Exemples de groupes semi-simples simplement connexes anisotropes contenant un sous-groupe unipotent

Philippe Gille *
Anne Quéguiner-Mathieu †

19 septembre 2012

Abstract : We show that there are anisotropic groups of type G_2 (resp. F_4, E_8) containing a non-trivial smooth unipotent subgroup over a suitable field of characteristic 2 (resp. 3, 5).

Keywords : Galois cohomology, linear algebraic groups.

MSC : 11E72, 20G05.

1 Introduction

Soit k un corps d'exposant caractéristique p, et G/k un groupe semi-simple. Dans cette note, on s'intéresse à la question naturelle suivante : à quelle condition le groupe G contient-il un sous–groupe unipotent lisse et connexe non trivial ?

Si le groupe G est isotrope, l'existence d'un tel sous–groupe, que l'on peut en outre supposer déployé, est claire. Si de plus le corps de base k est parfait, alors la réciproque est également vraie. En effet, un k–sous–groupe unipotent lisse non trivial U de G donne lieu par [BT, 2.4,2.5] à un k–sous–groupe parabolique propre de G, ce qui impose que G est isotrope. Ainsi,

*UMR 8552 du CNRS, DMA, Ecole Normale Supérieure, F-75005 Paris

†Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS (UMR 7539), 99 avenue Jean-Baptiste Clément, F-93430 Villetaneuse, France

sur un corps parfait, l'isotropie est une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un tel sous–groupe.

Le cas intéressant est donc le cas des groupes anisotropes sur un corps non parfait. Dans ce contexte, l'équivalence précédente n'est plus vraie en général. Pour le voir, il suffit de considérer le groupe adjoint $G = \mathrm{PGL}_1(A)$, où A est une algèbre simple centrale contenant un corps commutatif K/k. Si l'algèbre A est à division, le groupe G est anisotrope. De plus, il contient le k–sous–groupe $R_{K/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$, qui est unipotent et lisse dès que K/k est purement inséparable. Un exemple explicite est donné par l'algèbre de présentation $X^p - X = x, Y^p = y$ et $XY = Y(X+1)$ sur $\mathbb{F}_p(x,y)$, ou bien $\mathbb{F}_p((x))((y))$. En effet, cette algèbre est une algèbre cyclique de degré p [GiS, §2.5, p. 36], à division par *loc. cit.* cor. 4.7.5, et elle contient une extension purement inséparable du centre, engendrée par Y.

Gopal Prasad a demandé s'il existait des groupes semi-simples simplement connexes ayant la même propriété. Dans cette note, nous répondons positivement à cette question en donnant des exemples de type G_2, F_4 et E_8 respectivement en caractéristique $2, 3$ et 5, voir la Proposition 3.1. La contruction repose sur l'étude de l'invariant de Rost en caractéristique positive [GQM] que nous rappelons ici.

2 L'invariant de Rost

Si G/k est un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque k-simple, on dispose de l'invariant de Rost [EKLV] [GMS]

$$r_G : H^1(k,G) \to H^3(k) := H^3(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(2))$$

qui associe à la classe d'un G–torseur une classe de cohomologie galoisienne de degré 3, où pour $d \geq 0$, $H^{d+1}(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(d))$ désigne le groupe de cohomologie galoisienne modifié à la Kato [K] sur la composante l–primaire si k est de caractéristique $l = p$ positive [GMS, p.151].

Pour chaque nombre premier $l = 2, 3, 5$, on considère respectivement le groupe G déployé de type G_2, F_4 et E_8 et son k–sous–groupe

$$A = \mu_l \times \mu_l \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z},$$

avec les conventions de [GQM, §6.A]. On a

$$H^1_{fppf}(k, A) = k^\times/(k^\times)^l \times k^\times/(k^\times)^l \times H^1(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z});$$

tout élément est donc le produit de deux classes $(a), (b) \in k^\times/(k^\times)^l$ et d'un caractère $\chi \in H^1(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. On note E_a le μ_l-torseur $x^l = a$ pour $a \in k^\times$, et E_χ le $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$-torseur associé au caractère χ. Commençons par préciser le théorème 6.6 de [GQM] :

Théorème 2.1 *(1) Le composé*

$$r_G \circ i_k : H^1_{fppf}(k, A) \to H^1_{fppf}(k, G) \to H^3(k),$$

applique $(a) \times (b) \times \chi$ *sur* $-\chi \cup (a) \cup (b)$ *si* $l \in k^\times$ *et sur* $\chi \cup (a) \cup (b)$ *si* k *est de caractéristique* l.

(2) Si $E = E_a \times_k E_b \times_k E_\chi$*, alors on a un isomorphisme*

$$Z_{({}^E G)}(\mu_l^{(1)}) \xrightarrow{\sim} \Big(\mathrm{SL}_1(B) \times \mathrm{SL}_1(C)\Big)/\mu_l$$

où B*,* C *sont des* k*-algèbres cycliques de degré* l *définies par*

$[B] = [C] = \chi \cup (b) \in \mathrm{Br}(k)$ *pour* G_2 *(resp.* F_4*) et* $l = 2$ *(resp.* 3*),*
et $[B] = 3[C] = \chi \cup (b) \in \mathrm{Br}(k)$ *dans le cas* E_8 *et* $l = 5$*.*

L'assertion (1) est prouvée dans [GQM] ; on raffine l'argument afin d'obtenir (2).

Démonstration : (2) On suppose que $G = E_8$ et $l = 5$, les deux autres cas étant similaires. On a $Z_G(\mu_5^{(1)}) = H = (\mathrm{SL}_5 \times \mathrm{SL}_5)/\mu_5$ avec les notations de [GQM, §6] et on souhaite décrire $Z_{({}^E G)}(\mu_5^{(1)}) = {}^E H = \Big(\mathrm{SL}_1(B) \times \mathrm{SL}_1(C)\Big)/\mu_5$ pour des k-algèbres de degré 5. Comme H commute avec $\mu_5^{(1)}$, on a ${}^E H = {}^{E'} H$, où E' désigne le torseur $E' = E_b \times E_\chi$. Pour déterminer ces algèbres, on peut par relèvement en caractéristique nulle supposer que l est inversible dans k. De plus, on peut même supposer que k contient une racine primitive l-ième de l'unité. Le résultat découle alors de la description de ${}^{E'} H$ donnée dans la preuve de l'assertion (1) [GQM]. $\square$

3 Groupes semi-simples anisotropes exotiques

Proposition 3.1 *On suppose que le corps de base est de caractéristique* $p = 2$ *(resp.* $p = 3, 5$*) et que* $H^3_p(k) \neq 0$*. Alors il existe une* k*-forme* G' *anisotrope* *du groupe déployé G de type G_2 (resp. F_4, E_8) qui contient un sous-groupe $R_{K/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$ où K/k est une extension de corps (purement) inséparable de degré p.*

Plaçons nous par exemple sur l'un des corps $\mathbb{F}_p(T_1, T_2)$ ou $\mathbb{F}_p((T_1))((T_2))$, qui satisfont l'hypothèse $H^3_p(k) \neq 0$. Comme $R_{K/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$ est un k-groupe unipotent lisse et connexe de dimension $p-1$ [CGP, 1.1.3], la proposition ci-dessus fournit des exemples de groupes anisotropes possédant des sous-groupes unipotents lisses et connexes non triviaux.

Lemma 3.2 *Sous les hypothèses de la proposition 3.1, soit E/k un G-torseur tel que $r_p([E]) \neq 0 \in H^3_p(k)$. Alors le k-groupe tordu ${}^E G/k$ est anisotrope.*

Démonstration. Comme la condition est préservée par extension finie de degré premier à p, il est loisible de supposer que k ne possède pas d'extensions propres de degré premier à p. Il suffit alors de vérifier qu'une forme isotrope $G' = {}^E G$ a un invariant de Rost trivial. Si G' est de type G_2, un tel groupe G' est déployé.

Dans le cas de type F_4, le noyau anisotrope de G' est trivial ou de type B_3, donc déployé puisque $\mathrm{cd}_2(k) = 1$.

Si G' est de type E_8, le noyau anisotrope J de G' est trivial ou intérieur de type D_4, D_6, E_6, D_7, E_7. Mais $\mathrm{cd}_2(k) = \mathrm{cd}_3(k) = 1$, ce qui implique que J est déployé (cf. [S, §4.4]). On conclut que G' est déployé. □

Démonstration de la proposition 3.1. Le groupe $H^3_p(k) \neq 0$ est engendré par les classes décomposables, c'est-à-dire de la forme $(a) \cup (b) \cup \chi$. Il existe donc $a, b \in k^\times$ et $\chi \in H^1(k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ tel que $(a) \cup (b) \cup \chi \neq 0 \in H^3_p(k)$. Avec les notations du théorème 2.1.2, on note E/k le A-torseur défini par a, b et χ. On considère le k-groupe $G' = {}^E G$. Son invariant de Rost modulo p est $(a) \cup (b) \cup^\chi$ donc G est anisotrope en vertu du lemme 3.2. En outre, par l'assertion (2) du théorème 2.1, G' contient le k-groupe

$$H' = \Big(\mathrm{SL}_1(B) \times \mathrm{SL}_1(C)\Big)/\mu_p.$$

Si $p = 2$ ou 3, on a $B \cong C \cong (\chi, b)$ et H' contient $\mathrm{PGL}_1((\chi, b))$ par le plongement diagonal. Mais, comme on l'a déjà noté dans l'introduction, l'algèbre cyclique (χ, b) contient l'extension purement inséparable $K_b := k(\sqrt[p]{b})$. D'où un plongement $R_{K_b/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m \subset \mathrm{PGL}_1((\chi, b)) \subset H' \subset G'$.

Le cas $l = 5$ est légèrement plus compliqué du fait que le sous-groupe maximal $H = (\mathrm{SL}_5 \times \mathrm{SL}_5)/\mu_5$ ne contient pas PGL_5 (en effet μ_5 se plonge dans

$\mu_5 \times \mu_5$ suivant $x \mapsto (x, x^2)$). Cependant comme $B \cong (\chi, b)$ et $C \cong (\chi, b^2)$, on dispose de plongements naturels $j_B : R^1_{K_b/k}(\mathbb{G}_m) \to \mathrm{SL}_1(B)$ et $j_C : R^1_{K_b/k}(\mathbb{G}_m) \to \mathrm{SL}_1(C)$. On considère l'homomorphisme

$$R^1_{K_b/k}(\mathbb{G}_m) \to (\mathrm{SL}_1(B) \times \mathrm{SL}_1(C))/\mu_5, \;\; w \mapsto (j_B(w), j_C(w^2))$$

dont le noyau est $\mu_5 \subset R^1_{K_b/k}(\mathbb{G}_m)$. On obtient ainsi un plongement

$$R^1_{K_b/k}(\mathbb{G}_m)/\mu_5 \cong R_{K_b/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m \subset H' \subset G'.$$

$\square$

Remarque 3.3 Le premier p est de "torsion" pour le groupe G considéré. C'est une condition nécessaire pour obtenir de tels exemples. En effet, supposons que p n'est pas de torsion pour un k–groupe G semi-simple, simplement connexe et presque k–simple qui contient un sous k–groupe unipotent lisse U non trivial. D'après Tits [T, 2.6], on sait alors que chaque élément de $U(k_s)$ est k_s–plongeable dans le radical unipotent d'un k_s–sous-groupe de Borel de G. Ceci entraîne que $U(k_s)$ est k_s–plongeable dans le radical unipotent d'un k_s–sous-groupe parabolique de G [BT, 3.6]. Ainsi on peut associer à U le k–sous–groupe parabolique $P(U)$ de G (*ibid*) dont le radical unipotent contient U ce qui montre que le groupe est isotrope.

Références

[BT] A. Borel, J. Tits, *Eléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs. I* Invent. Math. **12** (1971), 95–104.

[CGP] B. Conrad, O. Gabber, G. Prasad, *Pseudo-reductive groups*, Cambridge University Press (2010).

[EKLV] H. Esnault, B. Kahn, M. Levine, E. Viehweg, *The Arason invariant and mod* 2 *algebraic cycles*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 73–118.

[Ga] S. Garibaldi, *Cohomological invariants, exceptional groups and Spin groups*, Memoirs of the American Mathematical Society **937** (2009).

[GMS] S. Garibaldi, A. Merkurjev et J.-P. Serre, *Cohomological invariants in Galois cohomology*, University Lecture Series **28** (2003), American Mathematical Society.

[Gi] P. Gille, *Invariants cohomologiques de Rost en caractéristique positive*, K-Theory **21** (2000), 57-100.

[GQM] P. Gille et A. Quéguiner-Mathieu, *Formules pour l'invariant de Rost*, Algebra and Number Theory **5** (2011), 1–35.

[GiS] P. Gille et T. Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **101** (2006), Cambridge University Press.

[K] K. Kato, *Galois cohomology of complete discrete valuation fields*, Algebraic K-theory, Part II (Oberwolfach, 1980), pp. 215–238, Lecture Notes in Math. **967** (1982), Springer.

[S] J.-P. Serre, *Sous-groupe finis des groupes de Lie*, Séminaire Bourbaki 864 (1998-1999), Astérisque **332**, Société Mathématique de France.

[T] J. Tits, *Unipotent elements and parabolic subgroups of reductive groups. II*, Algebraic Groups Utrecht (1986), Lecture Notes in Mathematics **1271** (1987), 265–284.