Alors le groupe $CH^2(X)_{tors}$ est d'exposant fini, annulé par N, et pour tout entier $n > 0$ multiple de N l'application $CH^2(X)_{tors} \to CH^2(X)/n \to H^4_{\text{ét}}(X, \mu_n^{\otimes 2})$ (composée de l'application naturelle et de l'application cycle) est injective.

Remarque Dans le (iii) du théorème 5, l'hypothèse de bonne réduction pour la variété d'Albanese ne peut être supprimée, comme le montre un exemple de Parimala et Suresh (Inventiones math. 122 (1995) 83-117). Leur exemple fournit donc un exemple où l'image de $H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)$ dans $H^3_{\text{ét}}(k(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)$ n'est pas finie. (C'est la partie $H^2(k, H^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ de $H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ qui se comporte mal.)

Cependant Kanetomo Sato (Crelle 501 (1998) 221-235) donne, pour une surface X avec $H^2(X, O_X) = 0$ et avec réduction semi-stable stricte $Y/\mathbf{F}$ une condition suffisante pour la non dégénérescence à gauche dans le (iii) du théorème ci-dessus, sur la partie l-primaire ($l \neq p$) : il suffit que toutes les composantes de Y (qui sont lisses par hypothèse) soient géométriquement intègres et que le groupe $H^2_{\text{ét}}(\overline{Y}, \mathbf{Z}_l)$ soit sans torsion. Il donne aussi une condition suffisante pour la partie p-primaire.

Les produits de courbes elliptiques (qui, sauf pour une seule courbe, ne satisfont pas $H^2(X, O_X) = 0$) peuvent être attaquées par des techniques de Bloch, Somekawa, B. Kahn. Ces techniques ont permis d'établir le théorème suivant :

Théorème 7 (Raskind/Spieß) *Soit k un corps local, $X_i, i = 1, \ldots, d$ des courbes projectives, lisses, géométriquement connexes, possédant un k-point. Soit X leur produit. Soit J_i la jacobienne de X_i et $J = J_1 \times \ldots J_d$ leur produit, qui est la variété d'Albanese de X. Supposons que chaque J_i a bonne réduction ordinaire. Alors*

(i) Le noyau de l'application d'Albanese $A_0(X) \to J(k)$ est la somme d'un groupe fini et d'un groupe divisible.

(ii) Pour tout entier $n > 0$, le groupe $CH_0(X)/n$ est fini.

Raskind et Spiess établissent leur résultat sous une hypothèse plus générale sur les J_i : un mélange de bonne réduction ordinaire et de réduction multiplicative scindée (exemple pour ce dernier cas : une courbe de Tate).

Accouplement des zéro-cycles avec le groupe de Brauer

L'accouplement $A_0(X) \times Br(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ permet parfois de détecter des classes non triviales : on contrôle le noyau à droite de cet accouplement.

Théorème 8 (CT/Saito) *Soit $\mathcal{X}/O$ un schéma intègre régulier, propre et plat au-dessus de l'anneau des entiers O d'un corps p-adique k. Soit X/k sa fibre générique, supposée géométriquement connexe. Soit l premier, $l \neq p$. Alors la partie l-primaire de $Br(X)/Br(\mathcal{X}) + Br(k)$ est un groupe abélien fini, dont le dual est un quotient du groupe $A_0(X)$ des classes de zéro-cycles de degré zéro.*

La démonstration de ce théorème n'emploie pas la K-théorie algébrique. Elle utilise un théorème de pureté pour le groupe de Brauer de $\mathcal{X}$, dû à O. Gabber, et dont la démonstration est maintenant disponible (article de Fujiwara).

Dans la note, on se demande si la partie l-primaire de $Br(X)/Br(\mathcal{X}) + Br(k)$ est nulle pour presque tout l. Dans le cas lisse, ceci résulte des conjectures de Weil. Via de Jong, peut-on attraper les autres cas ?

Exemple Soit p premier, $p \neq 3$. Soit $X/\mathbf{Q}_p$ la surface cubique d'équation $x^3 + y^3 + z^3 + pt^3 = 0$. En utilisant le théorème, on montre que $A_0(X) = (\mathbf{Z}/3)^2$ si $p \equiv 1 \ mod\ 3$, resp. $A_0(X) = (\mathbf{Z}/3)$ si $p \equiv 2 \ mod\ 3$ Cet exemple n'est pas couvert par la thèse de Dalawat, car la surface n'est pas déployée par une extension non ramifiée.

Questions ouvertes pour les variétés projectives et lisses sur un corps local

Questions sur $CH^2(X)$

Soit k un corps p-adique usuel (car. zéro).

Le groupe $CH^2(X)_{tors}$ peut-il être infini ? Pour l premier, le groupe de torsion l-primaire $CH^2(X)_{tors}\{l\}$ peut-il être infini ? Questions ouvertes en toute dimension $d \geq 2$. La dernière question équivaut à demander si le groupe $CH^2(X)_{tors}\{l\}$ est d'exposant fini.

Questions sur $CH_0(X)$ et $A_0(X)$

Pour X/k projective et lisse de dimension au moins 3, et $n > 0$, le groupe de n-torsion ${}_nA_0(X)$ est-il fini ?

Question ouverte déjà pour X une hypersurface cubique dans $\mathbf{P}^4_k$, et pour X une variété de dimension 3 fibrée en coniques sur le plan projectif.

Le groupe $A_0(X)_{tors}$ peut-il être infini ? La présence d'un $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$ dans $A_0(X)$ est-elle possible ?

Question ouverte en toute dimension $d \geq 2$.

Le groupe $A_0(X)$ est-il l-divisible pour presque tout l premier ?

Question ouverte en toute dimension $d \geq 2$.

Le sous-groupe divisible maximal de $A_0(X)$ est-il uniquement divisible ?

Question ouverte en toute dimension $d \geq 2$.

Dans le cas de bonne réduction, que peut-on dire du noyau de l'application (surjective) de spécialisation $CH_0(X) \to CH_0(Y)$? Cette flèche induit-elle un isomorphisme sur la torsion première à p ? Pour la p-torsion, ne vaut sans doute pas.

Le quotient du groupe $A_0(X)$ par son sous-groupe divisible maximal est-il isomorphe, à groupes finis près, à un groupe $\mathbf{Z}_p^n$?

Supposons $H^1(X, O_X) = 0$. Le groupe $A_0(X)$ est-il alors la somme d'un groupe fini et d'un groupe divisible ? D'un groupe fini et d'un groupe uniquement divisible (i.e. un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel) ?

Soit $k \subset \mathbf{Q}_p$ la clotûre algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{Q}_p$. Soit X une k-variété projective et lisse. La flèche naturelle $A_0(X) \to A_0(X \times_k \mathbf{Q}_p)$ est injective (pour le voir, utiliser le fait que la k-algèbre $\mathbf{Q}_p$ est union de k-algèbres de type fini, lisses et possédant automatiquement des k-points.) Le conoyau de cette application est-il uniquement divisible, i.e. un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel ?

Il y a dans cette direction des résultats annoncés il y a quelques années (théorèmes de rigidité à la Suslin, exposés de Jannsen) : invariance de ${}_nCH^i(X)$ et de $CH^i(X)/n$ pour X/k lisse et $n > 0$, par passage de k à $\mathbf{Q}_p$.

Bibliographie

J.-L. Colliot-Thélène, Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique, *Arithmetic Algebraic Geometry* (CIME, Trento, 1991) J.-L. Colliot-Thélène, K. Kato, P. Vojta, Springer L.N.M. **1553** (1993) p. 1-49.

J.-L. Colliot-Thélène, L'arithmétique des zéro-cycles (exposé aux Journées arithmétiques de Bordeaux, septembre 93), Journal de théorie des nombres de Bordeaux **7** (1995) 51-73.

J.-L. Colliot-Thélène, Un théorème de finitude pour le groupe de Chow des zéro-cycles d'un groupe algébrique linéaire sur un corps p-adique (2004), à paraître dans Invent. math.

J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind, K_2-cohomology and the second Chow group, Math. Ann. **270** (1985), no. 2, 165–199.

J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind, Groupe de Chow de codimension deux des variétés définies sur un corps de nombres : un théorème de finitude pour la torsion, Invent. math. **105** (1991) 221-245.

J.-L. Colliot-Thélène et A.N. Skorobogatov, Groupes de Chow des 0-cycles des fibrés en quadriques, Journal of K-theory **7** (1993) 477-500.

J.-L. Colliot-Thélène et Shuji Saito, Zéro-cycles sur les variétés p-adiques et groupe de Brauer, International Mathematical Research Notices **4** (1996) 151-160.

K. Fujiwara (Kazuhiro Fujiwara), A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber), *Algebraic geometry 2000*, Azumino (Hotaka), 153–183, Adv. Stud. Pure Math. **36**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.

A. Langer et W. Raskind, 0-cycles on the self-product of a CM elliptic curve over $\mathbf{Q}$, J. für die reine und angew. Math. **516** (1999), 1–26.

A. Langer et S. Saito, Torsion zero-cycles on the selfproduct of a modular elliptic curve, Duke Math. J. **85** (1996), 315–357.

J. Murre et D. Ramakrishnan, Galois symbols on the square of an elliptic curve, prépublication 2004.

N. Otsubo (Noriyuki Otsubo), Selmer groups and zero-cycles on the Fermat quartic surface, J. reine angew. Math. **525** (2000), 113–146.

R. Parimala et V. Suresh, Zero-cycles on quadric fibrations: finiteness theorems and the cycle map, Invent. math. **122** (1995) 83-117.

R. Parimala et V. Suresh, Isotropy of quadratic forms over function fields of p-adic curves, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **88** (1998), 129–150 (1999).

W. Raskind, Torsion algebraic cycles on varieties over local fields. Algebraic K-theory: connections with geometry and topology (Lake Louise, AB, 1987), 343–388, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **279**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.

W. Raskind et M. Spiess, Milnor K-groups and zero-cycles on products of curves over p-adic fields, Compositio Math. **121** (2000), no. 1, 1–33.

P. Salberger, Torsion cycles of codimension two and l-adic realizations of motivic cohomology, in : *Séminaire de Théorie des Nombres*, Paris, 1991–1992, S. David (ed.), Progress Math. **116**, Birkhäuser, 1993, pp. 247–277.

S. Saito (Shuji Saito), On the cycle map for torsion algebraic cycles of codimension two, Invent. Math. **106** (1991), no. 3, 443–460.

K. Sato (Kanetomo Sato), Injectivity of the torsion cycle map of codimension two of varieties over p-adic fields with semi-stable reduction, J. reine angew. Math. **501** (1998), 221–235.

K. Sato et S. Saito, Cycle class maps for arithmetic schemes, prépublication, mai 2004.

M. Spieß, On indecomposable elements of K_1 of a product of elliptic curves, K-Theory **17** (1999), no. 4, 363–383.