LES FORMES BILINÉAIRES BONNES DE HAUTEUR 2 EN CARACTÉRISTIQUE 2

AHMED LAGHRIBI

ABSTRACT. Our aim is to give a complete classification of bilinear forms which are good of height 2 over a field of characteristic 2, i.e., those whose anisotropic parts over their function fields are similar to bilinear Pfister forms which are definable over the ground field. Other related results are included.

RÉSUMÉ. Notre but est de donner une classification complète des formes bilinéaires qui sont bonnes de hauteur 2 sur un corps de caractéristique 2, i.e, celles dont la partie anisotrope sur leurs corps de fonctions est semblable à une forme bilinéaire de Pfister définissable sur le corps de base. D'autres résultats en relation sont incorporés.

1. INTRODUCTION

Soit F un corps commutatif de caractéristique 2. Toutes les formes bilinéaires considérées dans cet article sont supposées symétriques, régulières et de dimension finie.

Pour une extension L/F, on dit qu'une L-forme bilinéaire (ou quadratique) B est définissable sur F s'il existe une F-forme bilinéaire (ou quadratique) C tel que $B \simeq C_L$. Si C est unique, alors on dit que B est définie sur F par C ($\simeq$ désigne l'isométrie des formes).

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $BP_n(F)$ (*resp.* $GBP_n(F)$) l'ensemble des formes bilinéaires isométriques (*resp.* semblables) à des n-formes bilinéaires de Pfister. On désigne par $\langle a_1, \cdots, a_n \rangle_b$ la forme bilinéaire $a_1x_1y_1 + \cdots + a_nx_ny_n$ pour $a_1, \cdots, a_n \in F^* := F - \{0\}$.

Si B est une forme bilinéaire d'espace sous-jacent V, on note $\widetilde{B}$ la forme quadratique définie sur V par: $\widetilde{B}(v) = B(v, v)$ pour tout $v \in V$. Il est clair que $\widetilde{B}$ ne dépend que de la classe d'isométrie de B.

À toute forme bilinéaire B non nulle, on associe sa tour de déploiement standard $(F_i, B_i)_{i \geq 0}$ donnée de la manière suivante:

$$\begin{cases} F_0 = F \quad \text{et} \quad B_0 = B_{\text{an}} \\ \text{Pour } n \geq 1 : \quad F_n = F_{n-1}(B_{n-1}) \quad \text{et} \quad B_n = ((B_{n-1})_{F_n})_{\text{an}}, \end{cases}$$

Date: 02 Juin, 2009.

2000 MSC. 11E04, 11E81.

Mots clés. Formes bilinéaires, formes quadratiques, corps de fonctions d'une quadrique, théorie de déploiement standard, degré normique.

où pour toute forme bilinéaire C, on note $\dim C$ sa dimension, C_{an} sa partie anisotrope, et $F(C)$ le corps de fonctions de la quadrique affine d'équation $\widetilde{C}=0$. La hauteur de B, qu'on note $\mathrm{h}(B)$, est le plus petit entier h tel que $\dim B_h \leq 1$. La classification des formes bilinéaires de hauteur 1 a été donnée dans [20, Th. 4.1] et affirme ce qui suit: *Une forme bilinéaire anisotrope B est de hauteur 1 si et seulement si il existe une forme bilinéaire de Pfister $\pi = \langle 1\rangle_b \perp \pi'$ tel que B soit semblable à π ou π' suivant que $\dim B$ est paire ou impaire ($\perp$ désigne la somme orthogonale).*

Cette classification permet d'attacher à toute forme bilinéaire B un invariant numérique, noté $\deg(B)$ et appelé le degré de B, comme suit: Si $(F_i, B_i)_{0\leq i\leq h}$ est la tour de déploiement standard de B avec $h=\mathrm{h}(B)$, alors B_{h-1} est de hauteur 1, et donc B_{h-1} correspond à une F_{h-1}-forme bilinéaire de Pfister π au sens de la classification des formes de hauteur 1 ci-dessus. La forme π est appelée la forme dominante de B. Si $\dim B$ est paire, le degré de B est l'entier d tel que $\dim\pi = 2^d$. Sinon, on dit que B est de degré 0. La forme B est dite bonne lorsque la forme π est définissable sur F. Dans ce cas, on sait que π est définie sur F par une forme bilinéaire de Pfister [20, Prop. 5.3].

Évidemment, toute forme bilinéaire de hauteur 1 est bonne. La classification des formes bilinéaires bonnes de hauteur 2 et de degré 0 est donnée dans [20, Prop. 5.9]. Dans [20, Th. 5.10], on a classifié les formes bilinéaires B qui sont bonnes de hauteur 2 et de degré $d>0$, à l'exception du cas $\dim B = 2^k \geq 2^{d+2}$. Récemment dans [22], en collaboration avec Rehmann, on a répondu à ce cas ouvert lorsque $d=1$ ou 2. Notre résultat principal dans cet article est le théorème suivant qui donne une classification complète des formes bilinéaires bonnes de hauteur 2 et de degré non nul quelconque. En prenant en compte les résultats de [20, Th. 5.10], on obtient:

Théorème 1.1. *Soient B une forme bilinéaire anisotrope, et $\tau \in BP_d(F)$ anisotrope. Alors, B est bonne de hauteur 2 et de forme dominante τ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée:*
(1) $\dim B = 2^m - 2^d$ pour un certain $m \geq d+2$, et $B \simeq \rho\otimes\tau$ avec $\dim\rho$ est impaire et $B \perp \langle\det\rho\rangle_b \otimes \tau \in GBP_m(F)$.
(2) $\dim B = 2^n$ pour un certain $n \geq d+1$, et $B \simeq x\theta\otimes(\lambda' \perp \langle y\rangle_b)$ avec $x, y \in F^*$, $\theta \in BP_{d-1}(F)$, $\lambda = \langle 1\rangle_b \perp \lambda' \in BP_{n-d+1}(F)$ et $\tau \simeq \theta \otimes \langle 1, y\rangle_b$ tel que $\widetilde{B}$ soit semblable à $\widetilde{\theta\otimes\lambda}$ lorsque $n \geq d+2$.

Les résultats obtenus auparavant dans [20, 22] sur la classification des formes bilinéaires bonnes de hauteur 2 et de degré $d>0$ ne mentionnent pas la propriété de divisibilité par une forme de $BP_{d-1}(F)$, comme décrit dans la condition (2) du théorème 1.1. Ceci nous est possible après avoir montré que le théorème classique d'Elman et Lam sur la liaison des formes quadratiques de Pfister en caractéristique $\neq 2$ s'étend au cas des formes bilinéaires en caractéristique 2 (Théorème 3.6), ce qui répond par l'affirmative à [21, Question 6.4].

Le théorème 1.1 vient répondre positivement à [20, Question 5.12], et se met en parallèle avec la classification des formes quadratiques bonnes de hauteur 2 en caractéristique $\neq 2$. Plus précisément, on sait qu'en caractéristique $\neq 2$, une forme quadratique anisotrope φ qui est bonne de hauteur 2, de degré $d > 0$ et de forme dominante τ est de l'un des deux types suivants:

TYPE I: soit φ est divisible par τ et voisine d'une m-forme de Pfister, $m \geq d+2$, et de forme complémentaire semblable à τ [15, Lem. 10.1], en particulier, $\dim \varphi = 2^m - 2^d$. Ceci ressemble à ce qui est décrit dans la condition (1) du théorème 1.1, puisqu'une forme bilinéaire bonne de hauteur 2 vérifiant cette condition est aussi une voisine de Pfister au sens de la définition 5.1 (voir l'assertion (2) de la proposition 5.3).

TYPE II: soit φ n'est pas une voisine de Pfister, de dimension 2^{d+1} et $\varphi \simeq \theta \otimes \psi$ avec $\dim \psi = 4$ et θ une $(d-1)$-forme quadratique de Pfister (on combine [12, Prop. 4.3(b)], [9] et [24][1], et on procède de la même façon comme dans la preuve du théorème A.1). Ceci entre dans le cadre de la condition (2) du théorème 1.1. Dans notre cas, on a des formes bilinéaires B bonnes de hauteur 2 et de dimension $2^{\deg(B)+k}$ pour tout entier $k \geq 1$ [20, Exam. 5.11], et que certaines de ces formes bilinéaires peuvent être des voisines de Pfister (voir la proposition 5.3). Pour cette raison, on va se baser sur un argument de descente inspiré de [22] pour classifier ces formes bilinéaires, puisque la preuve suggérée en caractéristique $\neq 2$ [12, Prop. 4.3 (b)] ne s'étend pas aux formes bilinéaires de dimension paire $> 2^{\deg(B)+1}$.

Le reste de cet article est organisé comme suit. Dans la section 2, on fera quelques rappels sur les formes bilinéaires et quadratiques en caractéristique 2. La section 3 sera consacrée à des résultats préliminaires, et plus particulièrement à la généralisation aux formes bilinéaires en caractéristique 2 du résultat d'Elman et Lam sur la liaison des formes quadratiques de Pfister en caractéristique $\neq 2$. Ceci permettra, entre autres, de retrouver un autre résultat de liaison dû cette fois-ci à Aravire et Baeza (Proposition 3.7). Après cela, on donnera dans la section 4 la preuve du théorème 1.1. Dans la section 5 on étudiera le comportement des formes bilinéaires bonnes de hauteur 2 sur les corps de fonctions de leurs formes dominantes. Comme on va le voir, nos preuves sont propres aux formes bilinéaires en caractéristique 2, et utilisent des notions et des résultats dont on n'a pas un analogue en caractéristique $\neq 2$, comme la notion de corps normique et le résultat décrivant de manière complète le noyau de Witt du corps de fonctions d'une forme bilinéaire quelconque (Théorème 3.3). On finira cet article par un appendice donnant la classification en caractéristique 2 des formes quadratiques bonnes de hauteur 2. Contrairement aux formes bilinéaires, cette classification se fait plus facilement, et se calque, dans le cas des formes non singulières, sur celle donnée en caractéristique $\neq 2$. Nous la donnons dans cet article dans le but d'avoir une vision complète sur les formes bilinéaires et quadratiques bonnes de hauteur 2 en caractéristique 2.

Remerciements. *Cet article a été achevé durant un séjour à Max-Planck-Institut für Mathematik pendant la période Mars-Avril 2009. Je suis très reconnaissant à cette Institution pour son hospitalité.*

[1]Ce résultat est prouvé en caractéristique 0, mais il s'étend à toute caractéristique par un argument de relèvement comme on l'a fait dans la preuve de la proposition A.4.

2. Quelques rappels

Une forme bilinéaire (ou quadratique) B' est dite une sous-forme d'une autre forme B, ce qu'on note $B' \subset B$, s'il existe une forme bilinéaire (ou quadratique) B'' tel que $B \simeq B' \perp B''$.

Deux formes quadratiques (ou bilinéaires) B et C sont dites semblables si $B \simeq \alpha C$ pour un certain $\alpha \in F^*$.

Pour une forme bilinéaire B d'espace sous-jacent V, on note $D_F(B)$ l'ensemble $F^* \cap \{\widetilde{B}(v) \mid v \in V\}$.

2.1. **Décomposition de Witt raffinée d'une forme bilinéaire.** Pour $a \in F$, on note M_a la forme bilinéaire donnée par la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on l'appelle un plan métabolique. Une forme bilinéaire B est dite isotrope (*resp.* métabolique) si $M_a \subset B$ pour un certain $a \in F$ (*resp.* si elle est une somme orthogonale de plans métaboliques). Une forme bilinéaire (ou quadratique) est dite anisotrope si elle n'est pas isotrope.

Pour deux formes bilinéaires B et B', on note $B \sim B'$ s'il existe des formes métaboliques M et M' tels que $B \perp M \simeq B' \perp M'$.

La décomposition de Witt d'une forme bilinéaire B est son écriture sous la forme:

$$B \simeq B_{\text{an}} \perp M,$$

où B_{an} est une forme bilinéaire anisotrope, et M est une forme métabolique. On sait par [14, 23] que la forme B_{an} est unique, on l'appelle la partie anisotrope de B. L'indice de Witt de B est l'entier $\frac{\dim M}{2}$, on le note $i_W(B)$. La décomposition ci-dessus peut être raffinée comme suit:

$$B \simeq B_{\text{an}} \perp M_{a_1} \perp \cdots \perp M_{a_n} \perp M_0 \perp \cdots \perp M_0,$$

avec $a_1, \cdots, a_n \in F^*$ et $B_{\text{an}} \perp \langle a_1, \cdots, a_n \rangle_b$ est anisotrope. Dans ce cas, l'entier n est unique [20, Prop. 5.15]. On désigne par $i_h(B)$ l'entier $i_W(B) - n$.

Pour toute forme bilinéaire B, la forme quadratique $\widetilde{B}$ se décompose de manière unique comme suit: $\widetilde{B} \simeq (\widetilde{B})_{\text{an}} \perp \langle 0 \rangle \perp \cdots \perp \langle 0 \rangle$, où $(\widetilde{B})_{\text{an}}$ est une forme quadratique anisotrope, dite la partie anisotrope de $\widetilde{B}$, et $\langle a \rangle$ désigne la forme quadratique ax^2 pour tout $a \in F$. On note $i_d(\widetilde{B})$ l'entier $\dim B - \dim(\widetilde{B})_{\text{an}}$.

D'après [20, Prop. 5.15], les entiers $i_W(B)$, $i_h(B)$ et $i_d(\widetilde{B})$ sont liés par la relation suivante:

$$i_W(B) + i_h(B) = i_d(\widetilde{B}). \tag{1}$$

La décomposition de Witt d'une forme quadratique quelconque est détaillée dans [10].

2.2. **Formes de Pfister.** Une n-forme bilinéaire de Pfister ($n \geq 1$) est une forme isométrique à $\langle 1, a_1 \rangle_b \otimes \cdots \otimes \langle 1, a_n \rangle_b$, on la note $\langle\langle a_1, \cdots, a_n \rangle\rangle_b$. On prend $\langle 1 \rangle_b$ comme étant la 0-forme bilinéaire de Pfister.

Pour toute forme bilinéaire de Pfister B, il existe une forme bilinéaire B' tel que $B \simeq \langle 1\rangle_b \perp B'$. Cette forme est unique [5, Cor. 2.18, page 101], on l'appelle la partie pure de B.

Une $(n+1)$-forme quadratique de Pfister est une forme isométrique à $B \otimes [1, a]$, où $B \in BP_n(F)$, $[1, a]$ est la forme quadratique $x^2 + xy + ay^2$, et $\otimes$ est le produit des formes bilinéaires par des formes quadratiques non singulières [5]. On note $P_n(F)$ (*resp.* $GP_n(F)$) l'ensemble des formes quadratiques isométriques (*resp.* semblables) à des n-formes quadratiques de Pfister.

Rappelons qu'une forme bilinéaire (*resp.* quadratique) de Pfister est isotrope si et seulement si elle est métabolique (*resp.* hyperbolique) [19, Prop. 3.3], [5, Cor. 3.2, p. 105]. De plus, une forme quadratique (ou bilinéaire) de Pfister B est multiplicative, ce qui signifie que $B \simeq \alpha B$ pour tout $\alpha \in D_F(B)$ [5, Cor. 2.6, p. 101; Th. 2.4, p. 95].

Une forme quadratique φ est dite une voisine de Pfister s'il existe une forme quadratique de Pfister π tel que $2 \dim \varphi > \dim \pi$ et $a\varphi$ est dominée par π pour un certain $a \in F^*$ [10, Def. 3.4].

2.3. **Le Hauptsatz d'Arason-Pfister.** Soit IF l'idéal de $W(F)$ formé des formes bilinéaires de dimension paire, et $W_q(F)$ le groupe de Witt des formes quadratiques non singulières. Pour tout entier $n \geq 1$, on note I^nF (*resp.* $I^nW_q(F)$) la puissance n-ième de IF (*resp.* le sous-groupe $I^{n-1}F \otimes W_q(F)$ de $W_q(F)$). On a que I^nF et $I^nW_q(F)$ sont engendrés additivement par les n-formes de Pfister.

Pour $B \in I^nF$ (ou $B \in I^nW_q(F)$) anisotrope, on a $\dim B \geq 2^n$, c'est le Hauptsatz d'Arason-Pfister. Si de plus, $\dim B = 2^n$, alors B est semblable à une n-forme de Pfister ([20, Lem. 4.8] pour les formes bilinéaires; la proposition A.4 pour les formes quadratiques).

On note $\overline{I^n}F$ le quotient $I^nF/I^{n+1}F$ pour tout entier $n \geq 0$.

3. Résultats préliminaires

3.1. **Noyaux de Witt.** On rappelle quelques résultats sur les noyaux de Witt qui vont jouer un rôle important:

Théorème 3.1. *(*[3, Cor. 3.3]*) Soit $B = \langle\langle a_1, \cdots, a_n\rangle\rangle_b \in BP_n(F)$ anisotrope. Alors, le noyau de l'homomorphisme naturel $\overline{I^m}F \longrightarrow \overline{I^m}F(B)$ est trivial lorsque $n > m$, et il est égal à $\{\overline{\psi \otimes \langle\langle x_1, \cdots, x_n\rangle\rangle_b} \mid \psi \in I^{m-n}F$, et $x_1, \cdots, x_n \in F^2(a_1, \cdots, a_n)^*\}$ lorsque $n \leq m$.*

Proposition 3.2. *(*[20, Prop. 4.13]*) Soit $n \geq 1$ un entier, et B une forme bilinéaire anisotrope de dimension $> 2^n$. Alors, le noyau de l'homomorphisme naturel $\overline{I^n}F \longrightarrow \overline{I^n}F(B)$ est trivial.*

Soit B une forme bilinéaire avec $\widetilde{B}$ non nulle. Le corps normique de $\widetilde{B}$, qu'on note $N_F(\widetilde{B})$, est le corps $F^2(\alpha\beta \mid \alpha, \beta \in D_F(B))$. L'entier $[N_F(\widetilde{B}) : F^2]$ s'appelle le degré normique de $\widetilde{B}$, on le note $\mathrm{ndeg}_F(\widetilde{B})$. On dit que la forme $\widetilde{B}$ est une quasi-voisine de Pfister s'il existe une forme bilinéaire de Pfister C tel que $2 \dim B > \dim C$ et $\widetilde{B}$ est semblable à une sous-forme de $\widetilde{C}$. En utilisant le degré normique, on a que $\widetilde{B}$ est une quasi-voisine de Pfister si et seulement si $2\dim B > \mathrm{ndeg}_F(\widetilde{B})$ [10, Prop. 8.9(ii)]. Pour $x_1, \cdots, x_n \in F$ tel que $N_F(\widetilde{B}) = F^2(x_1, \cdots, x_n)$ et $\mathrm{ndeg}_F(\widetilde{B}) = 2^n$, on désigne par $(\widetilde{B})_{qp}$ la forme quadratique $\widetilde{\pi}$, où $\pi = \langle\langle x_1, \cdots, x_n\rangle\rangle_b$. Cette forme quadratique est indépendante du choix des scalaires $x_1, \cdots, x_n$, et $(\widetilde{B})_{\mathrm{an}}$ est semblable à une sous-forme de $(\widetilde{B})_{qp}$. On renvoie à [10, Section 8] pour plus de détails sur le degré normique.

Théorème 3.3. *(*[19, Th. 1.2]*) Soit B une F-forme bilinéaire anisotrope. Posons $\mathrm{ndeg}_F(\widetilde{B}) = 2^n$. Alors, une F-forme bilinéaire anisotrope C devient métabolique sur $F(B)$ si et seulement si il existe des scalaires $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in F^*$ ($k \geq 1$), et des formes $\pi_1, \cdots, \pi_k \in BP_n(F)$ tel que $C \simeq \alpha_1\pi_1 \perp \cdots \perp \alpha_k\pi_k$, et $(\widetilde{B})_{qp} \simeq \widetilde{\pi}_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$.*

3.2. **Liaison des formes bilinéaires de Pfister.** Une autre notion dont on aura besoin concerne la liaison des formes bilinéaires de Pfister. Récemment, on a montré dans [21] que si B et C sont semblables à des formes bilinéaires de Pfister anisotropes, alors l'indice de Witt de $B \perp C$ est nul ou une puissance de 2. Dans cet article, on complète ce résultat en étendant aux formes bilinéaires de Pfister le résultat d'Elman et Lam sur la liaison des formes quadratiques de Pfister en caractéristique $\neq 2$. Ceci a été entamé par Arason et Baeza dans [1], où ils ont étendu aux formes bilinéaires en caractéristique 2 la notion de "p-équivalence par chaîne" (chain p-equivalence) qui est essentielle pour la notion de liaison des formes de Pfister. On renvoie à [1, App. A] pour plus de détails. Un des résultats prouvé dans [1, App. A], qui nous intéresse dans cet article, est la proposition suivante:

Proposition 3.4. *(*[1, Lem. A.6]*) Soient $B \in BP_n(F)$ et $C = \langle 1\rangle_b \perp C' \in BP_m(F)$. Soit $c_1 \in D_F(B \otimes C')$. Alors, il existe $c_2, \cdots, c_m \in F^*$ tel que $B \otimes C \simeq B \otimes \langle\langle c_1, c_2, \cdots, c_m\rangle\rangle$.*

Deux formes bilinéaires $B_1 \in BP_k(F)$ et $B_2 \in BP_l(F)$ sont dites r-liées ($r \leq \min\{k, l\}$) s'il existe des formes $\rho \in BP_r(F)$, $C_1 \in BP_{k-r}(F)$ et $C_2 \in BP_{l-r}(F)$ tel que $B_1 \simeq \rho \otimes C_1$ et $B_2 \simeq \rho \otimes C_2$. Si B et C sont r-liées mais pas $(r+1)$-liées, on dit que r est l'indice de liaison entre B et C, on le note $i(B, C)$.

La même méthode utilisée pour la preuve de [6, Prop. 4.4] s'étend au cas des formes bilinéaires en caractéristique 2:

Proposition 3.5. *Soient $B \in BP_l(F)$ et $C \in BP_m(F)$ anisotropes. Alors:*
(1) Les formes B et C sont k-liées si et seulement si $i_W(B \perp C) \geq 2^k$.
(2) On a $k = i(B, C)$ si et seulement si $i_W(B \perp C) = 2^k$.

Preuve. (1) (i) Supposons que B et C soient k-liées. Soient $\rho \in BP_k(F)$, $\gamma = \langle 1\rangle_b \perp \gamma' \in BP_{l-k}(F)$ et $\lambda = \langle 1\rangle_b \perp \lambda' \in BP_{m-k}(F)$ tel que $B \simeq \rho \otimes \gamma$ et $C \simeq \rho \otimes \lambda$. Ainsi, $B \perp C \simeq (\rho \perp \rho) \perp \rho \otimes (\gamma' \perp \lambda')$, et par conséquent $i_W(B \perp C) \geq \dim \rho = 2^k$.

(ii) Réciproquement, supposons que $i_W(B \perp C) \geq 2^k$. Montrons que B et C sont k-liées. On procède par induction sur k. Il n'y a rien à montrer si $k = 0$. Supposons que $k > 0$, et que B et C soient $(k-1)$-liées. Soient $\theta \in BP_{k-1}(F)$, $B_1 = \langle 1\rangle_b \perp B_1' \in BP_{l-k+1}(F)$ et $C_1 = \langle 1\rangle_b \perp C_1' \in BP_{m-k+1}(F)$ tel que

$B \simeq \theta \otimes B_1$ et $C \simeq \theta \otimes C_1$. Puisque $i_W(B \perp C) \geq 2^k$ et $B \perp C \simeq (\theta \perp \theta) \perp \theta \otimes (B'_1 \perp C'_1)$, on déduit que $i_W(\theta \otimes (B'_1 \perp C'_1)) \geq 1$. Puisque $\theta \otimes B'_1$ et $\theta \otimes C'_1$ sont anisotropes, il existe $c \in D_F(\theta \otimes B'_1) \cap D_F(\theta \otimes C'_1)$. Par la proposition 3.5, il existe $B_2 \in BP_{l-k}(F)$ et $C_2 \in BP_{m-k}(F)$ tel que $B \simeq \theta \otimes \langle 1, c\rangle_b \otimes B_2$ et $C \simeq \theta \otimes \langle 1, c\rangle_b \otimes C_2$, ce qui montre que B et C sont k-liées.

(2) On reprend le même argument que dans (ii). ■

Maintenant, on est en mesure de prouver le théorème suivant qui étend [6, Th. 4.4] aux formes bilinéaires en caractéristique 2:

Théorème 3.6. *Soient $x, y \in F^*$ et B, C des formes bilinéaires de Pfister anisotropes. Si $xB \perp yC$ est isotrope, alors $i_W(xB \perp yC) = 2^k$ où $k = i(B, C)$.*

Preuve. Puisque $xB \perp yC$ est isotrope, et que B et C sont anisotropes, il existe $z \in D_F(xB) \cap D_F(yC)$. Par la multiplicativité d'une forme bilinéaire de Pfister, on obtient $xB \perp yC \simeq z(B \perp C)$. Ainsi, $i_W(xB \perp yC) = i_W(B \perp C)$. La proposition 3.5(2) implique que $i_W(xB \perp yC) = 2^k$ où $k = i(B, C)$. ■

Comme conséquence du théorème 3.6, on retrouve un autre résultat de liaison dû à Aravire et Baeza:

Proposition 3.7. *(*[3, Cor. 2.3]*) Soit $L = F^2(x_1, \cdots, x_n)$ tel que $[L : F^2] = 2^n$. Soient $B, C \in BP_n(L)$ qu'on suppose anisotropes sur F. Alors, il existe $D \in BP_n(L)$ tel que $B \perp C \equiv D \pmod{I^{n+1}F}$.*

On donne un lemme préliminaire:

Lemme 3.8. *Soient $L = F^2(x_1, \cdots, x_n)$ et $\rho = \langle\langle x_1, \cdots, x_n\rangle\rangle_b$. On suppose que $[L : F^2] = 2^n$. Soit $B \in BP_n(L)$ qu'on suppose anisotrope sur F. Alors, les F-formes quadratiques $\widetilde{B}$ et $\widetilde{\rho}$ sont isométriques.*

Preuve. On a par hypothèse $L = N_F(\widetilde{\rho})$ et $\operatorname{ndeg}_F(\widetilde{\rho}) = 2^n$. En particulier, ρ est anisotrope. L'anisotropie de B sur F implique que $\operatorname{ndeg}_F(\widetilde{B}) = 2^n$. Comme $N_F(\widetilde{B}) \subset N_F(\widetilde{\rho})$, on obtient que $N_F(\widetilde{B}) = N_F(\widetilde{\rho})$. Par [10, Prop. 8.5], les F-formes quadratiques $\widetilde{B}$ et $\widetilde{\rho}$ sont isométriques. ■

Preuve de la proposition 3.7. Soit $L = F^2(x_1, \cdots, x_n)$ tel que $[L : F^2] = 2^n$. Soient $B, C \in BP_n(L)$ qu'on suppose anisotropes sur F. Montrons qu'il existe $D \in BP_n(L)$ tel que $B \perp C \equiv D \pmod{I^{n+1}F}$.

Soit $\rho = \langle\langle x_1, \cdots, x_n\rangle\rangle_b$. Par le lemme 3.8, les F-formes quadratiques $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$ et $\widetilde{\rho}$ sont isométriques. Ainsi, $i_d(\widetilde{B} \perp \widetilde{C}) = 2^n$. Par (1), on sait que

$$i_W(B \perp C) + i_h(B \perp C) = i_d(\widetilde{B} \perp \widetilde{C}).$$

Ainsi, $i_d(\widetilde{B} \perp \widetilde{C}) \leq 2i_W(B \perp C)$. Comme $i_W(B \perp C)$ est une puissance de 2 (Théorème 3.6), on a nécessairement $i_W(B \perp C) \in \{2^{n-1}, 2^n\}$.

– Si $i_W(B \perp C) = 2^n$, alors $B \simeq C$, et la proposition est vraie en prenant pour D une forme bilinéaire de Pfister métabolique.

– Si $i_W(B \perp C) = 2^{n-1}$, alors la proposition 3.5 implique l'existence d'une forme $\theta \in BP_{n-1}(F)$ et des scalaires $x, y \in F^*$ tel que $B \simeq \theta \otimes \langle 1, x\rangle_b$ et

$C \simeq \theta \otimes \langle 1, y \rangle_b$. Ainsi, $B \perp C \sim \theta \otimes \langle x, y \rangle_b$. Par conséquent, $B \perp C \equiv D \pmod{I^{n+1}F}$ avec $D = \theta \otimes \langle 1, xy \rangle_b$. Comme les scalaires x, y ainsi que ceux apparaissant dans la diagonalisation de θ appartiennent aux ensembles $D_F(B)$ et $D_F(C)$, qui sont des sous-ensembles de L, on obtient que $D \in BP_n(L)$. ■

On finit cette section par un lemme qui sera utilisé dans les preuves du théorème 1.1 et de la proposition 5.3:

Lemme 3.9. *(*[22, Lem. 4.1]*) Soit B une F-forme bilinéaire anisotrope de hauteur 2 et de degré > 0. Soit τ sa forme dominante. Si $B_{F(\tau)}$ est isotrope, alors $B_{F(\tau)}$ est métabolique.*

4. Preuve du théorème 1.1

Soient B une forme bilinéaire anisotrope, et $\tau = \langle 1 \rangle_b \perp \tau' \in BP_d(F)$ anisotrope. Comme mentionné dans l'introduction, le théorème a été prouvé dans [20] lorsque $\dim B$ n'est pas une puissance de 2, ou $\dim B = 2^{\deg(B)+1}$. Pour la suite, on suppose $\dim B = 2^n$ avec $n \geq \deg(B) + 2$.

(i) Supposons que B soit bonne de hauteur 2 et de forme dominante τ. Donc, $d = \deg(B)$. Soit $\alpha \in F(B)^*$ tel que $B_{F(B)} \simeq \alpha(\tau_{F(B)})$. D'après [20, Prop. 5.3], on a $B \perp \tau \in I^{d+1}F$. Puisque $B \perp \tau$ est métabolique sur $F(B)(\tau)$, on a que $B \perp \tau + I^{d+2}F$ appartient au noyau de $\overline{I^{d+1}}F \longrightarrow \overline{I^{d+1}}F(B)(\tau)$.

• Si $B_{F(\tau)}$ est anisotrope, alors la proposition 3.1 implique que $B \perp \tau + I^{d+2}F$ appartient au noyau de $\overline{I^{d+1}}F \longrightarrow \overline{I^{d+1}}F(\tau)$ du fait que $\dim B > 2^{d+1}$.

• Si $B_{F(\tau)}$ est isotrope, alors le lemme 3.9 implique que $B_{F(\tau)}$ est métabolique. En particulier, $B \perp \tau + I^{d+2}F$ appartient au noyau de $\overline{I^{d+1}}F \longrightarrow \overline{I^{d+1}}F(\tau)$.

Dans les deux cas, on déduit par le théorème 3.1 que $B \perp \tau \perp \mu \otimes \gamma \in I^{d+2}F$ pour $\mu \in IF$ et $\gamma = \langle 1 \rangle \perp \gamma' \in BP_d(F)$ convenables. Puisque $\mu \perp \langle 1, r \rangle_b \in I^2F$ avec $r = \det \mu$, on déduit qu'on a

$$B \perp \tau \perp \langle 1, r \rangle_b \otimes \gamma \in I^{d+2}F. \tag{2}$$

Puisque $\tau \perp \langle 1, r \rangle_b \otimes \gamma$ est isotrope, on étend (2) au corps $F(B)$ et on applique le Hauptsatz d'Arason-Pfister pour avoir

$$\alpha(\tau_{F(B)}) \sim (\tau \perp \langle 1, r \rangle_b \otimes \gamma)_{F(B)} \sim (\tau' \perp \langle r \rangle_b \perp \langle 1, r \rangle_b \otimes \gamma')_{F(B)}. \tag{3}$$

Il est clair que (3) implique

$$i_W(\tau' \perp \langle r \rangle_b \perp \langle 1, r \rangle_b \otimes \gamma')_{F(B)} = 2^d - 1.$$

Ainsi, toute sous-forme de $\tau' \perp \langle r \rangle_b \perp \langle 1, r \rangle_b \otimes \gamma'$ de dimension $\geq 2^{d+1}$ est isotrope sur $F(B)$. Comme $\dim B \geq 2^{d+2}$, on déduit de [11] que toute sous-forme de $\tau' \perp \langle r \rangle_b \perp \langle 1, r \rangle_b \otimes \gamma'$ de dimension 2^{d+1} est isotrope. Par conséquent, $\dim(\tau' \perp \langle r \rangle_b \perp \langle 1, r \rangle_b \otimes \gamma')_{\text{an}} < 2^{d+1}$. De nouveau, par [11] et (3), on déduit que $\dim(\tau' \perp \langle r \rangle_b \perp \langle 1, r \rangle_b \otimes \gamma')_{\text{an}} = 2^d$, i.e., $\alpha(\tau_{F(B)})$ est définissable sur F. Ainsi, sans perdre de généralités, on peut supposer que $\alpha \in F^*$. Par conséquent, $(B \perp \alpha\tau)_{F(B)}$ est métabolique. La forme $B \perp \alpha\tau$ ne peut être métabolique car B est anisotrope. Puisque $\dim(B \perp \alpha\tau)_{\text{an}} < 2^{n+1}$ et $\operatorname{ndeg}_F(\widetilde{B}) \geq \dim B = 2^n$, on déduit par le théorème 3.3 que, d'une part $\mathrm{ndeg}_F(\widetilde{B}) = 2^n$ et donc $(\widetilde{B})_{qp}$ est semblable à $\widetilde{B}$, et d'autre part il existe $\pi \in BP_n(F)$ tel que $(\widetilde{B})_{qp} \simeq \widetilde{\pi}$ et $B \sim \alpha\tau \perp \beta\pi$ pour un certain $\beta \in F^*$. Par conséquent, $i_W(\alpha\tau \perp \beta\pi) = 2^{d-1}$. Par le théorème 3.6, il existe $x, y \in F^*$, $\theta \in BP_{d-1}(F)$ et $\lambda = \langle 1 \rangle \perp \lambda' \in BP_{n-d+1}(F)$ tel que $\pi \simeq \theta \otimes \lambda$, $\tau \simeq \theta \otimes \langle 1, y \rangle_b$ et $B \simeq x\theta \otimes (\lambda' \perp \langle y \rangle_b)$.

(ii) Réciproquement, supposons qu'il existe $x, y \in F^*$, $\theta \in BP_{d-1}(F)$ et $\lambda = \langle 1 \rangle_b \perp \lambda' \in BP_{n-d+1}(F)$ tel que $B \simeq x\theta \otimes (\lambda' \perp \langle y \rangle_b)$, $\tau \simeq \theta \otimes \langle 1, y \rangle_b$, et que $\widetilde{B}$ soit semblable à $\widetilde{\theta \otimes \lambda}$. Puisque $(\theta \otimes \lambda)_{F(B)}$ est métabolique, on a $B_{F(B)} \sim x\tau_{F(B)}$. Puisque $\dim B > 2^d$, on déduit par [11] et l'unicité de la partie anisotrope que $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq x\tau_{F(B)}$. Ainsi, B est bonne de hauteur 2 et de forme dominante τ. ■

5. Formes bilinéaires bonnes de hauteur 2 et leurs formes dominantes

Cette section concerne le comportement des formes bilinéaires bonnes de hauteur 2 sur les corps de fonctions de leurs formes dominantes. Afin de détailler cette question, on rappelle la notion de forme bilinéaire voisine de Pfister:

Définition 5.1. *(*[19, Def. 5.1]*) Une forme bilinéaire B est dite une voisine d'une forme bilinéaire de Pfister ρ si $2\dim B > \dim \rho$ et s'il existe une forme bilinéaire C tel que $\widetilde{B} \simeq \widetilde{C}$ et C est semblable à une sous-forme de ρ.*

Comme dans la définition 5.1, la forme de Pfister ρ n'est pas unique à isométrie près, et la forme B vérifie vis-à-vis de ρ les propriétés classiques que vérifient les formes quadratiques voisines [19, Prop. 5.2, 5.3]. Dans cet article, on va se servir de la caractérisation suivante des formes bilinéaires voisines de Pfister:

Proposition 5.2. *(*[20, Prop. 3.8]*) Une forme bilinéaire B anisotrope est une voisine d'une forme bilinéaire de Pfister si et seulement si $\widetilde{B}$ est une quasi-voisine de Pfister.*

Les formes bilinéaires bonnes sont caractérisées comme suit. D'après [20, Prop. 5.3], on sait qu'une forme bilinéaire B, de hauteur quelconque, est bonne de degré $d > 0$ si et seulement si il existe $\tau \in BP_d(F)$ tel que $\deg(B \perp \tau) \geq d + 1$. Dans ce cas, $\tau_{F_{h-1}}$ est la forme dominante de B, où $(F_i, B_i)_{0 \leq i \leq h}$ est la tour de déploiement standard de B avec $h = \mathrm{h}(B)$. Si B est de degré 0, alors B est bonne si et seulement si $B \perp \langle \det B \rangle_b$ est bonne, dans ce cas les formes B et $B \perp \langle \det B \rangle_b$ possèdent la même forme dominante. Les mêmes résultats sont vrais en caractéristique $\neq 2$ pour les formes quadratiques bonnes.

Aussi, en caractéristique $\neq 2$, une forme quadratique anisotrope φ qui est bonne mais non voisine, de hauteur 2 et de degré $d > 0$ satisfait à la condition que φ_K est semblable à une $(d+1)$-forme de Pfister anisotrope, où K est le corps de fonctions de sa forme dominante [15, Lem. 10.1], [9]. Pour établir l'analogue de ce résultat en caractéristique 2 pour les formes bilinéaires bonnes de hauteur 2, on va se baser sur la notion de degré normique introduite dans [10, Section 8]. Cette notion permet, grâce à la proposition 5.2, de savoir si une forme bilinéaire anisotrope est une voisine de Pfister. On va distinguer entre les formes bonnes de degré nul et celles de degré non nul.

5.1. **Cas des formes bilinéaires bonnes de hauteur 2 et de degré > 0.** Dans la proposition qui suit, on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme bilinéaire anisotrope bonne, de hauteur 2 et de degré non nul, reste anisotrope sur le corps de fonctions de sa forme dominante:

Proposition 5.3. *Soit B une forme bilinéaire anisotrope de dimension paire (i.e., $\deg(B) > 0$). On suppose que B est bonne de hauteur 2 et de forme dominante $\tau \in BP_d(F)$. Alors, on a les affirmations suivantes:*
(1) $B_{F(\tau)}$ est isotrope si et seulement si $B_{F(\tau)}$ est métabolique.
(2) La forme $B_{F(\tau)}$ est isotrope dans les cas suivants:

(i) $\dim B$ *n'est pas une puissance de* 2.
(ii) $\dim B = 2^n$ *avec* $n \geq d+2$.
(iii) $\dim B = 2^{d+1}$ *avec* $\mathrm{ndeg}_F(\widetilde{B}) = 2^{d+1}$.

($\mathrm{ndeg}_F(\widetilde{B})$ *désigne le degré normique de $\widetilde{B}$, voir le paragraphe suivant la proposition 3.2.)*
Dans les trois cas (i)-(iii), la forme B est une voisine de Pfister.
(3) Si $\dim B = 2^{d+1}$ et $\mathrm{ndeg}_F(\widetilde{B}) > 2^{d+1}$, alors $B_{F(\tau)} \in GBP_{d+1}(F)$ et anisotrope, et B n'est pas une voisine de Pfister.

Preuve. (1) C'est le lemme 3.9.

Pour la suite, on va regrouper les preuves des assertions (2) et (3).

(2)-(3) Il est bien clair, par le théorème 1.1, que si $\dim B$ n'est pas une puissance de 2, alors $B_{F(\tau)}$ est isotrope et B est une voisine de Pfister. Pour le reste de la preuve, on supposera que $\dim B = 2^n$ avec $n \geq d+1$.

Par le théorème 1.1, il existe $x, y \in F^*$, $\theta \in BP_{d-1}(F)$ et $\lambda = \langle 1\rangle_b \perp \lambda' \in BP_{n-d+1}(F)$ tel que $B \simeq x\theta \otimes (\lambda' \perp \langle y\rangle_b)$ et $\tau \simeq \theta \otimes \langle 1, y\rangle_b$, avec la condition que $\widetilde{B}$ est semblable à $\widetilde{\theta \otimes \lambda}$ lorsque $n \geq d+2$. Puisque $\theta_{F(\tau)}$ est anisotrope, et que $\tau_{F(\tau)}$ est métabolique, on déduit que $\theta_{F(\tau)} \simeq y\theta_{F(\tau)}$. Par conséquent,

$$B_{F(\tau)} \simeq x(\theta \otimes \lambda)_{F(\tau)}. \tag{4}$$

La condition $B \simeq x\theta \otimes (\lambda' \perp \langle y\rangle_b)$ implique que $N_F(\widetilde{B}) = N_F(\widetilde{\theta \otimes \lambda})(y)$.

La forme $\theta \otimes \lambda'$ est anisotrope puisqu'elle est semblable à une sous-forme de B. Ainsi, $\theta \otimes \lambda$ est aussi anisotrope. Par conséquent, $\mathrm{ndeg}_F(\widetilde{\theta \otimes \lambda}) = 2^n$. On distingue deux cas:

(A) Supposons que ($n \geq d+2$) ou ($n = d+1$ et $\mathrm{ndeg}_F(\widetilde{B}) = 2^{d+1}$).

Puisque $\widetilde{B}$ est semblable à $\widetilde{\theta \otimes \lambda}$ lorsque $n \geq d+2$, et que par hypothèse $\mathrm{ndeg}_F(\widetilde{B}) = 2^n$ lorsque $n = d+1$, on obtient que $[N_F(\widetilde{B}) : F^2] = 2^n$. Ainsi, $2\dim B > \mathrm{ndeg}_F(\widetilde{B})$, et par conséquent $\widetilde{B}$ est une quasi-voisine de Pfister. Par la proposition 5.2, B est une voisine de Pfister. Puisque

$$\mathrm{ndeg}_F(\widetilde{\theta \otimes \lambda}) = 2^n = \mathrm{ndeg}_F(\widetilde{B}),$$

$$N_F(\widetilde{B}) = N_F(\widetilde{\theta \otimes \lambda})(y),$$

on a $y \in N_F(\widetilde{\theta \otimes \lambda})$. Ainsi, $N_F(\widetilde{\tau}) \subset N_F(\widetilde{\theta \otimes \lambda})$ puisque $\tau \simeq \theta \otimes \langle 1, y\rangle_b$. Par conséquent, $(\widetilde{\theta \otimes \lambda})_{F(\tau)}$ est isotrope [10, Prop. 8.13]. Ainsi, par (4), $B_{F(\tau)}$ est isotrope.

(B) Supposons que $n = d + 1$ et $\mathrm{ndeg}_F(\widetilde{B}) > 2^{d+1}$.

Alors, $y \notin N_F(\widetilde{\theta \otimes \lambda})$ car sinon on aurait $\mathrm{ndeg}_F(\widetilde{B}) = 2^n$. Par conséquent, $N_F(\widetilde{\tau}) \not\subset N_F(\widetilde{\theta \otimes \lambda})$, et donc $(\widetilde{\theta \otimes \lambda})_{F(\tau)}$ est anisotrope. Ainsi, par (4), $B_{F(\tau)} \in GBP_{d+1}(F(\tau))$ et anisotrope. De plus, $\widetilde{B}$ n'est pas une quasi-voisine puisqu'on ne peut pas avoir $2\dim B = 2^{n+1} > \mathrm{ndeg}_F(\widetilde{B}) > 2^n$. Par conséquent, B n'est pas une voisine de Pfister.

Ceci achève la preuve des assertions (2) et (3). ∎

La réciproque de l'assertion (3) de la proposition 5.3 est donnée par l'assertion (3) de la proposition suivante:

Proposition 5.4. *Soient $d \geq 1$ un entier, B une forme bilinéaire anisotrope de dimension 2^{d+1}, et C une forme bilinéaire anisotrope. On suppose que $B_{F(C)} \in BP_{d+1}(F(C))$ et anisotrope. On a les affirmations suivantes:*
(1) Si $\dim C > 2^{d+2}$, alors $B \in BP_{d+1}(F)$.
(2) Si $\dim C > 2^d$, alors $B \in GBP_{d+1}(F)$.
(3) Si $\dim C = 2^d$ et B n'est pas une voisine de Pfister (ou plus faiblement, B n'est pas semblable à une forme de Pfister), alors B est bonne de hauteur 2, de degré d dont la forme dominante τ satisfait à la condition que $\widetilde{\tau}$ est semblable à $\widetilde{C}$. Dans ce cas, on a $\mathrm{ndeg}_F(\widetilde{B}) > 2^{d+1}$.

Preuve. (1)-(2) Supposons que $\dim C > 2^d$. On va montrer que $B \in GBP_{d+1}(F)$, et que $B \in BP_{d+1}(F)$ si $\dim C > 2^{d+2}$.

En partant du fait que $B_{F(C)} \in BP_{d+1}(F(C)) \subset I^{d+1}F(C)$, et en appliquant successivement la proposition 3.2, on obtient que $B \in I^{d+1}F$. Ainsi, $B \simeq x\pi$ pour $x \in F^*$ et $\pi \in BP_{d+1}(F)$ convenables, d'où l'assertion (2). Par la multiplicativité d'une forme de Pfister, on a $B_{F(C)} \simeq (x\pi)_{F(C)} \simeq \pi_{F(C)}$. Ainsi, $(\pi \perp x\pi)_{F(C)}$ est métabolique. Si $\dim C > 2^{d+2}$, alors $\pi \perp x\pi$ est métabolique, i.e., $B \simeq \pi \in BP_{d+1}(F)$, d'où l'assertion (1).

(3) Supposons que $\dim C = 2^d$, et que B ne soit pas une voisine de Pfister (ou plus faiblement, B ne soit pas semblable à une forme Pfister). On va montrer que B est bonne de hauteur 2, de degré d et de forme dominante $\tau \in BP_d(F)$ qui satisfait à la condition que $\widetilde{\tau}$ est semblable à $\widetilde{C}$, et $\mathrm{ndeg}_F(\widetilde{B}) > 2^{d+1}$.

Posons $\mathrm{ndeg}_F(\widetilde{C}) = 2^k$. On se base sur le fait que $B_{F(C)} \in I^{d+1}F(C)$, et on applique successivement la proposition 3.2 pour avoir $B \in I^dF$. On ne peut pas avoir $B \in I^{d+1}F$ car sinon B serait semblable à une forme de Pfister, en particulier B serait une voisine de Pfister. Par [20, Th. 4.5], on a que $\deg(B) = d$. Comme $B_{F(C)} \in BP_{d+1}(F(C))$, la forme $B_{F(C)(B)}$ est métabolique. Puisque B n'est pas semblable à une forme de Pfister, la forme $B_{F(B)}$ n'est pas métabolique. Par le théorème 3.3, on a que $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq \alpha_1\pi_1 \perp \cdots \perp \alpha_r\pi_r$ pour certains

$\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in F^*$ ($r \geq 1$), et $\pi_1, \cdots, \pi_r \in BP_k(F)$ vérifiant $\widetilde{\pi_i} \simeq (\widetilde{C})_{qp}$. En particulier, $r \cdot 2^k < \dim B = 2^{d+1}$. Comme $2^k \geq \dim C = 2^d$ et $r \geq 1$, on déduit que $k = d$ et $r = 1$. Ainsi, $(B_{F(B)})_{\text{an}}$ est semblable à une d-forme de Pfister, i.e., B est de hauteur 2. De plus, les conditions $\dim C = 2^d$ et $\operatorname{ndeg}_F(\widetilde{C}) = 2^d$ impliquent que $\widetilde{C}$ est semblable à $(\widetilde{C})_{qp}$, i.e., il existe $\pi = \langle\langle x_1, \cdots, x_d\rangle\rangle_b \in BP_d(F)$ tel que $\widetilde{\pi}$ est semblable à $\widetilde{C}$. En particulier, $F(C) = F(\pi)$. Puisque $B_{F(C)} \in I^{d+1}F(C)$, on a que $B + I^{d+1}F$ appartient au noyau de l'homomorphisme $\overline{I^d}F \longrightarrow \overline{I^d}F(C)$. Par le théorème 3.1, il existe $\tau = \langle\langle y_1, \cdots, y_d\rangle\rangle_b \in BP_d(F)$ tel que $y_1, \cdots, y_d \in F^2(x_1, \cdots, x_d)^*$ et $B \perp \tau \in I^{d+1}F$. Par le lemme 3.8, on a que $\widetilde{\tau} \simeq \widetilde{\pi}$, et donc $\widetilde{\tau}$ est semblable à $\widetilde{C}$. De plus, par [20, Prop. 5.3 (2)], B est bonne de forme dominante τ. Finalement, le fait que B ne soit pas une voisine de Pfister implique que $\operatorname{ndeg}_F(\widetilde{B}) > 2^{d+1}$. ■

La proposition 5.4 étend aux formes bilinéaires en caractéristique 2 un résultat de Kahn [12, Prop. 4.2]. En combinant le théorème 1.1 et la proposition 5.4, on obtient le corollaire suivant qui montre que le corps de fonctions d'une forme bilinéaire anisotrope de dimension 2^n (en particulier, celui d'une forme de $BP_n(F)$) satisfait à la descente pour les formes de $BP_{n+1}(F)$:

Corollaire 5.5. *Soient $n \geq 1$ un entier, C une forme bilinéaire anisotrope de dimension 2^n, et B une forme bilinéaire anisotrope de dimension 2^{n+1}. Si $B_{F(C)} \in BP_{n+1}(F(C))$ et anisotrope, alors il existe $\rho \in BP_{n+1}(F)$ tel que $B_{F(C)} \simeq \rho_{F(C)}$.*

Preuve. Il n'y a rien à montrer si B est semblable à une forme bilinéaire de Pfister. Supposons que B ne soit pas semblable à une forme bilinéaire de Pfister. Par la proposition 5.4, la forme B est bonne de hauteur 2, de degré n dont la forme dominante τ satisfait à la condition que $\widetilde{\tau}$ est semblable à $\widetilde{C}$. Par le théorème 1.1, il existe $\theta \in BP_{n-1}(F)$, $D = \langle 1\rangle_b \perp D' \in BP_2(F)$ et $\alpha, \beta \in F^*$ tel que $B \simeq \beta\theta \otimes (D' \perp \langle\alpha\rangle_b)$ et $\tau \simeq \theta \otimes \langle 1, \alpha\rangle_b$. Soit $\rho = \theta \otimes D \in BP_{n+1}(F)$. Puisque $\tau_{F(\tau)}$ est métabolique et $\theta_{F(\tau)}$ est anisotrope, on déduit par l'unicité de la partie anisotrope que $\theta_{F(\tau)} \simeq (\alpha\theta)_{F(\tau)}$. Ainsi, $B_{F(\tau)} \simeq (\beta\rho)_{F(\tau)}$. Par la multiplicativité d'une forme de Pfister, on a $B_{F(\tau)} \simeq \rho_{F(\tau)}$. D'où, la conclusion désirée puisque $F(\tau) = F(C)$. ■

L'analogue du corollaire 5.5 pour les formes quadratiques en caractéristique $\neq 2$ est dû à Rost pour $n = 3$ [12, Th. 4.3], et à Kahn pour n quelconque [12, Prop. 4.3 (b)].

5.2. **Cas des formes bilinéaires bonnes de hauteur 2 et de degré 0.** L'isotropie d'une telle forme sur le corps de fonctions de sa forme dominante se ramène à la proposition 5.3 comme indiqué dans l'assertion (2) de la proposition qui suit.

Proposition 5.6. *Soit B une forme bilinéaire anisotrope de dimension impaire (i.e., $\deg(B) = 0$). On suppose que B est bonne de hauteur 2 et de forme dominante $\tau \in BP_d(F)$. Alors, $\dim B \geq 2^d + 1$, et on a les affirmations suivantes:*
(1) Si $\dim B = 2^d + 1$, alors $B_{F(\tau)}$ est isotrope.

(2) Si $\dim B > 2^d + 1$*, alors* $B \perp \langle \det B \rangle_b$ *est bonne de hauteur* 2 *et de forme dominante* τ*, et on a que* $B_{F(\tau)}$ *est isotrope si et seulement si* $(B \perp \langle \det B \rangle_b)_{an}$ *est isotrope sur* $F(\tau)$*.*

Preuve. Par [20, Prop. 5.3], la forme $B \perp \langle \det B \rangle_b$ est aussi bonne de forme dominante τ. Par [20, Prop. 5.9], on obtient que

$$B \sim C \perp x\rho, \tag{5}$$

où $x \in F^*$, ρ est une forme bilinéaire de Pfister dont B est voisine, et C est semblable à la partie pure d'une forme de $BP_d(F)$. Puisque $\dim \rho \geq \dim B > 2^d$, on déduit

$$(B \perp \langle \det B \rangle_b) \perp (C \perp \langle \det B \rangle_b) \in I^{d+1}F.$$

Par [20, Prop. 5.3(2)], $\tau \simeq y(C \perp \langle \det B \rangle_b)$ pour un certain $y \in F^*$. En particulier, $(C \perp \langle \det B \rangle_b)_{F(\tau)}$ est métabolique.

(1) Supposons que $\dim B = 2^d + 1$.

Alors, on a nécessairement que $\dim \rho = 2^{d+1}$. Par (5) et l'unicité de la partie anisotrope, on a que $B \perp C \simeq x\rho$. Comme $C_{F(\tau)}$ est isotrope, la forme $\rho_{F(\tau)}$ est isotrope, et par conséquent $B_{F(\tau)}$ est isotrope.

(2) Supposons que $\dim B > 2^d + 1$.

Posons $B' = B \perp \langle \det B \rangle_b$. Sans perdre de généralités, on peut supposer que $1 \in D_F(B)$. Puisque $\rho_{F(B)}$ est isotrope, on obtient que $N_F(\widetilde{B}) \subset N_F(\widetilde{\rho})$. Ainsi, $N_F(\widetilde{B'}) \subset N_F(\widetilde{\rho})$ puisque B représente 1. En particulier, $N_F(\widetilde{(B'_{\mathrm{an}})}) \subset N_F(\widetilde{\rho})$. Par conséquent, $\rho_{F(B'_{\mathrm{an}})}$ est isotrope. En étendant (5) au corps $F(B'_{\mathrm{an}})$, on obtient

$$(B'_{\mathrm{an}})_{F(B'_{\mathrm{an}})} \sim (y\tau)_{F(B'_{\mathrm{an}})}. \tag{6}$$

La forme $(y\tau)_{F(B'_{\mathrm{an}})}$ est anisotrope puisque $\dim B'_{\mathrm{an}} \geq \dim B - 1 > 2^d$. Par (6) et l'unicité de la partie anisotrope, on déduit que $((B'_{\mathrm{an}})_{F(B'_{\mathrm{an}})})_{\mathrm{an}} \simeq (y\tau)_{F(B'_{\mathrm{an}})}$, i.e., B'_{an} est de hauteur 2.

Maintenant, si B'_{an} est isotrope sur $F(\tau)$, alors elle est métabolique sur $F(\tau)$ par le lemme 3.9. Ainsi, $B_{F(\tau)} \sim (\langle \det B \rangle_b)_{F(\tau)}$, et donc $B_{F(\tau)}$ est isotrope. Réciproquement, si $B_{F(\tau)}$ est isotrope, alors $\rho_{F(\tau)} \sim 0$. Comme $(C \perp \langle \det B \rangle_b)_{F(\tau)} \sim 0$, on a que $B'_{F(\tau)} \sim 0$. En particulier, B'_{an} est isotrope sur $F(\tau)$. ∎

APPENDICE A. FORMES QUADRATIQUES BONNES DE HAUTEUR 2 EN CARACTÉRISTIQUE 2

Pour les formes quadratiques en caractéristique 2, les notions de hauteur, de degré et de forme bonne se définissent de la même façon comme pour les formes bilinéaires (voir [17]). On rappelle que la tour de déploiement standard d'une forme quadratique de partie quasi-linéaire de dimension au plus 1 est générique au sens de ce qui est connu en caractéristique $\neq 2$ [16]. Mais on ne sait toujours pas si ceci est vrai pour les formes bilinéaires en caractéristique 2.

A.1. **Cas des formes quadratiques non singulières.** Le théorème suivant donne la classification des formes quadratiques non singulières qui sont bonnes de hauteur 2:

Théorème A.1. *Soient φ une F-forme quadratique non singulière anisotrope, et $\tau \in P_d(F)$ anisotrope. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes:*
(1) φ est bonne de hauteur 2 et de forme dominante τ.
(2) φ satisfait l'une des deux conditions suivantes:

- (i) *φ est une voisine d'une m-forme de Pfister dont la forme complémentaire est $\alpha\tau$ pour certains $\alpha \in F^*$ et $m \geq d+2$.*
- (ii) *φ n'est pas une voisine de Pfister, et $\varphi \simeq x(\lambda' \perp \langle y\rangle_b)\otimes\theta$, avec $x, y \in F^*$, $\theta \in P_{d-1}(F)$, $\lambda = \langle 1\rangle_b \perp \lambda' \in BP_2(F)$ et $\tau \simeq \langle 1, y\rangle_b \otimes \theta$.*

Pour prouver ce théorème, on aura besoin de quelques résultats préliminaires. Le premier concerne la liaison des formes quadratiques de Pfister. Puisque ces formes proviennent des formes bilinéaires de Pfister, on doit distinguer entre la liaison à gauche et la liaison à droite, comme il a été développé récemment par Faivre [7]. Le résultat qui nous intéresse dans ce sens concerne la liaison à droite et affirme ce qui suit:

Proposition A.2. *(*[7, Cor. 2.3.3]*) Soient $\varphi_1 \in P_m(F)$ et $\varphi_2 \in P_n(F)$ des formes anisotropes. Si $i_W(x_1\varphi_1 \perp x_2\varphi_2) > 0$ pour $x_1, x_2 \in F^*$, alors $i_W(x_1\varphi_1 \perp x_2\varphi_2) = 2^k$ pour un certain $k \geq 1$. Dans ce cas, il existe $z \in F^*$, $\theta \in P_k(F)$, $\lambda_1 \in BP_{m-k}(F)$ et $\lambda_2 \in BP_{n-k}(F)$ tel que $x_i\varphi_i \simeq z\lambda_i \otimes \theta$ pour $i = 1, 2$.*

Le résultat qui suit concerne le comportement des formes quadratiques bonnes de hauteur 2 sur les corps de fonctions de leurs formes dominantes:

Proposition A.3. *Soit φ une F-forme quadratique non singulière anisotrope qui n'est pas une voisine. On suppose que φ est bonne de hauteur 2 et de forme dominante $\tau \in P_d(F)$. Alors, $\varphi_{F(\tau)} \in GP_{d+1}(F(\tau))$ et anisotrope.*

Preuve. On reprend la même preuve que celle donnée par Hoffmann en caractéristique $\neq 2$ [9], et on se sert des résultats de Faivre [7] sur les formes quadratiques de Pfister tordues (twisted Pfister forms), qui étendent ceux donnés par Hoffmann en caractéristique $\neq 2$ [8]. ■

Proposition A.4. *Soit φ une forme quadratique anisotrope appartenant à $I^nW_q(F)$. On a:*
(1) $\dim\varphi \geq 2^n$.
(2) Si $\dim\varphi = 2^n$, alors $\varphi \in GP_n(F)$.
(3) Si $\dim\varphi > 2^n$, alors $\dim\varphi \geq 2^n + 2^{n-1}$.

Preuve. (1) Dû à Baeza [4, Satz 4.2].

(2) Par l'assertion (1), la forme $\varphi_{F(\varphi)}$ est hyperbolique. Par [17, Th. 3.1], $\varphi \in GP_n(F)$.

(3) Soit K un corps de caractéristique 0 qui est complet pour une valuation discrète, et qui admet F pour corps résiduel. Le relèvement de φ à K, noté φ',

est une K-forme quadratique anisotrope appartenant à I^nK et de dimension $> 2^n$. Par le résultat de Vishik [24], on obtient $\dim \varphi' \geq 2^n + 2^{n-1}$. Ainsi, $\dim \varphi \geq 2^n + 2^{n-1}$. ■

Preuve du théorème A.1. Soient φ une F-forme quadratique non singulière anisotrope, et $\tau \in P_d(F)$ anisotrope. Supposons que φ soit bonne de hauteur 2 et de forme dominante τ. Il existe $\alpha \in F(\varphi)^*$ tel que $(\varphi_{F(\varphi)})_{\text{an}} \simeq \alpha(\tau_{F(\varphi)})$.

– Supposons que $\alpha(\tau_{F(\varphi)})$ soit définissable sur F. Par la multiplicativité de τ, on peut supposer que $\alpha \in F^*$. Par [10, Th. 6.6], φ est une voisine d'une forme de $P_m(F)$ dont la forme complémentaire est $\alpha\tau$. Puisque $\dim \varphi > 2^{m-1}$, on obtient que $\dim \tau < 2^{m-1}$, i.e., $m \geq d + 2$.

– Supposons que $\alpha(\tau_{F(\varphi)})$ ne soit pas définissable sur F. Alors, φ ne peut pas être une voisine de Pfister. Par la proposition A.3, on a $\dim \varphi = 2^{d+1}$. Puisque τ est la forme dominante de φ, la forme $\varphi \perp \tau$ est de degré $\geq d + 1$ ([15, Th. 9.6] s'étend sans la moindre difficulté aux formes quadratiques non singulières). Par [2], $\varphi \perp \tau \in I^{d+1}W_q(F)$. On peut supposer que φ représente 1. Ainsi, $\dim(\varphi \perp \tau)_{\text{an}} < 2^{d+1} + 2^d$. Comme $\varphi \perp \tau$ ne peut pas être hyperbolique, il existe par la proposition A.4(3) une forme $\pi \in GP_{d+1}(F)$ tel que $\varphi \perp \tau = \pi \in W_q(F)$. Ainsi, $i_W(\pi \perp \tau) = 2^{d-1}$. On conclut par la proposition A.2.

Réciproquement, si φ vérifie la condition (i) ou (ii) de l'assertion (2), alors on montre comme en caractéristique $\neq 2$ que φ est bonne de hauteur 2 et de forme dominante τ. ■

A.2. **Cas des formes quadratiques singulières.** Pour toute forme quadratique φ, on note $\mathrm{ql}(\varphi)$ sa partie quasi-linéaire. La classification des formes quadratiques singulières qui sont (bonnes) de hauteur 2 est la suivante:

Proposition A.5. *Soit φ une F-forme quadratique singulière anisotrope. On a les assertions suivantes:*
(1) Si φ est de hauteur 2, alors $\dim \mathrm{ql}(\varphi) = 1$ ou 2.
(2) Si $\dim \mathrm{ql}(\varphi) = 1$, alors φ est bonne de hauteur 2 si et seulement si φ est une voisine de Pfister de forme complémentaire $\alpha(\langle 1\rangle \perp \pi' \otimes [1, \beta])$, où $\alpha, \beta \in F^*$, $\pi = \langle 1\rangle_b \perp \pi'$ est une forme bilinéaire de Pfister.
(3) Si $\dim \mathrm{ql}(\varphi) = 2$, alors φ est de hauteur 2 si et seulement si φ est une voisine de Pfister avec $\dim \varphi + \dim \mathrm{ql}(\varphi) = 2^n$ pour un certain $n \geq 2$.

Preuve. (1) C'est une conséquence de [17, Th. 4.6].

(2) Supposons que $\dim \mathrm{ql}(\varphi) = 1$. Posons $\mathrm{ql}(\varphi) = \langle \alpha\rangle$. Supposons que φ soit bonne de hauteur 2. Soient $\pi \in BP_{d-1}(F)$ et $\beta \in F^*$ tel que $\tau := \pi \otimes [1, \beta]$ soit la forme dominante de φ. Par l'unicité de la partie quasi-linéaire, on a $(\varphi_{F(\varphi)})_{\text{an}} \simeq \delta \perp \langle \alpha\rangle$ pour δ une $F(\varphi)$-forme quadratique non singulière. Puisque φ est bonne de hauteur 2, on sait que $\delta \perp \alpha[1, \Delta(\delta)] \simeq y\tau$ pour un certain $y \in F(\varphi)^*$, où $\Delta(\delta)$ désigne l'invariant d'Arf de δ. Par la multiplicativité d'une forme de Pfister, on obtient que $\alpha\delta \perp [1, \Delta(\delta)] \simeq \tau$. Par conséquent,

$$\alpha\delta \perp [1, \Delta(\delta)] \perp \langle 1\rangle \simeq \pi' \otimes [1, \beta] \perp [1, \beta] \perp \langle 1\rangle .$$

Comme $[1, \Delta(\delta)] \perp \langle 1 \rangle \simeq H \perp \langle 1 \rangle \simeq \langle 1 \rangle \perp [1, \beta]$ (H désigne le plan hyperbolique), on déduit par la simplification de Witt que

$$\alpha\delta \perp \langle 1 \rangle \simeq \pi' \otimes [1, \beta] \perp \langle 1 \rangle .$$

En particulier, $\delta \perp \langle \alpha \rangle \simeq \alpha(\langle 1 \rangle \perp \pi' \otimes [1, \beta])$. Par [10, Th. 6.6], la forme φ est une voisine de Pfister de forme complémentaire $\alpha(\langle 1 \rangle \perp \pi' \otimes [1, \beta])$.

Réciproquement, supposons que φ soit une voisine de Pfister de forme complémentaire $\alpha(\langle 1 \rangle \perp \pi' \otimes [1, \beta])$, où $\alpha, \beta \in F^*$ et $\pi = \langle 1 \rangle_b \perp \pi'$ est une forme bilinéaire de Pfister. Par [10, Prop. 6.1], on a que $(\varphi_{F(\varphi)})_{\mathrm{an}} \simeq \alpha(\langle 1 \rangle \perp \pi' \otimes [1, \beta])_{F(\varphi)}$. Puisque $\alpha(\langle 1 \rangle \perp \pi' \otimes [1, \beta])_{F(\varphi)}$ est une $F(\varphi)$-forme quadratique de hauteur 1, on déduit que φ est bonne de hauteur 2.

(3) C'est prouvé dans [10, Th. 7.5]. ■

RÉFÉRENCES

[1] J. Kr. Arason, R. Baeza, *Relations in I^n and I^nW_q in characteristic* 2, J. Algebra **314** (2007), 895-911.

[2] R. Aravire, R. Baeza, *The behavior of quadratic and differential forms under function field extensions in characteristic two,* J. Algebra **259** (2003), 361–414.

[3] R. Aravire, R. Baeza, *Linkage of fields in characteristic* 2, Comm. Algebra **31** (2003), 463–473.

[4] R. Baeza, *Ein Teilformensatz für quadratische Formen in Charakteristik 2,* Math. Z. **135** (1973), 175–184.

[5] R. Baeza, *Quadratic forms over semilocal rings*, Lect. Notes Math. vol. **655**, Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1978.

[6] R. Elman, T. Y. Lam, *Pfister forms and K-Theory of fields*, J. Algebra **23** (1972), 118-213.

[7] F. Faivre, *Liaison des formes de Pfister et corps de fonctions de quadriques en caractéristique* 2, Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté, 2006.

[8] D. W. Hoffmann, *Twisted Pfister Forms,* Doc. Math. J. DMV **1** (1996) 67-102.

[9] D. W. Hoffmann, *Sur les dimensions des formes quadratiques de hauteur* 2, C. R. Acad. Sci. Paris, **324** (1997), 11-14.

[10] D. W. Hoffmann, A. Laghribi, *Quadratic forms and Pfister neighbors in characteristic* 2, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), 4019-4053.

[11] D. W. Hoffmann, A. Laghribi, *Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric in characteristic* 2, J. Algebra **295** (2006), 362-386.

[12] B. Kahn, *Formes quadratiques de hauteur et degré* 2, Indag. Math. N. S. **7** (1996), 47-66.

[13] B. Kahn, *A descent problem for quadratic forms,* Duke Math. J. **80** (1995), 139–155.

[14] M. Knebusch, *Grothendieck- und Wittringe von nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen*, S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. (1969-1970) 93–157.

[15] M. Knebusch, *Generic splitting of quadratic forms II,* Proc. London Math. Soc. **34** (1977), 1–31.

[16] M. Knebusch, U. Rehmann, *Generic splitting towers and generic splitting preparation of quadratic forms,* Contemp. Math. **272** (2000), 173-199.

[17] A. Laghribi, *On the generic splitting of quadratic forms in characteristic* 2, Math. Z. **240** (2002), 711-730.

[18] A. Laghribi, *Quasi-hyperbolicity of totally singular quadratic forms,* Contemp. Math. **344** (2004), 237-248.

[19] A. Laghribi, *Witt kernels of function field extensions in characteristic* 2, J. Pure Appl. Algebra **199** (2005), 167-182.

[20] A. Laghribi, *Sur le déploiement des formes bilinéaires en caractéristique* 2, Pacific J. Math. **232** (2007), 207-232.

[21] A. Laghribi, P. Mammone, *Hyper-Isotropy of bilinear forms in charactersitic* 2, Contemporary Mathematics (à paraître).

[22] A. Laghribi, U. Rehmann, *On bilinear forms of height* 2 *and degree* 1 *or* 2 *in characteristic* 2, J. Algebra **322** (2009), 1–12.

[23] J. Milnor, D. Husemoller, *Symmetric bilinear forms,* New York, Heidelberg: Springer 1973.

[24] A. Vishik, *On the dimensions of quadratic forms*, Dokl. Akad. Nauk **373** (2000) 445–447.

UNIVERSITÉ D'ARTOIS, FACULTÉ JEAN PERRIN, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES DE LENS EA 2462, RUE JEAN SOUVRAZ SP-18, F-62307 LENS

Mél.: laghribi@euler.univ-artois.fr