Points rationnels sur les espaces homogènes et leurs compactifications

Mathieu Florence

Résumé

Soit k un corps parfait et G un groupe algébrique défini sur k. Soit X un G-espace homogène. Nous démontrons que, s'il existe une k-variété birationnelle à X et possédant un point k-rationnel lisse, alors il en est déjà de même de X (théorème 5.6)[1].

1 Introduction

Nous démontrons dans cette article le résultat suivant. Soit k un corps parfait, et G un k-groupe algébrique. Soit X une k-variété quasi-projective, munie d'une structure d'espace homogène sous G. S'il existe une k-variété birationnelle à X, ayant un point k-rationnel lisse, alors X possède aussi un point k-rationnel. En particulier, X possède un point k-rationnel dès lors qu'une compactification lisse de X en possède un. Dans le cas où G est un tore, cela a déjà été mentionné par Colliot-Thélène et Sansuc ([CTS], page 419, 2.2.11), comme conséquence de l'absence d'obstruction élémentaire à l'existence d'un k-point.

Expliquons maintenant brièvement notre stratégie pour démontrer le cas général. Nous démontrons en réalité l'implication-a priori plus forte (lemme 5.5)- $X(k((t))) \neq \varnothing \implies X(k) \neq \varnothing$. Si l'on s'intéresse uniquement aux torseurs, le problème posé équivaut alors à l'injectivité de la flèche de restriction $H^1(k,G) \longrightarrow H^1(k((t)),G)$. Ceci motive, dans la section 4, l'introduction d'une notion simple d'acyclicité pour les extensions de corps parfaits. Plus précisément, une telle extension l/k est dite acyclique si, pour tout k-groupe G, la restriction $H^1(k,G) \longrightarrow H^1(l,G)$ est une bijection. Il est assez clair

[1]AMS Classification: 14L30, 20G15, 11R34.

que, si l/k est acyclique, alors l et k ont même groupe de Galois absolu (lemme 4.2). Nous ignorons si la réciproque est vraie, mais avons tout de même des résultats partiels dans ce sens (proposition 4.4). Le reste de la section 4 est voué à la preuve de la proposition 4.7, où l'on montre que, si l/k est une extension acyclique et X un espace homogène d'un k-groupe, alors $X(l) \neq \varnothing \Longrightarrow X(k) \neq \varnothing$. Notons que ce résultat, bien que peu surprenant, n'est en rien une conséquence triviale de la définition de l'acyclicité. En effet, il n'est déjà pas évident que, si $X(l) \neq \varnothing$, X possède un $\overline{k}$-point dont le stabilisateur admette une k-forme.

Dans la partie 5, nous montrons qu'une certaine extension de corps K_∞/k est acyclique (cf. section 2 pour une définition de K_∞; il suffit ici de savoir que c'est un corps qui contient $k((t))$), ce qui permet de conclure avec les résultats précédents.

Nous remercions Philippe Gille pour nous avoir soumis le présent problème, et pour nous avoir prodigué de précieux conseils. Nous remercions également Jean-Louis Colliot-Thélène pour son intérêt pour ce travail, ainsi que pour ses nombreuses remarques.

2 Notations et définitions

Dans toute la suite, la lettre k désigne un corps commutatif parfait, et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Pour éviter les ambiguïtés, on suppose que tous les surcorps de k considérés sont contenus dans une extension algébriquement close fixée de k. On note Γ_k le groupe de Galois de $\overline{k}/k$. D'après [Se1], chapitre 2, exercices 1 et 2 du paragraphe 4.3, on sait que la flèche $\Gamma_{k((t))} \longrightarrow \Gamma_k$ est scindée. Choisissons une fois pour toutes un tel scindage s_k. Appelons $K_\infty = \overline{k((t))}^{s_k(\Gamma_k)}$ le sous-corps de $\overline{k((t))}$ formé des points fixes sous l'action de $s_k(\Gamma_k)$. Le corps K_∞ est donc une extension algébrique parfaite de $k((t))$ telle que la flèche naturelle $\Gamma_{K_\infty} \longrightarrow \Gamma_k$ est un isomorphisme. Notons que, si k est de caractéristique nulle, on peut prendre pour K_∞ la réunion des corps $k((t^{1/n}))$, $n \geq 0$ (ce corps est bien défini dès lors que l'on choisit des racines n-ièmes de t de façon cohérente). Si X est un k-schéma, et l/k une extension de corps, nous notons X_l le l-schéma $X \times_k l$. On note simplement $\overline{X}$ le $\overline{k}$-schéma $X_{\overline{k}}$. On s'autorise cependant parfois à noter $\overline{X}$ un $\overline{k}$-schéma quelconque, qui n'est pas nécessairement obtenu par extension des scalaires à partir d'un k-schéma. Si Y est un $\overline{k}$-schéma et si $\sigma \in \Gamma_k$, on note ${}^\sigma Y$ le $\overline{k}$-schéma obtenu à partir de Y par changement de base par le morphisme $\mathrm{Spec}(\overline{k}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\overline{k})$

correspondant à $\sigma : \overline{k} \longrightarrow \overline{k}$. Nous appelons k-variété un schéma réduit de type fini sur k. Soient X et Y deux k-variétés. On dit que X et Y sont k-birationnelles s'il existe un ouvert dense U (resp. V) de X (resp. Y), et un isomorphisme $U \simeq V$. Par k-groupe, nous entendons un k-schéma en groupes de type fini et réduit (donc lisse puisque k est parfait). Soit G un k-groupe. On note G^0 la composante connexe de l'identité dans G, $\pi_0(G)$ le k-groupe fini G/G^0, et $\mathrm{Z}(G)$ le centre de G. On note $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de G, $\mathrm{Inn}(G) = G/\mathrm{Z}(G)$ le sous-groupe distingué formé des automorphismes intérieurs, et $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ le groupe des automorphismes extérieurs. Si G est linéaire, on note G^u le radical unipotent de G, et $G^{red} = G/G^u$.
Rappelons que, si G est un k-schéma en groupes de type fini, et H un k-sous-schéma en groupes de G, le quotient $H \backslash G$ est représentable dans la catégorie des k-schémas de type fini. De plus, toute partie finie de $H \backslash G$ est contenue dans un ouvert affine, ce qui légitime l'utilisation des techniques de descente galoisienne pour de tels quotients. On trouvera les démonstrations de ces résultats dans [SGA3], Exposé VI_{A}, théorème 3.2.
Par G-espace homogène, nous entendons la donnée d'une k-variété X et d'une action (à droite) de G sur X, telle qu'il existe un $\overline{k}$-sous-schéma en groupes $\overline{H}$ de $\overline{G}$ vérifiant: $\overline{X}$ est $\overline{k}$-isomorphe à $\overline{H} \backslash \overline{G}$, de façon $\overline{G}$-équivariante. Si $\overline{H}$ est réduit (autrement dit, si c'est un k-groupe dans le sens que nous entendons ici), on dit que X est à stabilisateurs réduits. On voit immédiatement qu'un morphisme entre espaces homogènes à stabilisateurs réduits, qui induit une bijection sur les points géométriques, est un isomorphisme.

3 Cohomologie non abélienne, fonctorialité

Nous utilisons dans cet article la théorie du H^2 non-abélien en cohomologie galoisienne, telle qu'exposée dans [Sp]. Nous renvoyons également à [FSS] pour une excellente introduction. Rappelons que, si $\overline{G}$ est un $\overline{k}$-groupe et si $\kappa : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SOut}(\overline{G}/k)$ est un k-lien, un 2-cocycle (f, g) est la donnée de deux applications continues $f : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SAut}(\overline{G}/k)$ et $g : \Gamma_k \times \Gamma_k \longrightarrow \overline{G}(\overline{k})$ vérifiant les conditions suivantes:

(i) l'application f est un relèvement (ensembliste) continu de κ,
(ii)$f_s(f_t(x)) = g_{s,t} f_{st}(x) g_{s,t}^{-1}$,
(iii) $f_r(g_{s,t}) g_{r,st} = g_{r,s} g_{rs,t}$.

Un 2-cocycle de la forme $(f, 1)$ est dit neutre. Deux cocycles (f, g) et (f', g') sont dits équivalents s'il existe une application continue $h : \Gamma_k \longrightarrow \overline{G}(\overline{k})$ telle que $f'_s(x) = h_s f_s(x) h_s^{-1}$ et $g'_{s,t} = h_s f_s(h_t) g_{s,t} h_{st}^{-1}$; on écrit alors $(f', g') = h.(f, g)$. Un calcul simple montre que l'on définit ainsi une action du groupe des applications continues $\Gamma_k \longrightarrow \overline{G}(\overline{k})$ sur l'ensemble des 2-cocycles. L'ensemble de cohomologie $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$ est par définition l'ensemble des classes d'équivalence de 2-cocycles. Une classe de cohomologie est dite neutre si elle est représentée par un 2-cocycle neutre.

Dans la suite, nous faisons usage de certains aspects fonctoriels de la théorie du H^2 non-abélien. Le premier d'entre eux est l'existence d'applications de restriction. Leur construction n'est en rien difficile. Néanmoins, elle ne figure nulle part à notre connaissance dans la littérature, c'est pourquoi nous allons en fournir les détails dans les quelques lignes qui suivent.

Supposons donc donnés un $\overline{k}$-groupe $\overline{G}$ et une extension de corps l/k. Rappelons qu'on a une suite exacte:

$$1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(\overline{G})(\overline{k}) \longrightarrow \mathrm{SAut}(\overline{G}/k) \xrightarrow{\pi_k} \Gamma_k,$$

où π_k est le morphisme qui à un automorphisme semi-algébrique $s : {}^{\sigma}\overline{G} \longrightarrow \overline{G}$ associe σ. Supposons donnée une section (ensembliste) de π_k, $f : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SAut}(\overline{G}/k)$. On dispose alors naturellement d'une section du morphisme π_l, notée $f_l : \Gamma_l \longrightarrow \mathrm{SAut}(\overline{G}_{\overline{l}}/l)$, et définie, pour tout $\tau \in \Gamma_l$, par la formule

$$f_l(\tau) = f(\tau_{|\overline{k}}) \times_{\overline{k}} \overline{l}.$$

Le morphisme $f_l(\tau)$ est bien un élément de $\mathrm{SAut}(\overline{G}_{\overline{l}}/l)$, comme il résulte de l'identification canonique ${}^{\tau}\overline{G}_{\overline{l}} \simeq ({}^{\tau_{|\overline{k}}}\overline{G}) \times_{\overline{k}} \overline{l}$. De plus, si f est continue (au sens de [FSS], condition (ii) de la proposition 1.7), il en est de même de f_l.

Soit maintenant un k-lien $\kappa : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SOut}(\overline{G}/k)$. Choisissons un relèvement f de κ en une section (ensembliste) continue de π_k. Le morphisme f_l définit alors un l-lien κ_l qui ne dépend pas du choix initial de f. On dispose alors d'une application

$$Z^2(k, \overline{G}, \kappa) \longrightarrow Z^2(l, \overline{G}_{\overline{l}}, \kappa_l),$$
$$(f, g) \mapsto (f_l, g_l),$$

où le 2-cocycle $g_l : \Gamma_l \times \Gamma_l \longrightarrow \overline{G}(\overline{l})$ est défini comme le composé de g et du morphisme naturel $\Gamma_l \times \Gamma_l \longrightarrow \Gamma_k \times \Gamma_k$. Par passage au quotient, on obtient alors l'application de restriction

$$\mathrm{Res}_{l/k} : H^2(k, \overline{G}, \kappa) \longrightarrow H^2(l, \overline{G}_{\overline{l}}, \kappa_l).$$

Soient maintenant $\overline{G}$ et $\overline{G'}$ deux $\overline{k}$-groupes et $p : \overline{G} \longrightarrow \overline{G'}$ un morphisme de $\overline{k}$-groupes. Supposons le noyau de p invariant par tout automorphisme semi-algébrique de $\overline{G}$. Soit $\kappa : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SOut}(\overline{G}/k)$ un k-lien. Suivant [Bo], 1.7, on dispose alors d'un k-lien $\kappa' : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SOut}(\overline{G'}/k)$ et d'une application

$$p_* : H^2(k, \overline{G}, \kappa) \longrightarrow H^2(k, \overline{G'}, \kappa').$$

Dans le cas particulier où $\overline{G}$ est linéaire, $\overline{G'}$=$\overline{G}^{red}$ et p est la projection canonique, on note $\kappa^{red} = \kappa'$ et $r = p_*$. On a alors la proposition suivante, due à Borovoi:

Proposition 3.1 *Soit $\overline{G}$ un k-groupe linéaire et κ un k-lien. Une classe $\eta \in H^2(k, \overline{G}, \kappa)$ est neutre si et seulement si $r(\eta)$ est neutre.*

Démonstration. Pour k de caractéristique nulle, se référer à [Bo], proposition 4.1. La preuve qu'on y trouve utilise l'hypothèse de caractéristique nulle uniquement pour prouver que, si A est un k-groupe commutatif unipotent, on a $H^2(k, A) = 0$ (loc. cit., lemme 4.3). Or ce résultat vaut toujours lorsque k est parfait de caractéristique $p > 0$; cela résulte du lemme suivant. $\square$

Lemme 3.2 *Soit U un k-groupe linéaire unipotent. Si U est connexe, $H^1(k, U)$ est réduit à un élément. Si U est commutatif, on a $H^i(k, U) = 0$ pour $i \geq 2$.*

Démonstration Soit p la caractéristique de k. Si $p = 0$, on a $U = U^0$; sinon, le groupe U est une extension d'un p-groupe fini tordu par le k-groupe unipotent connexe U^0. Puisque k est parfait, on sait que U^0 admet une suite de composition dont les quotients successifs sont isomorphes à $\mathbb{G}_a$. On voit ainsi que le lemme est une conséquence des égalités $H^i(k, \mathbb{G}_a) = 0$, pour tout $i \geq 1$, et du fait que la p-dimension cohomologique d'un corps de caractéristique p est au plus 1 (cf. [Se1], chapitre 2, propositions 1 et 3).

4 Une notion d'acyclicité pour les extensions de corps

Définition 4.1 *Soit l/k une extension de corps. On dit que l/k est acyclique si l est parfait et si, pour tout k-groupe G, la flèche naturelle:*

$$H^1(k, G) \longrightarrow H^1(l, G)$$

est bijective.

Le lemme élémentaire suivant montre que, si l/k est acyclique, l et k ont même groupe de Galois absolu.

Lemme 4.2 *Soient* $\Gamma' \xrightarrow{f} \Gamma$ *un morphisme entre groupes profinis. Pour que* f *soit un isomorphisme, il faut et il suffit que, pour tout groupe fini* G*, considéré comme* Γ*-groupe par l'action triviale, la flèche* $H^1(\Gamma, G) \xrightarrow{f^*} H^1(\Gamma', G)$ *soit une bijection.*

Démonstration. Montrons la suffisance. La condition sur f^* signifie simplement que, pour tout groupe fini G, f induit une bijection entre $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)/\sim$ et $\mathrm{Hom}(\Gamma', G)/\sim$, $\sim$ étant la conjugaison par des éléments de G. Si f n'est pas surjective, il existe un groupe fini Q et une surjection $\Gamma \xrightarrow{\pi} Q$ telle que $\pi \circ f$ ne soit pas surjectif. Appelons Q' l'image de $\pi \circ f$. Il existe donc un morphisme $\Gamma \xrightarrow{\pi'} Q'$ tel que $\pi \circ f = \pi' \circ f$. Les morphismes π et π' devraient donc être conjugués, ce qui bien sûr ne se peut. On raisonne de même pour l'injectivité: si f n'est pas injective, soit σ' un élement non nul de son noyau. Il existe un groupe fini Q' et une surjection $\Gamma' \xrightarrow{\pi'} Q'$ telle que $\pi'(\sigma') \neq 1$. Or par hypothèse il doit exister un morphisme $\pi : \Gamma \longrightarrow Q'$ tel que $\pi' = \pi \circ f$, ce qui est impossible. $\Box$

Remarque. Soit l/k une extension de corps parfaits telle que la flèche $\Gamma_l \longrightarrow \Gamma_k$ est un isomorphisme. Peut-on affirmer que l/k est acyclique? Nous ne savons pour l'instant que répondre de façon partielle (proposition 4.4). Il nous paraît instructif d'illustrer cette question par une étude rapide du cas particulier du groupe orthogonal O_n. Tout d'abord, il est clair que toute forme quadratique sur l est équivalente à une forme définie sur k: il suffit de traiter le cas d'une forme de rang 1, qui équivaut à la surjectivité de $H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(l, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Ceci montre la surjectivité de $H^1(k, O_n) \longrightarrow H^1(l, O_n)$. Pour l'injectivité, Il faut prouver que deux formes quadratiques sur k, devenant équivalentes sur l, le sont déjà sur k. En utilisant le théorème d'équivalence par chaînes de Witt ([Lm], chapitre 1, théorème 5.2), il suffit de le faire pour des formes de rang 2. Mais on sait (loc. cit., proposition 5.1) que deux telles formes sont équivalentes sur k si et seulement si elles ont même discriminant (modulo les carrés) et représentent un même élément de k^*. Ces deux conditions ne changent pas lorsqu'on remplace k par l (toujours à cause de l'isomorphisme naturel $k^*/k^{*2} \simeq l^*/l^{*2}$), ce qui termine la preuve. Nous remercions Bruno Kahn pour nous avoir signalé cet argument élémentaire. Il serait intéressant d'établir l'assertion analogue pour une variété abélienne, ou pour $SL_1(D)$ (pour D une algèbre simple centrale sur k).

Pour démontrer la proposition 4.4, qui est notre prochain objectif, nous avons besoin du lemme qui suit.

Lemme 4.3 *Soit Γ un groupe profini, et $M \xrightarrow{\phi} N$ un morphisme entre Γ-modules discrets divisibles, induisant un isomorphisme entre le sous-groupe de torsion de M et celui de N. Alors la flèche $H^i(\Gamma, M) \longrightarrow H^i(\Gamma, N)$ induite par ϕ est un isomorphisme pour $i \geq 2$, et surjective pour $i = 1$.*

Démonstration. On a le diagramme commutatif suivant, dans lequel les flèches verticales sont induites par ϕ, celle de gauche étant un isomorphisme:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_{tors} & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N_{tors} & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

L'assertion découle alors immédiatement des suites exactes longues de cohomologie associées aux deux lignes de ce diagramme, compte tenu du fait que les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ n'ont pas de cohomologie en degré ≥ 1. $\square$

Proposition 4.4 *Soit l/k une extension de corps parfaits, telle que la flèche naturelle $\Gamma_l \longrightarrow \Gamma_k$ soit un isomorphisme. Soit G (resp. $\overline{H}$) un k-groupe (resp. un $\overline{k}$-groupe). Soit $\kappa : \Gamma_k \longrightarrow SOut(\overline{H}/k)$ un k-lien. On a les propriétés suivantes:*

(i) la restriction $H^1(k, G) \longrightarrow H^1(l, G)$ est surjective,
(ii) si G est commutatif, la restriction $H^i(k, G) \longrightarrow H^i(l, G)$ est bijective pour $i > 1$; elle l'est aussi pour $i = 1$ si G est commutatif et linéaire.
(iii) la flèche naturelle

$$H^2(k, \overline{H}, \kappa) \xrightarrow{Res_{l/k}} H^2(l, \overline{H}_{\overline{l}}, \kappa_l)$$

est une bijection,
(iv) l'image par $Res_{l/k}$ d'une classe η est neutre si et seulement si η est neutre.

Démonstration. Elle se fait en plusieurs étapes.

Preuve de (i) et (ii) lorsque G est linéaire connexe commutatif, ou une variété abélienne.
Dans le cas linéaire, on peut supposer que G est un tore T grâce au lemme 3.2. Il alors est commode de se servir du lemme 4.3, dont les hypothèses sont satisfaites pour $\Gamma = \Gamma_k = \Gamma_l$, $M = G(\overline{k})$ et $N = G(\overline{l})$, lorsque G est une variété abélienne ou un tore. En effet, dans le premier cas, on sait que, pour tout entier $n \geq 1$, l'élévation à la puissance n est un endomorphisme surjectif de G, dont le noyau est un groupe fini. Dans le second cas, le même résultat vaut: il suffit de le vérifier pour $G = \mathbb{G}_m$, c'est alors évident. Démontrons le dernier point. Insérons $T = G$ dans une suite exacte:

$$1 \longrightarrow S \longrightarrow \mathrm{R}_{A/k}(\mathbb{G}_m) \longrightarrow T \longrightarrow 1,$$

où A est une k-algèbre étale et R désigne le foncteur de restriction des scalaires à la Weil. Utilisant successivement le lemme de Shapiro et le théorème 90 de Hilbert, on voit que $H^1(k, \mathrm{R}_{A/k}(\mathbb{G}_m)) = H^1(A, \mathbb{G}_m) = 0$. La suite exacte de cohomologie:

$$1 \longrightarrow H^1(k, T) \longrightarrow H^2(k, S) \longrightarrow H^2(k, \mathrm{R}_{A/k}(\mathbb{G}_m))$$

permet alors de conclure. □
Preuve de (i) et (ii) pour G commutatif quelconque.
D'après un théorème de Chevalley, on sait que G^0 est une extension

$$1 \longrightarrow L \longrightarrow G^0 \longrightarrow A \longrightarrow 1,$$

où L est un k-groupe linéaire commutatif connexe et A une variété abélienne. On conclut alors avec le lemme des cinq, appliqué successivement aux suites exactes longues de cohomologie associées aux extensions $1 \longrightarrow L \longrightarrow G^0 \longrightarrow A \longrightarrow 1$ et $1 \longrightarrow G^0 \longrightarrow G \longrightarrow \pi_0(G) \longrightarrow 1$.
Preuve de (i) lorsque G est linéaire connexe.
On peut supposer G réductif. Soit N le normalisateur dans G d'un tore maximal (c'est-à-dire un sous-groupe de Cartan, puisque G est réductif) de G. On sait que, pour toute extension parfaite L de k, l'application $H^1(L, N) \longrightarrow H^1(L, G)$ est surjective ([Se1], chapitre III, §4, lemme 6). Ceci permet de se limiter au cas où G est une extension

$$1 \longrightarrow S \longrightarrow G \longrightarrow Q \xrightarrow{\pi} 1$$

d'un k-groupe fini par un tore. Soit $\alpha \in H^1(l, G)$ la classe d'un 1-cocycle $a \in Z^1(l, G)$. Soit b l'image de a dans $Z^1(l, Q) = Z^1(k, Q)$, et β la classe de b dans $H^1(l, Q) = H^1(k, Q)$. L'invariant $\Delta(b) \in H^2(k, {}_bS) = H^2(l, {}_bS)$ étant nul (cf. [Se1], 5.6, pour la définition de $\Delta(b)$), on dispose d'après *loc. cit.*, proposition 41, d'une classe $\alpha' \in H^1(k, G)$ telle que $\pi^*(\alpha') = \beta$. En tordant tous les groupes considérés par un cocycle représentant α', on est ramené au cas où $\beta = 1$. Par suite, α est dans l'image de $H^1(k, S) = H^1(l, S) \longrightarrow H^1(l, G)$, donc aussi dans l'image de $H^1(k, G) \longrightarrow H^1(l, G)$, cqfd.
Preuve de (iii).
Dans un premier temps, il faut voir que, si $H^2(l, \overline{H}_{\overline{l}}, \kappa_l)$ est non vide, alors $H^2(k, \overline{H}, \kappa)$ est également non vide. Cela est simplement dû à l'existence d'une classe canonique $\mathrm{Obs}(\kappa) \in H^3(k, \mathrm{Z}(\overline{H}))$ qui est nulle si et seulement si $H^2(k, \overline{H}, \kappa)$ est non vide ([FSS], proposition 1.21), et au fait qu'on a déjà prouvé (ii). On peut donc supposer que les deux ensembles de 2-cohomologie considérés sont tous deux non vides; ils sont alors des espaces principaux homogènes sous $H^2(k, \mathrm{Z}(\overline{H})) = H^2(l, \mathrm{Z}(\overline{H}_{\overline{l}}))$ (cf. [Sp], 1.17); $\mathrm{Res}_{l/k}$ est donc bien bijective.
Preuve de (iv) lorsque $\overline{H}$ est linéaire connexe
On peut supposer $\overline{H}$ réductif, en utilisant la proposition 3.1. D'après un résultat de Douai (cf. [Bo], proposition 4.1) on sait que $H^2(k, \overline{H}, \kappa)$ contient une classe neutre, on peut donc supposer que $\overline{H}$ admet une k-forme H et que $\kappa = \kappa_H$ est le lien trivial associé. On a alors une identification canonique entre $H^2(k, \overline{H}, \kappa)$ et $H^2(k, \mathrm{Z}(H))$. D'après [Bo], proposition 2.3, une classe dans $H^2(k, \overline{H}, \kappa)$ est neutre si et seulement si l'élément de $H^2(k, \mathrm{Z}(H))$ qui lui correspond est dans l'image du bord $H^1(k, H/\mathrm{Z}(H)) \longrightarrow H^2(k, \mathrm{Z}(H))$. Or, d'après ce qu'on a déjà vu, la propriété (i) (resp. (ii)) vaut pour $H/\mathrm{Z}(H)$ (resp. Z(H)). Un élément de $H^2(k, \mathrm{Z}(H))$ est donc dans l'image de ce bord si et seulement s'il en est de même de sa restriction à $H^2(l, \mathrm{Z}(H))$, cqfd.
Preuve de (iv) dans le cas général.
Le théorème de Chevalley, dont nous avons déjà fait usage pour démontrer (ii), affirme que $\overline{H}^0$ est une extension d'une variété abélienne $\overline{A}$ (définie sur $\overline{k}$) par un $\overline{k}$-groupe linéaire connexe $\overline{L}$. On conclut en appliquant le lemme suivant à l'extension $1 \longrightarrow \overline{L} \longrightarrow \overline{H}^0 \longrightarrow \overline{A} \longrightarrow 1$, puis à l'extension $1 \longrightarrow \overline{H}^0 \longrightarrow \overline{H} \longrightarrow \pi_0(\overline{H}) \longrightarrow 1$.

Lemme 4.5 *Soit* $1 \longrightarrow \overline{K} \xrightarrow{i} \overline{G} \xrightarrow{\pi} \overline{Q} \longrightarrow 1$ *une extension de $\overline{k}$-groupes, telle que $\overline{K}$ soit invariant par tout automorphisme semi-algébrique de $\overline{G}$. Si* *(iv) vaut pour $\overline{Q}$ et pour $\overline{K}$, et si (i) vaut pour toute k-forme de $\overline{Q}$, alors (iv) vaut pour $\overline{G}$.*

Démonstration. Soit $\eta \in H^2(k, \overline{G}, \kappa)$, telle que $\mathrm{Res}_{l/k}(\eta)$ soit neutre. Soit (f, c) un 2-cocycle représentant η. On sait par la propriété (iv) que $\pi_*(\eta)$ est neutre. Quitte à remplacer (f, c) par un cocycle équivalent, on peut donc supposer que c est à valeurs dans $\overline{K}(\overline{k})$. L'application f définit alors une k-forme Q de $\overline{Q}$. Puisque $\mathrm{Res}_{l/k}(\eta)$ est neutre, il existe une application continue $h : \Gamma_l \longrightarrow \overline{G}(\overline{l})$ telle que $h.(f, c)$ soit un 2-cocycle neutre. L'image de h_s dans $Q(\overline{l})$ est un 1-cocycle; par la propriété (i) appliquée à Q, ce cocycle est équivalent à un cocycle à valeurs dans $Q(\overline{k})$. Il existe donc $x \in \overline{G}(\overline{l})$, $a_s \in \overline{K}(\overline{l})$ et $b_s \in \overline{G}(\overline{k})$ tels que $x^{-1}h_s f_s(x) = a_s b_s$. Posons $(f', c') = b.(f, c)$, et $h'_s = a_s$. Le cocycle $h'.(f', c') = (ab).(f, c)$ est neutre; en effet:

$$\begin{aligned} & h'_s f'_s(h'_t) c'_{s,t} {h'_{st}}^{-1} \\ = \;& x^{-1}h_s f_s(x) f_s(x^{-1}h_t f_t(x)) c_{s,t} f_{st}(x^{-1}) h_{st}^{-1} x \\ = \;& x^{-1}h_s f_s(h_t) f_s(f_t(x))) c_{s,t} f_{st}(x^{-1}) h_{st}^{-1} x \\ = \;& x^{-1}h_s f_s(h_t) c_{s,t} h_{st}^{-1} x \\ = \;& x^{-1}x = 1. \end{aligned}$$

En outre, f'_s stabilise $\overline{K}$ pour tout s; on en déduit que $c'_{s,t} = f'_s({h'_t}^{-1}){h'_s}^{-1}h'_{st}$ est à valeurs dans $\overline{G}(\overline{k}) \cap \overline{K}(\overline{l}) = \overline{K}(\overline{k})$. Ainsi, f' définit un k-lien $\kappa' : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SOut}(\overline{K}/k)$, et (f', c') une classe $\eta' \in H^2(k, \overline{K}, \kappa')$, telle que $\mathrm{Res}_{l/k}(\eta')$ est neutre. D'après l'hypothèse faite sur $\overline{K}$, η' est neutre; *a fortiori* η est donc neutre.

Preuve de (i) dans le cas général.

Elle consiste, à nouveau, en une application du lemme suivant à l'extension $1 \longrightarrow L \longrightarrow G^0 \longrightarrow A \longrightarrow 1$ donnée par le théorème de Chevalley, suivie d'une autre application à l'extension $1 \longrightarrow G^0 \longrightarrow G \longrightarrow \pi_0(G) \longrightarrow 1$.

Lemme 4.6 *Soit $1 \longrightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$ une extension de k-groupes. Si (i) vaut Q et pour toutes les k-formes de K, et si (iv) vaut pour K, alors (i) vaut pour G.*

Démonstration. Soit $\alpha \in H^1(l, G)$. Ecrivons $\pi_*(\alpha) = \mathrm{Res}_{l/k}(\beta)$, pour $\beta \in H^1(k, Q)$. On peut associer à β un k-lien $\lambda : \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{SOut}(\overline{K}/k)$ et une classe $\eta \in H^2(k, \overline{K}, \lambda)$ (cf. [Sp], 1.20 pour une définition de λ et de η). Il est clair

que $\mathrm{Res}_{l/k}(\eta)$ est neutre; par (iv), η est donc également neutre. On peut donc écrire $\pi^*(\alpha') = \beta$, pour une classe $\alpha' \in H^1(k, G)$ (loc. cit., proposition 1.27, exactitude en $H^1(g, A, B)$). En tordant tous les groupes considérés par un cocycle représentant α', on se ramène donc au cas où $\beta = 1$, et l'on peut conclure grâce à l'hypothèse faite sur K. $\square$
La proposition 4.4, de nature purement cohomologique, permet d'obtenir le résultat crucial suivant.

Proposition 4.7 *Soit l/k une extension de corps acyclique. Soit G un k-groupe et X un G-espace homogène. Si $X(l) \neq \varnothing$, alors $X(k) \neq \varnothing$.*

Démonstration. Supposons tout d'abord X à stabilisateurs réduits. Soit $\overline{x}$ un point géométrique de X et $\overline{H}$ son stabilisateur. On dispose alors d'un k-lien κ et d'une classe $\eta \in H^2(k, \overline{H}, \kappa)$. Puisque $X(l) \neq \varnothing$, $\mathrm{Res}_{l/k}(\eta)$ est neutre; η elle-même est donc neutre par la proposition 4.4. D'après [Sp], proposition 1.27, il existe donc un G-torseur P et un morphisme G-équivariant $P \xrightarrow{\phi} X$. Dans la suite de cette démonstration, nous faisons librement emploi des notions de bitorseur (ou espace biprincipal) et de produit contracté (ou torsion) (cf. [Se1], chapitre 1, §5.3, ou [Br], dont nous utilisons ici les notations). Soit $G' = P \wedge G$ le k-groupe obtenu en tordant G par P, et P^{op} le G-torseur opposé de P. Tordant ϕ par P^{op}, on obtient un morphisme G'-équivariant $G' \xrightarrow{\phi \wedge P^{op}} X \wedge P^{op}$. Par suite, il existe un k-sous-groupe H' de G', et un isomorphisme G'-équivariant $H' \backslash G' \longrightarrow X \wedge P^{op}$. En le tordant par P, on obtient un isomorphisme G-équivariant $(H' \backslash G') \wedge P \longrightarrow X$. Comme $X(l) \neq \varnothing$, le G'_l-torseur (à gauche) P_l provient d'un H'_l-torseur Q_l. L'extension l/k étant acyclique, on a l'assertion analogue sur k: le G'-torseur P provient d'un H'-torseur; X possède donc un point k-rationnel. Le cas des espaces homogènes généraux découle alors du lemme suivant.$\square$

Lemme 4.8 *Soit G un k-groupe et X un G-espace homogène. Il existe un G-espace homogène $\tilde{X}$ à stabilisateurs réduits, et un morphisme G-équivariant $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ induisant une bijection sur les points dans toute extension parfaite de k. Un tel couple (X, π) est défini à isomorphisme unique près.*

Démonstration. On peut supposer que k est algébriquement clos par descente galoisienne. Il suffit donc de traiter le cas où X est un quotient $H \backslash G$. Dans ce cas, les affirmations du lemme sont claires: on prend pour $\tilde{X}$ le quotient

$H_{red}\backslash G$ (H_{red} est bien un k-groupe puisque k est parfait), et pour π la projection canonique. On voit que π induit une bijection sur les points dans toute extension algébriquement close de k, donc également dans toute extension parfaite de k. L'assertion concernant l'unicité est immédiate. $\square$

5 Application à l'étude des points rationnels sur les espaces homogènes

Nous démontrons ici le résultat principal (théorème 5.6) à l'aide des résultats de la section précédente, et du théorème suivant, bien connu des spécialistes.

Théorème 5.1 *Soit R un anneau complet pour une valuation discrète, de corps des fractions K et de corps résiduel k. Soit G un schéma en groupes semi-simples sur Spec(R). L'application naturelle*

$$H^1_{et}(R, G) \longrightarrow H^1(K, G_K)$$

est injective.

Démonstration. Ce résultat, dû à Bruhat et Tits, se trouve dans [Ni], théorème 4.1. Nous montrons ici comment le déduire de la théorie de Bruhat-Tits dans le cas particulier qui nous intéresse, c'est-à-dire lorsque $R = k[[t]]$. Dans la suite, nous notons $R = k[[t]]$, $K = k((t))$, $\tilde{K}$ l'extension maximale non ramifiée de K, $\tilde{R}$ l'anneau des entiers de $\tilde{K}$ et $\Gamma = \Gamma_k$ le groupe de Galois de $\tilde{K}/K$. D'après le lemme de Hensel, l'application naturelle $H^1_{et}(R, G) \longrightarrow H^1(k, G_k)$ est bijective. Par torsion, il suffit donc de vérifier que la flèche $H^1(k, G) \longrightarrow H^1(K, G)$ a un noyau trivial. Soit donc X un G-torseur, tel que $X(K) \neq \varnothing$. Soit P un k-sous-groupe parabolique minimal de G. Par le critère valuatif de propreté, la variété quotient X/P possède un k-point $x : \mathrm{Spec}(k) \longrightarrow X/P$. Le pull-back par x du $P \times_k (X/P)$-torseur $X \longrightarrow X/P$ est un P-torseur Y possédant les propriétés suivantes:
(i) $Y(K) \neq \varnothing$,
(ii) $Y(k) \neq \varnothing \leftrightarrow X(k) \neq \varnothing$.
En effet, (i) et (ii) résultent simplement de la surjectivité de la flèche $G(l) \longrightarrow (G/P)(l)$, valable pour toute extension l de k ([LAG], proposition 21.12). Remplaçant G par P^{red}, on voit que l'on peut supposer G anisotrope. En considérant à la place de G le revêtement simplement connexe de son groupe

dérivé, on se ramène enfin au cas d'un groupe G semi-simple simplement connexe anisotrope. On sait alors que G_K est un K-groupe anisotrope, et que $G(K) = G(R)$ (théorème de Bruhat-Tits-Rousseau). Ces deux assertions sont démontrées dans [Ra], proposition 1.2. La dimension cohomologique de $\tilde{K}$ étant 1, on a $H^1(K,G) = H^1(\tilde{K}/K,G)$ par le théorème de Steinberg. Soit alors un 1-cocycle $z_s \in Z^1(k,G)$, définissant un élement du noyau de $H^1(k,G) \longrightarrow H^1(\tilde{K}/K,G)$. Choisissons donc une écriture $z_s = g^{-1}\,{}^s g$, $g \in G(\tilde{K})$. Soit I l'immeuble de Bruhat-Tits de G/K (réduit à un point x_0 puisque G est K-anisotrope), et $\tilde{I}$ celui de $G/\tilde{K}$, naturellement muni d'une action de Γ. D'après un théorème fondamental de la théorie de Bruhat-Tits ([BT], théorème 5.1.25), $\tilde{I}^\Gamma$ s'identifie à $I = \{x_0\}$. De l'égalité $g^{-1}\,{}^s g.x_0 = z_s.x_0 = x_0$, on déduit que $g.x_0 \in \tilde{I}^\Gamma$, donc que $g \in \mathrm{Stab}_{G(\tilde{K})}(x_0) = G(\tilde{R})$. Par spécialisation, il s'ensuit que la classe de z_s dans $H^1(k,G)$ est la classe triviale, cqfd. $\square$

Nous allons déduire de ce théorème le fait que l'extension K_∞/k est acyclique. Pour y parvenir, nous avons besoin de deux lemmes.

Lemme 5.2 *Soit* $1 \longrightarrow S \longrightarrow H \longrightarrow Q \longrightarrow 1$ *une extension centrale de k-groupes. Soit l/k une extension de corps. Supposons les conditions suivantes satisfaites, pour toutes les formes intérieures S' (resp. H') de S (resp. de H)*
(i) la flèche $H^1(k,H') \longrightarrow H^1(l,H')$ *est injective,*
(ii) la flèche $H^1(k,S') \longrightarrow H^1(l,S')$ *est surjective,*
(iii) la flèche $H^2(k,S') \longrightarrow H^2(l,S')$ *est injective.*
Alors la flèche $H^1(k,Q) \longrightarrow H^1(l,Q)$ *est injective.*

Démonstration. Par torsion, c'est une simple chasse dans le diagramme suivant (analogue au lemme des cinq dans le cadre commutatif habituel):

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(k,S) & \longrightarrow & H^1(k,H) & \longrightarrow & H^1(k,Q) & \longrightarrow & H^2(k,S) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^1(l,S) & \longrightarrow & H^1(l,H) & \longrightarrow & H^1(l,Q) & \longrightarrow & H^2(l,S).
\end{array}$$

Lemme 5.3 *Soit $G \longrightarrow H$ un morphisme dominant et séparable entre k-groupes. Alors l'application:*

$$Ker(G(k[[t]]) \longrightarrow G(k)) \longrightarrow Ker(H(k[[t]]) \longrightarrow H(k))$$

est surjective.

Démonstration. Pour $n \geq 1$, appelons R_n l'anneau $k[t]/t^n$. On a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathrm{Lie}(G) & \longrightarrow & G(R_{n+1}) & \longrightarrow & G(R_n) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathrm{Lie}(H) & \longrightarrow & H(R_{n+1}) & \longrightarrow & H(R_n) & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

Soit $h \in \mathrm{Ker}(H(k[[t]]) \longrightarrow H(k))$; soit h_n l'image de h dans $H(R_n)$. La flèche $\mathrm{Lie}(G) \longrightarrow \mathrm{Lie}(H)$ étant surjective, on en déduit par récurrence l'existence d'éléments $g_n \in G(R_n)$, tels que $\pi(g_n) = h_n$, et tels que l'image de g_{n+1} dans $G(R_n)$ soit g_n. La suite (g_n) définit donc un élément de $\varprojlim G(R_n) = G(k[[t]])$ vérifiant $\pi(g) = h$. On aurait aussi pu voir ce lemme comme conséquence de l'isomorphisme naturel $H^1_{et}(\mathrm{Spec}(k[[t]]), K) \longrightarrow H^1(k, K)$ en cohomologie étale, où K désigne le noyau de la surjection $G \longrightarrow H$.$\square$

Proposition 5.4 *L'extension K_∞/k est acyclique.*

Démonstration. Puisque la flèche $\Gamma_{K_\infty} \longrightarrow \Gamma_k$ est un isomorphisme, nous pouvons appliquer la proposition 4.4. Il reste à prouver l'injectivité de l'application $H^1(k, G) \longrightarrow H^1(K_\infty, G)$ pour tout k-groupe G. Il revient au même de prouver que, pour toute extension finie $L/k((t))$, contenue dans K_∞, la flèche $H^1(k, G) \longrightarrow H^1(L, G)$ est injective. Comme $L/k((t))$ est totalement ramifiée, on sait ([Se2], chapitre II, §4, théorème 2) que L est k-isomorphe à $k((t))$. Par suite, il suffit de prouver l'injectivité de $H^1(k, G) \longrightarrow H^1(k((t)), G)$. Nous le faisons en trois étapes.
Cas où G est une variété abélienne.
Soit X un G-torseur tel que $X(k((t))) \neq \varnothing$. Par le critère valuatif de propreté, X possède un $k[[t]]$-point, donc un k-point, cqfd.
Cas où G est linéaire connexe.
On peut supposer G réductif par le lemme 3.2. On sait alors que G s'insère dans une extension:

$$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow \mathrm{Z}(G) \times G^{der} \longrightarrow G \longrightarrow 1,$$

où G^{der} est le groupe dérivé de G (qui est semi-simple connexe), et μ est fini central ([LAG], 14.2). Le lemme 5.2 appliqué à cette extension permet alors de se réduire au cas G semi-simple, qui est une conséquence du théorème 5.1.
Cas général.

On a le diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_0(G)(k) & \longrightarrow & H^1(k,G^0) & \longrightarrow & H^1(k,G) & \longrightarrow & H^1(k,\pi_0(G)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\pi_0(G)(l) & \longrightarrow & H^1(l,G^0) & \longrightarrow & H^1(l,G) & \longrightarrow & H^1(l,\pi_0(G)).
\end{array}$$

Puisque les flèches verticales aux deux bords sont bijectives, une chasse au diagramme très simple, jointe à un argument de torsion, permet alors de se ramener au cas où G est connexe. Par le théorème de Chevalley, G est alors une extension $1 \longrightarrow L \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 1$ d'une variété abélienne A par un groupe linéaire connexe L. Puisque nous avons déjà traité le cas de deux tels groupes, une chasse au diagramme identique à la précédente montre qu'il suffit de prouver que la flèche $A(k)/G(k) \longrightarrow A(k((t)))/G(k((t)))$ est surjective. Ceci est une conséquence directe de l'égalité $A(k((t))) = A(k[[t]])$ et du lemme 5.3. $\square$

Lemme 5.5 *Soit X une k-variété géométriquement intègre. Supposons qu'il existe une k-variété Y, k-birationnelle à X et possèdant un point k-rationnel lisse. On a alors $X(k((t))) \neq \varnothing$.*

Démonstration. On peut supposer que X est un ouvert de Y. Soit donc $x \in Y(k)$. D'après la démonstration du lemme 3.2 de [Fr], on peut trouver une courbe intègre C de Y, régulière en x et d'intersection non vide avec X. Le complété de l'anneau local de C en x par rapport à son idéal maximal est isomorphe à $k[[t]]$ d'après un théorème de Cohen ([Bou], chap. 9, sect. 3); on en déduit donc bien que $X(k((t)) \neq \varnothing$. $\square$

Remarque. On a la réciproque suivante du lemme 5.5: Si X a un $k((t))$-point lisse, alors tout modèle projectif de X possède un k-point. Nous n'en aurons pas besoin.

Théorème 5.6 *Soit G un k-groupe et X un G-espace homogène. Supposons qu'il existe une k-variété Y, k-birationnelle à X, et possèdant un point k-rationnel lisse (par exemple une k-compactification lisse avec un point k-rationnel). Alors X possède lui aussi un point k-rationnel.*

Démonstration. D'après le lemme 5.5, l'hypothèse implique que $X(k((t))) \neq \varnothing$, ou, ce qui revient au même, que $X(K_\infty) \neq \varnothing$. On conclut alors avec les propositions 5.4 et 4.7. $\square$

Remarque. Dans ce théorème, l'hypothèse de lissité ne peut pas être levée, comme il résulte de l'exemple suivant, communiqué par Jean-Louis Colliot-Thélène. Choisissons une extension quadratique $l = k(\sqrt{a})/k$, de corps de caractéristique différente de 2, et un élément $c \in k^*$ qui ne soit pas une norme pour cette extension. L'équation $(x_1^2 - ax_2^2)(x_3^2 - ax_4^2) = cx_0^4$ définit une hypersurface projective $\tilde{X}$ dans $\mathbb{P}^4$, possédant des points k-rationnels non lisses (par exemple, faire $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, et prendre x_3 et x_4 quelconques). On voit facilement que $\tilde{X}$ est une compactification du torseur non trivial X d'équation $(x_1^2 - ax_2^2)(x_3^2 - ax_4^2) = c$ dans $\mathbb{A}^4$, sous le tore T d'équation $(x_1^2 - ax_2^2)(x_3^2 - ax_4^2) = 1$. Ce tore n'est rien d'autre que le noyau de la norme $\mathrm{R}_{A/k}(\mathbb{G}_m) \xrightarrow{N} \mathbb{G}_m$, où A est la k-algèbre étale $l \times l$.

Bibliographie

[LAG] A. Borel. — *Linear Algebraic Groups*, second enlarged edition, GTM **126**, Springer-Verlag.

[Bo] M. Borovoi. — *Abelianization of the second nonabelian Galois Cohomology*, Duke Math. J. **72** (1993), 217-239.

[Bou] N. Bourbaki. — *Algèbre commutative*, Masson, Paris, 1983, chap. 8-9.

[Br] L. Breen. — *Bitorseurs et Cohomologie Non Abélienne*, in The Grothendieck Festschrift vol. 1, Progresses in Mathematics **86** (1990), Birkhäuser, 401-476.

[BT] F. Bruhat, J. Tits. — *Groupes réductifs sur un corps local II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **60** (1984), 197-376.

[CTS] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc. — *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), 375-492.

[SGA3] M. Demazure, A. Grothendieck. — *Schémas en Groupes. I: propriétés générales des schémas en groupes,* Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA3), Lecture Notes in Math. **151**, Springer-Verlag.

[FSS] Y. Z. Flicker, C. Scheiderer, R. Sujatha. — *Grothendieck's theorem on non-abelian H^2 and local-global principles*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 731-750.

[Fr] E. Frossard. — *Groupe de Chow des fibrations en variétés de Severi-Brauer*, Comp. Math. **110** (1998), 187-213.

[Lm] T. Y. Lam. — *The algebraic theory of quadratic forms*, Mathematics lecture notes series, the Benjamin/Cummings publishing company, inc.

[Ni] Y. A. Nisnevich. — *Espaces homogènes principaux rationnellement triviaux et arithmétique des schémas en groupes réductifs sur les anneaux de Dedekind*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **299** (1984), 5-8.

[Ra] M. S. Raghunathan. — *Principal bundles on affine space and bundles on the projective line*, Math. Ann. **285** (1989), 309-332.

[Se1] J.-P. Serre. — *Cohomologie Galoisienne*, Lecture Notes in Math. **5**, 5$^{\text{ième}}$ édition (1994), Springer-Verlag.

[Se2] J.-P. Serre. — *Corps Locaux*, Pub. Inst. Math. Univ. Nancago, 3$^{\text{ième}}$ édition (1968), Hermann.

[Sp] T.A. Springer. — *Nonabelian H^2 in Galois Cohomology*, in *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups*, Proc. Symp. Pure Math. **9**, Amer. Math. Soc. (1966), 164-182.