Formules pour l'invariant de Rost

Philippe Gille*
Anne Quéguiner-Mathieu†

Abstract : We provide an exact formula for the Rost invariant $H^1(k, G) \to H^3(k)$ of special linear groups.
Keywords : Galois cohomology, linear algebraic groups. **MSC : 11E72**.

Table des matières

1 Introduction et notations **2**

2 Extensions de groupes **3**
2.1 Extensions de Γ–groupes 3
2.2 Lemme préliminaire 5
2.3 Extensions centrales d'un groupe parfait 6
2.4 Extension centrale d'un groupe abélien 7
2.5 Extensions d'un groupe cyclique 8
2.6 Extensions de groupes et 2-extensions au sens de Yoneda . . . 9

3 Extensions de Brylinski-Deligne **12**
3.1 Rappels 12
3.2 Action galoisienne 14

4 Calculs explicites pour $\mathrm{SL}_1(A)$ **16**
4.1 Algèbres cycliques 16
4.2 Calcul dans un cas particulier 19
4.3 Démonstration du théorème 1.1 20

*UMR 8552 du CNRS, DMA, Ecole Normale Supérieure, F-75005 Paris
†Université Paris 13 (LAGA, UMR CNRS 7539) et Université Paris 12, - Institut Galilée, F-93430 Villetaneuse

5 Restriction au centre de l'invariant de Rost **21**

6 Groupes exceptionnels de type G_2, F_4 et E_8 **25**
6.1 Sous-groupes finis. 26
6.2 Calcul explicite 29

1 Introduction et notations

Soient k un corps, k_s une clôture séparable de k et $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ le groupe de Galois absolu de k. Si G/k est un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque k-simple, on dispose de l'invariant de Rost [EKLV] [M]

$$r_G : H^1(k, G) \to H^3(k) := H^3(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(2))$$

qui associe à la classe d'un G–torseur une classe de cohomologie galoisienne de degré 3, où pour $d \geq 0$, $H^{d+1}(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(d))$ désigne le groupe de cohomologie galoisienne modifié à la Kato [K] sur la composante p–primaire si k est de caractéristique p positive [M, app. A].

Le premier but de cet article est d'établir une formule exacte pour l'invariant de Rost dans le cas du groupe $G = \mathrm{SL}_1(A)$, où A est une k-algèbre centrale simple. On sait alors que la suite exacte

$$1 \to \mathrm{SL}_1(A) \to \mathrm{GL}_1(A) \xrightarrow{\mathrm{Nrd}_A} \mathbb{G}_m \to 1$$

induit un isomorphisme $H^1(k, G) \cong k^\times/\mathrm{Nrd}(A^\times)$, et que le cup-produit avec la classe de Brauer $[A] \in \mathrm{Br}(k) = H^2(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(1))$ engendre le groupe des invariants de degré 3 de $\mathrm{SL}_1(A)$ [M, p.107]. Pour comparer ce générateur et l'invariant de Rost, on convient d'identifier le groupe de Brauer de k et $H^2(k)$ par le cobord, comme dans [GiS, §4.4]. Notons que cette convention est opposée à celle de [M, Appendix A], donnée par le produit croisé cf. [KMRT, p.397].

Théorème 1.1 *Soit A une k-algèbre simple centrale de degré n. On note $[A] \in {}_n\mathrm{Br}(k) = {}_nH^2(k)$ sa classe dans le groupe de Brauer de k. Pour tout $[v] \in H^1(k, \mathrm{SL}_1(A)) = k^\times/\mathrm{Nrd}(A^\times)$, on a*

$$r_{\mathrm{SL}_1(A)}([v]) = (v).[A] \in H^3(k),$$

où (v) désigne la classe dans ${}_nH^1(k) = k^\times/k^{\times n}$ d'un représentant quelconque de $[v]$.

La méthode employée consiste à utiliser des cocycles explicites pour des algèbres cycliques, l'ingrédient fondamental étant les extensions centrales de Brylinski-Deligne [BD] qui permettent une approche galoisienne des extensions centrales de Matsumoto [Ms].

On propose ensuite deux applications du résultat principal. Le § 5 précise les résultats obtenus dans [MPT] et [GQ] concernant la restriction de l'invariant de Rost aux torseurs issus du centre du groupe. La seconde application concerne les groupes de type G_2, F_4 et E_8 dont le centre est trivial. Ces groupes possédent un sous-groupe de la forme $A = \mu_l \times \mu_l \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ de centralisateur fini, et l'on donne au § 6 une description de l'invariant de Rost pour les torseurs issus de A.

2 Extensions de groupes

Dans toute cette partie, A désigne un groupe abélien, et

$$0 \to A \to E \xrightarrow{p} G \to 1$$

est une extension d'un certain groupe G par A. On rappelle que l'action de E sur A par automorphisme intérieur se factorise en une action $\theta : G \to \mathrm{Aut}(A)$, ce qui munit A d'une structure de G–module. De plus, si l'on fixe une action de G sur A, les extensions de G par A qui induisent cette action sont classifiées par le groupe $H^2(G, A)$ (cf. par exemple [W, §6.6]).

2.1 Extensions de Γ–groupes

Soit Γ un groupe. On suppose ici que A, E et G sont des Γ-groupes et que l'extension ci-dessus est compatible à l'action de Γ. Elle donne lieu à une suite exacte longue d'ensembles pointés [S1, §I.5.4]

$$1 \to H^0(\Gamma, A) \to H^0(\Gamma, E) \to H^0(\Gamma, G) \xrightarrow{\varphi}$$

$$H^1(\Gamma, A) \to H^1(\Gamma, E) \to H^1(\Gamma, G) \xrightarrow{\Delta} H^2(G, A).$$

Nous nous proposons de donner une description du bord Δ en termes d'extensions de groupes. On rappelle que l'ensemble des 1-cocycles $Z^1(\Gamma, G)$ n'est pas autre chose que l'ensemble des sections de $G \rtimes \Gamma \to \Gamma$. En effet, si $z \in Z^1(\Gamma, G)$, on lui associe la section $u_z : \Gamma \to G \rtimes \Gamma$, $\sigma \mapsto z_\sigma\, \sigma$ (*ibid*, §5.1, exercice 1). Etant donné un 1–cocycle $z : \Gamma \to G$, on peut retirer en arrière par u_z l'extension

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E \rtimes \Gamma & \longrightarrow & G \rtimes \Gamma & \longrightarrow & 1 \\
 & & || & & \uparrow & & {\scriptstyle u_z}\uparrow & & \\
1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E(z) & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

Lemme 2.1 $\Delta([z]) = [E(z)] \in H^2(\Gamma, A)$.

Démonstration : On vérifie par calcul. Pour chaque $\sigma \in \Gamma$, on choisit un relevé par $e_\sigma \in E$ de z_σ de sorte que z_e est l'élément neutre de E. Alors $\Delta([z])$ est par définition la classe du 2-cocycle

$$a_{\sigma,\tau} = e_\sigma \, {}^\sigma e_\tau \, e_{\sigma\tau}^{-1} \in A.$$

De l'autre coté, $f_\sigma := e_\sigma \, \sigma \in E(z)$ définit un relevé de σ pour le morphisme $E(z) \to \Gamma$. La classe de $E(z)$ dans $H^2(\Gamma, A)$ est celle du 2–cocycle (voir [W, th. 6.6.3])

$$f_\sigma \, f_\tau \, f_{\sigma\tau}^{-1} = e_\sigma \, \sigma \, e_\tau \, \tau \, \tau^{-1} \sigma^{-1} \, e_{\sigma\tau}^{-1} = e_\sigma \, (\sigma e_\tau \sigma^{-1}) \, e_{\sigma\tau}^{-1} = e_\sigma \, {}^\sigma e_\tau \, e_{\sigma\tau}^{-1} = a_{\sigma\tau}.$$

$\square$

On va maintenant établir une version tordue. Soit $z \in Z^1(\Gamma, G)$. On peut tordre l'extension $1 \to A \to E \to G \to 1$ par z

$$1 \to A \to {}_zE \to {}_zG \to 1$$

et étudier le bord $\Delta_z : H^1(\Gamma, {}_zG) \to H^2(\Gamma, A)$ [S1, §I.5.7]. Un 1–cocycle $w \in Z^1(\Gamma, {}_zG)$ n'est pas autre chose qu'une section u_w de la projection $G \rtimes^z \Gamma = {}_zG \rtimes \Gamma \to \Gamma$ via $\sigma \mapsto w_\sigma \, \sigma$. En appliquant la formule ci-dessus, on obtient que le bord $\Delta_z([w])$ est la classe de l'extension retirée en arrière

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E \rtimes^z \Gamma & \longrightarrow & G \rtimes^z \Gamma & \longrightarrow & 1 \\
 & & || & & \uparrow & & {\scriptstyle u_w}\uparrow & & \\
1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E(w) & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

2.2 Lemme préliminaire

On s'intéresse aux sous-groupes suivants du groupe $\mathrm{Aut}(E)$ des automorphismes de E :

$$\mathrm{Aut}(E,A) = \Big\{\phi \in \mathrm{Aut}(E) \ \mid \ \phi(A) \subset A\Big\},$$

et

$$\mathrm{Aut}_A(E) = \Big\{\phi \in \mathrm{Aut}(E) \ \mid \ \phi_{|A} = \mathrm{Id}_{|A}\Big\}.$$

On rappelle le fait élémentaire suivant :

Lemme 2.2 *Le noyau de l'application naturelle* $\mathrm{Aut}_A(E) \to \mathrm{Aut}(G)$ *est en bijection avec le groupe* $Z^1(G,A)$ *des* 1*-cocycles de* G *à valeurs dans* A*.*

Démonstration : Soit $\alpha = (a_g) \in Z^1(G,A)$ un 1-cocycle. On lui associe l'application $\phi_\alpha : E \to E$, définie par $\phi_\alpha(x) = a_{p(x)}x$, pour tout $x \in E$. Quels que soient $x_1, x_2 \in E$, on a

$$\phi_\alpha(x_1x_2) = a_{p(x_1x_2)}\, x_1\, x_2 = a_{p(x_1)}\, x_1\, a_{p(x_2)}\, x_1^{-1} x_1\, x_2\, \phi_\alpha(x_1)\, \phi_\alpha(x_2).$$

Ainsi, ϕ_α est un morphisme, dont la restriction à A est l'identité. Son noyau, qui est contenu dans A, est trivial. Enfin, si $x \in E$, on a $x = \phi_\alpha(a_{p(x)}^{-1}x)$, de sorte que $\phi_\alpha \in \mathrm{Aut}_A(E)$. Comme $p(\phi_\alpha(x)) = p(x)$, l'automorphisme induit sur G est trivial.

Ainsi, l'application $\alpha \mapsto \phi_\alpha$ est un morphisme de $Z^1(G,A)$ dans le noyau $\ker(\mathrm{Aut}_A(E) \to \mathrm{Aut}(G))$. Pour montrer qu'elle est bijective, on va exhiber sa réciproque. Soit donc $\phi : E \xrightarrow{\sim} E$ un automorphisme induisant l'identité sur A et sur G. L'application $x \in E \to \phi(x)x^{-1}$ induit une application $\psi : G = E/A \to A$. De plus, si g_1 et $g_2 \in G$ ont pour antécédents respectifs x_1 et $x_2 \in E$, alors

$$\psi(g_1g_2) = \phi(x_1x_2)(x_1x_2)^{-1} = \psi(g_1)x_1\, \psi(g_2)x_1^{-1} = \psi(g_1)\,(g_1.\psi(g_2)).$$

On a donc bien défini ainsi une application de $\ker(\mathrm{Aut}_A(E) \to \mathrm{Aut}(G))$ dans $Z^1(G,A)$, qui par un calcul direct est la réciproque de la précédente. $\square$

2.3 Extensions centrales d'un groupe parfait

On suppose dans ce paragraphe que l'extension de groupes

$$0 \to A \to E \xrightarrow{p} G \to 1,$$

est centrale. Autrement dit, A est contenu dans le centre $Z(E)$ de E, de sorte que l'action de G sur A est triviale. Si de plus le groupe G est parfait, alors $Z^1(G, A) = \mathrm{Hom}(G, A) = 0$. Par le lemme précédent, le morphisme

$$\mathrm{Aut}_A(E) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(G)$$

est donc injectif. On en déduit que deux automorphismes de $\mathrm{Aut}(E, A)$ qui induisent les mêmes morphismes sur A et sur G sont égaux, d'où un morphisme injectif

$$\mathrm{Aut}(E, A) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(A) \times \mathrm{Aut}(G).$$

Lemme 2.3 *On considère une extension centrale*

$$0 \to A \to E \xrightarrow{p} G \to 1,$$

d'un groupe parfait G, et une action $f = (f_1, f_2) : \Gamma \to \mathrm{Aut}(A) \times \mathrm{Aut}(G)$ d'un groupe Γ sur A et sur G. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. *L'image de f est incluse dans le sous-groupe*

$$\mathrm{Aut}(E, A) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(A) \times \mathrm{Aut}(G),$$

i.e. l'action f s'étend à E, et ce de manière unique ;

2. *Pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'extension $(f_2(\gamma)^{-1})^* f_1(\gamma)_*(E)$ de G par A est équivalente à E, où $(f_2(\gamma)^{-1})^*$ et $f_1(\gamma)_*$ désignent respectivement le pull-back et le push-out associés aux morphismes $f_2(\gamma)^{-1}$ et $f_1(\gamma)$.*

Démonstration : Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on considère les extensions $E'_\gamma = f_1(\gamma)_*(E)$ et $E''_\gamma = (f_2(\gamma)^{-1})^* f_1(\gamma)_*(E)$. Par définition, on a un diagramme commutatif

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\ & & {\scriptstyle f_1(\gamma)}\downarrow\wr & & \wr\downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E'_\gamma & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \wr\uparrow & & {\scriptstyle f_2(\gamma)^{-1}}\uparrow\wr & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E''_\gamma & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

Supposons que l'action f s'étend à E, c'est-à-dire que $f(\gamma) \in \mathrm{Aut}(E, A)$. On a alors

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\ & & {\scriptstyle f_1(\gamma)^{-1}}\downarrow\wr & & \wr\downarrow & & {\scriptstyle f_2(\gamma)^{-1}}\downarrow\wr & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

En combinant avec (*), on en déduit que les extensions E et E''_γ sont équivalentes. Réciproquement, si les extensions E et E''_γ sont équivalentes, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E''_\gamma & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \wr\downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

qui, combiné avec (*), fournit un automorphisme de E dont l'image dans $\mathrm{Aut}(A) \times \mathrm{Aut}(G)$ est $(f_1(\gamma), f_2(\gamma))$. $\square$

2.4 Extension centrale d'un groupe abélien

Si le G-module A est trivial, par le théorème des coefficients universels, on a une suite exacte scindée

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G_{ab}, A) \to H^2(G, A) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}(H_2(G, \mathbb{Z}), A) \to 0,$$

où $G_{ab} = G/[G, G] = H_1(G, \mathbb{Z})$ est l'abélianisé de G (cf [W, ex 6.1.5(3) et Thm 6.1.11]). Supposons de plus que $G = B$ est abélien. Alors $H_2(B, \mathbb{Z}) = \Lambda^2 B$ (cf [Bro, Thm V6.4(III)] et la suite exacte devient

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(B, A) \to H^2(B, A) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}(\Lambda^2 B, A) \to 0.$$

De plus, par [Bro, §V.6, exercice 5], l'image sous δ de la classe d'un cocycle $f \in Z^2(B, A)$ est donnée par $(b_1 \wedge b_2) \mapsto f(b_1, b_2) - f(b_2, b_1)$. En combinant avec [GS, Exple 3.2.6], on en déduit aisément

Lemme 2.4 *Soit*

$$0 \to A \to E \xrightarrow{p} B \to 1$$

une extension centrale d'un groupe abélien B. L'image sous δ de sa classe dans $H^2(B, A)$ est le "relevé des commutateurs"

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^2 B & \to & A \\ (b_1, b_2) & \mapsto & [e_1, e_2] = e_1 e_2 e_1^{-1} e_2^{-1}, \end{array}$$

où $e_i \in E$ vérifie $p(e_i) = b_i$.

Remarque 2.5 Soit $\phi : \Lambda^2 B \to A$ un morphisme ; on peut le voir comme une application bilinéaire alternée $B \times B \to A$, donc comme un 2-cocycle $\phi \in Z2(B, A)$. Il faut prendre garde que l'image sous δ de sa classe dans $H^2(B, A)$ est 2ϕ. En effet, puisque ϕ est alternée, la formule rappelée ci-dessus donne

$$\delta(\phi)(b_1 \wedge b_2) = \phi(b_1, b_2) - \phi(b_2, b_1) = 2\phi(b_1, b_2).$$

2.5 Extensions d'un groupe cyclique

On suppose dans ce paragraphe que le groupe G est cyclique d'ordre n. Le choix d'un générateur $\sigma \in G$ permet d'identifier $H^2(G, A)$ avec le groupe $A^G/N(A)$ où N est l'application du G-module A dans lui même définie par $N(a) = \Sigma_{i=0}^{n-1} \sigma^i \cdot a$ (cf. par exemple [GS, Exple 3.2.9]). On a alors :

Lemme 2.6 *Soit G un groupe cyclique d'ordre n, de générateur σ, et soit*

$$0 \to A \to E \xrightarrow{p} G \to 1,$$

une extension de G par A. Choisissons $e \in E$ tel que $p(e) = \sigma$. Alors, $e^n \in A^G$ et sa classe dans $A^G/N(A) \simeq H^2(G, A)$ est la classe de l'extension E.

Démonstration. Clairement, e^n est dans le noyau de p ; de plus, σ agissant sur A par conjugaison par e, l'élément e^n est invariant sous l'action de G. Montrons maintenant que sa classe dans $A^G/N(A)$ est celle de l'extension E.

Pour cela, on considère le caractère $\chi : G \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ associé au choix de σ, c'est-à-dire défini par $\chi(\sigma) = 1$, et le bord $\partial\chi \in H^2(G, \mathbb{Z})$ provenant de la suite exacte de G-modules

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0.$$

D'après [GS, 3.4.11(3)], l'isomorphisme entre $A^G/N(A)$ et $H^2(G, A)$ est le cup-produit par $\partial\chi$. En particulier, il est fonctoriel en A. Il suffit donc de montrer le théorème pour l'extension $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} G \to 1$, où p est définie par $p(1) = \sigma$. On vérifie facilement (cf [GS, Exple 3.2.6]) que sa classe dans $H^2(G, \mathbb{Z})$ est représentée par le 2-cocycle

$$(\sigma^i, \sigma^j) \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } i + j < n, \\ 1 \text{ si } i + j \geq n, \end{cases}$$

qui n'est rien d'autre que $\partial\chi$. Elle correspond donc, dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^G/N(\mathbb{Z})$ à $\bar{1}$. Or, si l'on choisit $e = 1 \in \mathbb{Z}$ comme relevé de σ, on a $e^n = n$ qui a pour antécédent $1 \in A^G = \mathbb{Z}$. Le théorème est donc prouvé dans ce cas.

Le cas général s'en déduit de la manière suivante. Etant donnée l'extension

$$0 \to A \to E \xrightarrow{p} G \to 1,$$

le choix d'un élément $e \in E$ tel que $p(e) = \sigma$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "n"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & E \arrow[r, "p"] & G \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

où ϕ est définie par $\phi(1) = e$, de sorte que ψ vérifie $\psi(1) = e^n$. Ainsi, l'extension qui nous intéresse est le push-out suivant ψ de la précédente et l'élément correspondant dans $A^G/N(A)$ est la classe de $\psi(1) = e^n$. $\square$

2.6 Extensions de groupes et 2-extensions au sens de Yoneda

Fixons une action $\theta : G \to \mathrm{Aut}(A)$, de sorte que A est muni d'une structure de G-module. Le groupe $H^2(G, A)$ est isomorphe au groupe $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ des 2-extensions de $\mathbb{Z}[G]$-modules au sens de Yoneda (cf. [Mc, IV Cor 5.2]). On va ici décrire explicitement cet isomorphisme en terme d'extensions de groupes et de G-modules.

Lemme 2.7 *Soit $0 \to A \to B \to C \to \mathbb{Z} \to 0$ une suite exacte de G-modules.*

1. *Pour tout $c \in C$, l'ensemble*

$$E_c = \Big\{(g, b) \in G \times B \mid d(b) = g.c - c\Big\},$$

est muni de la loi de groupe suivante $(g_1, b_1)(g_2, b_2) = (g_1g_2, b_1 + g_1.b_2)$. De plus, E_c est une extension de G par A d'action θ.

2. *Si c et $c' \in C$ ont la même image dans $\mathbb{Z}$, alors les extensions E_c et $E_{c'}$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration. (1) Si $d(b_i) = g_i.c - c$ pour $i = 1, 2$, on a

$$d(b_1 + g_1.b_2) = g_1.c - c + g_1.(g_2.c - c)(g_1g_2).c - c.$$

Ainsi, la loi définie ci-dessus est bien une loi interne sur E_c ; on vérifie facilement qu'elle munit E_c d'une structure de groupe. En particulier, l'inverse de $(g, b) \in E_c$ est $(g, b)^{-1} = (g^{-1}, -g^{-1}.b)$.

Comme l'image dans $\mathbb{Z}$ de $g \cdot c - c$ est triviale, la projection $E_c \to G$ est surjective ; son noyau $\{(1_G, a),\ a \in A\}$ est isomorphe à A. Ceci prouve que E_c est une extension de G par A. De plus, l'action induite de G sur A est donnée par $(g, 0)(1_G, a)(g^{-1}, 0) = (g, g.a)(g^{-1}, 0) = (1_G, g.a)$, qui coïncide bien avec l'action initiale.

(2) Si c et c' ont la même image dans $\mathbb{Z}$, il existe $b_0 \in B$ tel que $c' = c + d(b_0)$. L'application

$$\begin{array}{ccc} E_c & \to & E_{c'} \\ (g, b) & \mapsto & (g, b + g \cdot b_0 - b_0), \end{array}$$

qui agit comme l'identité sur $\{(1_G, a),\ a \in A\}$, est un isomorphisme entre ces deux extensions. □

Proposition 2.8 *Soit* $0 \to A \to B \to C \to \mathbb{Z} \to 0$ *une suite exacte de* G–*modules. Sa classe dans* $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) \simeq H^2(G, A)$ *est la classe de l'extension de groupes* $0 \to A \to E_c \to G \to 1$*, où* c *est un élément de* C *d'image* 1 *dans* $\mathbb{Z}$.

Démonstration. Notons tout d'abord que, en vertu du Lemme 2.7(2), la classe de l'extension E_c ne dépend pas du choix de $c \in C$ d'image 1 dans $\mathbb{Z}$.

Pour montrer la proposition, on utilise la description, donnée par Mac Lane dans son livre [Mc, §IV.6], de l'opération inverse, qui à une extension de groupe d'action θ

$$0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1$$

associe sa classe caractéristique dans $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$, à savoir

$$\chi(E) : \qquad 0 \to A \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}[G]^{(E)}/L \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0.$$

où L est engendré par $[1_G]$ et les $[e_1e_2] - p(e_1).[e_2] - [e_1]$ pour e_1, e_2 parcourant E. Les morphismes α et β sont définis respectivement par $\alpha(a) = [i(a)] \in \mathbb{Z}[G]^{(E)}/L$ et $\beta([e]) = [p(e)] - [1_G]$, pour tout $e \in E$. Enfin, ϵ est le morphisme d'augmentation.

L'élément $1_G \in \mathbb{Z}[G]$ a pour image 1 dans $\mathbb{Z}$. Pour montrer la proposition, il suffit donc de remarquer que l'application $e \in E \mapsto (p(e), [e])$ est un isomorphisme entre l'extension E_{1_G} associée à $\chi(E)$ suivant le Lemme 2.7 et l'extension initiale E. $\square$

Ce formalisme est bien commode quand on a affaire à une situation équivariante, c'est-à-dire quand on a une action

$$f = (f_1, f_2) : \Gamma \to \mathrm{Aut}(A) \times \mathrm{Aut}(G)$$

d'un groupe Γ sur A et sur G qui est compatible avec l'action de G sur A, c'est-à-dire telle que $f_1(\gamma)(g.a) = f_2(\gamma)(g) \cdot f_1(\gamma)(a)$ pour tous $\gamma \in \Gamma$, $g \in G$ et $a \in A$. En d'autres mots, on a une structure de $G \rtimes \Gamma$–module sur A définie par

$$(g\gamma).a = g.f_1(\gamma)(a).$$

Supposons que la suite exacte de G-modules

$$0 \to A \to B \to C \to \mathbb{Z} \to 0$$

est en réalité une suite de $G \rtimes \Gamma$–modules. Pour tout $c \in C$, on peut alors définir par le Lemme 2.7 une extension E_c de G par A et une extension $\widetilde{E}_c$ de $G \rtimes \Gamma$ par A. De plus, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E_c & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \widetilde{E}_c & \longrightarrow & G \rtimes \Gamma & \longrightarrow & 1. \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \Gamma & = & \Gamma & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

Lemme 2.9 *Si $c \in C^\Gamma$, alors le groupe Γ agit sur E_c ; de plus, $\widetilde{E}_c$ est isomorphe à $E_c \rtimes \Gamma$.*

Démonstration Si c est invariant sous l'action de Γ, alors pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $(g, b) \in E_c$, le couple $(\gamma \cdot g, \gamma \cdot b)$ appartient à E_c. Ceci définit une action de Γ sur E_c. De plus, on peut vérifier que l'application $\tilde{E}_c \to E_c \times \Gamma$, qui à $(g\gamma, b)$ associe $((g, b), \gamma)$ induit un isomorphisme de groupes entre $\tilde{E}_c$ et $E_c \rtimes \Gamma$,

3 Extensions de Brylinski-Deligne

3.1 Rappels

Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque k–simple. On a alors $H^0(G, \mathcal{K}_2) = K_2(k)$ et $H^1(G, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}$ (voir [BD, Prop. 4.6] si G est déployé et [M, (8.1),(8.3) et Thm 9.3] pour le cas général). Ainsi, le complexe de $G(k)$-modules

$$K_2(k(G)) \to \bigoplus_{x \in G^{(1)}} k(x)^\times \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in G^{(2)}} \mathbb{Z}$$

induit une 2-extension

$$0 \to K_2(k) \to K_2(k(G)) \to \mathcal{Z}(G) \to \mathbb{Z} \to 0,$$

où

$$\mathcal{Z}(G) = \ker\Big(\bigoplus_{x \in G^{(1)}} k(x)^\times \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in G^{(2)}} \mathbb{Z} \Big).$$

Cette extension étant équivariante pour l'action de $G(k)$ par translation à gauche, elle définit une classe de $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[G(k)]}(\mathbb{Z}, K_2(k)) = H^2(G(k), K_2(k))$. D'aprés la proposition 2.8, cette classe est représentée par l'extension centrale de Brylinski-Deligne

$$(\mathcal{E}(G, c, k)) \qquad\qquad 0 \to K_2(k) \to \mathcal{E}(G, c, k) \to G(k) \to 1,$$

où $c \in \mathcal{Z}(G)$ est un élément d'image 1 dans $\mathbb{Z}$, et $\mathcal{E}(G, c, k)$ est définie comme dans le lemme 2.7(1). Notons que l'extension $\mathcal{E}(G, c, k)$, contrairement à sa classe, dépend explicitement du choix de c, dorénavant fixé.

Remarque 3.1 Dans l'article [BD], cette extension n'est pas définie de cette façon alors qu'elle l'était dans une version préliminaire. Les deux constructions coïncident et c'est d'ailleurs celle présentée ici qui est utilisée dans [Gi].

Notons $\mathrm{Aut}(G)$ le k-groupe algébrique des automorphismes de G. Le groupe $\mathrm{Aut}(G)(k)$ agit naturellement sur le complexe ci-dessus, d'où une action sur la 2-extension de $G(k)$-modules associée, qui est triviale sur $K_2(k)$. De plus, on a :

Lemme 3.2 *1. L'action de* $\mathrm{Aut}(G)(k)$ *sur* $H^1(G, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}$ *est triviale.*

2. Si $G(k)$ *est parfait, alors l'extension de Brylinski-Deligne* $\mathcal{E}(G, c, k)$ *est canoniquement* $\mathrm{Aut}(G)(k)$*-équivariante.*

Démonstration.

(1) Considérons une représentation fidéle $\rho : G \rtimes \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{SL}_N$, et notons $\rho_0 : G \to \mathrm{SL}_N$ sa restriction à G. Le morphisme induit

$$\mathbb{Z} = H^1(\mathrm{SL}_N, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{{\rho_0}^*} \mathbb{Z} = H^1(G, \mathcal{K}_2)$$

est la multiplication par un entier strictement positif d_{ρ_0}, l'indice de Dynkin de ρ_0 [M, prop. 7.9.3]. Soit maintenant $f \in \mathrm{Aut}(G)(k)$. Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G(k) & \xrightarrow{\rho_0} & \mathrm{SL}_N \\ {\scriptstyle f}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle Int(\rho(1,f))} \\ G(k) & \xrightarrow{\rho_0} & \mathrm{SL}_N, \end{array}$$

on déduit le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathrm{SL}_N, \mathcal{K}_2) & \xrightarrow{{\rho_0}^\star} & H^1(G, \mathcal{K}_2) \\ {\scriptstyle \left(Int(\rho(1,f))\right)^\star}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle f^\star} \\ H^1(\mathrm{SL}_N, \mathcal{K}_2) & \xrightarrow{{\rho_0}^\star} & H^1(G, \mathcal{K}_2). \end{array}$$

Or la fléche verticale de gauche est l'identité de $\mathbb{Z}$ puisque l'action de SL_N sur lui-même par automorphismes intérieurs induit une action triviale de $\mathrm{SL}_N(k)$ sur $H^1(\mathrm{SL}_N, \mathcal{K}_2)$ (cf. *loc. cit.*, lemma 6.9). Par commutativité du diagramme, il en est de même de celle de droite, ce qui prouve la premiére assertion.

(2) La description explicite de $\mathcal{E}(G, c, k) \subset G(k) \times K_2(k(G))$ donnée par 2.7(1) montre que l'action de $f \in \mathrm{Aut}(G)(k)$ sur $G(k) \times K_2(k(G))$, induit une application

$$\mathcal{E}(G, c, k) \to \mathcal{E}(G, f.c, k),$$

qui vaut l'identité sur $K_2(k)$. Ainsi, $\mathcal{E}(G, f.c, k)$ n'est rien d'autre que le pull-back $(f^{-1})^\star(\mathcal{E}(G, c, k))$. Or, comme l'action de $\mathrm{Aut}(G)(k)$ sur $H^1(G, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}$ est triviale, les éléments c et $f.c$ ont la même image dans $\mathbb{Z}$. Par le lemme 2.7(2), on en déduit que les extensions de Brylinski-Deligne correspondante $\mathcal{E}(G, c, k)$ et $(f^{-1})^\star(\mathcal{E}(G, c, k))$ sont équivalentes. Enfin, $G(k)$ étant supposé parfait, ceci prouve que l'action de $\mathrm{Aut}(G)(k)$ s'étend à $\mathcal{E}(G, c, k)$ par le lemme 2.3. □

3.2 Action galoisienne

Soit maintenant L/k une extension galoisienne finie de groupe Γ. En poussant c dans $\mathcal{Z}(G_L)$, on obtient une extension centrale

$$(\mathcal{E}(G, c, L)) \qquad 0 \to K_2(L) \to \mathcal{E}(G, c, L) \to G(L) \to 1.$$

On a alors :

Lemme 3.3 *Si $G(L)$ est parfait, l'extension $\mathcal{E}(G, c, L)$ est canoniquement $\mathrm{Aut}(G)(L) \rtimes \Gamma$-équivariante.*

Démonstration. Les groupes Γ et $\mathrm{Aut}(G)(L)$ agissent tous deux sur l'extension $\mathcal{E}(G, c, L)$ en vertu des lemmes 2.9 et 3.2(2). Il est clair que sur $K_2(L)$ et sur $G(L)$, ces deux actions sont compatibles, c'est-à-dire induisent un morphisme

$$\mathrm{Aut}(G)(L) \rtimes \Gamma \to \mathrm{Aut}(K_2(L)) \times \mathrm{Aut}(G(L)).$$

Or on vient de voir que les images de $\mathrm{Aut}(G)(L)$ et de Γ sont toutes deux incluses dans

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{E}(G, c, L), K_2(L)) \subset \mathrm{Aut}(K_2(L)) \times \mathrm{Aut}(G(L)).$$

Le morphisme ci-dessus se factorise donc bien par $\mathrm{Aut}(\mathcal{E}(G, c, L), K_2(L))$. □

Lemme 3.4 *On suppose $G(L)$ parfait, et on se donne un 1-cocycle $z \in Z^1(\Gamma, \mathrm{Aut}(G)(L))$. Soit $\phi : G \times_k L \cong {}_zG \times_k L$ une trivialisation satisfaisant $z_\gamma = \phi^{-1}\gamma(\phi)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. On pose*

$$d := \phi^*(c_L) \in \mathcal{Z}({}_zG \times_k L)$$

Alors l'extension tordue par z

$$0 \to K_2(L) \to {}_z\mathcal{E}(G, c, L) \to {}_zG(L) \to 1$$

est $\mathrm{Aut}({}_zG)(L) \rtimes \Gamma$–isomorphe à l'extension $\mathcal{E}({}_zG, d, L)$.

Notons que la propriété galoisienne $\mathcal{Z}({}_zG) = \mathcal{Z}({}_zG \times_k L)^\Gamma$ est cruciale ici [CTR, prop. 3.6] pour savoir que $d \in \mathcal{Z}({}_zG)$.

Démonstration. La description explicite de ${}_z\mathcal{E}(G, c, L)$ et $\mathcal{E}({}_zG, d, L)$ donnée par 2.7(1) montre que ϕ induit un isomorphisme entre ces deux extensions de ${}_zG(L)$ par $K_2(L)$. Toutes deux sont $\mathrm{Aut}({}_zG)(L) \rtimes \Gamma$ équivariantes, mais il n'est pas clair à priori que l'isomorphisme entre les deux soit également équivariant. Le lemme 2.3 permet de le montrer sans aucun calcul ; il suffit en effet d'observer que l'action de $\mathrm{Aut}({}_zG)(L) \rtimes \Gamma$ sur $K_2(L)$ et ${}_zG(L)$ est la même pour chacune des deux extensions. □

La proposition qui suit est l'ingrédient clef pour effectuer des calculs. Elle repose sur le lien, établi dans [Gi, Lemme 5], entre le bord associé à l'extension de Brylinski-Deligne, et l'invariant de Rost. Précisément, étant donné un 1-cocycle $z \in Z^1(\Gamma, \mathrm{Aut}(G)(L))$, on y montre l'anti-commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Gamma, {}_zG(L)) & \xrightarrow{r_{zG}} & \mathrm{Ker}(H^3(k) \to H^3(L)), \\ \rho\big\downarrow & \swarrow a_k^L & \\ H^2(\Gamma, K_2(L)) & & \end{array}$$

où r_{zG} désigne l'invariant de Rost, a_k^L est la flèche construite par B. Kahn dans [K1], et $\rho : H^1(\Gamma, {}_zG(L)) \to H^2(\Gamma, K_2(L))$ est le bord associé à l'extension de Brylinski-Deligne $\mathcal{E}({}_zG, d_0, L)$ pour un certain $d_0 \in \mathcal{Z}({}_zG)$ d'image 1 dans $\mathbb{Z} = H^1({}_zG, \mathcal{K}_2)$. On a alors :

Proposition 3.5 *On suppose $G(L)$ parfait. On se donne $u \in Z^1(\Gamma, {}_zG(L))$, vu comme une section du morphisme $G(L) \rtimes^z \Gamma \to \Gamma$, et on considère l'extension retirée en arrière*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_2(L) & \longrightarrow & \mathcal{E}(G, c, L) \rtimes^z \Gamma & \longrightarrow & G(L) \rtimes^z \Gamma & \longrightarrow & 1 \\ & & || & & \cup & & u\big\uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K_2(L) & \longrightarrow & E(z, u) & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

Alors on a

$$a_k^L\Big(r_{zG}([u])\Big) = -\Big[E(z, u)\Big] \in H^2(\Gamma, K_2(L)).$$

Démonstration. Comme on vient de l'expliquer, il suffit de calculer l'image de $[u] \in H^1(\Gamma, {}_zG(L))$ sous le bord associé l'extension de Brylinski-Deligne

$\mathcal{E}({}_zG, d_0, L)$, où $d_0 \in \mathcal{Z}({}_zG)$ est un élément d'image 1 dans $\mathbb{Z} = H^1({}_zG, \mathcal{K}_2)$. Si l'on prend $d_0 = \phi^*(c_L)$, le lemme 3.4 indique que l'on peut remplacer $\mathcal{E}({}_zG, d_0, L)$ par l'extension tordue ${}_z\mathcal{E}(G, c, L)$. La version tordue du lemme 2.1 montre que l'extension de groupes $E(z, u)$ ci-dessus représente la classe $\rho([u])$. $\square$

4 Calculs explicites pour $\mathrm{SL}_1(A)$

4.1 Algèbres cycliques

Proposition 4.1 *Soient L/k une extension galoisienne cyclique de degré n et de groupe $\Gamma = \langle\sigma\rangle$, et $b \in k^\times$. On considère la k-algèbre cyclique*

$$A = (L/k, \sigma, b) = L \oplus Ly \cdots \oplus Ly^{n-1}$$

définie par les relations $y^n = b$ et $\lambda y = y\sigma(\lambda)$, pour $\lambda \in L$. Quel que soit $[v] \in k^\times/\mathrm{Nrd}(A^\times) \cong H^1(\Gamma, \mathrm{SL}_1(A)(L))$, on a

$$a_k^L\Big(r_{\mathrm{SL}_1(A)}([v])\Big) = \Big[\{v, b\}\Big] \in K_2(k)/N(K_2(L)) \cong H^2(\Gamma, K_2(L)).$$

Démonstration. Notons

$$f_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_n(k).$$

On rappelle (cf. [GS, §2.5]) que l'algèbre A est la tordue $A = {}_zM_n(k)$ de $M_n(k)$ par le cocycle $z : \Gamma \to \mathrm{PGL}_n(L)$, défini par $\sigma^i \mapsto [f_b^i]$. Un point remarquable est que z est à valeurs dans $\mathrm{PGL}_n(k)$, c'est-à-dire définit un morphisme de groupes $\Gamma \to \mathrm{PGL}_n(k)$. On se donne également une trivialisation $\phi : M_n(L) \cong A \otimes_k L$ telle que $z_\tau = \phi^{-1}\tau(\phi)$ pour tout $\tau \in \Gamma$. Pour utiliser la proposition 3.5, on doit réaliser la classe $[u]$ par un cocycle $u \in Z^1(\Gamma, {}_z\mathrm{SL}_n(L))$. Le $\mathrm{SL}_1(A)$–torseur correspondant à v est donné par l'équation $v = \mathrm{Nrd}_A(y)$.

Notons $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ la base canonique des cocaractères du tore diagonal $\mathbb{G}_m^n$ de GL_n. L'élément $\phi(\lambda_1(v)) \in \mathrm{GL}_1(A)(L)$ satisfait $\mathrm{Nrd}_{A_L}(\phi(\lambda_1(v))) =$

$\mathrm{Nrd}_{M_n(k)}(\lambda_1(v)) = \det(\lambda_1(v)) = v$. Un 1–cocycle représentant ce torseur est donc donné par $u_\sigma = \phi(\lambda_1(v))^{-1}\,\sigma(\phi(\lambda_1(v))) \in \mathrm{SL}_1(A)(L)$. Vu comme section du morphisme $\mathrm{SL}_n(L)\rtimes^z, \Gamma \to \Gamma$, ce cocycle est défini par l'homomorphisme $u:\ \Gamma \to \mathrm{SL}_n(L)\rtimes^z, \Gamma,\ \sigma \to t\,\sigma$, où

$$t = \lambda_1(v)^{-1}\lambda_2(v) = \begin{bmatrix} v^{-1} & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_n(L).$$

On se donne $c \in \mathcal{Z}(\mathrm{SL}_n)$ d'image 1 dans $H^1(\mathrm{SL}_n, \mathcal{K}_2)$. On considère alors l'extension retirée en arrière

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_2(L) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathrm{SL}_n, c, L) \rtimes^z \Gamma & \longrightarrow & \mathrm{SL}_n(L) \rtimes^z \Gamma & \longrightarrow & 1 \\ & & || & & \cup & & {\scriptstyle u}\uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K_2(L) & \longrightarrow & E(z,u) & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

dont on va calculer la classe. Suivant le lemme 2.6, celle-ci est donnée par l'élément

$$(\widetilde{t}\,\sigma)^n \ \in\ K_2(L)\ \subset\ \mathcal{E}(\mathrm{SL}_n, c, L) \rtimes^z\ \Gamma$$

où $\widetilde{t}$ désigne un relevé de t dans $\mathcal{E}(\mathrm{SL}_n, c, L)$ que l'on choisit bien sûr provenant de $\mathcal{E}(\mathrm{SL}_n, c, k)$. En utilisant la forme précise du cocycle z, on écrit alors

$$\begin{aligned} (\widetilde{t}\,\sigma)^n &= \widetilde{t}\,(\sigma\widetilde{t}\sigma^{-1})\cdots(\sigma^{n-1}\,\widetilde{t}\,\sigma^{1-n}) \\ &= \widetilde{t}\,(f_b.\sigma(\widetilde{t}))\ \cdots(f_b^{n-1}.\sigma^{n-1}(\widetilde{t})) \\ &= \widetilde{t}\,(f_b.\widetilde{t})\ \cdots(f_b^{n-1}.\widetilde{t})\ \in\ \mathcal{E}(\mathrm{SL}_n, c, L). \end{aligned} \tag{1}$$

Notant $T = \mathrm{Ker}(\mathbb{G}_m^n \to \mathbb{G}_m)$ le tore maximal standard de SL_n et $T_{ad} = \mathbb{G}_m^n/\mathbb{G}_m$ celui de PGL_n, on a alors besoin de l'accouplement

$$h : T_{ad}(L) \times T(L) \to K_2(L)$$

défini par $h(x,y) = (x.\widetilde{y})\widetilde{y}^{-1}$ où $\widetilde{y}$ est un relevé (arbitraire) de y dans $\mathcal{E}(\mathrm{SL}_n, c, L)$ [BD, §4.13]. En pratique, h se calcule avec le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} T_{ad}(L) \times T(L) & \longrightarrow & K_2(L) \\ \uparrow \quad\quad \downarrow & & \| \\ (L^\times)^n \times (L^\times)^n & \longrightarrow & K_2(L) \\ (x_i) \quad\quad (y_i) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} \{x_i, y_i\}. \end{array}$$

Ecrivons $f_b = \lambda_1(b)\, f_1,\ \ f_b^i = (\lambda_1(b) \cdots \lambda_i(b))\, f_1^i,\ \ (i = 1, ..., n-1)$. Vu que f_1 normalise le tore T, on a $f_1^i.\widetilde{t} \in T(L)$. Par suite,

$$f_b^i.\tilde{t} = (\lambda_1(b) \cdots \lambda_i(b)).(f_1^i.\widetilde{t}) = h\Big(\lambda_1(b) \cdots \lambda_i(b), f_1^i.t\Big)\, f_1^i.\widetilde{t}.$$

Reportant ceci dans (1), on obtient

$$(\widetilde{t}\,\sigma)^n = \alpha \,\times\, \ \widetilde{t}\,(f_1.\widetilde{t}) \,\cdots (f_1^{n-1}.\widetilde{t}).$$

où

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} h\Big(\lambda_1(b) \cdots \lambda_i(b), f_1^i.t\Big) \in K_2(L).$$

Le terme de droite $\widetilde{t}\,(f_1.\sigma(\widetilde{t})) \cdots (f_1^{n-1}.\sigma^{d-1}(\widetilde{t}))$, étant celui du cas $b = 1$, est inessentiel ; il appartient donc à l'image de $N : K_2(L) \to K_2(L)$. Il reste donc à calculer le premier terme α. Vu que $t = \lambda_1(v)^{-1}\lambda_2(v)$, on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^{n-1} h\Big(\lambda_1(b) \cdots \lambda_i(b),\ \lambda_i(v)^{-1}\lambda_{i+1}(v)\Big) && (2) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \{b, v^{-1}\} && (3) \\ &= -(n-1)\{b, v\}. && (4) \end{aligned}$$

On conclut que $[E(z,u)] = \{b, v\} \in K_2(L)^\Gamma / N.K_2(L)$, d'où la formule voulue par application de la proposition 3.5. $\square$

4.2 Calcul dans un cas particulier

Lemme 4.2 *Soit n un entier ≥ 1. On suppose que k admet une racine primitive n-ième de l'unité ζ_n. On pose $K = k((x))$ et on considère l'extension de Kummer $L = K(x^{\frac{1}{n}})$. On note σ le générateur de $\mathrm{Gal}(L/K)$ défini par $\sigma(x^{\frac{1}{n}}) = \zeta_n x^{\frac{1}{n}}$ et $\chi \in H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ le caractère de $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ appliquant σ sur 1.*

1. *On a un isomorphisme*

$$K_2(k)/nK_2(k) \xrightarrow[\sim]{\chi.h_n} \mathrm{Ker}(H^3(K) \to H^3(L))$$

où $h_n : K_2(k)/nK_2(k) \to {}_nH^2(k)$ désigne le symbole galoisien.

2. *Le composé*

$$K_2(k)/nK_2(k) \xrightarrow[\sim]{\chi.h_n} \mathrm{Ker}(H^3(K) \to H^3(L)) \xrightarrow[\sim]{a_K^L} H^2(\mathrm{Gal}(L/K), K_2(L))$$

est injectif et applique le symbole $\{x, y\} \in K_2(k)$ sur

$$[\{y, x\}] \in H^2(\mathrm{Gal}(L/K), K_2(L)) \cong K_2(L)^{\mathrm{Gal}(L/K)}/N.K_2(L).$$

3. *Soient $b, v \in k^\times$. On considère l'algèbre $A = (L/K, \sigma, b)$. Alors*

$$r_{\mathrm{SL}_1(A)}([v]) = (v).[A] \in H^3(K).$$

Démonstration. (1) On observe tout d'abord que

$$\mathrm{Ker}(H^3(K, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(L, \mu_n^{\otimes 2}))) \cong \mathrm{Ker}(H^3(K) \to H^3(L)).$$

On a un diagramme commutatif exact de suites exactes de résidus [GS, §8]

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^3(k, \mu_n^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^3(K, \mu_n^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\partial_K} & H^2(k, \mu_n^{\otimes 2}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & || & & {\scriptstyle res}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \times n} & & \\
0 & \longrightarrow & H^3(k, \mu_n^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^3(L, \mu_n^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\partial_K} & H^2(k, \mu_n^{\otimes 2}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Ceci produit un isomorphisme

$$\mathrm{Ker}(H^3(K, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(L, \mu_n^{\otimes 2}))) \xrightarrow{\sim} H^2(k, \mu_n^{\otimes 2}),$$

dont la réciproque est donnée par le cup-produit par χ. En le combinant avec l'isomorphisme de Merkurjev-Suslin [MS]

$$h_n : K_2(k)/nK_2(k) \xrightarrow{\sim} H^2(k, \mu_n^{\otimes 2}),$$

on obtient un isomorphisme

$$K_2(k)/nK_2(k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(H^3(K, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(L, \mu_n^{\otimes 2}))), \{u, v\} \mapsto \chi.h_n(\{u, v\}).$$

(2) Suivant [Gi, lemme 2], on a

$$a_K^L\Big(\chi.h_n(\{u, v\})\Big) = -\{u, v\} \in K_2(L)^{\mathrm{Gal}(L/K)}/N.K_2(L).$$

Il reste à vérifier que le morphisme $K_2(k)/nK_2(k) \to K_2(L)^{\mathrm{Gal}(L/K)}/N.K_2(L)$ est injectif. Cela découle du fait qu'il est scindé par la spécialisation

$$s : K_2(L) \to K_2(k), \;\; \alpha \mapsto \partial_L((-x^{\frac{1}{n}}).\alpha),$$

où l'on voit $(-x^{\frac{1}{n}}).\alpha \in K_3^M(L)$.
(3) La proposition 4.1 indique que

$$a_K^L\Big(r_{\mathrm{SL}_1(A)}([v])\Big) = \Big[\{v, b\}\Big] \in \; K_2(L)^\Gamma/N.K_2(L) \cong H^2(\Gamma, K_2(L)).$$

Suivant (2), ceci entraîne

$$r_{\mathrm{SL}_1(A)}([v]) = \chi.h_n(\{b, v\}) = \chi.(b).(v) = (v).[A] \in H^3(K).$$

□

4.3 Démonstration du théorème 1.1

Lemme 4.3 *Soit n un entier ≥ 1 inversible dans k. Il existe un entier positif m tel que pour tout corps F/k et toute algèbre simple centrale A/F de degré n, l'invariant de Rost $F^\times/\mathrm{Nrd}(A^\times) \to H^3(F)$ est donné par $[v] \mapsto m\,(v).[A]$.*

La démonstration passe par les torseurs versels [GS, §IV].

Démonstration. Pour tout corps F/k, on définit

$$\begin{array}{rcl} \alpha_F : H^1(F, \mu_n \times \mathrm{PGL}_n) = F^\times/(F^\times)^n \times H^1(F, \mathrm{PGL}_n) & \longrightarrow & H^3(F) \\ ((v), [A]) & \longrightarrow & a_F((v), [A]) \end{array}$$

où

$$a_F((v),[A]) := \text{Invariant de Rost du } \mathrm{SL}_1(A)\text{–torseur } v = \mathrm{Nrd}_A(y).$$

Les a_F définissent un invariant cohomologique du groupe $\mu_n \times \mathrm{PGL}_n$.

Selon [M, theorem 11.5], on sait qu'il existe un entier m tel que

$$r([P_{k(X)(t)}])) = m\,(t).[\mathcal{A}_{k(X)}] \;\in\; H^3(k(X)(t)).$$

Le principe de spécialisation [**?**, th. 3.3 page 109] nous permet de conclure que $\alpha_F((v),[A]) = m\,(v).[A]$ pour tout corps F/k, tout $c \in F^\times$ et toute F–algèbre simple centrale A. □

Pour établir le théorème 1.1, on commence par le cas où n est inversible dans k. L'idée est de tester l'entier m sur un exemple. Plus précisément, il suffit d'exhiber une extension F/k, une algèbre A/F degré n, et un élément $v \in F^\times$ tel que $r_{\mathrm{SL}_1(A)}([v]) = (v).[A]$ et tel que $r_{\mathrm{SL}_1(A)}([v])$ soit d'ordre exactement n.

Posons $F = \overline{k}((t))((y))((x))$. On note A l'algèbre cyclique sur F présentée par $X^n = x, Y^n = y$ et $XY = \zeta_n YX$. Alors $(t).[A] = (t).(x).(y)$ est d'ordre n dans $H^3(F, \mu_n^{\otimes 2}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On conclut que $m = 1$.

Enfin, l'argument de relèvement en caractéristique nulle de l'invariant de Rost [Gi, §5.1] fonctionne ici et montre que la formule vaut sur un corps arbitraire.

5 Restriction au centre de l'invariant de Rost

Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque k-simple. On suppose dans cette partie que la caractéristique du corps k ne divise pas l'exposant du centre Z de G, de sorte que Z est lisse. On s'intéresse à la restriction ρ_G de l'invariant de Rost aux torseurs issus de Z, c'est-à-dire à la composée

$$H^1(k,Z) \to H^1(k,G) \to H^3(k),$$

où la premiére application est induite par l'inclusion de Z dans G et la seconde est l'invariant de Rost. L'ingrédient majeur pour faire ce calcul est la description des invariants des tores quasi-triviaux donnée dans [MPT, Thm 1.1], qui montre qu'il existe une classe de cohomologie $t_{R,G} \in H^2(k,Z)$ telle que ρ_G est donné par un certain cup-produit avec $t_{R,G}$. On sait de plus que cette classe $t_{R,G}$ est, suivant le type du groupe G, soit la classe nulle, soit un multiple non trivial de la classe de Tits $t_G \in H^2(k, Z)$ (cf. [MPT] pour G de type classique ou [GQ] pour G de type exceptionnel). Le théorème 1.1 permet d'énoncer le résultat plus précis suivant :

Corollaire 5.1 *Si G est de type A, C_ℓ avec ℓ impair, D, E_6 ou E_7, la restriction ρ_G de l'invariant de Rost aux torseurs issus du centre est le cup-produit avec la classe de Tits du groupe G, $t_G \in H^2(k, Z)$, le cup-produit étant induit par l'application bilinéaire $Z(k_s) \times Z(k_s) \to \mu_n^{\otimes 2}$ spécifiée pour chaque type de groupe dans [GQ, §2]. Pour les autres groupes, ρ_G est nulle.*

Démonstration. Si le groupe G est de type ${}^1A_{\ell-1}$, il est de la forme $G = \mathrm{SL}_1(A)$ pour une certaine k-algèbre centrale simple A de degré ℓ, et il a pour centre $Z = \mu_\ell$. Par [KMRT, (31.7)], avec l'identification que l'on a choisie entre le groupe de Brauer de k et $H^2(k)$, la classe de Tits de G est alors la classe de Brauer de l'algèbre A, $t_{\mathrm{SL}_1(A)} = [A] \in H^2(k, \mu_n)$, et le corollaire découle donc dans ce cas de la description de l'invariant de Rost donnée dans le thm 1.1.

Quand la composée ρ_G est nulle, le résultat est prouvé dans [MPT] ou [GQ]. Pour les autres types de groupes, on sait (cf. *loc. cit.*) que la restriction à $H^1(k, Z)$ de l'un des générateurs du groupe des invariants de degré 3 de G est le cup-produit avec la classe de Tits. De sorte que $t_{R,G}$ est de la forme $m\, t_G$, où m est un entier premier à l'indice de Dynkin n_G du groupe G. Si n_G est pair et Z d'exposant 2, alors m est impair et $m\, t_G = t_G \in H^2(k, Z)$. Le corollaire est ainsi prouvé pour G de type C_ℓ, D_ℓ avec ℓ pair et E_7.

Si G est de type E_6, la preuve de [GQ, §11] montre que si l'invariant de Rost pour le groupe $SL_1(D)$ est le cup-produit avec $m[D]$, alors $t_{R,G} = m\, t_G$. En combinant avec le théorème 1.1, on obtient donc le résultat annoncé.

Il reste à prouver le corollaire pour les groupes de type ${}^2A_{\ell-1}$, et pour les groupes de type D_ℓ avec ℓ impair. On commence par les formes extérieures de $A_{\ell-1}$.

Groupes de type ${}^2A_{\ell-1}$.

L'argument présenté ici est essentiellement tiré de [MPT]. Le groupe G est de la forme $G = \mathrm{SU}(B, \tau)$, où B est une algèbre centrale simple de degré ℓ sur une extension quadratique K de k, et τ est une involution K/k-semi-linéaire de B. Son centre est une forme tordue $Z = \mu_{\ell[K]}$ du groupe des racines ℓiémes de l'unité.

Supposons tout d'abord que ℓ est impair. Par [MPT, (6)], le groupe $\mu_{\ell[K]}$ s'insére dans une suite exacte impliquant des tores quasi-triviaux, et en considérant la suite induite en cohomologie, on observe que $H^2(k, Z)$ s'injecte dans $H^2(k, R_{K/k}(\mathbb{G}_m)) = \mathrm{Br}(K)$. On en déduit que la restriction $res_{K/k} : H^2(k, Z) \to H^2(K, Z)$ est injective. Or, par le cas intérieur, la différence $t_{R,G} - t_G \in H^2(k, Z)$ est nulle sur K. On a donc bien $t_{R,G} = t_G$.

Supposons maintenant que $\ell = 2m$ est pair. Dans ce cas, par [MPT, Prop. 5.2], l'application

$$(\lambda_\star, res_{K/k}) : H^2(k, Z) \to H^2(k, \mu_2) \times H^2(K, \mu_n)$$

est injective, où $\lambda_\star$ est induite par l'élévation à la puissance m. A nouveau par le cas intérieur, $res_{K/k}(t_{R,G}) = res_{K/k}(t_G)$. Il reste donc à montrer que $\lambda_\star(t_{R,G}) = \lambda_\star(t_G)$, qui par [KMRT, (31.8)] est la classe de Brauer de l'algèbre discriminante $\mathcal{D}(B, \tau)$.

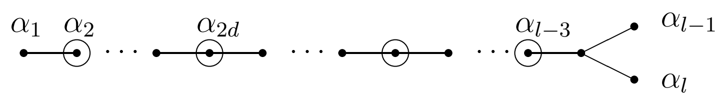
Pour cela rappelons que, par [KMRT, (30.13)], le groupe $H^1(k, Z)$ est un quotient de $\{(x, y) \in k^\times \times K^\times,\ x^n = N_{K/k}(y)\}$. De plus, si on note $(x, y)_n$ la classe du couple $(x, y) \in k^\times \times K^\times$, alors par les calculs de [MPT, p. 819], pour toute classe $\theta \in H^2(k, Z)$, le cup produit avec $(x, y)_n$ est donné par

$$(x, y)_n \cdot \theta = x \cdot \lambda_\star(\theta) + N_{K/k}(y \cdot res_{K/k}(\theta)).$$

Ainsi, par [MPT, §4.1], si l'algèbre B est déployée, alors $\lambda_\star(t_{R,G})$ est la classe de Brauer de l'algèbre discriminante $\mathcal{D}(B, \tau)$, ce qui prouve que $\lambda_\star(t_{R,G}) = \lambda_\star(t_G)$ dans le cas déployé. Le cas général s'en déduit par extension des scalaires aux corps des fonctions E du transfert de K à k de la variété de Severi-Brauer de B (cf. *loc. cit.*). En effet, E déploie B et la restriction $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(E)$ est injective.

Groupes de type D_ℓ avec ℓ impair.

Supposons maintenant que G est de type D_ℓ avec ℓ impair. Son centre est μ_4 dans le cas intérieur, et une forme tordue $\mu_{4[K]}$ dans le cas extérieur. On sait alors que $t_{R,G}$ est égal à t_G ou $3t_G$, mais les arguments donnés dans [MPT, §4.2.1, §4.3.1] ne permettent pas de lever l'ambiguïté. On va donc utiliser la méthode développée dans [GQ], qui s'applique aussi aux groupes classiques. Nous présentons ici une esquisse de la preuve, comprenant les calculs détaillés qui ne sont pas dans [GQ]. Nous renvoyons le lecteur à l'article d'origine pour les détails des arguments. Rappelons tout d'abord que l'on peut supposer, pour calculer $t_{R,G}$, que le groupe G a un indice de Tits de la forme suivante [GQ, §4] :



Le groupe G contient donc un k-tore déployé S' de rang $\frac{\ell-3}{2}$. Considérons le sous-groupe dérivé G' du centralisateur dans G de S'. C'est un groupe semi-simple simplement connexe, dont le diagramme de Dynkin est obtenu à partir du diagramme ci-dessus en supprimant les sommets entourés. C'est donc un produit de groupes de type A. De plus, par [GQ, Prop 5.5], le centre Z de G est contenu dans G'. On va donc calculer ρ_G en passant par ce sous-groupe, et en utilisant le théorème 1.1.

Pour cela, il nous faut décrire précisément le groupe G' et l'inclusion de Z dans G'. Pour $i = 1, 3, \dots, \ell-4$, on note G'_i la composante de G' correspondant au sommet α_i du diagramme ; elle est de la forme $G'_i = \mathrm{SL}_1(Q_i)$, où Q_i est l'algèbre de Tits associée au poids fondamental ω_i. Or, en consultant les tables de [Bou], on observe que les poids $\omega_1, \omega_3 \dots, \omega_{\ell-4}$ sont égaux modulo le réseau des racines. Il découle donc de [T1, p. 211] (cf. également [KMRT, (27.7)]) que les algèbres Q_i sont toutes isomorphes. Ainsi, on a $G'_i = \mathrm{SL}_1(Q)$ pour une certaine algèbre de quaternions Q. Notons maintenant G'_ℓ la composante associée au sous-diagramme de sommets α_ℓ, $\alpha_{\ell-2}$ et $\alpha_{\ell-1}$. L'algèbre de Tits correspondant au poids ω_ℓ est une algèbre de degré 4 sur k dans le cas intérieur et sur K dans le cas extérieur. Le groupe G'_ℓ est $G'_\ell = \mathrm{SL}_1(D)$ dans le premier cas et $G'_\ell = \mathrm{SU}(D, \tau)$ dans le second, où τ est une involution K/k semi-linéaire de D. De plus, à nouveau par [KMRT, (27.7)], on a $[Q] = 2[D]$ dans le cas intérieur et $res_{K/k}([Q]) = 2[D]$ dans le cas extérieur.

La description de l'inclusion de Z dans G' peut se faire au niveau de la clôture séparable k_s de k. Comme dans [GQ, §8], le poids ω_ℓ étant d'ordre 4 dans le quotient Λ/Λ_r, l'application z_{ω_ℓ} associée par [GQ, Prop 6.2] induit un isomorphisme entre μ_4 et Z. Avec les notations de [GQ, §5.1], elle est donnée par

$$z_{\omega_\ell}(\zeta) = h_{4\omega_\ell}(\zeta) = h_1(\zeta^2)\, h_3(\zeta^2) \dots h_{\ell-4}(\zeta^2) h_{\ell-2}(\zeta^2) h_{\ell-1}(\zeta^{\ell-2})\, h_\ell(\zeta^\ell).$$

On peut décrire de manière analogue le centre de $\mathrm{SL}_1(D)$. En comparant les deux formules, on obtient que l'inclusion de Z dans le produit $Z'_1 \times Z'_3 \times \dots \times Z'_{\ell-4} \times Z'_\ell$, où Z'_i désigne le centre de G'_i, est donnée par

$$\zeta \mapsto (\zeta^2, \dots, \zeta^2, \zeta^{\ell-2}).$$

Rappelons que le centre Z'_i est isomorphe à μ_2 pour $i = 1, 3, \dots, \ell-4$, tandis que Z'_l est isomorphe à Z. L'application induite au niveau des H^1 est donc

$$\begin{array}{ccc} H^1(k, Z) & \mapsto & \prod H^1(k, Z'_i) \\ a & \mapsto & (\lambda_\star(a), \dots, \lambda_\star(a), (\ell-2)a), \end{array}$$

où $\lambda_\star$ désigne comme précédemment l'application induite par l'élévation au carré. Pour conclure, il ne reste plus qu'à appliquer la formule [GQ, (5.8)].

Plaçons-nous tout d'abord dans le cas intérieur. Si $\ell \equiv 3[4]$, on obtient

$$\rho_G(a) = (\ell - 2)(a) \cdot [D] = (a) \cdot [D].$$

Si maintenant $\ell \equiv 1[4]$, on obtient

$$\rho_G(a) = \lambda_\star(a) \cdot [Q] + (3a) \cdot [D].$$

Or $(2a) \cdot [D] = (a) \cdot [2D] = \lambda_\star(a) \cdot [Q]$, qui est d'ordre 2 dans $H^3(k)$.

On obtient donc dans les deux cas $\rho_G(a) = (a) \cdot [D]$. Or, pour faire ce calcul, on a identifié μ_4 et Z par l'intermédiaire du poids ω_ℓ. Par [KMRT, (31.7)], cette identification induit une application $H^2(k, Z) \to H^2(k, \mu_4)$ qui envoie la classe de Tits t_G sur la classe de Brauer de l'algèbre de Tits associée à ω_ℓ qui est justement $[D]$. Le corollaire est donc prouvé dans le cas intérieur.

Notons que l'on aurait aussi pu identifier Z et μ_4 en utilisant le poids $\omega_{\ell-1}$. Un calcul analogue montre qu'il faudrait alors remplacer $\ell - 2$ par ℓ dans la formule ci-dessus. Mais il faudrait également remplacer D par l'algèbre de Tits associée au poids $\omega_{\ell-1}$, qui est l'algèbre opposée D^{op}. Comme prévu, la formule ne dépend donc pas de l'identification choisie.

Dans le cas extérieur, un calcul analogue, conduit à $\rho_G(a) = a \cdot t_{G'_\ell}$. Si l'on identifie Z et Z'_ℓ à $\mu_{4[K]}$ par le poids ω_ℓ, en appliquant à nouveau [KMRT, (31.7)], on observe que $res_{K/k}(t_G) = res_{K/k}(t_{G'_\ell}) = [D]$ et $\lambda_\star(t_G) = \lambda_\star(t_{G'\ell}) = [Q]$. Par [MPT, Prop. 5.2], ceci permet d'identifier $t_G = t_{G'_\ell}$, et termine la preuve. $\square$

6 Groupes exceptionnels de type G_2, F_4 et E_8

On note G le groupe déployé de type G_2 (resp. F_4, E_8). Il admet un unique (à $G(k_s)$-conjugaison près) k–sous–groupe $A = \mu_l \times \mu_l \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ avec $l = 2$ (resp. $l = 3$, $l = 5$) tel que $Z_G(A)$ est fini dont on va donner une description précise ci-dessous. On se propose de calculer le composé

$$H^1_{fppf}(k, A) \to H^1_{fppf}(k, G) \to H^3(k),$$

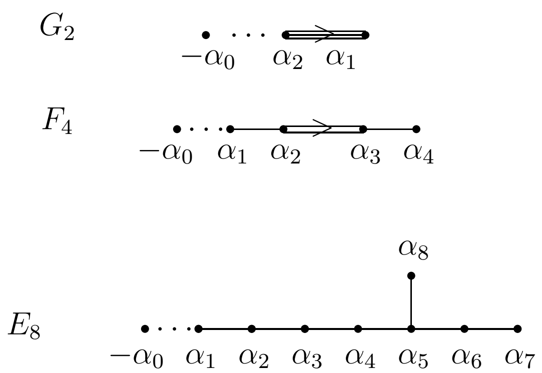
le cas de G_2 étant bien connu des spécialistes. La théorie de la cohomologie plate (cf. [BFT, app. B]) n'est nécessaire que dans le cas de caractéristique

l. Notons que ce type de torseurs intervient dans l'étude de la dimension essentielle de G [RY] [ChS] [GiR].

Si n est un entier strictement positif, on note C_n le groupe cyclique d'ordre n et A_n le groupe alterné en n lettres.

6.1 Sous-groupes finis.

On note T un tore déployé maximal de G et $W = N_G(T)/T$ son groupe de Weyl. On considère les diagrammes de Dynkin étendus respectifs



D'après Borel-de Siebenthal [BS], ceci indique que G admet un sous–groupe H de type $A_1 \times A_1$ (resp. $A_2 \times A_2$, resp. $A_4 \times A_4$) dont le premier facteur contient le sommet $-\alpha_0$. On a $H = (SL_l \times \mathrm{SL}_l)/\mu$ où $\mu \subset \mu_l \times \mu_l$ désigne le groupe fondamental de H. Le groupe H satisfait $H = Z_G(Z(H))$.

Nous renvoyons à [T2, §1.7.1] pour le calcul du dual $\widehat{\mu}$ qui est un quotient de $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ de base respective attachée aux sommets $-\alpha_0$, α_1 (resp. $-\alpha_0$, α_3, resp. $-\alpha_0$, α_8). Dans le cas de G_2 (resp. F_4), μ est le μ_2 (resp. μ_3) diagonal de $SL_2 \times SL_2$ (resp. $SL_3 \times SL_3$; pour E_8, on a $\widehat{\mu} = \mathrm{coker}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \xrightarrow{(1,3)} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ d'où $\mu = \mu_5$ plongé dans $\mu_5 \times \mu_5$ par $x \mapsto (x, x^2)$. On note h l'image respective de

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(k) \times \mathrm{SL}_2(k).$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_3(k) \times \mathrm{SL}_3(k).$$

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_5(k)\times\mathrm{SL}_5(k).$$

dans $H(k)$. L'élément h est d'ordre $l = 2$ (resp. 3, 5) et agit de façon anisotrope[1] à travers son image $w \in N_H(T)/T$. On pose $A = T^w \times \langle h\rangle$. Le groupe A contient l'image $\mu_l^{(1)} = Z(H)$ du centre du premier facteur ainsi que le sous–groupe $\mu_l^{(2)}$ de H image du plongement $\mu_l \to H$ donné respectivement par

$$\begin{bmatrix} 1&0\\ 0&x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1&0\\ 0&x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&x&0\\ 0&0&x^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&x&0\\ 0&0&x^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&x&0&0&0\\ 0&0&x^2&0&0\\ 0&0&0&x^3&0\\ 0&0&0&0&x^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&x^2&0&0&0\\ 0&0&x^4&0&0\\ 0&0&0&x^6&0\\ 0&0&0&0&x^8 \end{bmatrix}.$$

Lemme 6.1 *Dans les trois cas précédents, on a*

1. $T^w = \mu_l^{(1)} \times \mu_l^{(2)}$ *et* $A = \mu_l^{(1)} \times \mu_l^{(2)} \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$.
2. $Z_G(T^w) = T \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ *et* $Z_G(A) = A$.
3. $N_G(T^w) = N_G(T, T^w)$.

Démonstration. La première assertion est évidente puisque T^w se calcule dans H.
(2) Comme $H = Z_G(Z(H))$ et $Z(H) \subset T^w$, on a $Z_G(T^w) = Z_H(T^w)$. Il suit que $Z_G(T^w) = T \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$. Vu que $T^A \subset A$, on en déduit $Z_G(A) = A$.
(3) Le k–groupe $N_G(T^w)$ normalise $T = Z_G(T^w)0$. D'où on déduit $N_G(T^w) = N_G(T, T^w)$. □

On considère le morphisme

$$\phi : N_G(T, T^w) \to \mathrm{Aut}_{k-gp}(T^w) = \mathrm{Aut}_{k-gp}(\mu_l^{(1)} \times \mu_l^{(2)}) = \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_l).$$

[1] i.e. T^w est fini.

Par ailleurs, on note $N_{\langle w \rangle}$ (resp. N_w) la préimage de $N_W(\langle w \rangle)$ (resp. $Z_W(w)$) dans $N_G(T)$.

Lemme 6.2 *On suppose que k est de caractéristique $\neq l$.*

1. *On a des suites exactes de k–groupes*

$$1 \to T \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \to N_G(T, T^w) \xrightarrow{\phi} \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_l) \to 1.$$

et

$$1 \to A \to N_G(T, T^w) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi'} \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_l) \to 1,$$

où ϕ' est la restriction de ϕ à $N_G(T, T^w) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$.

2. *Le morphisme $N_G(T, T^w) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to N_w$ induit un isomorphisme $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_l) \xrightarrow{\sim} Z_W(w)/\langle w \rangle$.*
3. *Le morphisme $N_G(T, T^w) \to N_{\langle w \rangle}$ est un isomorphisme et induit un isomorphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_l) \xrightarrow{\sim} N_{\langle w \rangle}/\langle w \rangle$.*
4. *Le morphisme*

$$N_G(T, T^w)(k) \xrightarrow{\phi} \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_l).$$

est surjectif.

5. *Le morphisme*

$$N_G(T, T^w)(k) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})(k) \xrightarrow{\phi'} \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_l).$$

est surjectif.

Pour établir (2), on va procéder cas par cas en utilisant la forme explicite du groupe fini $Z_W(w)$. Dans le cas de G_2, W est le groupe diédral d'ordre 12 et $\langle w \rangle$ son centre, ainsi $Z_W(w) = W$. Dans les deux autres cas, la forme explicite de $Z_W(w)$ peut être relevée des tables de Carter [Ca] ou plus rapidement du fait que $Z_W(w)$ est un groupe de réflexion complexe [Sp]. On a $Z_W(w) = C_6.A_4$ dans le cas F_4 et $Z_W(w) = C_{10}.A_5$ dans le cas E_8.

Démonstration du lemme 6.2. (1) On a $\ker(\phi) = N_G(T, T^w) \cap Z_G(T^w) = N_G(T, T^w) \cap Z_G(T^w) = N_G(T, T^w) \cap (T \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = T \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ suivant le lemme 6.1.(2). Pour la surjectivité de ϕ, on peut supposer k algébriquement clos. Suivant les tables de Griess [Gs], puisque A est non toral, on a $N_G(A) = A \rtimes \mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_l)$. Ainsi $N_G(T^w) \cap N_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ se surjecte par ϕ sur $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_l)$. La surjectivité de ϕ' résulte du même fait et le noyau de ϕ' est donné par $\ker(\phi') = \ker(\phi) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = (T \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = A$ suivant le lemme 6.1.(2).

(2) Le morphisme $N_G(T, T^w) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to N_w$ produit en effet un plongement $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_l) \hookrightarrow Z_w/\langle w \rangle$, qui est un isomorphisme puisque ces deux groupes ont même ordre.

(3) De même, le morphisme $N_G(T, T^w) \to N_{\langle w \rangle}$ produit un plongement $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_l) \hookrightarrow N_{\langle w \rangle}/\langle w \rangle$. Comme l'on a une suite exacte

$$1 \to Z_w \to N_{\langle w \rangle} \to Aut(\langle w \rangle) = (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times,$$

on déduit en comptant que $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_l) \xrightarrow{\sim} N_{\langle w \rangle}/\langle w \rangle$. Ainsi

$$N_G(T, T^w)/T \xrightarrow{\sim} N_{\langle w \rangle}/T,$$

d'où l'on conclut que $N_G(T, T^w) \xrightarrow{\sim} N_{\langle w \rangle}$.

(4) Le morphisme $N_G(T)(k) \to W$ étant surjectif, le morphisme

$$N_{\langle w \rangle}(k) \to N_W(\langle w \rangle)$$

l'est également. En utilisant (3), on conclut que $N_G(T, T^w)(k) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_l)$ est surjectif. $\square$

(5) Si $r \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_l)$, le (4) produit un relevé $g \in N_G(T, T^w)(k)$ qui agit trivialement sur $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$.

Remarque 6.3 L'hypothèse sur la caractéristique est technique et peut probablement être levée dans le lemme 6.2.

6.2 Calcul explicite

On a $H^1_{fppf}(k, A) = k^\times/(k^\times)^l \times k^\times/(k^\times)^l \times H^1(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$, un élément est donc le produit de deux éléments $(a), (b) \in k^\times/(k^\times)^l$ et d'un caractère $\chi \in H^1(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$.

Théorème 6.1 *Le composé*

$$r_G \circ i_k : H^1_{fppf}(k, A) \to H^1_{fppf}(k, G) \to H^3(k),$$

applique $(a) \times (b) \times \chi$ *sur* $-(a).(b).\chi$.

La démonstration s'appuie principalement sur la note de Chernousov [Ch].

Démonstration : On note $f = r_G \circ i_k$. On suppose que $G = E_8$, les deux autres cas étant similaires. Le théorème 2 de [Gi] permet de supposer que $\mathrm{car}(k) = 0$. En outre, par restriction-corestriction, il est loisible de supposer que k contient une racine cinquième de l'unité ζ. On regarde d'abord la restriction au facteur $H^1(k, \mu_5^{(2)} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) = k^\times/(k^\times)^l \times H^1(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. Celle-ci définit un invariant cohomologique f' de $\mu_5^{(2)} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ dans $H^3_5(k)$. La description de ces invariants est bien connue [GS, §16.5 page 40]. On sait alors qu'il existe (de façon unique !) des éléments $(c_0) \in k^\times/(k^\times)^5$, $\alpha_0 \in H^2(k, \mu_5^{(2)})$ et $\beta_0 \in H^2_p(k)$ tels que

$$f'((b) \times \chi) = (c_0).(b) \cup \chi + \alpha_0.\chi + (b).\beta_0.$$

Vu que $\mu_5^{(2)} \subset T$ et que $H^1(k, T) = 0$, cet invariant est nul si $\chi = 0$, d'où $\beta_0 = 0$. De même, $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ se plonge dans un k–tore déployé, donc $\alpha_0 = 0$ et $f'((b) \times \chi) = (c_0).(b) \cup \chi$.

On note z l'image dans $Z^1(k, H)$ du cocycle $(b) \times \chi$. Suivant [GiS, §2.5], on a

$$_zH = \Big(\mathrm{SL}_1(B) \times \mathrm{SL}_1(C)\Big)/\mu$$

où $B = (\chi, b)$ et $C = (\chi, b^2)$ sont des k–algèbres cycliques de degré 5. On considère le diagramme commutatif [Gi, lemme 7]

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccc} H^1(k, A) & \longrightarrow & H^1(k, {}_zG) & \xrightarrow{r_{zG}} & H^3(k) \\ {\scriptstyle ?+(b)\times\chi}\downarrow & & {\scriptstyle \tau_z}\downarrow\wr & & \downarrow{\scriptstyle ?+f((b)\times\chi)} \\ H^1(k, A) & \longrightarrow & H^1(k, G) & \xrightarrow{r_G} & H^3(k) \end{array}$$

où τ_z désigne la bijection de torsion. Vu que le facteur $\mu_5^{(1)}$ s'applique sur le centre de $\mathrm{SL}_1(B)$, il vient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} k^\times/(k^\times)^5 & \longrightarrow & k^\times/\mathrm{Nrd}(B^\times) & \xrightarrow{\sim} & H^1(k, \mathrm{SL}_1(B)) \\ || & & & & \downarrow \\ k^\times/(k^\times)^5 = H^1(k, \mu_5^{(1)}) & \longrightarrow & H^1(k, A) & \longrightarrow & H^1(k, {}_zG). \end{array}$$

Nous affirmons que le composé $H^1(k, \mathrm{SL}_1(B)) \to H^1(k, {}_zG) \to H^3(k)$, la seconde flèche étant r_{zG}, est l'invariant de Rost de $\mathrm{SL}_1(B)$. En effet, on sait que ce composé est $d \times r_{\mathrm{SL}_1(B)}$ où d est l'indice de Dynkin (ou multiplicateur de Rost) du morphisme $\mathrm{SL}_1(B) \to {}_zG$ [M, §9]. Cet indice correspond au morphisme $\mathbb{Z} = H^1({}_zG, \mathcal{K}_2) \to H^1(\mathrm{SL}_1(B), \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}$ et est donc le même que celui du morphisme $\mathrm{SL}_5 \to G$. Pour voir que ce multiplicateur est 1, on utilise le morphisme

$$\alpha_0^\vee : \mathrm{SL}_2 \to \mathrm{SL}_5 \to G$$

attaché à la coracine (courte) $\alpha_0^\vee$ commune à SL_5 et G. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} = H^1_{Zar}(G, \mathcal{K}_2) & \xrightarrow{(\alpha_0^\vee)^*} & H^1_{Zar}(\mathrm{SL}_2, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z} \\ {\scriptstyle \times d}\downarrow & & || \\ \mathbb{Z} = H^1_{Zar}(\mathrm{SL}_5, \mathcal{K}_2) & \xrightarrow{(\alpha_0^\vee)^*} & H^1_{Zar}(\mathrm{SL}_2, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}. \end{array}$$

Suivant [M, remark 7.5 page 121], les flèches horizontales sont $id_{\mathbb{Z}}$, d'où $d = 1$. Ainsi, l'image de (a) par le composé

$$k^\times/(k^\times)^5 = H^1(k, \mu_5^{(1)}) \to H^1(k, A) \to H^1(k, {}_zG) \to H^3(k)$$

est $(a).\chi.(b)$ suivant le Théorème 1.1. En remontant avec le diagramme (*), il vient

$$f((a) \times (b).\chi) = (a).\chi.(b) - (c_0).(b).\chi.$$

On utilise maintenant l'action du groupe $N_G(T^w)(k) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})(k)$ sur G et A. Suivant le lemme 6.2.5, il existe $g \in N_G(T^w)(k) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})(k)$ qui agit sur T^w suivant

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_5).$$

Vu que $G(k)$ agit trivialement sur $H^1(k, G)$, (a) et (b) jouent donc des rôles équivalents dans la formule cherchée, d'où la trivialité de (c_0) et de β_0. On conclut que

$$f((a) \times (b).\chi) = -(a).(b).\chi.$$

□

Références

[BFT] G. Berhuy, C. Frings and J.-P. Tignol, *Serre's conjecture II for classical groups over imperfect fields*, J. of Pure and Applied Algebra **211** (2007), 307-341.

[Bou] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématiques*, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6, (1981), Masson.

[Bro] Brown, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics **87** (1982), Springer.

[BD] J.-L. Brylinski, P. Deligne, *Central extensions of reductive groups by* $\mathbf{K}_2$, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **94** (2001), 5–85.

[BS] A. Borel, J. de Siebenthal, *Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos*, Comment. Math. Helv. **23** (1949), 200–221.

[Ca] R. W. Carter, *Conjugacy classes in the Weyl group*, Compositio Math. **25** (1972), 1–59.

[Ch] V. Chernousov, *Remark on the Serre mod 5 invariant for groups of type* E_8, Math. Zametki **56** (1994), 116-121, traduction anglaise : Math Note **56** (1994), 730-733.

[ChS] J.-P. Serre et V. Chernousov, *Lower Bounds for essential dimensions via orthogonal representations*, Journal of. Algebra **305** (2006), 1055-1070.

[CTR] J.-L. Colliot-Thélène, $\mathcal{K}_2$*-cohomology and the second Chow group*, Math. Ann. **270** (1985), 165–199.

[EM] S. Eilenberg, S. MacLane, *Group Extensions and Homology*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 43 (1942), 757-831.

[EKLV] H. Esnault, B. Kahn, M. Levine, E. Viehweg, *The Arason invariant and mod* 2 *algebraic cycles*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 73–118.

[Ga] S. Garibaldi, *The Rost invariant has trivial kernel for quasi-split groups of low rank*, Comment. Math. Helv. **76** (2001), 684–711.

[GQ] S. Garibaldi et A. Quéguiner-Mathieu, *Restricting the Rost invariant to the center*,

[GS] S. Garibaldi et J.-P. Serre, *Cohomological invariants, Witt invariants and trace forms*, Cohomological invariants in Galois cohomology, University Lecture Series **28** (2003), American Mathematical Society.

[Gi] P. Gille, *Invariants cohomologiques de Rost en caractéristique positive*, K-Theory **21** (2000), 57-100.

[GiR] P. Gille et Z. Reichstein, *A lower bound on the essential dimension of a connected linear group*, Comment. Math. Helv. **84** (2009), 189-212.

[GiS] P. Gille et T. Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **101** (2006), Cambridge University Press.

[Gs] R. L. Griess, Jr., *Elementary abelian p-subgroups of algebraic groups*, Geom. Dedicata **39** (1991), 253–305.

[Gr1] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer. I. Algèbres d'Azumaya et interprétations diverses*, (1968) Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas pp. 88–188 North-Holland, Amsterdam ; Masson, Paris.

[Gr2] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer. II. Théories cohomologiques*, (1968) Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas pp. 67-87 North-Holland, Amsterdam ; Masson, Paris.

[K] K. Kato, *Galois cohomology of complete discrete valuation fields*, Algebraic K-theory, Part II (Oberwolfach, 1980), pp. 215–238, Lecture Notes in Math. **967** (1982), Springer.

[K1] B. Kahn, *Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres*, K-Theory **7** (1993), 55–100.

[K2] B. Kahn, *Applications of weight-two motivic cohomology*, Doc. Math. **1** (1996), 395–416.

[KMRT] M.-A. Knus, A.S. Merkurjev, M. Rost, and J.-P. Tignol, *The book of involutions*, Colloquium Publ., **44** (1998), Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[Mc] S. Mac Lane, *Homology*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **114** (1963), Springer-Verlag.

[M] A.S. Merkurjev, *Rost invariants of simply connected algebraic groups. With a section by Skip Garibaldi*, in Galois cohomology, University Lecture Series **28** (2003), 101–158, American Mathematical Society.

[MPT] A.S. Merkurjev, R. Parimala et J.-P. Tignol, *Invariants of quasitrivial tori and the Rost invariant*,

[Ms] I. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi–simples déployés*, Ann. scient. Éc. norm. sup. **2** (1969), 1–62.

[MS] A.S. Merkurjev et A.A. Suslin, *$\mathcal{K}$-cohomologie des variétés de Severi-Brauer et l'homomorphisme de norme résiduelle (en russe)*, Izv. Akad. Nauk SSSR **46** (1982), 1011–1046, trad. anglaise : Math. USSR Izv. **21** (1983), 307–340.

[RY] Z. Reichstein et B. Youssin, *Essential Dimensions of Algebraic Groups and a Resolution Theorem for G-varietie*, avec un appendice J. Kollár et E. Szabó, Canadian Journal of Mathematics **52** (2000), 1018-1056.

[R1] M. Rost, *A (mod 3) invariant for exceptional Jordan algebras*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **313** (1991), 823-827.

[S1] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, 5-ième édition, Lecture Notes in Math **5**, Springer.

[Sp] T. A. Springer, *Regular elements of finite reflection groups*, Invent. Math. **25** (1974), 159–198.

[W] C. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **38** (1994).

[T1] J. Tits, *Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque*, J. reine angew. math. **247** (1971), 196–220.

[T2] J. Tits, *Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups*, J. Algebra **131** (1990), 648–677.