VARIÉTÉS DE GROUPES EXCEPTIONNELS NON RATIONNELLES

P. GILLE

Résumé: Nous construisons des exemples de groupes G/k semi-simples simplement connexes respectivement de type ${}^3D_4$, E_6, E_7, E_8 qui ne sont pas des variétés k–rationnelles.

Abstract:[1] We construct examples of semisimple simply connected algebraic groups G/k respectively of type ${}^3D_4$, E_6, E_7, E_8 which are not k–rational varieties.

1. Introduction

Etant donné un groupe algébrique linéaire (connexe) G/k défini sur un corps k a priori non algébriquement clos, nous nous intéressons à la question suivante :

La variété de groupe G/k est-elle rationnelle, i.e. le corps de fonctions $k(G)$ est-il transcendant pur sur k ?

Un objectif très ambitieux demeure la classification birationnelle des groupes algébriques linéaires : celle-ci a été faite pour les groupes semi-simples adjoints de rang ≤ 3, lire l'article de survol de Merkurjev [21]. Pour les tores algébriques, on dispose d'un critère simple de stable rationalité mais on ignore si la stable rationalité entraîne la rationalité (conjecture de Voskresenskiĭ [31]). Par ailleurs, l'étude birationelle des groupes semi-simples pour les corps de nombres et corps de dimension 2 a été faite par Chernousov-Platonov [4] et [7] pour les corps géométriques de dimension 2. Dans cet article, nous étudions certains groupes définis sur des corps de séries formelles itérées.

Théorème 1.1. *Il existe un corps F et un groupe semi-simple simplement connexe G/F respectivement*

(*i*) *de type ${}^3D_4$, avec algèbre d'Allen d'indice* 2,

(*ii*) *de type E_6, forme interne avec algèbre de Tits d'indice* 9,

(*iii*) *de type E_7, avec algèbre de Tits triviale,*

(*iv*) *de type E_8,*

tel que la variété de groupe G/F n'est pas stablement F–rationnelle.

Le groupe de type E_6 construit est anisotrope; on sait qu'un groupe isotrope de type E_6^1 est k-rationnel ([4], proposition 14). L'invariant utilisé

[1] 2000 Mathematics Subject Classification: 14M20, 20G15, 11E72

pour détecter la non-rationalité est l'équivalence rationnelle. Nos exemples sont fondés sur des corps de séries formelles itérées F et des arguments de spécialisation. Cette idée trouve son origine dans la construction par Platonov d'une algèbre simple centrale D/F telle que $SK_1(D) = \mathrm{SL}_1(D)/[D^\times, D^\times]$ est non trivial [24] (voir aussi [28]). Un résultat de Voskresenskiĭ montre alors que la variété de groupes $\mathrm{SL}_1(D)$ est non rationnelle [30] (voir aussi [31], §18.2).

Des exemples analogues de groupes de spineurs ont été construits sur des corps similaires par Monastyrnyĭ-Yanchevskiĭ, [22]; pour les groupes adjoints, le cas des groupes projectifs orthogonaux sur des corps $k((t_1))((t_2))...(t_n))$ est discuté dans l'article [12].

Notre propos consiste donc à aborder le cas des groupes exceptionnels, et de tels groupes définis sur des corps de séries formelles sont décrits par la théorie de Bruhat-Tits. Il n'est pas exclus que cette technique donne lieu par la même occasion à des groupes adjoints non-rationnels de type E_6 et E_7 (voir remarques 6.3, 6.6). En revanche, nous avoins vérifié à la fin qu'elle est inefficace pour les groupes de type F_4 (les groupes de type G_2 sont des variétés rationnelles). Ceci est une évidence en faveur de la stable rationalité des variétés de groupes de type F_4, question toujours ouverte à notre connaissance.

Par ailleurs, pour certains groupes trialitaires, une méthode "générique" permet de construire à peu de frais (à partir des groupes classiques) des groupes simplement connexes/adjoints qui ne sont pas des variétés stablement rationnelles (cf. Proposition 2.2).

Remerciements: Je remercie Jean-Louis Colliot-Thélène et Boris Kunyavskiĭ pour les discussions bienvenues autour de cet article. Je remercie Skip Garibaldi pour ses commentaires qui ont permis d'améliorer une version préliminaire de cet article.

Notations

On note $\mathrm{G}_m = \mathrm{Spec}(k[t, \frac{1}{t}])$ le tore standard. Soit M un k–groupe de type multiplicatif (cf. [26], exp. X). On dit que M est un k–tore (resp. est fini) si $\widehat{M}$ est un $\mathbf{Z}$–module libre (resp. fini). On note $\widehat{M} = \mathrm{Hom}_{k-gr}(M, \mathrm{G}_m)$ le module galoisien des caractères de M. Si $\chi \in \widehat{M}(k_s)$, on note k_χ/k l'extension galoisienne finie minimale telle que $\chi \in \widehat{M}(k_\chi)$. On définit ensuite l'extension galoisienne finie k_M/k comme le composé des extensions k_χ pour χ parcourant $\widehat{M}(k_s)$ et on note $\Gamma(M) = \mathcal{G}al(k_M/k)$. Si $\Gamma(M) = 1$ (i.e. $\widehat{M}$ est un module galoisien avec action triviale), on dit que M est déployé. Ainsi k_M/k est l'extension minimale déployant M. Pour toute extension séparable finie L/k, le k–groupe $R_{L/k}(M)$ est de type multiplicatif et on note $R^1_{L/k}(M)$ le noyau de la norme $N_{L/k} : R_{L/k}(M) \to M$. On dit qu'un tore T est *quasi–trivial* si T est un produit direct de facteurs $R_{L/k}\mathrm{G}_m$. On dit qu'un tore T est *inversible* s'il est facteur direct d'un tore quasi–trivial. Enfin, on note T_{an} le quotient maximal anisotrope d'un k–tore T.

De plus, si Γ est un groupe fini et A un Γ–module, on rappelle la notation

$$Ш^i_\omega(\Gamma, A) = \ker\Big(H^i(\Gamma, A) \to \prod_{\sigma\in\Gamma} H^i(\langle\sigma\rangle, A)\Big).$$

2. Groupes versels

On suit ici la construction de Grothendieck de groupes algébriques versels ([14], §I.5). Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe et G_{ad} son groupe adjoint. On sait que $\mathrm{Aut}(G)$ est une extension d'un groupe fini étale $\mathrm{Out}(G)$ par G_{ad}. On se donne une représentation $\mathrm{Aut}(G) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$, on note $X = \mathrm{GL}_n/\mathrm{Aut}(G)$ et $X_{int} = \mathrm{GL}_n/G_{ad}$. On dispose alors du diagramme de torseurs

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_n \arrow[dd, "r"'] \arrow[dr, "u"] & \\ & X_{int} = \mathrm{GL}_n/G_{ad} \arrow[dl, "v"] \\ X = \mathrm{GL}_n/\mathrm{Aut}(G) & \end{tikzcd}$$

On peut alors tordre G/X et G_{ad}/X (resp. G/X_{int} et G_{ad}/X_{int}) pour obtenir les schémas en groupes semi-simples

$$G^{versel}/X, \quad G_{ad}^{versel}/X$$

(resp. $G^{versel,int}/X_{int}, G_{ad}^{versel,int}/X_{int}$). Ces groupes versels permettent d'étudier la rationalité des formes tordues de G.

Proposition 2.1. *On suppose k infini.*

(1) *Si $G^{versel} \times_X k(X)$ est $k(X)$-rationnel (resp. stablement $k(X)$–rationnel), alors pour tout corps F/k et pour toute F–forme G'/F de G, le groupe G'/F est F–rationnel (resp. F–stablement F–rationnel).*

(2) *Si $G_{ad}^{versel} \times_X k(X)$ est $k(X)$-rationnel (resp. stablement $k(X)$–rationnel), alors pour tout corps F/k et pour toute F–forme G'_{ad}/F de G_{ad}, le groupe G'_{ad}/F est F–rationnel (resp. F–stablement F–rationnel).*

(3) *Si $G^{versel,int} \times_{X_{int}} k(X_{int})$ est $k(X_{int})$-rationnel (resp. stablement $k(X)$–rationnel), alors pour tout corps F/k et pour toute F–forme interne G'/F de G, le groupe G'/F est F–rationnel (resp. F–stablement F–rationnel).*

(4) *Si $G_{ad}^{versel,int} \times_{X_{int}} k(X_{int})$ est $k(X_{int})$-rationnel (resp. stablement $k(X)$–rationnel), alors pour tout corps F/k et pour toute F–forme interne G'_{ad}/F de G_{ad}, le groupe G'_{ad}/F est F–rationnel (resp. F–stablement F–rationnel).*

Démonstration de la Proposition 2.1. On montre seulement la première assertion, les autres étant analogues. On suppose donc que $G^{versel} \underset{X}{\times} k(X)$ est $k(X)$–rationnel, c'est-à-dire qu'il existe un ouvert $V \subset G^{versel} \underset{X}{\times} k(X)$ $k(X)$–isomorphe à un ouvert de $\mathbf{A}^d_{k(X)}$. Il existe un ouvert $U \subset X$ et un ouvert $W \subset G^{versel} \underset{X}{\times} U$, surjectif sur U, tel que W est U–isomorphe à un ouvert de $\mathbf{A}^d_U$. On se donne un groupe G'/F qui est une F-forme de G. Il existe alors un point $u \in U(F)$ tel que $G' \cong G^{versel} \underset{X}{\times}^u F$. On observe que $W \underset{U}{\times}^u F$ est un ouvert de $G^{versel} \underset{X}{\times}^u F$, il est non-vide car surjectif sur $\mathrm{Spec}(F)$. Alors $W \underset{U}{\times}^u F$ est F–isomorphe à un ouvert de $\mathbf{A}^d_F$. On conclut que G'/F est une variété F–rationnelle. Le cas stable se démontre de la même façon. $\square$.

La proposition montre en particulier que la rationalité des groupes versels ne dépend pas de la représentation choisie. Ceci nous permet de démontrer à peu de frais que les groupes trialitaires ne sont pas en général des variétés rationnelles.

Proposition 2.2. *Il existe un corps $F/\mathbf{C}$ et un F–groupe trialitaire simplement connexe de type ${}^6D_4$ qui n'est pas une variété stablement k-rationnelle.*

Démonstration. On applique la proposition précédente au groupe $G = \mathrm{PSO}_8$ et au corps de base $k = \mathbf{C}$. On plonge alors $\mathrm{Aut}(\mathrm{PSO}_8) = \mathrm{PSO}_8 \rtimes S_3 \subset \mathrm{GL}_n$. On pose $X = \mathrm{GL}_n/\mathrm{Aut}(\mathrm{PSO}_8)$. Alors $G^{versel}/k(X)$ est un groupe de type ${}^6D_4$. On sait qu'il existe un corps F/k et un groupe G'/F simplement connexe de type ${}^2D_4$ qui n'est pas stablement F–rationnel ([3], exemple 6.10). La proposition 2.1.(1) montre alors que $G^{versel}/k(X)$ n'est pas stablement $k(X)$–rationnel. Dans le cas adjoint, on sait qu'il existe un corps F/k et un groupe G'_{ad}/F adjoint de type ${}^1D_4$ qui n'est pas stablement F–rationnel [12]. La proposition 2.1.(2) montre alors que $G^{versel}/k(X)$ n'est pas stablement $k(X)$–rationnel. $\square$.

Nous montrons plus loin l'énoncé analogue pour les groupes de type ${}^3D_4$ (remarque 7.4).

3. R–Équivalence et équivalence rationnelle

La R–équivalence est l'invariant le plus fin connu pour l'étude de la rationalité des groupes algébriques linéaires. Rappelons sa définition [18].

Soit X/k une variété algébrique définie sur un corps k. On note $\mathcal{O}$ l'anneau semi–local de la droite affine $\mathbf{A}^1_k$ aux points 0 et 1. La R–équivalence est la relation d'équivalence sur l'ensemble $X(k)$ des points k–rationnels de X engendrée par la relation élémentaire suivante (Manin [18]) : deux points x et y de $X(k)$ sont dits directement R–équivalents s'il existe $\phi \in X(\mathcal{O})$, satisfaisant $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$. On note $X(k)/R$ l'ensemble des classes pour la R–équivalence.

Dans le cas d'un groupe G/k, la R–équivalence est compatible avec la structure de groupe sur $G(k)$; l'ensemble $R(k,G) = Cl_R(e)$ est un sous–groupe normal de $G(k)$ et $G(k)/R = G(k)/R(k,G)$. On sait que la relation élémentaire est une relation d'équivalence ([11], II.1.1).

Proposition 3.1. *([5], corollaire de la proposition 11) On suppose k infini. Soient G_1, G_2 deux k–groupes algébriques linéaires connexes, k–unirationnels. Si G_1 et G_2 sont birationnellement équivalents, alors il existe une bijection (ensembliste)*

$$G_1(k)/R \xrightarrow{\sim} G_2(k)/R. \qquad \square$$

3.1. **R–équivalence et groupes de Chow.** Soit X/k une variété. On dit que deux point $x_0, x_1 \in X(k)$ sont rationnellement équivalents si $[x_0] = [x_1] \in CH_0(X)$. De façon générale, l'application

$$X(k) \to CH_0(X), \quad x \mapsto [x]$$

passe au quotient par la R–équivalence, en d'autres mots, elle induit une application

$$X(k)/R \to CH_0(X).$$

Il est commode de considérer la variante à point base $x_0 \in X(k)$

$$X(k)/R \to CH_0(X), \quad x \mapsto [x - x_0].$$

Pour un groupe algébrique G/k, on a donc une flèche naturelle

$$G(k)/R \to CH_0(G), \quad g \mapsto [g - e].$$

Lemme 3.2. *On suppose que G/k est connexe. Les assertions suivantes*

i) G/k est k–rationnel,

ii) G/k est stablement k–rationnel,

iii) G/k est R–trivial, i.e. $G(F)/R = 1$ pour toute extension F/k,

iv) Le groupe $CH_0(G_F)$ est cyclique engendré par $[e]$ pour toute extension F/k,

sont liées par i) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ iii) $\Longrightarrow$ iv).

Démonstration. L'implication $i) \Longrightarrow ii)$ est évidente.
$ii) \Longrightarrow iii)$: Par hypothèse, il existe un isomorphisme k–birationnel entre $G \times_k \mathbf{A}_k^m$ et $\mathbf{A}_k^n$. Vu que l'espace affine est R–trivial et que la R-équivalence sur un produit de variétés est le produit des relations, la proposition 3.1 montre que G est R–trivial.
$iii) \Longrightarrow iv)$: Soit $[g] \in CH_0(G)$. On note $L = k(g)$ et $f : \mathrm{Spec}(L) \to \mathrm{Spec}(k)$. On a $[g] = f_*\big([g]_L\big)$ avec $[g]_L \in CH_0(G_L)$. Comme $G(L)/R = 1$, l'élément g_L est R–équivalent à e_L, donc $[g_L] = [e_L] = f^*[e] \in CH_0(G_L)$. En appliquant f_*, il vient $[g] = [L : k] \times [e]$. On conclut que le groupe $CH_0(G)$ est cyclique engendré par $[e]$. $\square$

Une question fondamentale est de prouver que le groupe $G(k)/R$ est abélien. On en est très loin, vu que l'on ignore toujours en général si la flèche $G(k)/R \to CH_0(G)$ est un morphisme de groupes. On se propose d'étudier tout d'abord dans le cas des tores la relation entre R–équivalence et équivalence rationnelle. Il faut alors faire attention au fait que la proposition 12.i de [5] est un faux ami, puisqu'elle repose sur une définition des groupes de Chow strictement distincte (de la définition officielle [9]) pour des variétés non complètes.

3.2. **Rappels sur les tores (d'après** [5]**).** Soient L/k un extension galoisienne de groupe Γ. On rappelle que $T \mapsto \widehat{T}$ induit une anti–équivalence de catégories entre la catégories des tores déployés par L/k et la catégorie des Γ–réseaux. On dit dit que deux Γ-modules M, N sont stablement isomorphes s'il existe des modules de permutation P_1, P_2 tels que $M \oplus P_1 \cong N \oplus P_2$. On note alors $C(\Gamma)$ le monoïde des classes d'isomorphie stable de Γ–réseaux.

Soit M un Γ–réseau. On dit qu'une suite exacte de Γ–réseaux

$$0 \to M \to P \to N \to 0$$

est une résolution flasque de M si $H^{-1}(\Gamma', N) = 0$ pour tout sous–groupe $\Gamma' \subset \Gamma$. Il existe toujours de telles résolutions et le fait remarquable est que la classe d'isomorphie $[N] \in C(\Gamma)$ ne dépend pas de la résolution choisie. On la note $p(M) \in C(\Gamma)$.

Soit T un k–tore algébrique déployé par L/k. En dualisant une résolution flasque de $\widehat{T}$, on obtient une une résolution flasque

$$1 \to S \to E \to T \to 1$$

de T; E est un tore quasi–trivial et S/k un k–tore flasque, i.e. $H^1(F, \widehat{S}^0) = 0$ pour toute extension F/k. Le résultat fondamental de [5] est l'équivalence suivante :

(1) T est R–trivial, i.e $T(F)/R = 0$ pour tout F/k;
(2) Il existe un k–tore T' tel que $T \underset{k}{\times} T'$ est un tore k–rationnel;
(3) $p(\widehat{T})$ est un élément inversible de $C(\Gamma)$.

Ainsi la stable rationalité de T se détecte par un invariant discret.

Soit X/k une compactification lisse de T. Alors le S–torseur $E \to T$ s'étend en un S–torseur $Y \to X$ et on sait que l'application caractéristique $\varphi_k : X(k) \to H^1(k, S)$ donne lieu à des isomorphismes

$$T(k)/R \xrightarrow{\sim} X(k)/R \xrightarrow{\sim} H^1(k, S).$$

De plus, suivant la proposition 12.ii de [5], l'application $X(k)/R \to H^1(k, S)$ factorise par $CH_0(X)$, c'est-à-dire que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X(k)/R \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & CH_0(X) \arrow[dl, "\varphi_*"] \\
H^1(k,S) &
\end{tikzcd}$$

avec $\varphi_*\Big[\sum_i n_i x_i\Big] = \sum_i \mathrm{Cor}_k^{k(x_i)}\big(\varphi_{k(x_i)}(x_i)\big)$. Ceci montre en particulier que la R-équivalence et l'équivalence rationnelle coïncident sur $X(k)$. Ceci est faux en général pour $T(k)$ mais vrai néanmoins dans le cas particulier suivant.

Proposition 3.3. *On suppose que le tore T satisfait la condition suivante :*

(C) *Pour toute extension F/k telle que $T_{an} \underset{k}{\times} F$ est isotrope, on a $T(F)/R = 1$.*

Alors l'application $T(k)/R \to H^1(k, S)$ factorise par $CH_0(T)$, c'est-à-dire que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} T(k)/R \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & CH_0(T) \arrow[dl, "\varphi_*"] \\ H^1(k, S) & \end{tikzcd}$$

avec $\varphi_*\Big[\sum_i n_i\, t_i\Big] = \sum_i \mathrm{Cor}_k^{k(x_i)}\big(\varphi_{k(x_i)}(t_i)\big)$. En particulier, la R–équivalence pour T coïncide avec l'équivalence rationnelle.

La démonstration procède par réduction au cas anisotrope.

Lemme 3.4. *Soit T un tore. Alors la flèche*

$$\lambda : T(k) \to T_{an}(k)$$

est surjective. De plus, pour tout $x \in T(k)$, x est R–équivalent (resp. rationnellement équivalent) à $e \in T(k)$ ssi $\lambda(x)$ est R–équivalent (resp. rationnellement équivalent) à $\lambda(e)$.

Démonstration: On a une suite exacte de k–tores $1 \to (\mathrm{G}_m)^r \to T \xrightarrow{\lambda} T_{an} \to 1$. Le théorème 90 de Hilbert montre que $\lambda : T(k) \to T_{an}(k)$ est surjective. Si x est R–équivalent à $e \in T(k)$, il est évident que $\lambda(x)$ est R–équivalent à $\lambda(e)$. Dans l'autre sens, supposons que $\lambda(x)$ est R–équivalent à $\lambda(e)$. Alors il existe $f \in T_{an}(\mathcal{O})$ tel que $f(0) = \lambda(e)$ et $f(1) = \lambda(x)$. Vu que la flèche $T(\mathcal{O}) \to T_{an}(\mathcal{O})$ est surjective, on voit que x est R–équivalent à un élément de $(k^\times)^r \subset T(k)$, donc est x est R–équivalent à e. Enfin, on un isomorphisme $CH_0(T) \xrightarrow{\sim} CH_0(T_{an})$, donc l'assertion analogue est vraie pour l'équivalence rationnelle. $\square$

Démonstration de la proposition 3.3: Le lemme 3.4 permet de supposer T anisotrope. On considère la compactification $T \subset X$ et un prolongement $Y \to X$ du S–torseur $E \to T$ comme précédemment. Il suffit de montrer que la flèche $\varphi_* : CH_0(X) \to H^1(k, S)$ factorise par le morphisme $CH_0(X) \to CH_0(T)$, ce qui équivaut à demander que pour tout point fermé $x \in X \setminus T$, on a

$$\mathrm{Cor}_k^{k(x)}\big(\varphi_{k(x)}(x)\big) = 0.$$

Soit x un tel point. Suivant le lemme 12 de [5], le tore $T_{k(x)}$ est isotrope. Notre hypothèse entraîne que le tore $T_{k(x)}$ est R–trivial, en particulier, on a $H^1(k(x), S) = 0$, donc $\mathrm{Cor}_k^{k(x)}\big(\varphi_{k(x)}(x)\big) = 0 \in H^1(k, S)$. $\square$

On sait que les tores déployés par les extensions métacycliques sont R–triviaux. On en déduit le

Corollaire 3.5. *Soit T un k–tore. Soit $\Gamma(T)$ le groupe de Galois de l'extension galoisienne minimale déployant le tore T. Pour tout premier p, on suppose que tous les sous–groupes propres d'un p-Sylow de $\Gamma(T)$ sont cycliques. Alors la R–équivalence et l'équivalence rationnelle coïncident sur $T(k)$.*

Le cas où $\Gamma(T) = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (p premier) est évidemment un cas intéressant du corollaire.

Démonstration. Par un argument de transfert, on peut supposer que $\Gamma(T)$ est un p–groupe. Si $\Gamma(T)$ est trivial ou cyclique, la R–équivalence et l'équivalence rationnelle sont triviales sur $T(k)$. On peut donc supposer que $\Gamma(T) = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. La condition (C) de la proposition 3.3 est satisfaite, d'où le corollaire. □

Un autre tore bien connu où la proposition s'applique est le suivant.

Corollaire 3.6. *Soit $k(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3})$ un extension multiquadratique de degré 8. Soit T/k le tore des normes communes*

$$N_{k(\sqrt{a_1}/k}(y_1) = N_{k(\sqrt{a_2}/k}(y_2) = N_{k(\sqrt{a_3}/k}(y_3) \neq 0.$$

Alors la R–équivalence et l'équivalence rationnelle coïncident sur $T(k)$.

Démonstration. On sait bien que les questions de rationalité pour ce tore ne dépend que du sous–espace vectoriel de $k^\times/(k^\times)^2$ engendré par a_1, a_1 et a_3. Montrons que T satisfait la propriété de la proposition. Si F une extension de corps telle que $T_{an} \underset{k}{\times} F$ est isotrope, on peut alors supposer, ans perte de généralité, que $k(\sqrt{a_1}) \subset F$. Alors T_F est stablement F–birationnel au tore

$$N_{k(\sqrt{a_2}/k}(y_2) = N_{k(\sqrt{a_3}/k}(y_3) \neq 0.$$

qui est k–rationnel (c'est une quadrique isotrope). La condition est donc vérifiée et la proposition s'applique. □

4. Problématique de la spécialisation et stratégie

Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel k. Soit $\mathfrak{G}$ un A–schéma en groupes linéaires lisse, on note G/k sa fibre spéciale et $\mathfrak{G}_K$ sa fibre générique. Dans [13], nous avons montré[2] que si $\mathfrak{G}$ est réductif (à fibres connexes), alors il existe un morphisme naturel de spécialisation

$$\mathfrak{G}(K)/R \to G(k)/R.$$

pour les groupes de R–équivalence. Nous pensons qu'une telle application existe en général (au moins si $\mathfrak{G}/A$ est lisse), l'intérêt étant alors d'exhiber avec la théorie de Bruhat-Tits des groupes $\mathfrak{G}_K$ tels que $\mathfrak{G}(K)/R \neq 1$. De telles variétés de groupes ne sont alors pas K–rationnelles, ni même stablement K–rationnelles.

L'existence d'un morphisme de spécialisation pour les groupes de R–équivalence est un problème ouvert de géométrie algébrique. En effet,

[2]il y avait alors une condition technique $\mathrm{car}(k) \neq 2$, celle-ci est levée avec la construction de la compactification magnifique de de Concini-Procesi en caractéristique libre, voir [2], §6.1.

l'existence d'une application de spécialisation pour la R–équivalence pour les A–schémas projectifs (Madore [17], Kollàr [16]) indique une approche possible de cette question par une analyse fine des compactifications de $\mathfrak{G}/A$.

Comme me l'a fait remarquer Colliot-Thélène, la question analogue de spécialisation sur les groupes de Chow des cycles de dimension 0 ne requiert pas d'hypothèse de propreté. En effet, il existe un morphisme naturel

$$CH_0(\mathfrak{G}_K) \to CH_0(G)$$

et on a alors un diagramme commutatif d'ensembles pointés

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{G}(A) \arrow[r] \arrow[d] & G(k) \arrow[d] \\
\mathfrak{G}(K)/R \arrow[r, dashed, "?"] \arrow[d] & G(k)/R \arrow[d] \\
CH_0(\mathfrak{G}_K) \arrow[r] & CH_0(G).
\end{tikzcd}$$

En pratique, nous détectons la non-rationalité du groupe $\mathfrak{G}_K$ de la façon suivante.

Lemme 4.1. *On suppose que G est lisse et que A est complet. Si l'équivalence rationnelle est triviale sur $\mathfrak{G}(K)$, alors elle est triviale sur $G(k)$.*

Démonstration. Suivant le lemme de Hensel, le morphisme $\mathfrak{G}(A) \to G(k)$ est surjectif. Soit $g \in \mathfrak{G}(A)$ d'image $\overline{g} \in G(k)$. Par hypothèse, on a $[g - e] = 0 \in CH_0(\mathfrak{G}_K)$. Par spécialisation, il vient $[\overline{g} - \overline{g}] = 0 \in CH_0(G)$ donc l'équivalence rationnelle est triviale sur $G(k)$. □

5. Autour de la construction de Platonov

Nous allons montrer que la non-rationalité de certains groupes $\mathrm{SL}_1(D)$ construits par Platonov [24] peut se comprendre par spécialisation de l'équivalence rationnelle.

Par commodité, on s'intéresse à des algèbres l–primaires, l étant un nombre premier tel que k contienne une racine primitive l–ième de l'unité ζ. Si D/k est une algèbre simple centrale de degré l^n, M/k une algèbre étale, et r un entier, on définit le groupe

$$G_{r,M}(D)/k = \Big\{ N_{M/k}\big(\mathrm{Nrd}_M(d)\big) = x^{l^r} \Big\} \subset R_{M/k}(\mathrm{GL}_1(D)) \times_k \mathrm{G}_m.$$

Si $M = k$, on dispose du cocharactère

$$\lambda : \mathrm{G}_m \to G_{r,k}(D), \quad x \mapsto (x, x^{l^{n-r}})$$

et on a alors un isomorphisme

$$G_{r,k}(D)/\mathrm{G}_m \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}_1(D)/\mu_{l^{n-r}}.$$

Ainsi le groupe $G_{r,k}(D)$ est k–birationnel au groupe $\Big(\mathrm{SL}_1(D)/\mu_{l^{n-r}}\Big) \times_k \mathrm{G}_m$.

En particulier, si $r = n$, le groupe $G_{n,k}(D)$ est k–birationnel à $\mathrm{SL}_1(D) \times_k \mathrm{G}_m$.

5.1. **Spécialisation.** On pose $K = k((X))$ et $O = k[[X]]$.

Lemme 5.1. *Soient M/k une algèbre étale et r un entier. Soit*

$$D_n/K = (D_{n-1})_K \otimes A_\zeta(a, X)$$

où D_{n-1} désigne une k–algèbre simple centrale de degré l^{n-1} et $a \in k^\times$. On note $k_a = k[u]/(u^l - a)$. Alors on a un morphisme naturel surjectif

$$CH_0\Big(G_{r,K\otimes_k M}(D_n)\Big) \longrightarrow CH_0\Big(G_{r,M\otimes_k k_a}(D_{n-1})\Big).$$

Démonstration. On pose $D = D_n$. La valuation de K s'étend de façon unique à D, on note O_D son anneau de valuation. On définit le O–schéma en groupe $\mathrm{GL}_1(O_D)/\mathrm{Spec}(O) \subset O_D \xrightarrow{\sim} (\mathbf{A}_O)^{l^n}$ par l'ouvert $\mathrm{Nrd} \neq 0$. La fibre générique de $\mathrm{GL}_1(O_D)$ est $\mathrm{GL}_1(D)/K$, sa fibre spéciale réductive est donnée par l'ouvert (cf. [28], §1)

$$\Big\{N_{k_a/k}\big(\mathrm{Nrd}_{k_a}(d)\big) \neq 0\Big\} \subset R_{k_a/k}\big(\mathrm{GL}_1(D_{n-1})\big).$$

De la même façon, on définit le O–schéma en groupes

$$G_{r,O\otimes_k M}(O_D) = \Big\{N_{M/k}(\mathrm{Nrd}_M(d)) = x^{l^r}\Big\} \subset R_{M/k}(\mathrm{GL}_1(D_{n-1})) \underset{O}{\times} \mathrm{G}_m.$$

de fibre générique $G_{r,K\otimes_k M}(D)$ et de fibre spéciale

$$G_{r,M\otimes_k k_a} = \Big\{N_{k_a/k}(\mathrm{Nrd}_L(d)) = x^{l^r}\Big\} \subset R_{k_a}\big(\mathrm{GL}_1(D_{n-1})\big) \underset{k}{\times} \mathrm{G}_m.$$

On dispose alors d'un morphisme naturel de spécialisation

$$CH_0\Big(G_{r,K\otimes_k M}(D)\Big) \longrightarrow CH_0\Big(G_{r,M\otimes_k k_a}(D_{n-1})\Big).$$

Il est surjectif, car le O-schéma en groupe $G_{r,O\otimes_k M}(O_D)$ est lisse. □

L'itération du processus conduit à la :

Proposition 5.2. *Soient r, n des entiers positifs et $a_1, .., a_n \in k^\times$. On pose $F = k((X_1))...((X_n))$, $k_i = k[u]/(u^l - a_i)$, $M = k_1 \otimes_k ... \otimes_k k_n$,*

$$D/F = A_\zeta(X_1, a_1) \otimes_F A_\zeta(X_2, a_2) \otimes_F \cdots \otimes_F A_\zeta(X_n, a_n).$$

et $T_{r,M} \subset \mathrm{G}_m \times R_{M/k}(\mathrm{G}_m)$ le tore d'équation $x^{l^r} = N_{M/k}(y)$.

a) Il existe un morphisme naturel surjectif

$$CH_0(G_{r,F}(D)) \longrightarrow CH_0(T_{r,M}).$$

b) Si l'équivalence rationnelle est triviale sur $G_{r,F}(D)(F)$, alors l'équivalence rationnelle est triviale pour $T_{r,M}(k)$.

Démonstration: On suit l'induction en posant $M_i = k_1 \otimes_k ... \otimes_k k_{a_{n-i}}$, $F_i = k((X_1))...((X_i))$, $D_i/F_i = A_\zeta(X_1, a_1) \otimes_{F_i} A_\zeta(X_2, a_2) \otimes_F \cdots \otimes_{F_i} A_\zeta(X_i, a_i)$. Alors on a la suite d'inclusions de schémas

$$\begin{aligned} G_{r,F_n\otimes_k M_n}(D_n) \supset G_{r,F_{n-1}\otimes_k M_{n-1}}(D_{n-1}) \supset \quad \cdots \\ \cdots \quad \supset G_{r,F_1\otimes_k M_1}(D_1) \supset G_{r,k}(k\text{–algèbre triviale}) = T_{r,M} \end{aligned}$$

et le lemme 5.1 entraîne la proposition. □

On analyse maintenant le cas particulier $r = n$.

Corollaire 5.3. *On garde les notations de la proposition précédente. Il existe un morphisme naturel surjectif*

$$CH_0(\mathrm{SL}_1(D)) \longrightarrow CH_0\big(R^1_{M/k}\mathrm{G}_m\big),$$

Démonstration. On a $G_{0,F}(D) = \mathrm{SL}_1(D) \times_F \mathrm{G}_m$ (resp. $T_{0,M} = R^1_{M/k}\mathrm{G}_m \times_k \mathrm{G}_m$). Pour toute variété X/k ayant un k–point, on a $CH_0(X \times_k \mathrm{G}_m) = CH_0(X)$ donc la proposition entraîne l'assertion. □

5.2. **Le contre-exemple de Platonov.** On prend $r = n = 2$ dans la proposition. Alors le tore $T_{r,M}$ n'est pas autre chose que le tore normique $R^1_{M/k}\mathrm{G}_m$ pour l'extension bicyclique $k(\sqrt[l]{a_1}, \sqrt[l]{a_2})$ satisfait les conditions du corollaire 3.5. Ainsi la R–équivalence et l'équivalence rationnelle coïncident sur $(R^1_{M/k}\mathrm{G}_m)(k)$. Si k est un corps p–adique et si $[k(\sqrt[l]{a_1}, \sqrt[l]{a_2}) : k] = l^2$, alors la R–équivalence est non triviale sur $(R^1_{M/k}\mathrm{G}_m)(k)$ ([5], §6, corollaire 1) et on produit ainsi sur le corps $k((X_1))((X_2))$ un groupe $\mathrm{SL}_1(D)$ non $k((X_1))((X_2))$-rationnel.

5.3. **Groupe de Brauer non-ramifié.** Comme dans le cas d'un tore normique, le calcul du groupe de Brauer non-ramifié des tores $T_{r,M}$ précédents est aisé.

Lemme 5.4. *On suppose* $\mathrm{car}(k) = 0$*. Soient* $a_1, ..., a_n \in k^\times$*. On pose* $k_i = k[u]/(u^l - a_i)$ *et* $M = k_1 \otimes_k ... \otimes_k k_n$ *et* $T_{r,M} \subset \mathrm{G}_m \times R_{M/k}(\mathrm{G}_m)$ *le tore d'équation* $x^{l^r} = N_{M/k}(y)$*. On suppose que* M *est un corps et on pose* $\Gamma = \mathcal{G}al(T_{r,M}) = \mathcal{G}al(k(\sqrt[l]{a_1}, \cdots, \sqrt[l]{a_n})/k)$*. Alors*

$$\mathrm{Br}_{nr}(T_{r,M}) = Ш^2_\omega(\Gamma, \mathbf{Z}/l^r\mathbf{Z}).$$

Démonstration. On sait que $\mathrm{Br}_{nr}(T_{r,M}) = Ш^2_\omega(\Gamma, \widehat{T}_{r,M})$ ([6], proposition 9.5). Le module des charactères $\widehat{T}_{r,M}$ s'inscrit dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathbf{Z}[\Gamma] \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbf{Z}[\Gamma] \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \arrow[r, "l^r \oplus -N"] \arrow[d, "\wr"] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}[\Gamma] \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{T}_{r,M} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \arrow[r, "l^r"] & \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z}/l^r\mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Vu que $\mathbf{Z}[\Gamma]$ est un module acyclique, il vient $H^2(\Gamma, \widehat{T}_{r,M}) \cong H^2_\omega(\Gamma, \mathbf{Z}/l^r\mathbf{Z})$ et $Ш^2_\omega(\Gamma, \widehat{T}_{r,M}) \cong Ш^2_\omega(\Gamma, \mathbf{Z}/l^r\mathbf{Z})$. □

6. Exemples de groupes exceptionnels non rationnels

Dans cette section, nous utilisons librement la construction de groupes sur des corps de séries de Laurent issues de la théorie de Bruhat-Tits ([29], §2).

6.1. **Type** E_6**.** On note $H = (\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3)/\mu_3$ (resp. $\overline{H} = (\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3)/\mathrm{Ker}(\mu_3^3 \to \mu_3)$) le groupe maximal de type $A_2.A_2.A_2$ du groupe déployé simplement connexe (resp. adjoint) de type E_6. L'image du bord

$$H^1(k,\overline{H}) \to \mathrm{Ker}\big(H^2(k,\mu_3)^3 \to H^2(k,\mu_3)\big)$$

est formée des classes d'algèbres D_1, D_2, D_3 (de degré 3) satisfaisant

$$[D_1]+[D_2]+[D_3] = 0 \in \mathrm{Br}(k).$$

Soit $z \in H^1(k,\overline{H})$ et D_i les algèbres correspondantes. Alors

$${}_zH = \Big(\mathrm{SL}_1(D_1) \times \mathrm{SL}_1(D_2) \times \mathrm{SL}_1(D_3)\Big)/\mu_3.$$

Proposition 6.1. *On pose $F = k((X))((Y))$. Soient $a_1, a_2, a_3 \in k^\times$ satisfaisant $a_1a_2a_3 = 1$. On note $k_i = k[u]/(u^3 - a_i)$. On pose*

$$D_1/k((X)) = A_\zeta(a_1, X),\ D_2/k((X)) = A_\zeta(a_2, X),\ D_3/k((X)) = A_\zeta(a_3, X)/k((X)).$$

et on note $\mathfrak{G}/k((X))[[Y]]$ le schéma en groupe de Bruhat-Tits simplement connexe de type E_6 de fibre spéciale réductive

$$H/k((X)) = \Big(\mathrm{SL}_1(D_1) \times \mathrm{SL}_1(D_2) \times \mathrm{SL}_1(D_3)\Big)/\mu_3.$$

Si l'équivalence rationnelle est triviale sur $\mathfrak{G}(F)$, alors la R–équivalence rationnelle est triviale sur les k-points rationnels du tore des normes communes

$$N_{k_1/k}(y_1) = N_{k_2/k}(y_2) \neq 0.$$

Démonstration. On suppose que l'équivalence rationnelle est triviale sur $\mathfrak{G}(F)$. Vu que $\mathfrak{G}$ est lisse, l'équivalence rationnelle est triviale sur $H\big(k((X))\big)$. Le $k((X))$–groupe H admet un $k[[X]]$–modèle lisse de fibre spéciale

$$T := \Big(R^1_{k_1/k}(\mathrm{G}_m) \times R^1_{k_2/k}(\mathrm{G}_m) \times R^1_{k_3/k}(\mathrm{G}_m)\Big)/\mu_3$$

Il résulte que l'équivalence rationnelle est triviale sur $T(k)$. La suite exacte longue de cohomologie

$$1 \to \mu_3 \to \prod_i \big(R_{k_i/k}\mathrm{G}_m\big)(k) \to T(k) \to k^\times/(k^\times)^3 \to \prod_i k^\times/N_{k_i/k}(k_i^\times)$$

fournit une surjection

$$T(k) \twoheadrightarrow \Big(\bigcap_{i=1,..,3} N_{k_i/k}(k_i^\times)\Big)/(k^\times)^3.$$

Celle-ci induit un isomorphisme

$$T(k)/R \xrightarrow{\sim} \Big(\bigcap_{i=1,2} N_{k_i/k}(k_i^\times)\Big)/R \xrightarrow{\sim} \Big(\bigcap_{i=1,2} N_{k_i/k}(k_i^\times)\Big)/R$$

vu que $a_1a_2a_3 = 1$. Ainsi l'équivalence rationnelle est triviale sur les points k–rationnels du tore des normes communes $N_{k_1/k}(y_1) = N_{k_2/k}(y_2) \neq 0$. Le corollaire 3.5 montre alors que la R–équivalence est la relation triviale sur les k–points de ce tore. $\square$

Exemple 6.2. Le §2 de [19] exhibe des tores des normes communes avec une R–équivalence non triviale. Joint à la proposition, on obtient bien ainsi un groupe semi-simple simplement connexe de type E_6 qui n'est pas une variété stablement $k((X))((Y))$–rationnelle.

Remarque 6.3. Dans le cas adjoint, la même démonstration montre que si R–équivalence est triviale sur $\mathfrak{G}_{ad}(F)$, alors la R–équivalence est triviale sur les k-points rationnels du tore $N_{k_1/k}(y_1)N_{k_2/k}(y_2)N_{k_3/k}(y_3) = 1$. On ignore si un tel tore est en général stablement rationnel ou non.

6.2. **Type** E_7. On note $H = \mathrm{SL}_8/\mu_2$ (resp. $\overline{H} = \mathrm{SL}_8/\mu_4$) le groupe maximal de type A_8 du groupe déployé simplement connexe (resp. adjoint) de type E_7. L'image du bord $H^1(k, \overline{H}) \to H^2(k, \mu_2)$ est formée des classes d'algèbres D (de degré 8) satisfaisant

$$4[D_3] = 0 \in \mathrm{Br}(k).$$

Soit $z \in H^1(k, \overline{H})$ et D l'algèbre correspondante. Alors ${}_zH = \mathrm{SL}_1(D)/\mu_2$.

Proposition 6.4. *On pose $F = k((X))((Y))((Z))((T))$. Soient $a_1, a_2, a_3 \in k^\times$ et $M = k_1 \otimes k_2 \otimes k_3$. On note $k_i = k[u]/(u^2 - a_i)$ et on considère le produit tensoriel d'algèbres de quaternions*

$$D/k((X))((Y))((Z)) = (a_1, X) \otimes (a_2, Y) \otimes (a_3, Z).$$

On note alors $\mathfrak{G}/k((X))((Y))((Z))[[T]]$ le schéma en groupe de Bruhat-Tits simplement connexe de type E_7 de fibre spéciale réductive

$$H/k((X))((Y))((Z)) = \mathrm{SL}_1(D)/\mu_2.$$

Si l'équivalence rationnelle est triviale sur $\mathfrak{G}(F)$ (resp. $\mathfrak{G}_{ad}(F)$), alors la l'équivalence rationnelle est triviale sur les k-points rationnels du tore $T_{2,M}$ (resp. $T_{1,M}$).

Démonstration. On suppose que l'équivalence rationnelle est triviale sur $\mathfrak{G}(F)$. Vu que $\mathfrak{G}$ est lisse, l'équivalence rationnelle est triviale sur $H\big(k((X))((Y))((Z))\big)$. La proposition 5.2 montre alors que l'équivalence rationnelle est triviale sur $T_{2,M}$. Pour le groupe adjoint, la démonstration est analogue. $\square$

Exemple 6.5. Soit k un corps p-adique admettant une extension $M = k(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3})$ de degré 8 (cela existe, e.g. [23], theorem 7.5.8). Suivant [5] (corollaire 5), on a

$$T_{2,M}(k)/rat = Ш^2_\omega(\Gamma, \widehat{T}_{2,M})^\vee = Ш^2_\omega(\Gamma, \mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^\vee,$$

la seconde égalité venant du lemme 5.4. Vu que $Ш^2_\omega(C_2 \times C_2, \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) = H^3(C_2 \times C_2, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, on a $T_{2,M}(k)/rat \neq 0$. La proposition montre alors que le groupe $G/k((X))((Y))((Z))((T))$ construit dans la proposition n'est pas une variété $k((X))((Y))((Z))((T))$-rationnelle.

Remarque 6.6. Dans le cas adjoint, la même démonstration montre que si l'équivalence rationnelle est triviale sur $\mathfrak{G}_{ad}(F)$, alors la R–équivalence rationnelle est triviale sur les k-points rationnels du tore $T_{1,M}$. On ignore si un tel tore est en général stablement rationnel ou non, cependant $Ш^2_\omega(\Gamma, \widehat{T}_{1,M}) = Ш^2_\omega(\Gamma, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$.

6.3. **Type** E_8**.** On note $H = \mathrm{SL}_9/\mu_3$ le groupe maximal de type A_8 du groupe déployé de type E_8. L'image d'une classe $[z] \in H^1(k,H)$ par le bord $H^1(k,H) \to H^2(k,\mu_3) \subset {}_3\mathrm{Br}(k)$ est une algèbre D de degré 9 et d'exposant 3. La forme tordue correspondante est ${}_zH = \mathrm{SL}_1(D)/\mu_3$, c'est la fibre spéciale d'un schéma en groupes lisses $\mathfrak{G}/A$ de fibre générique de type E_8.

Proposition 6.7. *On pose $F = k((X))((Y))((Z))$. Soient $a_1, a_2 \in k^\times$. On note $k_i = k(\sqrt[3]{a_i})$. On pose*

$$D/k((X))((Y)) = A_\zeta(a_1, X) \otimes A_\zeta(a_2, Y).$$

On note $\mathfrak{G}/k((X))((Y))[[Z]]$ le schéma en groupe de Bruhat-Tits simplement connexe de type E_8 de fibre spéciale réductive

$$H/k((X))((Y)) = \mathrm{SL}_1(D)/\mu_3.$$

Si l'équivalence rationnelle est triviale sur $\mathfrak{G}(F)$, alors l'équivalence rationnelle est triviale sur $T_{3,k_1\otimes k_2}(k)$.

Démonstration. On suppose que l'équivalence rationnelle est triviale sur $\mathfrak{G}(F)$. Vu que $\mathfrak{G}$ est lisse, l'équivalence rationnelle est triviale sur $H\big(k((X))((Y))\big)$. La proposition 5.2 montre alors que l'équivalence rationnelle est triviale sur $T_{3,k_1\otimes k_2}(k)$. □

Exemple 6.8. Dans le cas où k est un corps p-adique et où $k(\sqrt[3]{a_1}, \sqrt[3]{a_2})$ est un corps, alors on sait que le défaut de R-équivalence sur $T_{3,k_1\otimes k_2}(k)$ est le groupe $Ш^2_\omega(\mathcal{G}al(k(\sqrt[3]{a_1}, \sqrt[3]{a_2})/k), \widehat{T}_{3,k_1\otimes k_2})$ ([5], corollaire 5.(ii)). Le lemme 5.4 montre que ce groupe est isomorphe à $Ш^2(C_3 \times C_3, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^\vee = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ (cf. [15], Lemma 6.7.2). La proposition produit donc dans ce cas un groupe de type E_8 sur le corps $F = k((X))((Y))((Z))$ qui n'est pas une variété F–rationnelle.

7. Retour sur les groupes trialitaires

On s'intéresse maintenant au cas laissé en suspens, celui des groupes de type ${}^3D_4$. On rappelle qu'à un tel groupe trialitaire G/k est attaché une extension galoisienne cubique L/k et une algèbre simple centrale A/L de degré 8, l'algèbre d'Allen de G; on sait que $\mathrm{Cor}^L_k([A]) = 0 \in \mathrm{Br}(k)$.

On cherche de tels groupes non-rationnels dont la non-rationalité serait expliquée par des invariants 2–primaires fonctoriels en k. Ainsi, un tel exemple, s'il existe, doit en particulier donner lieu à un groupe G_L qui n'est pas une variété L–rationnelle.

Proposition 7.1. *Soit G/k un groupe trialitaire d'extension cubique associée $L/k/$ On suppose L/k cyclique de degré* 3 *et que l'algèbre d'Allen de G est triviale. Alors G_L est stablement L– rationnel.*

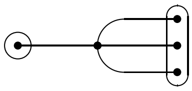
Dans le cas d'un groupe adjoint de type ${}^6D_4$, Garibaldi a demontré par ailleurs que G_L est stablement L-rationnel ([10], Proposition 6.1).

Démonstration: Le groupe G est soit simplement connexe, soit adjoint. Ainsi il existe une 3–forme de Pfister q/L telle que $G_L = \mathrm{Spin}(q)$ ou $G_L = \mathrm{PSO}(q)$. Dans le premier cas, G_L est L–rationnel ([21], Theorem 8.6). Dans le second, G_L est stablement L–rationnel comme l'indique la proposition 7 de [20]. $\square$

On considère maintenant le cas des groupes de type ${}^3D_4$ définis sur $k((T))$. Soit $G/k((T))$ un groupe trialitaire d'extension galoisienne cubique $K'/k((T))$ associée. Si l'extension $K'/k((T))$ est ramifiée, alors on a

$$\ker\Big({}_2\mathrm{Br}(K') \overset{\mathrm{Cor}^{K'}_{k((t))}}{\longrightarrow} {}_2\mathrm{Br}(k((t)))\Big) = 0$$

suivant la proposition II.8.6 de [14]. Ainsi, l'algèbre d'Allen de G est triviale dans ce cas et la proposition 7.1 montre que $G_{K'}$ est K'–rationnel. Le cas intéressant est donc celui où $K'/k((T))$ est non-ramifiée, i.e $K' = L((T))$ pour une extension cubique galoisienne L/k. Etant donné un $k[[T]]$-schéma $\mathfrak{G}$ en groupes de Bruhat-Tits $\mathfrak{G}$ de type ${}^{3,6}D_4$, on sait que le type quasi-déployé de la fibre spéciale réductive H/k de $\mathfrak{G}$ est donné par un sous–diagramme du diagrame de Dynkin complété



Pour le cas intéressant où $\mathfrak{G}$ n'est pas semi-simple et H est semi-simple, il n'y a alors qu'une possibilité de type, i.e le type quasi-déployé de la fibre spéciale réductive H/k est isogène à $\mathrm{SL}_2 \times R_{L/k}(\mathrm{SL}_2)$. En fait, le groupe H/k est une forme interne de

$$\Big(\mathrm{SL}_2 \times R_{L/k}(\mathrm{SL}_2)\Big)/\mu_2.$$

le μ_2 étant envoyé diagonalement. De façon plus précise, il s'agit du torsion intérieure relative au groupe

$$\Big(\mathrm{SL}_2 \times R_{L/k}(\mathrm{SL}_2)\Big)/\mu,$$

où $\mu := \ker\big(\mu_2 \times R_{L/k}(\mu_2) \overset{id+N_{k'/k}}{\longrightarrow} \mu_2$. On voit alors facilement qu'il existe des algèbres de quaternions A/k, B/L satisfaisant

$$H \cong \Big(\mathrm{SL}_1(A) \times R_{L/k}(\mathrm{SL}_1(B))\Big)/\mu_2$$

et soumises à la relation $[D] = \mathrm{cor}^L_k([B])$ dans le groupe $\mathrm{Br}(k)$. La classe de l'algèbre d'Allen du groupe $\mathfrak{G}/k((t))$ est alors $[B] - \mathrm{Res}^L_k([D]) \in \mathrm{Br}(L)$. Le groupe H est stablement k–rationnel à

$$M := \Big\{(x,y) \in \mathrm{SL}_1(A) \times R_{L/k}(\mathrm{SL}_1(B)) \mid \ \mathrm{Nrd}_A(x) = \mathrm{Nrd}_B(y)\}$$

Le lemme suivant va permettre de construire un exemple explicite de tel groupe M qui n'est pas k-rationnel. On note σ un générateur de $\mathcal{G}al(L/k)$.

Lemme 7.2. *Soit $b \in L^\times$. On pose $a = N_{L/k}(b)$. On définit les algèbres de quaternions suivantes*

$$A/k((X)) := (X, a), \quad B/L((X)) = (X, b).$$

et le groupe

$$M/k((X)) := \Big\{(x, y) \in \mathrm{SL}_1(A) \times R_{L/k}(\mathrm{SL}_1(B)) \mid \ \mathrm{Nrd}_A(x) = \mathrm{Nrd}_B(y)\}$$

On note T'/k le sous k–tore de $R_{k(\sqrt{a})/k}(\mathrm{G}_m) \times R_{L(\sqrt{b}/k}(\mathrm{G}_m)$ défini par

$$N_{k(\sqrt{a})/k}(x) = N_{L(\sqrt{b})/L}(y)$$

Si $M(k((X)))/Rat = 1$, alors $T(k)/Rat = 1$.

Démonstration. En effet, de la même façon qu'au §5.1, on voit que l'on a un morphisme de spécialisation surjectif

$$M(k((X)))/Rat \to T(k)/Rat. \qquad \square$$

On choisit maintenant k, L, et $b \in L^\times$ de sorte que $[L(\sqrt{b}, \sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}) : L] = 8$ où $b_i = \sigma^i(b)$ pour $i = 1, 2$ sont les conjugués de b sous $\mathcal{G}al(L/k)$. On remarque que T_L n'est pas autre chose que le tore des normes communes

$$N_{L(\sqrt{a})/L}(x) = N_{L(\sqrt{b_0})/L}(y_0) = N_{L(\sqrt{b_1})/L}(y_1) = N_{L(\sqrt{b_2})/L}(y_2) \neq 0.$$

qui est stablement rationnellement équivalent au tore

$$N_{L(\sqrt{b_0})/L}(y_0) = N_{L(\sqrt{b_1})/L}(y_1) = N_{L(\sqrt{b_2})/L}(y_2) \neq 0.$$

On sait que les résultats de [27] sur les extensions triquadratiques montrent en particulier qu'il existe des tores des normes communes pour des extensions triquadratiques qui ne sont pas R–triviaux ([11], §3). En particulier, T_L n'est pas R–trivial et a fortiori T n'est pas R–trivial. Quitte à etendre les scalaires, on peut donc supposer que $T(k)/R \neq 1$. Vu que $T(k)/R$ est un groupe de 2–torsion, la restriction $T(k)/R \to T(L)/R$ est injective. On considère alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T(k)/R & \hookrightarrow & T(L)/R \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ T(k)/Rat & \longrightarrow & T(L)/Rat \end{array}$$

la bijection de droite étant donnée par le corollaire 3.6. Alors $1 \neq T(k)/R \cong T(k)/Rat$ et le lemme 2.2 montre que le groupe $M/k((X))$ n'est pas stablement rationnel. Il résulte que le groupe $\mathfrak{G}/k((X))((T))$ simplement connexe de type ${}^3D_4$ n'est pas stablement rationnel.

Notons que cet exemple produit un groupe $\mathfrak{G}/L((X))((T))$ simplement connexe de type ${}^1D_4$ qui n'est pas stablement rationnel.

Remarque 7.3. Pour la rationalité du groupe adjoint $(\mathfrak{G}/R^1_{L/k}(\mu_2))/k((t))$, on a affaire au groupe $\overline{H} := H/\mu$ qui est stablement k–rationnel à

$$M^\sharp := \Big\{(x, y) \ \ \mathrm{SL}_1(A) \times R_{L/k}(\mathrm{SL}_1(B)) \mid \ \mathrm{Nrd}_A(x) = N_{L/k}(\mathrm{Nrd}_B(y))\Big\}.$$

La condition $[D] = \mathrm{cor}_k^L([B])$ implique $N_{L/k}(\mathrm{Nrd}_B(B^\times)) \subset \mathrm{Nrd}(A^\times)$. Le même raisonnement qu'au lemme 8.1 montre que $M^\sharp$ est stablement k–rationnel. On ne peut donc pas conclure sur la rationalité de $(\mathfrak{G}/R^1_{L/k}(\mu_2))/k((t))$.

Remarque 7.4. Un argument similaire à celui de la proposition 2.2 montre que les groupes trialitaires simplement connexe ou adjoints de type ${}^3D_4$ ne sont pas en général des variétés stablement rationnelles.

8. Groupes de type F_4

Dans cette section, nous tentons d'appliquer la méthode précédente aux groupes de type F_4. Rappelons le diagramme de Dynkin étendu sous-jacent

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ \bullet & - & \bullet & - & \bullet & \Rightarrow & \bullet & - & \bullet \end{array}$$

La théorie de Bruhat-Tits permet donc de construire des des groupes de type F_4 sur $k((T))$ qui dégénèrent en des groupes semi-simples des types suivants

$$A_1 \times C_3, \;\; A_2 \times A_2, \;\; A_3 \times A_1, \;\; B_4$$

qui sont respectivement des formes *internes* des groupes suivants

$$\Big(\mathrm{SL}_1 \times \mathrm{Sp}_6\Big)/\mu_2, \;\; \Big(\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3\Big)/\mu_3, \;\; \Big(\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_1\Big)/\mu_2, \;\; \mathrm{Spin}_8.$$

Dans le premier cas, c'est un k–groupe

$$\Big(\mathrm{SL}_1(D) \times \mathrm{Sp}(D,h)\Big)/\mu_2,$$

où D est une algèbre de quaternions et h une forme hermitienne non dégénérée sur D^3. Ce groupe est stablement k–birationnel à

$$H := \{(x,y) \in \mathrm{GL}_1(D) \times \mathrm{GSp}_1(D,h) \;\;|\;\; \mathrm{Nrd}(x) = \mu(y)\},$$

où $\mu : \mathrm{GSp}_1(D,h) \to \mathrm{G}_m$ désigne le multiplicateur.

Lemme 8.1. *Le groupe H/k est stablement k–rationnel.*

Démonstration. Le groupe H s'insère dans une suite exacte

$$1 \to \mathrm{SL}_1(D) \times \mathrm{Sp}_1(D,h) \to H \xrightarrow{\alpha} \mathrm{G}_m \to 1.$$

Les groupes $\mathrm{SL}_1(D)$ et $\mathrm{Sp}_1(D,h)$ sont k–rationnels. Vu que Sp_6 est de type C_3, le lemme 3 de [20] indique que $\mu(\mathrm{GSp}_1(D,h)(F)) = \mathrm{Nrd}(D \otimes_k F)^\times) = \alpha(H(F))$ pour tout F/k. Ainsi les images de $\alpha : H(F) \to F^\times$ et $\mathrm{Nrd} : D^\times \to F^\times$ coïncident pour tout F/k. La proposition 3 de [20] permet de conclure que les groupes H est stablement k–rationnel à $\mathrm{GL}_1(D)$, donc rationnel. □

Dans le second cas, il s'agit d'un groupe

$$\Big(\mathrm{SL}_1(D) \times \mathrm{SL}_1(D)\Big)/\mu_3$$

pour une algèbre simple centrale D de degré 3 et un tel groupe est stablement k–rationnel puisque il est stablement birationnel au k–groupe

$$\{(x,y) \in \mathrm{GL}_1(D) \times \mathrm{GL}_1(D) \;\;|\;\; \mathrm{Nrd}(x) = \mathrm{Nrd}(y)\}$$

lui-même stablement k–rationnel. Dans le troisième cas, on a affaire à un groupe

$$\Big(\mathrm{SL}_3(D) \times \mathrm{SL}_1(D)\Big)/\mu_2$$

pour une algèbre de quaternions D et un tel groupe est de même une variété stablement k–rationnelle. Dans le dernier cas, on tombe sur le groupe des spineurs $\mathrm{Spin}(q)$ d'une 3–forme de Pfister q. Il est alors connu que le groupe $\mathrm{Spin}(q)$ est k-rationnel (Chernousov-Merkurjev-Rost [21], Theorem 8.6). En conclusion, notre méthode ne permet pas de construire de variétés de groupe de type F_4 non rationnels.

References

[1] M. Borovoi et B. Kunyavskiĭ, avec un appendice de P. Gille, *Arithmetic birational invariants of linear algebraic groups over two dimensional geometric fields*, J. Algebra **276** (2004), 292–339.

[2] M. Brion et S. Kumar, *Frobenius splitting methods in geometry and representation theory*, Progress in Mathematics **231** (2005), Birkhäuser Boston.

[3] V.I. Chernousov et A. A. Merkurjev, *R-equivalence in spinor groups*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 509–534.

[4] V.I. Chernousov et V. P. Platonov, *The rationality problem for semisimple group varieties*, J. Reine Angew. Math. **504** (1998), 1–28.

[5] J.–L. Colliot–Thélène et J.–J. Sansuc, *La R–équivalence sur les tores*, Ann. Scient. ENS, vol. **10** (1977), 175–230.

[6] J.–L. Colliot–Thélène et J.–J. Sansuc, *Principal Homogeneous Spaces under Flasque Tori: Applications*, Journal of algebra **106** (1987), 148–205.

[7] J.–L. Colliot–Thélène, P. Gille et R. Parimala, *Arithmetic of linear algebraic groups over two-dimensional geometric fields*, Duke Math. J. **121** (2004), 285–341.

[8] A. Cortella et B. Kunyavskiĭ, *Rationality problem for generic tori in simple groups*, J. Algebra **225 (2000)**, 771–793.

[9] W. Fulton, *Intersection theory, second edition*, Springer (1998).

[10] S. Garibaldi, *Kneser-Tits Conjecture for a rank 1 form of E_6 (after Veldkamp)*, to appear in Compositio Mathematica.

[11] P. Gille, *La* R-*équivalence sur les groupes algébriques réductifs définis sur un corps global*, Publ. Math. I.H.E.S. **86** (1997), 199–235.

[12] P. Gille, *Examples of Non-rational Varieties of Adjoint Groups*, Journal of Algebra **193** (1997), 728–747.

[13] P. Gille, *Spécialisation de la* R-*équivalence pour les groupes réductifs*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), 4465–4474.

[14] R.S. Garibaldi, J. P. Serre et A.A. Merkurjev, *Cohomological invariants in Galois cohomology*, American Mathematical Society University Lecture Series, volume 28.

[15] P. Gille et T. Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, à paraître à Cambridge University Press.

[16] J. Kollár, *Specialization of zero-cycles*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **40** (2004), 689–708.

[17] D.A. Madore, *Sur la spécialisation de la R-équivalence*, http://www.dma.ens.fr/ madore/.

[18] Y. Manin, *Cubic forms*, 2-nde édition, North–Holland (1986).

[19] A. A. Merkurjev, *Certain K–cohomology groups*, Jacob, Bill (ed.) et al., K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras, Santa Barbara, Proc. Symp. Pure Math. **58** (1995), Part 2, 319-331.

[20] A. A. Merkurjev, *R-equivalence and rationality problem for semisimple adjoint classical algebraic groups*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **84**(1996), 189–213.

[21] A. A. Merkurjev, *K-theory and algebraic groups*, European Congress of Mathematics, Vol. II (Budapest, 1996), 43–72, Progr. Math., **169**, Birkhäuser, Basel, 1998.

[22] A. P. Monastyrnyĭ et V. I Yanchevskiĭ, *Whitehead groups of spinor groups* (en russe) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **54** (1990), 60–96, 221; tranduction anglaise dans Math. USSR-Izv. **36** (1991), 61–100.

[23] J. Neukirch, A. Schmidt et K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 323 (2000), Springer-Verlag.

[24] V. Platonov, *The Tannaka-Artin problem, and groups of projective conorms*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **222** (1975), no. 6, 1299–1302.

[25] D. Saltman, *Retract rational fields and cyclic Galois extensions*, Israel J. Math. **47** (1984), 165–215.

[26] *Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S., 1963-1964, schémas en groupes, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck*, Lecture Notes in Math. 151-153. Springer (1970).

[27] D. Shapiro, J.–P. Tignol and A. Wadsworth, *Witt rings and Brauer groups under multiquadratic extensions. II*, J. of Algebra **78** (1982), 58–90.

[28] A. A. Suslin, *SK_1 of division algebras and Galois cohomology*, Algebraic K-theory, 75–99, Adv. Soviet Math., **4** (1991), Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[29] J. Tits, *Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups*, Journal of Algebra **131** (1990), 648–677.

[30] V.E. Voskresenskiĭ, *The reduced Whitehead group of a simple algebra*, Uspehi Mat. Nauk **32** (1977), no. 6 (198), 247–248.

[31] V.E. Voskresenskiĭ, *Algebraic groups and their birational invariants*, Trans. of Math. of Monographs, vol **179** (1998), AMS.

Philippe Gille, UMR 8628 du CNRS, Mathématique, Bât. 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France.