# UN INVARIANT DE DEGRÉ 3 DES ALGÈBRES CENTRALES SIMPLES D'EXPOSANT 2

*par*

Bruno Kahn

***Abstract.*** — We associate to any central simple algebra $A$ of exponent 2 over a field of characteristic $\neq 2$ an invariant with values in the degree 2 unramified cohomology of its Severi-Brauer variety modulo the image of the cohomology of the ground field. The main theorem is that this invariant is nonzero if and only if the index of $A$ is $\geq 8$.

Ce texte se fonde sur des notes manuscrites non datées (remontant sans doute à 2000) que j'ai retrouvées récemment. Je remercie J.-P. Tignol, A. Vishik et V. Chernousov pour des conversations à ce sujet.

Soient $F$ un corps de caractéristique différente de 2 et $A$ une $F$-algèbre centrale simple d'exposant 2. Notons $X$ sa variété de Severi-Brauer et $K = F(X)$. On dispose d'homomorphismes d'extension des scalaires:

$$\eta_2^3 : H^3(F, \mathbf{Z}/2) \to H^3_{\mathrm{nr}}(K/F, \mathbf{Z}/2)$$
$$\eta^3 : H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(K/F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

Rappelons que la cohomologie non ramifiée est un invariant birationnel stable; par conséquent, $\operatorname{Coker} \eta_2^3$ et $\operatorname{Coker} \eta^3$ ne dépendent que de la classe de $A$ dans $Br(F)$.

Soit $F_s$ une clôture séparable de $F$ et $X_s = X \otimes_F F_s$. Notons $\xi$ l'homomorphisme $CH^2(X) \to CH^2(X_s)$. D'après [**3**, cor. 7.1] on a une injection

$$\operatorname{Coker} \eta^3 \hookrightarrow \operatorname{Coker} \xi \tag{1}$$

qu'on peut déduire du diagramme commutatif aux lignes exactes (cf. [**3**, th. 1.1]):

$$
\begin{array}{lccccccc}
 & 0\to & 0 & \longrightarrow & H^4_{\text{ét}}(F,\mathbf{Z}(2)) & \xrightarrow{\sim} & H^3_{\text{ét}}(F,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) & \to 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta^3} & \\
(2) & 0\to & CH^2(X) & \longrightarrow & H^4_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}(2)) & \longrightarrow & H^3_{\text{nr}}(K/F,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) & \to 0\\
 & & {\scriptstyle \xi}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0\to & CH^2(X_s) & \xrightarrow{\sim} & H^4_{\text{ét}}(X_s,\mathbf{Z}(2)) & \longrightarrow & 0 & \to 0
\end{array}
$$

dans lequel la colonne centrale, formée de groupes de cohomologie motivique étale, est exacte (on a $H^3_{\text{nr}}(KF_s/F_s,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))=0$ puisque $X_s$ est une variété rationnelle).

(La meilleure manière de prouver l'exactitude de la colonne centrale est d'utiliser la suite spectrale des tranches: [**4**, th. 4.4] et [**2**, (3.2) et rem. 6.3].)

Il résulte de [**6**] que $\operatorname{Coker}\xi$ ne dépend également que de la classe de $A$ dans $Br(F)$. Rappelons que $CH^2(X_s)=\mathbf{Z}$ ou 0 puisque $X_s$ est un espace projectif. On a:

- $\operatorname{ind}(A)\le 2$: $\operatorname{Coker}\xi=0$ (se ramener à $A$ à division; alors $\dim X\le 1$).
- $\operatorname{ind}(A)=4$: $\operatorname{Coker}\xi=\mathbf{Z}/2$ [**5**].
- $\operatorname{ind}(A)\ge 8$: $\operatorname{Coker}\xi=\mathbf{Z}/4$ [**1**, lemma 9.4 b)].

Soit $q\in I^2F$ telle que $c(q)=[A]$: alors $q_K\in I^3K$ et son invariant d'Arason $e^3(q_K)\in H^3_{\text{ét}}(K,\mathbf{Z}/2)$ est défini. Il est non ramifié.

Soit $q'$ un autre choix de $q$: alors $q'\perp -q\in I^3F$ et $e^3(q_K)-e^3(q'_K)=e^3(q-q')_K$. Ainsi:

***Lemme 1***. — *La classe de $e^3(q_K)$ dans* $\operatorname{Coker}\eta^3_2$ *ne dépend pas du choix de $q$: on la note $e_2$.* □

***Théorème 1***. — *Soit $e$ l'image de $e_2$ dans* $\operatorname{Coker}\eta^3$. *Alors $e\neq 0\iff \operatorname{ind}(A)\ge 8$.*

*Démonstration*. — $\operatorname{ind}(A)\le 2$: c'est clair.

$\operatorname{ind}(A)=4$: on peut choisir $q$ d'Albert. Alors $q_K\sim 0$ par le Hauptsatz d'Arason-Pfister, donc $e=0$.

$\operatorname{ind}(A)\ge 8$: on pourrait le déduire de [**1**, Th. 9.1], mais je vais donner une argument légèrement différent.

Notons $E$ l'espace vectoriel sous-jacent à $q$. Alors $E \times_{\mathrm{Spec}\, F} X$ est un fibré vectoriel trivial sur $X$ qui définit (avec $q_K$) un fibré de Clifford, à savoir un torseur sous le groupe de Clifford spécial $\mathrm{Cliff}(n, n)$, cf. [**1**, §9]. Lui sont associées deux classes caractéristiques [**1**, §6]:

$$\gamma_1 \in H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(1)) \; (\simeq CH^1(X)), \quad \gamma_2 \in H^4_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(2))$$

à valeurs dans la cohomologie motivique étale de $X$.

On a:

– $0 = c_2(E \times_{\mathrm{Spec}\, F} X) = 2\gamma_2 - \gamma_1^2$ [**1**, th. 6.9 (iii))].
– $\gamma_1 \mapsto c(q_X) \in H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/2(1))$ (ibid., th. 6.9 (iv)).
– $\gamma_2 \mapsto e^3(q_K)$ (ibid., th. 6.11).

Comme $H^2_{\text{ét}}(F, \mathbf{Z}/2) \hookrightarrow H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/2)$, $c(q_X) \neq 0$ et $\gamma_1$ engendre $CH^1(X)/2$, soit $\gamma_1 = 2mh$, $m$ impair, $h$ classe d'une section hyperplane lisse de $X$ (cf. [**1**, lemme 9.4 a)].) On en déduit:

$$\gamma_2 \mapsto 2m^2h^2 \neq 0 \in \mathrm{Coker}\, \xi$$

ce qui conclut la démonstration, vu le diagramme (2). □

*Applications*:

1. Supposons $A$ à division et isomorphe à un produit tensoriel de trois algèbres de quaternions. Dans ce cas on peut choisir $q$ de dimension 8 et représentant 1; alors $q_K$ est une 3-forme de Pfister. Ceci donne un exemple de 3-forme de Pfister non ramifiée sur un corps de fonctions, qui est définie sur le corps de base en tant que forme quadratique mais pas en tant que forme de Pfister. (Je remercie Chernousov pour une conversation ayant conduit à cette observation.)
2. (Tignol). Cet exemple a un rapport direct avec le précédent. Karpenko [**7**, Th. 5.3] a démontré qu'une involution anisotrope sur une algèbre à division $D$ le reste après extension au corps des fonctions de la variété de Severi-Brauer de $D$. Par ailleurs, soit $A$ une algèbre centrale simple de degré 8 et $\sigma$ une involution orthogonale de $A$, décomposable en produit tensoriel de 3 involutions quaternioniennes: dans [**8**, Prop. 5.1], Queguiner et Tignol associent à $\sigma$ une forme $q \in I^2F$ de dimension 8 telle que
   – $c(q) = [A]$
   – $q$ isotrope $\iff$ $\sigma$ isotrope.

   Supposons que $A$ soit à division. Le théorème 1 implique que $q_K$ n'est pas isotrope, donc que $\sigma_K$ n'est pas isotrope. Cela donne une autre démonstration du théorème de Karpenko dans ce cas particulier.

## Références

[1] H. Esnault, B. Kahn, M. Levine, E. Viehweg *The Arason invariant and mod* 2 *algebraic cycles*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 73–118.

[2] A. Huber, B. Kahn *The slice filtration and mixed Tate motives*, Compositio Math. **142** (2006), 907–936.

[3] B. Kahn *Applications of weight-two motivic cohomology*, Doc. math. **1** (1996), 395–416.

[4] B. Kahn *Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties*, Proc. Symp. Pure Math. **67** (1999), 149–174.

[5] N. Karpenko *On topological filtration for Severi-Brauer varieties*, Proc. Symp. Pure Math. **58** (2) (1995), 275–277.

[6] N. Karpenko *Grothendieck Chow motives of Severi-Brauer varieties*, Algebra i Analiz **7** (1995), 196–213; traduction anglaise: St. Petersburg Math. J. **7** (1996), 649–661.

[7] N. Karpenko *On anisotropy of orthogonal involutions*, J. Ramanujan Math. Soc. 15 (2000), 1–22.

[8] A. Queguiner, J.-P. Tignol *Algebras with involution that become hyperbolic over the function field of a conic*, à paraître dans l'Israel J. Math.

[9] A. Suslin *L'homomorphisme quaternionien pour le corps des functions d'une conique*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **265** (1982), 292–296; traduction anglaise: Soviet Math. Dokl. **26** (1982), 72–77 (1983).

---

*5 novembre 2009*

Bruno Kahn, Institut de Mathématiques de Jussieu, 175–179 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France • *E-mail :* `kahn@math.jussieu.fr`