Topologische Spinmodelle

Diplomarbeit

Andreas Winter
Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik und Informatik II

April 1997

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist als Diplomarbeit an der Freien Universität Berlin unter der Aufsicht von Prof. Martin Aigner entstanden. Ich danke ihm für die Einführung in und Hinleitung zu diesem schönen Teilgebiet der Mathematik, und für hilfreiche und unterhaltsame Diskussionen.

Berlin, 29. April 1997 $\square$

Inhalt

Einleitung

Die Theorie der Knoten, das heißt die Theorie der Lage von geschlossenen Kurven im Raum, hat mathematische Tradition. Im vorigen Jahrhundert wurden die ersten systematischen Untersuchungen von Knoten durch Mathematiker durchgeführt, zweifellos motiviert durch die elementare geometrische Faszination dieser Objekte.

Schon vor der Jahrhundertwende setzte sich die Ansicht durch, daß dabei der topologische Aspekt (als Qualität eines Knotens, im Gegensatz zu seinen quantitativ zu beschreibenden verschiedenen konkreten Darstellungen) eine entscheidende Bedeutung besitzt. In Großbritannien wurden die Forschungen besonders durch eine physikalische Theory des Atoms von Lord Kelvin ventiliert: diese sogenannte Vortex-Theorie interpretierte Atome als Verknotungen eines unter Spannung stehenden Fadens, was die Energiefreisetzung bei gewissen Stoffumwandlungen erklären sollte. Einer der bedeutendsten Knotenforscher dieser Periode war P. G. Tait, der große klassifizierende Tabellen von Knoten aufstellte, und durch seine sogenannten Tait-Vermutungen [Tait] der weiteren Forschung Motivation gab.

Nach 1900 entstanden in rascher Entwicklung die starken Methoden der algebraischen Topologie, die es erlaubten, den klassischen Problemen präzise Formulierungen zu geben, und auch einige zu lösen. Eine der wichtigsten Techniken der algebraischen Topologie ist die Konstruktion von algebraischen Invarianten der geometrisch gegebenen Knoten bezüglich topologischer Äquivalenz. Es sind davon eine ganze Reihe bekannt. Ein wichtiges (und klassisches) Beispiel ist die Fundamentalgruppe des Komplementes des Knotens. Tatsächlich ist diese Invariante charakterisierend für den trivialen Knoten (d.h. den unverschlungenen Ring), für den sie $\mathbf{Z}$ ist: ist die Fundamentalgruppe eines Knotenkomplements $\mathbf{Z}$, ist der Knoten trivial.

Vaughan Jones [Jo85] hat 1985 der Knotentheorie neue Impulse gegeben, indem er auf gänzlich überraschende Weise eine Polynominvariante definierte (für eine Lehrbuchdarstellung siehe etwa [GP94]), die es erlaubte, einige bis dahin ungeklärte Fragen zu entscheiden. Er schlug (nach einem ersten Schritt durch Kauffman [Ka87b]) 1989 [Jo89] einen neuen Zugang zum Jonespolynom vor, der auf Modellen der statistischen Mechanik basiert, insbesondere sogenannten Spinmodellen. Dieser Ansatz, Knoteninvarianten zu konstruieren, wurde in der Folge noch verallgemeinert. Mit der vorliegenden Arbeit wollen wir den Versuch unternehmen, den heutigen Stand der Theorie der topologischen Spinmodelle geschlossen zu präsentieren.

Kapitel 1

Knoten, Verschlingungen, Spinmodelle

In diesem Kapitel führen wir Knoten und Verschlingungen ein, zusammen mit einigen elementaren Konzepten wie Diagramm und Graph einer Verschlingung, und Taitzahl eines Diagramms. Ferner definieren wir topologische 4-weight-Spinmodelle für Verschlingungsinvarianten und stellen einige Beispiele vor.

1.1 Knoten und Verschlingungen

Wir beginnen mit einigen einfachen Definitionen.

Definition 1.1 *Eine (orientierte)* Verschlingung *(engl.* link*) L mit $c(L)$ Komponenten ist eine stetige Einbettung $\varphi_L : c(L) \cdot S^1 \longrightarrow \mathbf{R}^3$. Dabei heißt $c(L)$ die* Komponentenzahl *von L, das Bild von φ_L der* Träger *von L. Verschlingungen mit genau einer Komponente heißen auch* Knoten*. Den* trivialen *Knoten $S^1 \hookrightarrow \mathbf{R}^2 \hookrightarrow \mathbf{R}^3$ bezeichnen wir mit $\bigcirc$.*

Beispiel 1.2 siehe Abbildung 1.1.

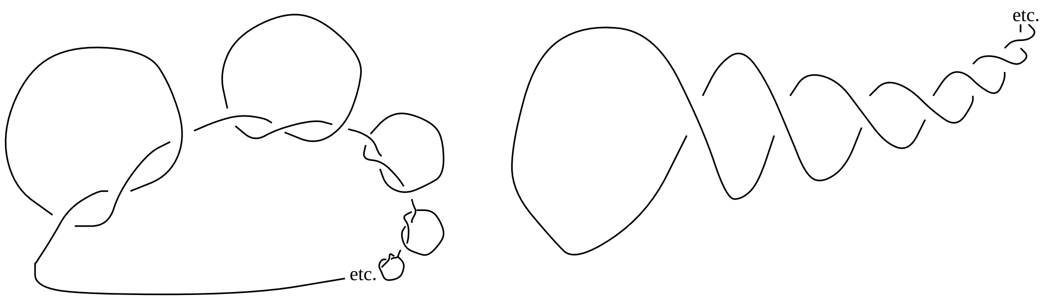
Die so definierten Verschlingungen sind sehr geometrische Objekte, während wir uns nur für topologische Fragen interessieren. Wir geben also

Definition 1.3 *Die Verschlingungen L und L' heißen* (isotopie-)äquivalent*, wenn $c(L) = c(L')$ und es zu $\mathrm{id}_{c(L)\cdot S^1}$ bzw. $\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}$ isotope Automorphismen α von $c(L) \cdot S^1$ bzw. β von $\mathbf{R}^3$ gibt mit $\varphi_{L'} = \beta\varphi_L\alpha$.*

Abbildung 1.1: Der Kleeblattknoten L und sein Spiegelbild L^{-1}

Dabei fordern wir Isotopie, um erstens die Orientierung der Verschlingungen zu erhalten (S^1 hat 2 Orientierungen, entsprechend den zwei Isotopieklassen, in die $Aut(S^1)$ zerfällt), und zweitens eine Verschlingung von ihrem Spiegelbild zu unterscheiden (denn auch $\mathbf{R}^3$ hat 2 Orientierungen).

Im folgenden nehmen wir stillschweigend an, daß unsere Verschlingungen *zahm*, d.h. äquivalent zu einer Vereinigung von Polygonzügen sind. Wir nehmen sie ferner schon als durch Polygonzüge gegeben an (wobei wir uns die Freiheit nehmen, in Skizzen dennoch beliebige Kurven zu verwenden). Dadurch schließen wir Beispiele wie die folgenden aus der Betrachtung aus:



Der Knoten links ist nicht zahm, der rechts zwar zahm (da sogar $\cong \bigcirc$), aber nicht als Polygonzug gegeben.

1.2 Diagramme und gewichtete Graphen

Die Bilder des vorigen Abschnitts demonstrieren bereits die Darstellung von Verschlingungen (modulo Äquivalenz) durch Projektion in eine Ebene.

Definition 1.4 *Sei L eine Verschlingung, π eine generische Projektion in eine (orientierte) Ebene in $\mathbf{R}^3$. Dann bezeichnen wir als* Diagramm $D = D(\pi, L)$ *von L die Projektion von L längs π, d.h. $\pi\varphi_L$, wobei wir uns an jeder Kreuzung merken, welche Strecke oben, welche unten liegt*[1].

Es ist klar, daß man aus dem Diagramm die Äquivalenzklasse der Verschlingung rekonstruieren kann, weshalb wir Äquivalenz von Verschlingungen in Äquivalenz von Diagrammen übersetzen können und alle Begriffsbildungen für Äquivalenzklassen von Verschlingungen auf Äquivalenzklasssen von Diagrammen übertragbar sind. Ferner ist klar, daß die in Abbildung 1.2 gezeigten lokalen Bewegungen von Diagrammen (genannt Reidemeister-Bewegungen) nicht aus der Äquivalenzklasse herausführen. Es gilt nun die nicht triviale Umkehrung dieser simplen Beobachtung:

Satz 1.5 (Reidemeister, 1932) *Zwei Diagramme sind genau dann äquivalent (d.h. gehören zu äquivalenten Verschlingungen), wenn sie durch eine endliche Folge von Reidemeister-Bewegungen auseinander hervorgehen.*

Beweis. siehe etwa [BZ85] oder [Ka87a], wo ausführliche Darstellungen zu finden sind, oder auch die klassische Darstellung bei Reidemeister [R48]. □

Ersichtlich sind Äquivalenzklassen von Diagrammen kombinatorische Objekte: denn ein Diagramm kann bis auf Isotopie der Ebene aus dem 4-regulären planaren Graphen rekonstruiert werden, dessen Ecken die Kreuzungspunkte und dessen Kanten deren Verbindungskurven sind, zusammen mit der Information, welche Paare von Kanten in einer Ecke von demselben Kurvenstück kommen, und welches oben liegt.

Es zeigt sich aber, daß eine andere kombinatorische Darstellung bequemer ist: Sei zunächst D zusammenhängend. Offenbar definiert D eine Landkarte, die eindeutig so schwarz-weiß-färbbar ist, daß die unbeschränkte Region weiß ist. Wir konstruieren einen gerichteten Multigraphen $G = G(D)$, dessen Ecken die schwarzen Länder, und dessen Kanten die Kreuzungspunkte von D sind, an denen ja je zwei schwarze Länder zusammentreffen. Dabei orientieren wir die Kanten und ordnen ihnen nach dem Schema von Abbildung 1.3 Zahlen aus $\{1, 2, 3, 4\}$ zu. Offenbar kann man aus dem planar gegebenen G auch wieder D bis auf Isotopie der Ebene zurückgewinnen. Zerfällt D in die Zusammenhangskomponenten $D_1, \ldots, D_\kappa$, so definieren wir $G(D) = \dot{\bigcup}_i G(D_i)$.

[1] π ist generisch, wenn $\pi\varphi_L$ nur endlich viele einfache Selbstschnitte hat, und die Schnittpunkte alle im Inneren von Strecken der Polygonzüge liegen. Da diese Bedingungen durch endlich viele lineare Ungleichungen gegeben sind, sind fast alle Projektionen generisch.

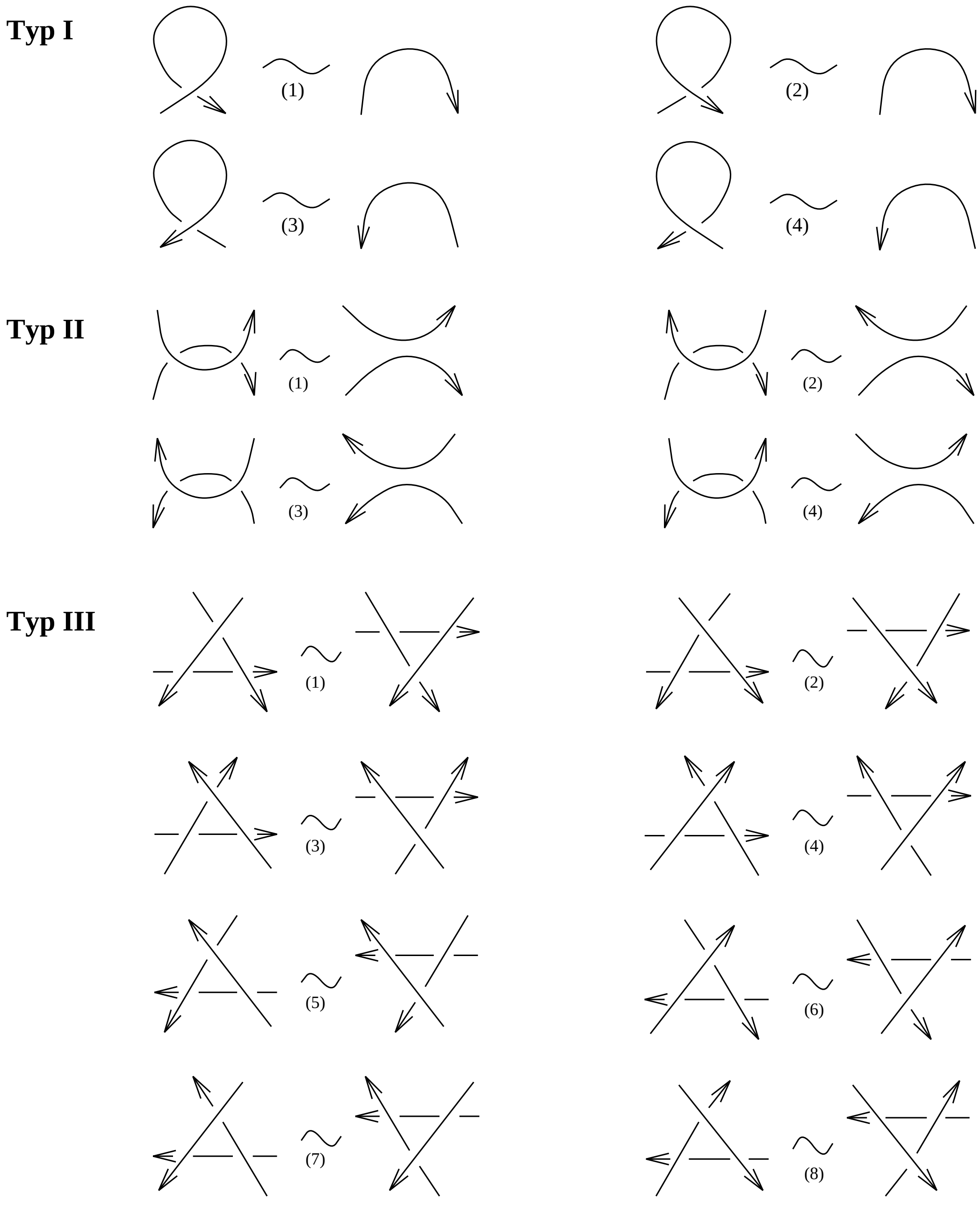


Abbildung 1.2: Die Reidemeister-Bewegungen

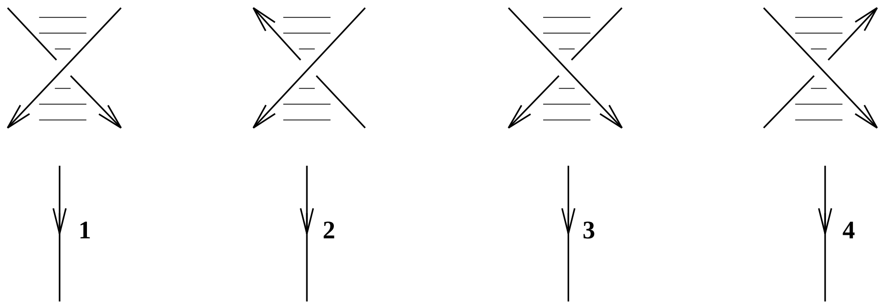


Abbildung 1.3: Die Kanten von G

Wiederum ist klar, daß man aus $G(D)$ die Isotopieklasse von L rekonstruieren kann, da man die D_i, also deren zugehörige Verschlingungen rekonstruieren kann.

Damit übersetzen sich die zusammenhangserhaltenden (d.h. die Anzahl der Zusammenhangskomponenten nicht ändernden) Reidemeister-Bewegungen von Diagrammen in Graphtransformationen (siehe Abbildung 1.4), wobei wir für jede Bewegung in Abbildung 1.2 zwei lokale Färbungen unterscheiden müssen (dabei haben wir folgendes Prinzip verfolgt: aus den Bewegungen Typ I,(i) bzw. Typ II,(i) bzw. Typ III,(j) in Abbildung 1.2 werden die Bewegungen I_i, I_{i+4} bzw. II_i, II_{i+4} bzw. III_j, III_{j+8} in Abbildung 1.4). Wir schließen den Abschnitt mit folgender

Definition 1.6 *Die* Taitzahl $T(D)$ *eines Diagramms D ist die Summe der Vorzeichen seiner Kreuzungen, wobei Vorzeichen wie in Abbildung 1.5 vergeben werden. Offenbar ist $T(D)$ auch an $G = G(D)$ abzulesen, da positiven Kreuzungen von D Kanten von G mit Marken 1 oder 4 entsprechen, negativen Kreuzungen Kanten mit Marken 2 oder 3.*

Bemerkung 1.7 *Die Taitzahl eines Diagramms D ist invariant unter Reidemeister-Bewegungen Typ II und III. Entsteht D' aus D durch eine Reidemeister-Bewegung Typ I, die eine neue Kreuzung einführt, so gilt $T(D') = T(D) - 1$ für die Typen I(1) und I(3) (d.h. die Typen I_1, I_3, I_5, I_7). und $T(D') = T(D) + 1$ für die Typen I(2) und I(4) (d.h. die Typen I_2, I_4, I_6, I_8).*

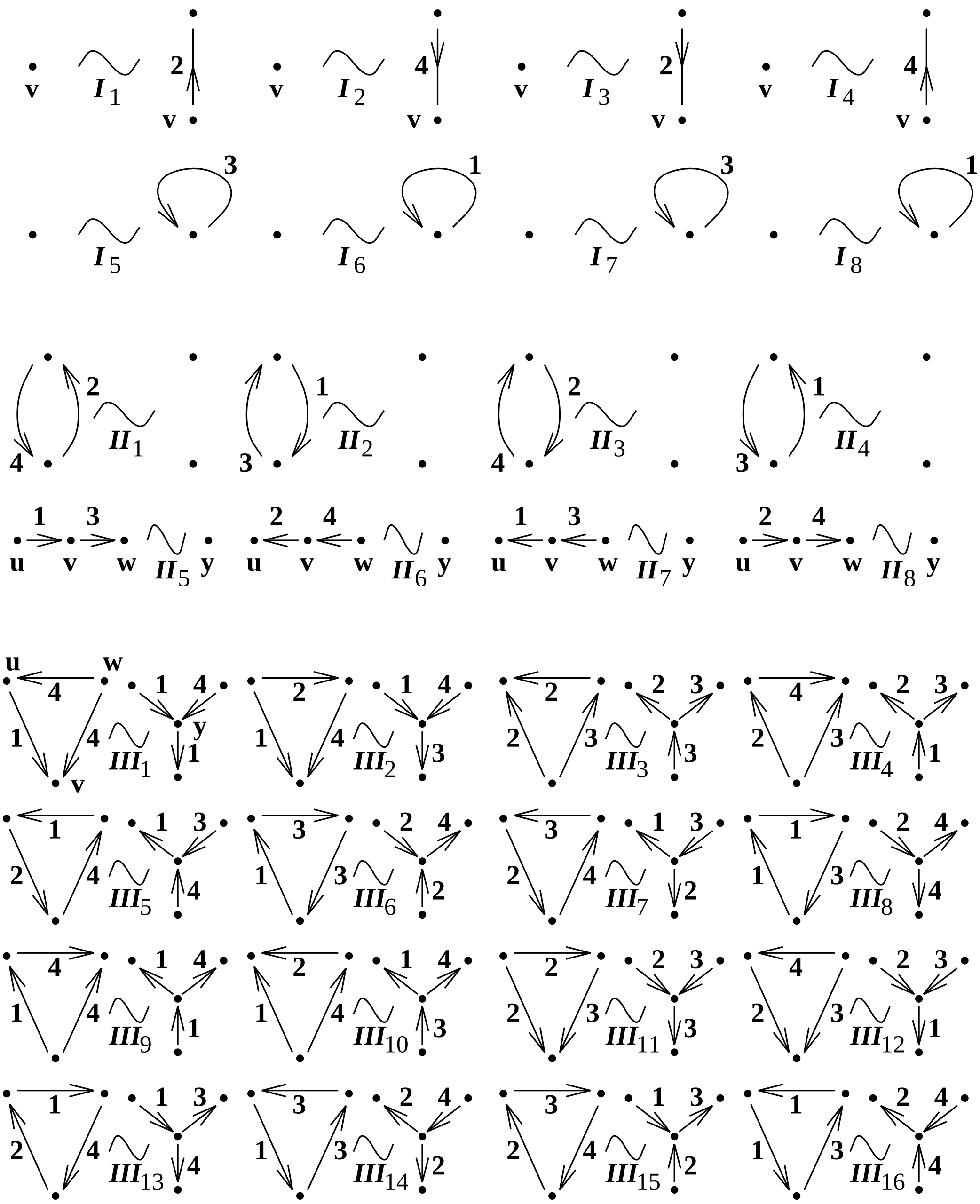


Abbildung 1.4: Die Reidemeister-Bewegungen für G

Abbildung 1.5: Die Vorzeichen für die Taitzahl

1.3 Spinmodelle

Wir orientieren uns in diesem Abschnitt an den sehr schönen Darstellungen in [Jae95a] und in [Jae95b]:

Ein *Spinmodell* M für eine Klasse gerichteter Multigraphen besteht aus einer endlichen Menge X von *Spins* und einer Vorschrift, in jedem der Graphen $G = (V, E)$[2] jeder Kante $e \in E$ eine Abbildung $W(e) : X \times X \longrightarrow \mathbf{C}$ (die wir auch als durch X indizierte komplexe Matrix $W(e)$ lesen) zuzuweisen. Jeder *Belegung* $\sigma : V \longrightarrow X$ der Ecken des Graphen ordnen wir nun ihr *Gewicht* $Z(G|\sigma, M) = \prod_{e \in E} W(e)[\sigma(t(e)), \sigma(h(e))]$ zu, dem Graphen die Summe der Gewichte über alle seine Belegungen, die *Zustandssumme*

$$Z(G, M) = \sum_{\sigma : V \to X} Z(G|\sigma, M) = \sum_{\sigma : V \to X} \prod_{e \in E} W(e)[\sigma(t(e)), \sigma(h(e))]$$

Wir benötigen noch einige Verfeinerungen: Sei dazu eine partielle Abbildung auf V $\sigma_0 : V_0 \longrightarrow X$ (also $V_0 \subset V$) gegeben. Die *partielle Zustandssumme für* σ_0 ist definiert als

$$Z(G|\sigma_0, M) = \sum_{\sigma, \sigma|_{V_0} = \sigma_0} Z(G|\sigma, M) = \sum_{\sigma, \sigma|_{V_0} = \sigma_0} \prod_{e \in E} W(e)[\sigma(t(e)), \sigma(h(e))]$$

Klar sind $Z(G|\emptyset, M) = Z(G, M)$ und $Z(G, M) = \sum_{\sigma_0 : V_0 \to X} Z(G|\sigma_0, M)$. Bezeichnet $G|V_0$ den von V_0 induzierten Teilgraphen von G, so können wir

[2] Es sei daran erinnert, daß ein Multigraph (V, E) aus einer endlichen Menge V von Ecken und einer endlichen Menge E von Kanten besteht, zusammen mit zwei Abbildungen $h, t : E \longrightarrow V$, die jeder Kante head und tail zuordnen.

offenbar schreiben (mit $E_0 = E(G|V_0)$, $\tilde{E} = E \backslash E_0$, $\tilde{V} = V \backslash V_0$):

$$Z(G|\sigma_0, M) = \left(\sum_{\tilde{\sigma}:\tilde{V}\to X} \prod_{e\in\tilde{E}} W(e)[(\tilde{\sigma}\cup\sigma_0)(t(e)), (\tilde{\sigma}\cup\sigma_0)(h(e))] \right) \cdot$$
$$\cdot \prod_{e\in E_0} W(e)[\sigma_0(t(e)), \sigma_0(h(e))]$$

Dabei sprechen wir den ersten Term als *freien Teil*, den zweiten als *gebundenen Teil* von $Z(G|\sigma_0, M)$ an und bezeichnen sie mit $\tilde{Z}(G|\sigma_0, M)$ bzw. $Z_0(G|\sigma_0, M)$.

Die ursprüngliche Motivation dieser Begriffsbildungen kommt aus der statistischen Mechanik: dort betrachtet man sogenannte Vertexmodelle, das sind Modelle physikalischer Systeme, deren Komponenten (z.B. Teilchen) jede eine feste endliche Menge X von Freiheitsgraden haben, die Spins. Einige der Komponenten können wechselwirken, was wir durch einen Graphen modellieren, dessen Ecken die Komponenten und dessen Kanten die Wechselwirkungen sind (meist ein einfacher Gittergraph). Jede Wechselwirkung entlang einer Kante $e = (u, v)$ definiert Gewichte für jede Belegung der Ecken u, v, d.h. eine Abbildung $W(e) : X \times X \longrightarrow \mathbf{C}$. Ein wichtiges Beispiel ist $W = \exp(-E_{inter}/kT)$, wo E_{inter} die Wechselwirkungsenergie ist, k die Boltzmannkonstante und T die Temperatur. An dem Beispiel läßt sich das weitere exemplifizieren: das Gewicht einer Belegung ist dann im wesentlichen ihre Energie, die Partitionsfunktion im wesentlichen ein Energiemittel. Für eine ausführliche Diskussion dieser Ideen siehe etwa [Ba82].

In der Anwendung auf die planaren gerichteten Multigraphen mit Kantenmarken aus Abschnitt 1.2 sei $M = (X, W_1, W_2, W_3, W_4)$ mit komplexen Matrizen W_i, ferner wählen wir eine Quadratwurzel d von $n = |X|$. In unserem Spinmodell weisen wir Kanten mit Marke i die Matrix W_i zu. Fragen wir uns, welche Bedingungen sicherstellen, daß die *Partitionsfunktion* $\zeta_M(D) = d^{-|V|}Z(G(D), M)$ invariant unter den Reidemeister-Bewegungen Typ II und III ist (warum wir den Normalisierungsfaktor d brauchen, wie seine Wahl gerechtfertigt ist, und wie Bewegungen vom Typ I wirken, diskutieren wir unten im Anschluß an Definition 1.10).

Bemerkung 1.8 *Für $D = D_1 \dot{\cup} D_2$ gilt offenbar $\zeta_M(D) = \zeta_M(D_1)\zeta_M(D_2)$.*

Es zeigt sich, daß folgende Bedingungen an M natürlich sind, indem die Bedingung II_i bzw. III_i Invarianz unter zusammenhangserhaltenden Reide-

meister-Bewegung Typ II_i bzw. III_i impliziert (daß wir damit auch Invarianz unter beliebigen Bewegungen vom Typ II und III bekommen, werden wir gleich im Anschluß sehen):
Typ II Gleichungen: $\forall \alpha, \beta \in X$

$$
\begin{array}{llll}
II_1. & W_2[\alpha,\beta]W_4[\beta,\alpha] = 1 & II_5. & \sum_x W_1[\alpha,x]W_3[x,\beta] = n\delta_{\alpha\beta} \\
II_2. & W_3[\alpha,\beta]W_1[\beta,\alpha] = 1 & II_6. & \sum_x W_4[\beta,x]W_2[x,\alpha] = n\delta_{\alpha\beta} \\
II_3. & W_4[\alpha,\beta]W_2[\beta,\alpha] = 1 & II_7. & \sum_x W_3[\beta,x]W_1[x,\alpha] = n\delta_{\alpha\beta} \\
II_4. & W_1[\alpha,\beta]W_3[\beta,\alpha] = 1 & II_8. & \sum_x W_2[\alpha,x]W_4[x,\beta] = n\delta_{\alpha\beta}
\end{array}
$$

und *Typ III Gleichungen*: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in X$

$$
\begin{array}{ll}
III_1. & \sum_x W_1[\alpha,x]W_1[x,\beta]W_4[\gamma,x] = dW_1[\alpha,\beta]W_4[\gamma,\alpha]W_4[\gamma,\beta] \\
III_2. & \sum_x W_1[\alpha,x]W_3[x,\beta]W_4[\gamma,x] = dW_1[\alpha,\beta]W_2[\alpha,\gamma]W_4[\gamma,\beta] \\
III_3. & \sum_x W_2[x,\alpha]W_3[x,\beta]W_3[\gamma,x] = dW_2[\beta,\alpha]W_2[\gamma,\alpha]W_3[\gamma,\beta] \\
III_4. & \sum_x W_1[\alpha,x]W_2[x,\beta]W_3[x,\gamma] = dW_2[\alpha,\beta]W_3[\alpha,\gamma]W_4[\beta,\gamma] \\
III_5. & \sum_x W_1[x,\alpha]W_3[\beta,x]W_4[\gamma,x] = dW_1[\beta,\alpha]W_2[\alpha,\gamma]W_4[\gamma,\beta] \\
III_6. & \sum_x W_2[\alpha,x]W_2[\beta,x]W_4[x,\gamma] = dW_1[\beta,\alpha]W_3[\alpha,\gamma]W_3[\gamma,\beta] \\
III_7. & \sum_x W_1[x,\alpha]W_2[x,\beta]W_3[\gamma,x] = dW_2[\alpha,\beta]W_3[\gamma,\alpha]W_4[\beta,\gamma] \\
III_8. & \sum_x W_2[\alpha,x]W_4[x,\beta]W_4[x,\gamma] = dW_1[\beta,\alpha]W_1[\alpha,\gamma]W_3[\gamma,\beta] \\
III_9. & \sum_x W_1[x,\alpha]W_1[\beta,x]W_4[x,\gamma] = dW_1[\beta,\alpha]W_4[\alpha,\gamma]W_4[\beta,\gamma] \\
III_{10}. & \sum_x W_1[x,\alpha]W_3[\beta,x]W_4[x,\gamma] = dW_1[\beta,\alpha]W_2[\gamma,\alpha]W_4[\beta,\gamma] \\
III_{11}. & \sum_x W_2[\alpha,x]W_3[x,\beta]W_3[\gamma,x] = dW_2[\alpha,\beta]W_2[\alpha,\gamma]W_3[\gamma,\beta] \\
III_{12}. & \sum_x W_1[x,\alpha]W_2[\beta,x]W_3[\gamma,x] = dW_2[\beta,\alpha]W_3[\gamma,\alpha]W_4[\gamma,\beta] \\
III_{13}. & \sum_x W_1[\alpha,x]W_3[x,\beta]W_4[x,\gamma] = dW_1[\alpha,\beta]W_2[\gamma,\alpha]W_4[\beta,\gamma] \\
III_{14}. & \sum_x W_2[x,\alpha]W_2[x,\beta]W_4[\gamma,x] = dW_1[\alpha,\beta]W_3[\gamma,\alpha]W_3[\beta,\gamma] \\
III_{15}. & \sum_x W_1[\alpha,x]W_2[\beta,x]W_3[x,\gamma] = dW_2[\beta,\alpha]W_3[\alpha,\gamma]W_4[\gamma,\beta] \\
III_{16}. & \sum_x W_2[x,\alpha]W_4[\beta,x]W_4[\gamma,x] = dW_1[\alpha,\beta]W_1[\gamma,\alpha]W_3[\beta,\gamma]
\end{array}
$$

Dies sei für die Bewegungen II_1, II_5 und III_1 exemplarisch gezeigt: Dabei sei D das Diagramm mit der jeweils linken lokalen Struktur in Abbildung 1.4, D' das mit der jeweils rechten. Ohne Einschränkung seien D und D' zusammenhängend, G und G' ihre Graphen.

II_1: G' entsteht aus G durch Streichung einer Kante e_4 mit Marke 4 von v nach w und einer entgegengerichteten Kante e_2 mit Marke 2 (wobei

wir V und V' identifizieren). Betrachte die partiellen Zustandssummen für $\sigma_0 : \{v, w\} \longrightarrow X$; sei etwa $\alpha = \sigma_0(w)$, $\beta = \sigma_0(v)$. Dann sind die freien Teile von $Z(G|\sigma_0, M)$ und von $Z(G'|\sigma_0, M)$ gleich, während für die gebundenen Teile gilt: $Z_0(G|\sigma_0, M) = W_2[\alpha, \beta]W_4[\beta, \alpha]Z_0(G'|\sigma_0, M)$. Invarianz folgt daher aus der natürlich auftauchenden Bedingung II_1, da dann auch die gebundenen Teile, also alle partiellen Zustandssummen σ_0, also auch die vollen Zustandssummen gleich sind.
Ebenso behandelt man II_2, II_3, II_4.

II_5: G' entsteht aus G durch Kontraktion der konsekutiven Kanten e_1 (mit Marke 1) von u nach v und e_3 (mit Marke 3) von v nach w zu einer Ecke y (wobei wir $V\backslash\{u, v, w\}$ mit $V'\backslash y$ identifizieren). Betrachte die partiellen Zustandssummen für $\sigma_0 : V\backslash v \longrightarrow X$ auf G; sei etwa $\alpha = \sigma_0(u)$, $\beta = \sigma_0(w)$. Wenn $\alpha = \beta$, können wir σ_0 vermöge Identifikation als Funktion auf V' auffassen, und dann sind die gebundenen Teile der partiellen Zustandssummen gleich: $Z_0(G|\sigma_0, M) = Z_0(G'|\sigma_0, M)$. Für die freien Teile gilt: $\tilde{Z}(G'|\sigma_0, M) = 1$ und $\tilde{Z}(G|\sigma_0, M) = \sum_x W_1[\alpha, x]W_3[x, \beta]$ (dabei sind die x in der Summe die möglichen Spinbelegungen von v). Nun ist $u \neq w$, da sonst D' unzusammenhängend wäre. Also ist $|V| = |V'| + 2$, und unsere Invarianzforderung verlangt $Z(G, M) = d^2 Z(G', M) = nZ(G', M)$, was natürlicherweise durch II_5 sichergestellt ist. Dann nämlich tragen die $Z(G|\sigma_0, M)$ mit $\alpha \neq \beta$ nicht bei, während für $\alpha = \beta$ gilt: $Z(G|\sigma_0, M) = \tilde{Z}(G|\sigma_0, M)Z_0(G|\sigma_0, M) = nZ_0(G'|\sigma_0, M) = nZ(G'|\sigma_0, M)$, also $Z(G, M) = nZ(G', M)$.
Ebenso behandelt man II_6, II_7, II_8.

III_1: G' entsteht aus G durch Ersetzung eines Dreiecks $\{uv, wv, wu\}$ (mit Marken 1,4,4) durch einen Stern $\{uy, yv, wy\}$ (mit Marken 1,1,4), wobei wir V mit $V'\backslash y$ identifizieren. Betrachte eine partielle Belegung $\sigma_0 : V'\backslash y \longrightarrow X$ mit $\alpha = \sigma_0(u)$, $\beta = \sigma_0(v)$, $\gamma = \sigma_0(w)$. Dann haben wir offenbar $\tilde{Z}(G|\sigma_0, M) = 1$ und $\tilde{Z}(G'|\sigma_0, M) = \sum_x W_1[\alpha, x]W_1[x, \beta]W_4[\gamma, x]$, sowie $Z_0(G|\sigma_0, M) = W_1[\alpha, \beta]W_4[\gamma, \alpha]W_4[\gamma, \beta]Z_0(G'|\sigma_0, M)$. Invarianz folgt daher aus der natürlichen Bedingung III_1, da dann $Z(G|\sigma_0, M) = Z(G'|\sigma_0, M)$ für alle σ_0.
Ebenso behandelt man $III_2, \ldots, III_{16}$.

Für die Zukunft wollen wir gleich einige Notation zur knappen Schreibweise von Gleichungen wie den II_i einführen. Für zwei $X \times X$-Matrizen U, V ist ihr gewöhnliches Matrixprodukt $(UV)[\alpha, \beta] = \sum_x U[\alpha, x]V[x, \beta]$, und ihr *Hadamardprodukt* $U \circ V$ definiert durch $(U \circ V)[\alpha, \beta] = U[\alpha, \beta]V[\alpha, \beta]$.

Glücklicherweise gilt folgender

Satz 1.9 ([BB95]) *Sei X endliche Menge mit $|X| = n = d^2$, und seien W_1, W_2, W_3, W_4 $X \times X$-Matrizen mit*

(1) $W_1 \circ W_3^\top = J$, $W_2 \circ W_4^\top = J$

(2) $W_1 W_3 = nI$, $W_2 W_4 = nI$

Dann sind II_1 bis II_8 erfüllt und es gilt: III_1 bis III_8 sind zueinander äquivalent, und ebenso III_9 bis III_{16}.

Beweis. siehe Abschnitt 2.1. □

Dies motiviert die

Definition 1.10 ([BB95]) *Sei X endliche Menge mit $|X| = n = d^2$, und seien W_1, W_2, W_3, W_4 durch X indizierte $n \times n$-Matrizen. Dann heißt $M = (X, W_1, W_2, W_3, W_4)$* (topologisches) 4-weight-Spinmodell mit Loopvariable *d, falls*

(1) $W_1 \circ W_3^\top = J$, $W_2 \circ W_4^\top = J$

(2) $W_1 W_3 = nI$, $W_2 W_4 = nI$

(3a) $\forall \alpha, \beta, \gamma$ $\sum_x W_1[\alpha, x] W_1[x, \beta] W_4[\gamma, x] = d W_1[\alpha, \beta] W_4[\gamma, \alpha] W_4[\gamma, \beta]$

(3b) $\forall \alpha, \beta, \gamma$ $\sum_x W_1[x, \alpha] W_1[\beta, x] W_4[x, \gamma] = d W_1[\beta, \alpha] W_4[\alpha, \gamma] W_4[\beta, \gamma]$

(Anmerkung: (3a) ist III_1, (3b) ist III_9.)

Halten wir damit unser obiges Ergebnis fest:

Lemma 1.11 *Sei M ein 4-weight-Spinmodell. Dann ist ζ_M invariant unter zusammenhangserhaltenden Bewegungen Typ II und unter Bewegungen Typ III.* □

Wir hätten in 1.2 auch anders entscheiden, und die unbeschränkte Region der Landkarte des zusammenhängenden Diagramms D schwarz färben können. Mit der gleichen Vorschrift zur Kantenmarkierung hätten wir einen Graphen $\check{G}$ konstruiert (analog zu G vorgehend bei unzusammenhängendem D), und eine komplexe Zahl $\check{\zeta}_M(D) = d^{-|V(\check{G})|} Z(\check{G}, M)$, deren Invarianz wir untersucht hätten. Es zeigt sich aber, daß man so nichts Neues bekommt:

Lemma 1.12 (Dualität) *Sei M 4-weight-Spinmodell und D Diagramm. Dann gilt $\check{\zeta}_M(D) = \zeta_M(D)$. Insbesondere ist $\check{\zeta}_M$ invariant unter zusammenhangserhaltenden Bewegungen Typ II und III.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei D zusammenhängend. Betrachte die Serie von (offenbar zusammenhangserhaltenden) Reidemeister-Bewegungen Typ I, II und III in Abbildung 1.6, wobei wir die Entwicklung der Färbung mit aufzeichnen: Offenbar ist $G(D_1) \cong \check{G}(D)$, also $\check{\zeta}_M(D) = \zeta_M(D_1) = \zeta_M(D)$. □

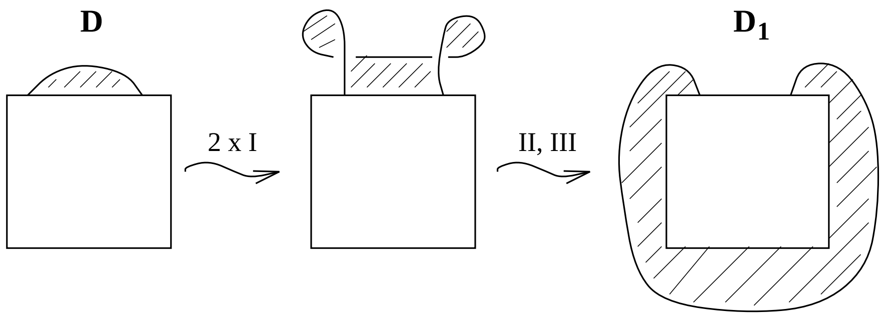


Abbildung 1.6: Schwarz wird weiß

Lemma 1.13 *Sei M 4-weight-Spinmodell. Dann ist ζ_M invariant unter Bewgungen Typ II und III.*

Beweis. Mit Lemma 1.11 brauchen wir uns nur noch mit zusammenhangszerstörenden Bewegungen auseinandersetzen. Ohne Einschränkung sei dazu D zusammenhängend, D' aus D durch eine Bewegung Typ II entstanden und unzusammenhängend: $D' = D_1 \dot{\cup} D_2$. Ferner ist ohne Einschränkung die lokale Situation im zugehörigen Graphen von einem der Typen $II_1, \ldots, II_4$ in Abbildung 1.4, da wir nach dem Dualitätslemma 1.12 die Färbung invertieren dürfen. Offensichtlich ist nun $G(D') = G(D_1)\dot{\cup}G(D_2)$ isomorph (inklusive der Kantenmarken) G', dem Graphen, den man durch tatsächliches Ausführen der lokalen Transformation wie in Abbildung 1.4 am Graphen G erhält, d.h. durch Löschen der beiden gegenläufigen Kanten. Also ist $\zeta_M(D') = d^{-|V(G(D'))|}Z(G(D'), M) = d^{-|V(G')|}Z(G', M) = d^{-|V|}Z(G, M) = \zeta_M(D)$. □

Wenden wir uns nun Reidemeister-Bewegungen Typ I zu.

Behauptung 1.14 *Sei M 4-weight-Spinmodell. Dann gibt es $a \in \mathbf{C}$, den sogenannten* Modulus *von M, mit*

(1) $\forall \alpha \in X$: $W_1[\alpha, \alpha] = a$ und $W_3[\alpha, \alpha] = a^{-1}$

(2) $\forall \alpha \in X$: $\sum_x W_2[\alpha, x] = \sum_x W_2[x, \alpha] = da^{-1}$ und $\sum_x W_4[\alpha, x] = \sum_x W_4[x, \alpha] = da$

Beweis. III_{16} und III_{10} liefern (mit Definition 1.10,(2)) für $\alpha = \beta$: $\sum_x W_4[\gamma, x] = dW_1[\beta, \beta] = \sum_x W_4[x, \gamma]$. Daher sind diese Ausdrücke unabhängig von β, γ, d.h. es gibt $a \in \mathbf{C}$ mit: für alle β $W_1[\beta, \beta] = a$ und für alle γ $\sum_x W_4[\gamma, x] = \sum_x W_4[x, \gamma] = da$.

III_6 und III_{14} liefern ebenso für $\beta = \gamma$:
$\sum_x W_2[\alpha, x] = dW_3[\beta, \beta] = \sum_x W_2[x, \alpha]$. Wegen $W_1[\beta, \beta]W_3[\beta, \beta] = 1$ folgt $W_3[\beta, \beta] = a^{-1}$ und $\sum_x W_2[\alpha, x] = \sum_x W_2[x, \alpha] = da^{-1}$. □

Sei D ein Diagramm und entstehe D' aus D durch eine Reidemeister-Bewegung Typ I, die eine neue Kreuzung einführt. Nach der schon bewährten Technik betrachten wir für eine Bewegung I_1 partielle Zustandssummen für $\sigma_0 : V' \backslash w \longrightarrow X$ (wobei wir V mit $V' \backslash w$ identifizieren); es sei $\alpha = \sigma_0(v)$. Dann sind die gebundenen Teile von $Z(G|\sigma_0, M)$ und $Z(G'|\sigma_0, M)$ gleich und für die freien Teile gilt $\tilde{Z}(G|\sigma_0, M) = 1$ und $\tilde{Z}(G'|\sigma_0, M) = \sum_x W_2[\alpha, x] = da^{-1}$ nach Behauptung 1.14.(2). Also $Z(G', M) = da^{-1}Z(G, M)$.
Dieselbe Gleichung erhält man für den Typ I_3, und analog mit a statt a^{-1} für die Typen I_2, I_4.

Für eine Bewegung I_5 ist $V' = V$ und G' entsteht aus G durch Streichung einer Kante e_3 mit Marke 3 von v nach v. Für jede Belegung σ gilt also $Z(G', M) = a^{-1}Z(G, M)$
Dieselbe Gleichung erhält man für den Typ I_7, und analog mit a statt a^{-1} für die Typen I_6, I_8.

Damit erkennen wir, daß $d^{-|V'|}Z(G', M) = a^{\pm 1}d^{-|V|}Z(G, M)$, wobei $+1$ im Exponenten von a in den Fällen I_2, I_4, I_6, I_8 und -1 in den Fällen I_1, I_3, I_5, I_7 steht.

Satz 1.15 *Sei M 4-weight-Spinmodell mit Loopvariable d und Modulus a. Dann ist die Funktion auf Verschlingungsdiagrammen*

$$D \longmapsto a^{-T(D)}d^{-|V(G(D))|}Z(G(D), M)$$

invariant unter Isotopieäquivalenz. Insbesondere ist sie für eine Verschlingung unabhängig von der Wahl eines ihrer Diagramme, also liefert sie eine wohldefinierte Verschlingungsinvariante.

Beweis. Es genügt, Invarianz unter Reidemeister-Bewegungen nachzuweisen. Für Bewegungen vom Typ II oder III folgt dies aus Lemma 1.13 und der Invarianz der Taitzahl (Bemerkung 1.7). Für Bewegungen vom Typ I folgt die Invarianz aus der vorangehenden Betrachtung und Bemerkung 1.7. □

Sehen wir uns noch einmal an, warum wir nicht die Zustandsumme als Invariante unter Reidemeister-Bewegungen Typ II und III haben können (das entspräche $d = 1$): die Reidemeister-Bewegungen Typ II zerfallen in solche, die zwei parallele Kanten löschen ($II_1, \ldots, II_4$), und solche, die zwei konsekutive Kanten kontrahieren ($II_5, \ldots, II_8$). Wir erhielten durch Rechnungen wie oben $W_1 \circ W_3^\top = J$ (aus Löschen) und $W_1 W_3 = I$ (aus Kontraktion), ein Widerspruch, da aus der ersten Gleichung folgt, daß die Diagonale von $W_1 W_3$ mit n besetzt ist. Das beste, was wir unter diesen Umständen tun können, ist, die zweite Gleichung in $W_1 W_3 = nI$ abzuwandeln, und die Partitionsfunktion mit einem Faktor zu multiplizieren, der den bei einer Kontraktion entstehenden Faktor $1/n$ aufhebt. Da Kontraktion aber mit Verminderung von $|V|$ um 2 einhergeht, während Löschen $|V|$ erhält, liegt es nahe, mit $d^{-|V|}$ zu multiplizieren, wo $d^2 = n$. Dieselbe Überlegung gilt natürlich auch für W_2, W_4.

Historisch stehen die 4-weight-Modelle nicht am Anfang: man hat mit spezielleren Konzepten begonnen, die wir nun durch Spezialisieren von 4-weight-Modellen zu *2-weight-Spinmodellen* gewinnen (für eine ausführliche Diskussion der verschiedenen Varianten, dies zu tun: [BB95]).

Definition 1.16 (vgl. [KMW94]) *Sei X eine endliche Menge und seien W_+, W_- zwei $X \times X$-Matrizen. Dann heißt (X, W_+, W_-)* (topologisches) 2-weight-Spinmodell vom Jonestyp, *falls $(X, W_+, W_+^\top, W_-, W_-^\top)$ ein 4-weight-Spinmodell ist, d.h. falls*

(1) $W_+ \circ W_-^\top = J$

(2) $W_+ W_- = nI$

(3a) $\forall \alpha, \beta, \gamma \ \sum_x W_+[\alpha, x] W_+[x, \beta] W_-[x, \gamma] = d W_+[\alpha, \beta] W_-[\alpha, \gamma] W_-[\beta, \gamma]$

(3b) $\forall \alpha, \beta, \gamma \ \sum_x W_+[x, \alpha] W_+[\beta, x] W_-[\gamma, x] = d W_+[\beta, \alpha] W_-[\gamma, \alpha] W_-[\gamma, \beta]$

Bemerkung 1.17 *Dabei sind (3a) und (3b) äquivalent (unter der Voraussetzung von (1) und (2)), denn (3b) haben wir durch Einsetzen in III_9 erhalten (vgl. Definition 1.10), (3b) bekommt man aber auch durch Einsetzen in III_7, was nach Satz 1.9 äquivalent zu III_1 ist, was wiederum im Fall der Modelle vom Jonestyp zu (3a) wird.*

Definition 1.18 (die ursprünglichen Spinmodelle von [Jo89]) *Sei X eine endliche Menge und seien W_+, W_- zwei symmetrische $X \times X$-Matrizen. Dann heißt (X, W_+, W_-)* symmetrisches (topologisches) Spinmodell, *falls (X, W_+, W_-) ein 2-weight-Spinmodell vom Jonestyp ist, d.h. falls*

(0) $W_+ = W_+^\top$, $W_- = W_-^\top$

(1) $W_+ \circ W_- = J$

(2) $W_+ W_- = nI$

(3) $\forall \alpha, \beta, \gamma \ \sum_x W_+[\alpha, x] W_+[x, \beta] W_-[x, \gamma] = d W_+[\alpha, \beta] W_-[\alpha, \gamma] W_-[\beta, \gamma]$

Bemerkung 1.19 *Bei der Berechnung von $\zeta_M(D)$ für ein Modell M vom Jonestyp wird man also die Kanten von $G(D)$ geeignet mit $+,-$ markieren. Ist M sogar symmetrisch, kann man auf die Orientierung der Kanten verzichten.*

1.4 Beispiele

Diskutieren wir einige einfache Beispiele, um die Nützlichkeit der oben eingeführten Konzepte für die Knotentheorie zu illustrieren.

Beispiel 1.20 *Der Unknoten* $\bigcirc$. Hier hat offenbar der zugehörige G genau eine Ecke und keine Kanten, und es folgt für ein Spinmodell M mit Loopvariable d: $\zeta_M(\bigcirc) = d^{-1}n = d$ (was den Namen „Loopvariable“ für d rechtfertigt).

Beispiel 1.21 *Potts-Modelle.* Sei $n \geq 2$, $d^2 = n$. Wir werden in Abschnitt 3.1 zeigen, daß $M = ([n], W_+, W_-)$ ein symmetrisches Spinmodell mit Loopvariable d ist, falls $W_+ = -t^{-3}I + t(J-I)$, $W_- = -t^3 I + t^{-1}(J-I)$ mit $t^2 + t^{-2} = -d$. Wir wollen die zugehörige Invariante im Fall $n=3$ für den Kleeblattknoten L und sein Spiegelbild L^{-1} aus Beispiel 1.2 (Diagramme Abbildung 1.1) berechnen:

Wir wählen $d = -\sqrt{3}$ und $t = e^{\pi i/12}$, also $a = -t^{-3} = -e^{-\pi i/4}$. Ersichtlich ist $G(L)$ ein Dreieck, dessen Kanten alle mit $+$ markiert sind, $G(L^{-1})$ ein nur mit $-$ markiertes Dreieck, ferner $T(L) = 3$ und $T(L^{-1}) = -3$. Man berechnet schnell $a^{-T}\zeta_M$ für L:

$$a^{-3}d^{-3} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3} W_+[\alpha,\beta]W_+[\beta,\gamma]W_+[\gamma,\alpha] = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-1 + 2e^{2\pi i/3}\right)$$

Ebenso für L^{-1}:

$$a^{+3}d^{-3} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3} W_-[\alpha,\beta]W_-[\beta,\gamma]W_-[\gamma,\alpha] = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-1 + 2e^{-2\pi i/3}\right)$$

Wir können also schließen, daß der Kleeblattknoten nicht zu seinem Spiegelbild äquivalent ist, und beide nicht zum Unknoten. Für weitere Anwendungen in der Knotentheorie siehe [Ka87b], [Mu87] und die dort angegebene Literatur.

1.5 Fragen

Topologische Spinmodelle liefern Verschlingungsinvarianten. Es eröffnen sich also sofort einige Problemfelder zu diesem Konzept:

1. Klassifiziere alle Invarianten aus Spinmodellen.
2. Gibt es Beispiele von Verschlingungen, die nicht durch klassische Invarianten, aber durch solche aus Spinmodellen getrennt werden?
3. Gibt es Verschlingungen, die nicht durch Invarianten aus Spinmodellen getrennt werden? (vgl. [KMW94]).
4. Klassifiziere alle topologischen Spinmodelle.

Definition 1.22 *Die 4-weight-Spinmodelle M, M' heißen* isomorph, *wenn es eine Bijektion $s : X \longrightarrow X'$ gibt mit $\forall i \forall \alpha, \beta \in X \; W_i[\alpha, \beta] = W_i'[s(\alpha), s(\beta)]$.*

Die vorliegende Arbeit ist in erster Linie mit letzterer Frage beschäftigt, aber wir werden bei Gelegenheit auch zu den anderen ein paar Worte sagen. Es zeigt sich, daß die vollständige Klassifikation aller Spinmodelle längst noch nicht erreicht ist, daher spaltet sich (4) auf in:

- Gib starke notwendige Bedingungen für Spinmodelle (Kapitel 2).
- Finde allgemeine Konstruktionen (Kapitel 4).
- Klassifiziere Spinmodelle unter zusätzlichen Einschränkungen (Kapitel 3, 5 und 7).
- Untersuche und klassifiziere Spinmodelle durch Transformationen (Kapitel 6).

Dabei werden wir uns vor allem auf 2-weight-Modelle vom Jonestyp beschränken, oft sogar nur auf symmetrische Modelle, aber wo sich die Gelegenheit ergibt auch Bemerkungen zum allgemeineren Konzept machen.

Bemerkung 1.23 *Der Isomorphiebegriff 1.22 für Spinmodelle ist vom algebraischen Standpunkt aus natürlich. Im Hinblick auf die topologischen Anwendungen ist es auch sinnvoll, die Spinmodelle nach ihren zugeordneten Invarianten zu unterscheiden, etwa M, M'* link-isomorph *zu nennen, wenn*

$\zeta_M = \zeta_{M'}$ (wem das noch immer zu algebraisch ist, könnte auch die trennenden Fähigkeiten von M und M' vergleichen). Es ist klar, daß aus Isomorphie link-Isomorphie folgt. Jaeger hat schon in seinen frühesten Arbeiten zu Spinmodellen ([Jae92]) diese Betrachtungsweise verfolgt, und in neueren Arbeiten weiter getrieben (etwa [Jae95a] und [Jae96b]).

Kapitel 2

Allgemeine Struktur von Spinmodellen

In diesem Kapitel werden einige allgemeine Sätze über Spinmodelle hergeleitet, die in den folgenden Kapiteln Anwendung finden.

2.1 Yang-Baxter-Gleichungen

Wir identifizieren den Vektorraum M_X der $X \times X$-Matrizen durch die Zuordnung $U \mapsto \sum_{\alpha,\beta} U[\alpha,\beta]\alpha \otimes \beta$ mit $\mathbf{C}X \otimes \mathbf{C}X$. Eine Matrix $U \in M_X$ wirkt nun auf $\mathbf{C}X \otimes \mathbf{C}X$ durch Linksmultiplikation und durch Hadamardmultiplikation, und definiert damit zwei Operatoren auf $\mathbf{C}X \otimes \mathbf{C}X$:

$$U^{\bullet} : \alpha \otimes \beta \longmapsto U \cdot \alpha \otimes \beta = \sum_x U[x,\alpha] x \otimes \beta$$

$$U^{\circ} : \alpha \otimes \beta \longmapsto U \circ \alpha \otimes \beta = U[\alpha,\beta] \alpha \otimes \beta$$

Zur besseren Lesbarkeit führen wir noch die Bezeichnungen

$$R_i^{\bullet} = W_i^{\bullet}, R_i^{\circ} = dW_i^{\circ}, R_{-i}^{\bullet} = W_i^{\top\bullet}, R_{-i}^{\circ} = dW_i^{\top\circ}$$

ein. Schließlich sei τ der Operator der Matrixtransposition, d.h.

$$\tau : \alpha \otimes \beta \longmapsto \beta \otimes \alpha$$

Lemma 2.1 *Seien A, B, C, D, E, F $X \times X$-Matrizen. Dann gilt die Gleichung $A^\bullet B^\circ C^\bullet = D^\circ E^\bullet F^\circ$ genau wenn*

$$\forall \lambda, \mu, \nu : \sum_x C[x, \lambda] B[x, \mu] A^\top[x, \nu] = D^\top[\mu, \nu] E[\nu, \lambda] F[\lambda, \mu]$$

.

Beweis. Nach Definition $B^\circ C^\bullet \lambda \otimes \mu = \sum_x B[x, \mu] C[x, \lambda] x \otimes \mu$, also

$$A^\bullet B^\circ C^\bullet \lambda \otimes \mu = \sum_\nu \sum_x A[\nu, x] B[x, \mu] C[x, \lambda] \nu \otimes \mu$$

Ebenso $E^\bullet F^\circ \lambda \otimes \mu = \sum_\nu E[\nu, \lambda] F[\lambda, \mu] \nu \otimes \mu$, also

$$D^\circ E^\bullet F^\circ \lambda \otimes \mu = \sum_\nu D[\nu, \mu] E[\nu, \lambda] F[\lambda, \mu] \nu \otimes \mu$$

Koeffizientenvergleich ergibt nun die Behauptung. $\square$

Bemerkung 2.2 *Jede der Bedingungen II_i, III_i ist respektive äquivalent zu II'_i, III'_i:*

$$\begin{array}{llll}
II'_1. & R^\circ_2 R^\circ_{-4} = n\,\mathrm{id} & II'_5. & R^\bullet_1 R^\bullet_3 = n\,\mathrm{id} \\
II'_2. & R^\circ_3 R^\circ_{-1} = n\,\mathrm{id} & II'_6. & R^\bullet_4 R^\bullet_2 = n\,\mathrm{id} \\
II'_3. & R^\circ_4 R^\circ_{-2} = n\,\mathrm{id} & II'_7. & R^\bullet_{-1} R^\bullet_{-3} = n\,\mathrm{id} \\
II'_4. & R^\circ_1 R^\circ_{-3} = n\,\mathrm{id} & II'_8. & R^\bullet_{-4} R^\bullet_{-2} = n\,\mathrm{id}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
III'_1. & R^\bullet_1 R^\circ_{-4} R^\bullet_1 = R^\circ_{-4} R^\bullet_1 R^\circ_{-4} & III'_9. & R^\bullet_1 R^\circ_4 R^\bullet_1 = R^\circ_4 R^\bullet_1 R^\circ_4 \\
III'_2. & R^\bullet_1 R^\circ_{-4} R^\bullet_3 = R^\circ_2 R^\bullet_1 R^\circ_{-4} & III'_{10}. & R^\bullet_3 R^\circ_4 R^\bullet_1 = R^\circ_4 R^\bullet_1 R^\circ_{-2} \\
III'_3. & R^\bullet_3 R^\circ_2 R^\bullet_3 = R^\circ_2 R^\bullet_3 R^\circ_2 & III'_{11}. & R^\bullet_3 R^\circ_{-2} R^\bullet_3 = R^\circ_{-2} R^\bullet_3 R^\circ_{-2} \\
III'_4. & R^\bullet_1 R^\circ_2 R^\bullet_3 = R^\circ_2 R^\bullet_3 R^\circ_{-4} & III'_{12}. & R^\bullet_3 R^\circ_{-2} R^\bullet_1 = R^\circ_4 R^\bullet_3 R^\circ_{-2} \\
III'_5. & R^\bullet_3 R^\circ_{-4} R^\bullet_1 = R^\circ_{-4} R^\bullet_1 R^\circ_2 & III'_{13}. & R^\bullet_1 R^\circ_4 R^\bullet_3 = R^\circ_{-2} R^\bullet_1 R^\circ_4 \\
III'_6. & R^\bullet_2 R^\circ_{-2} R^\bullet_4 = R^\circ_1 R^\bullet_{-3} R^\circ_{-3} & III'_{14}. & R^\bullet_{-2} R^\circ_2 R^\bullet_{-4} = R^\circ_{-1} R^\bullet_3 R^\circ_3 \\
III'_7. & R^\bullet_3 R^\circ_2 R^\bullet_1 = R^\circ_{-4} R^\bullet_3 R^\circ_2 & III'_{15}. & R^\bullet_1 R^\circ_{-2} R^\bullet_3 = R^\circ_{-2} R^\bullet_3 R^\circ_4 \\
III'_8. & R^\bullet_2 R^\circ_4 R^\bullet_4 = R^\circ_1 R^\bullet_{-1} R^\circ_{-3} & III'_{16}. & R^\bullet_{-2} R^\circ_{-4} R^\bullet_{-4} = R^\circ_{-1} R^\bullet_1 R^\circ_3
\end{array}$$

Bei den letzteren wählt man jeweils in Lemma 2.1 geeignete W_i und Indizes.

Beweis von Satz 1.9. Wähle in Lemma 2.1 $A = C = E = W_1, B = D = F = W_4^\top$, sowie $\lambda = \beta, \mu = \gamma, \nu = \alpha$. Das ergibt die Äquivalenz von III_1 mit $R_1^\bullet R_{-4}^\circ R_1^\bullet = R_{-4}^\circ R_1^\bullet R_{-4}^\circ$ (III_1'). Mit den II_i' erhalten wir jetzt nacheinander: $R_1^\bullet R_{-4}^\circ R_3^\bullet = R_2^\circ R_1^\bullet R_{-4}^\circ$ (III_2'), $R_3^\bullet R_2^\circ R_1^\bullet = R_{-4}^\circ R_3^\bullet R_2^\circ$ (III_7'), $R_3^\bullet R_2^\circ R_3^\bullet = R_2^\circ R_3^\bullet R_2^\circ$ (III_3'), $R_1^\bullet R_2^\circ R_3^\bullet = R_2^\circ R_3^\bullet R_{-4}^\circ$ (III_4'), $R_3^\bullet R_{-4}^\circ R_1^\bullet = R_{-4}^\circ R_1^\bullet R_2^\circ$ (III_5').

Die Wahl $B = C^\top = F = W_1, A = D = E = W_4$ und $\lambda = \alpha, \mu = \beta, \nu = \gamma$ ergibt $R_4^\bullet R_1^\circ R_{-1}^\bullet = R_4^\circ R_4^\bullet R_1^\circ$, und daraus: $R_2^\bullet R_{-2}^\circ R_4^\bullet = R_1^\circ R_{-3}^\bullet R_{-3}^\circ$ (III_6'), $R_2^\bullet R_4^\circ R_4^\bullet = R_1^\circ R_{-3}^\bullet R_{-3}^\circ$ (III_8').

Analog für $III_9', \ldots, III_{16}'$. □

Definition 2.3 *Die Gleichungen*

$$\begin{aligned}
III_1'.&\quad R_1^\bullet R_{-4}^\circ R_1^\bullet = R_{-4}^\circ R_1^\bullet R_{-4}^\circ\\
III_3'.&\quad R_3^\bullet R_2^\circ R_3^\bullet = R_2^\circ R_3^\bullet R_2^\circ\\
III_9'.&\quad R_1^\bullet R_4^\circ R_1^\bullet = R_4^\circ R_1^\bullet R_4^\circ\\
III_{11}'.&\quad R_3^\bullet R_{-2}^\circ R_3^\bullet = R_{-2}^\circ R_3^\bullet R_{-2}^\circ
\end{aligned}$$

heißen Yang-Baxter-Gleichungen *des Spinmodells M.*

Satz 2.4 *$R_1^\bullet$ ist zu R_4°, $R_3^\bullet$ zu R_2° konjugiert. Insbesondere gelten*

$$\operatorname{Spec} R_1^\bullet = \operatorname{Spec} R_4^\circ = \{dW_4[\alpha,\beta] | \alpha, \beta \in X\}$$

$$\operatorname{Spec} R_3^\bullet = \operatorname{Spec} R_2^\circ = \{dW_2[\alpha,\beta] | \alpha, \beta \in X\}$$

(mit Vielfachheiten).

Beweis. Aus III_9' und III_3' erhält man unmittelbar (beachte, daß alle $R_i^\bullet, R_i^\circ$ nach den Typ II Gleichungen invertierbar sind):
$R_4^\circ = (R_1^\bullet R_4^\circ) R_1^\bullet (R_1^\bullet R_4^\circ)^{-1}$ und $R_2^\circ = (R_3^\bullet R_2^\circ) R_3^\bullet (R_3^\bullet R_2^\circ)^{-1}$.
Die Behauptung folgt, wenn man beachtet, daß die R_i° bereits Diagonalgestalt haben. □

Korollar 2.5 *Für ein 4-weight-Spinmodell $M = (X, W_1, W_2, W_3, W_4)$ ist*

$$\operatorname{Spec} W_1 \underset{1:n}{=} \{dW_4[\alpha,\beta] | \alpha, \beta \in X\}, \ \operatorname{Spec} W_3 \underset{1:n}{=} \{dW_2[\alpha,\beta] | \alpha, \beta \in X\}$$

(dabei bedeutet '$\underset{1:n}{=}$', daß jeder Wert rechts die n-fache Vielfachheit hat wie links). Insbesondere haben W_2 und W_4 höchstens n verschiedene Einträge. □

Beweis. Wegen $R_1^\bullet = W_1 \otimes \mathrm{id}$, $R_3^\bullet = W_3 \otimes \mathrm{id}$ hat man $\mathrm{Spec}\, W_1 \underset{1:n}{=} \mathrm{Spec}\, R_1^\bullet$, $\mathrm{Spec}\, W_3 \underset{1:n}{=} \mathrm{Spec}\, R_3^\bullet$. Die Behauptung folgt nun aus Satz 2.4. □

Formulieren wir dieses Ergebnis für den Fall von 2-weight-Modellen vom Jonestyp:

Korollar 2.6 *Sei $M = (X, W_+, W_-)$ 2-weight-Spinmodell vom Jonestyp. Dann gelten*

$$\mathrm{Spec}\, W_+ \underset{1:n}{=} \{dW_-[\alpha,\beta] | \alpha,\beta \in X\},\ \mathrm{Spec}\, W_- \underset{1:n}{=} \{dW_+[\alpha,\beta] | \alpha,\beta \in X\}$$

Insbesondere haben W_+, W_- höchstens n verschiedene Einträge. □

2.2 Eigenvektoren und Eigenwerte

In diesem Abschnitt werden wir die Korollare 2.5 und 2.6 auf eine andere, 'geometrischere' Art noch einmal beweisen und dabei noch vertiefen.
Für $\beta, \gamma \in X$ definieren wir $Y_{\beta\gamma}, Y'_{\beta\gamma} \in \mathbf{C}X$ durch $Y'_{\beta\gamma}[x] = W_1[\beta, x] W_4[\gamma, x]$ und $Y_{\beta\gamma}[x] = W_1[x, \beta] W_4[x, \gamma]$, ferner $X \times X$-Matrizen $\mathbf{Y}'_\gamma = (Y'_{\beta\gamma} | \beta)$ und $\mathbf{Y}_\gamma = (Y_{\beta\gamma} | \beta)$, sowie $\Delta'_\gamma = \mathrm{Diag}(W_4[\gamma, \beta] | \beta)$, $\Delta_\gamma = \mathrm{Diag}(W_4[\beta, \gamma] | \beta)$.

Bemerkung 2.7 *Die Typ III Gleichungen sind äquivalent zu*
(3a') $\forall \beta, \gamma\ W_1^\top Y'_{\beta\gamma} = dW_4^\top[\beta, \gamma] Y'_{\beta\gamma}$
(3b') $\forall \beta, \gamma\ W_1 Y_{\beta\gamma} = dW_4[\beta, \gamma] Y_{\beta\gamma}$
Durch Anwendung der Typ II Gleichungen kann man auch äquivalent formulieren:
(3a") $\forall \beta, \gamma\ W_3^\top Y'_{\beta\gamma} = dW_2[\beta, \gamma] Y'_{\beta\gamma}$
(3b") $\forall \beta, \gamma\ W_3 Y_{\beta\gamma} = dW_2^\top[\beta, \gamma] Y_{\beta\gamma}$

Lemma 2.8 *Für alle $\gamma \in X$ ist $\mathbf{Y}'_\gamma = \Delta'_\gamma W_1^\top$ und $\mathbf{Y}_\gamma = \Delta_\gamma W_1$. Insbesondere sind $\{Y'_{\beta\gamma} | \beta\}$ und $\{Y_{\beta\gamma} | \beta\}$ Basen von $\mathbf{C}X$.*

Beweis. Die Matrixgleichungen sind offensichtlich. Nach Definition 1.10.(1) und (2) sind W_1 und $\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma$ invertierbar, also auch $\mathbf{Y}'_\gamma, \mathbf{Y}_\gamma$. Die Spaltenvektoren dieser Matrizen sind also Basen. □

Satz 2.9 (vgl. Korollar 2.5) *Für alle $\gamma \in X$ ist*

$$\{dW_4[\gamma, \beta] | \beta\} = \mathrm{Spec}\, W_1 = \{dW_4[\beta, \gamma] | \beta\}$$

$$\{dW_2[\gamma,\beta]|\beta\} = \operatorname{Spec} W_3 = \{dW_2[\beta,\gamma]|\beta\}$$

(jeweils mit Vielfachheiten). Insbesondere sind die Zeilen und Spalten von W_2 (und ebenso von W_4) Permutationen voneinander.

Beweis. Wir sehen uns die Eigenwertgleichungen von Bemerkung 2.7 für festes γ an: Wegen Lemma 2.8 sind das die Eigenwertrelationen für eine Basis von Eigenvektoren, und mit $\operatorname{Spec} W_i = \operatorname{Spec} W_i^\top$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.10 *Die Typ III Gleichungen für ein Spinmodell vom Jonestyp lauten (nach Satz 1.9 und Definition 1.16 sind sie untereinander äquivalent):*

$$
\begin{aligned}
&III_{J1}.\ \textstyle\sum_x W_+[\alpha,x]W_+[x,\beta]W_-[x,\gamma] = dW_+[\alpha,\beta]W_-[\alpha,\gamma]W_-[\beta,\gamma]\\
&III_{J2}.\ \textstyle\sum_x W_+[\alpha,x]W_-[x,\beta]W_-[x,\gamma] = dW_+[\alpha,\beta]W_+[\gamma,\alpha]W_-[\beta,\gamma]\\
&III_{J3}.\ \textstyle\sum_x W_+[\alpha,x]W_-[x,\beta]W_-[\gamma,x] = dW_+[\alpha,\beta]W_+[\alpha,\gamma]W_-[\gamma,\beta]\\
&III_{J4}.\ \textstyle\sum_x W_+[\alpha,x]W_+[\beta,x]W_-[x,\gamma] = dW_+[\beta,\alpha]W_-[\alpha,\gamma]W_-[\gamma,\beta]\\
&III_{J5}.\ \textstyle\sum_x W_+[x,\alpha]W_-[\beta,x]W_-[x,\gamma] = dW_+[\beta,\alpha]W_+[\gamma,\alpha]W_-[\beta,\gamma]\\
&III_{J6}.\ \textstyle\sum_x W_+[x,\alpha]W_+[x,\beta]W_-[\gamma,x] = dW_+[\beta,\alpha]W_-[\alpha,\gamma]W_-[\gamma,\beta]\\
&III_{J7}.\ \textstyle\sum_x W_+[x,\alpha]W_+[\beta,x]W_-[\gamma,x] = dW_+[\beta,\alpha]W_-[\gamma,\alpha]W_-[\gamma,\beta]\\
&III_{J8}.\ \textstyle\sum_x W_+[x,\alpha]W_-[\beta,x]W_-[\gamma,x] = dW_+[\beta,\alpha]W_+[\alpha,\gamma]W_-[\gamma,\beta]
\end{aligned}
$$

Korollar 2.11 (vgl. Korollar 2.6) *Die Typ III Gleichungen (vorige Bemerkung) für ein Spinmodell vom Jonestyp lauten als Eigenwertgleichungen:*

$$
\begin{aligned}
&III_{J1}.\ W_+^\top Y_{\beta\gamma} = dW_-[\beta,\gamma]Y_{\beta\gamma} &\quad& III_{J5}.\ W_-^\top Y'_{\beta\gamma} = dW_+^\top[\beta,\gamma]Y_{\beta\gamma}\\
&III_{J2}.\ W_-^\top Y_{\beta\gamma} = dW_+^\top[\beta,\gamma]Y_{\beta\gamma} && III_{J6}.\ W_+^\top Y'_{\beta\gamma} = dW_-[\beta,\gamma]Y_{\beta\gamma}\\
&III_{J3}.\ W_- Y_{\beta\gamma} = dW_+[\beta,\gamma]Y_{\beta\gamma} && III_{J7}.\ W_+ Y'_{\beta\gamma} = dW_-^\top[\beta,\gamma]Y_{\beta\gamma}\\
&III_{J4}.\ W_+ Y_{\beta\gamma} = dW_-^\top[\beta,\gamma]Y_{\beta\gamma} && III_{J8}.\ W_- Y'_{\beta\gamma} = dW_+[\beta,\gamma]Y_{\beta\gamma}
\end{aligned}
$$

mit $Y_{\beta\gamma}[x] = W_+[x,\beta]W_-[\gamma,x]$ und $Y'_{\beta\gamma}[x] = W_+[\beta,x]W_-[x,\gamma]$.

Ist $M = (X, W_+, W_-)$ ein 2-weight-Modell vom Jonestyp, so gilt für alle $\gamma \in X$

$$\{dW_-[\gamma,\beta]|\beta\} = \operatorname{Spec} W_+ = \{dW_-[\beta,\gamma]|\beta\}$$

$$\{dW_+[\gamma,\beta]|\beta\} = \operatorname{Spec} W_- = \{dW_+[\beta,\gamma]|\beta\}$$

(jeweils mit Vielfachheiten). Insbesondere sind die Zeilen und Spalten von W_+ (und ebenso von W_-) Permutationen voneinander. □

Bemerkung 2.12 *Das letzte Korollar hat eine schöne kombinatorische Interpretation: Sind* t_i *die verschiedenen Einträge von* W_+*, so können wir schreiben* $W_+ = \sum_i t_i A_i$ *mit 0-1-Matrizen* A_i*. Lesen wir diese als Adjazenzmatrizen gerichteter Graphen* G_i *(eventuell mit einfachen Schleifen), so besagt der Korollar, daß alle* G_i *regulär sind (d.h. alle in- und out-degrees sind gleich). Beachte, daß nach Behauptung 1.14 einer der Graphen alle Schleifen enthält.*

Aus Gründen, die bereits im nächsten Abschnitt klar werden, werden wir die Konvention annehmen, die korrespondiernde Matrix A *mit lauter Einsen auf der Diagonale aufzuspalten in* I *und* $A - I$*, wenn* $A \neq I$ *ist. Wir schreiben also* $W_+ = \sum_{i=0}^{m} t_i A_i$*, mit 0-1-Matrizen* A_i*, wobei* $A_0 = I$ *und alle* t_i, t_j *paarweise verschieden sind, außer allenfalls* $t_0 = t_1$*.* $m = m(W_+)$ *ist damit die Anzahl der Einträge von* W_+ *außerhalb der Diagonale.*

2.3 Spinmodelle und Assoziations-Schemata

Von dieser Stelle an betrachten wir nur noch 2-weight-Modelle vom Jonestyp. Wir könnten jetzt weitere Sätze in der Sprache der Matrixoperatoren $R^\bullet, R^\circ$ und mittels Yang-Baxter-Gleichungen beweisen, wir werden uns aber ab hier der Eigenvektorformulierung des vorigen Abschnitts bedienen, die den Ergebnissen besser angepaßt ist.

Definition 2.13 *Wir nennen eine* $X \times X$*-Matrix* W vom Typ II*, wenn alle ihre Einträge ungleich Null sind und* $\forall \alpha, \beta \; \sum_x W[x,\alpha]W[x,\beta]^{-1} = \sum_x W[\alpha, x]W[\beta, x]^{-1} = n\delta_{\alpha\beta}$ *(d.h. wenn* W_+, W_- *mit* $W_-[\alpha,\beta] = W[\beta,\alpha]^{-1}$*,* $W_+ = W$ *die Typ II Gleichungen erfüllen).*
In diesem Fall definieren wir $Y_{\beta\gamma}, Y'_{\beta\gamma} \in \mathbf{C}X$ *durch* $Y'_{\beta\gamma}[x] = W[\beta, x]/W[\gamma, x]$ *und* $Y_{\beta\gamma}[x] = W[x,\beta]/W[x,\gamma]$*.*

Definition 2.14 *Sei* W *vom Typ II, dann definiere*

$$\mathcal{N}(W) = \{A \in M_X | \forall \beta, \gamma \; Y_{\beta\gamma} \text{ ist Eigenvektor von } A\}$$

$$\mathcal{N}'(W) = \{A \in M_X | \forall \beta, \gamma \; Y'_{\beta\gamma} \text{ ist Eigenvektor von } A\}$$

Definiere ferner matrixwertige Abbildungen ψ *bzw.* ψ' *auf* $\mathcal{N}$ *bzw.* $\mathcal{N}'$ *durch*

$$\forall A \in \mathcal{N} \; \forall \beta, \gamma \; AY_{\beta\gamma} = (\psi A)[\beta,\gamma]Y_{\beta\gamma}$$

$$\forall A' \in \mathcal{N}' \; \forall \beta, \gamma \; A'Y'_{\beta\gamma} = (\psi' A')[\beta,\gamma]Y'_{\beta\gamma}$$

Satz 2.15 *Sei W vom Typ II. Dann sind $\mathcal{N} = \mathcal{N}(W)$ und $\mathcal{N}' = \mathcal{N}'(W)$ Bose-Mesner-Algebren von kommutativen Assoziations-Schemata, und das Paar (ψ, ψ') ist eine Dualiät von $(\mathcal{N}, \mathcal{N}')$ (vgl. Definition A.29).*

Beweis. Es ist klar, daß ψ linear ist, ferner injektiv, da die $Y_{\beta\gamma}$ erzeugend sind (vgl. Lemma 2.8).

Daß W vom Typ II ist, ist äquivalent zu $JY_{\beta\gamma} = n\delta_{\beta\gamma}Y_{\beta\gamma}$, also $J \in \mathcal{N}$. Ersichtlich ist $\psi(I) = J$, $\psi(J) = nI$.

Seien $A, B \in \mathcal{N}$. Offenbar ist für alle β, γ

$$ABY_{\beta\gamma} = BAY_{\beta\gamma} = \psi(A)[\beta,\gamma]\psi(B)[\beta,\gamma]Y_{\beta\gamma}$$

Also ist $\mathcal{N}$ eine Algebra unter Matrixprodukt und $\psi(AB) = (\psi A) \circ (\psi B)$.

Nun zeigen wir $\psi(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}'$: Sei $A \in \mathcal{N}$ und $\alpha, \beta, \gamma \in X$. Dann ist

$$(\psi(A)Y'_{\beta\gamma})[\alpha] = \sum_x \psi(A)[\alpha, x]\frac{W[\beta, x]}{W[\gamma, x]}$$

und wegen $\psi(A)[\alpha, x]Y_{\alpha x} = AY_{\alpha x}$ haben wir

$$\psi(A)[\alpha, x]\frac{W[\gamma, \alpha]}{W[\gamma, x]} = \sum_y A[\gamma, y]\frac{W[y, \alpha]}{W[y, x]}$$

Also durch Einsetzen

$$\begin{aligned}(\psi(A)Y'_{\beta\gamma})[\alpha] &= \sum_x \sum_y A[\gamma, y]\frac{W[y, \alpha]W[\beta, x]}{W[\gamma, \alpha]W[y, x]} \\ &= \sum_y A[\gamma, y]\frac{W[y, \alpha]}{W[\gamma, \alpha]}\left(\sum_x \frac{W[\beta, x]}{W[y, x]}\right) \\ &= \sum_y A[\gamma, y]\frac{W[y, \alpha]}{W[\gamma, \alpha]}n\delta_{\beta y} \\ &= nA[\gamma, \beta]\frac{W[\beta, \alpha]}{W[\gamma, \alpha]} = nA[\gamma, \beta]Y'_{\beta\gamma}[\alpha]\end{aligned}$$

D.h. $\psi(A)Y'_{\beta\gamma} = nA[\gamma, \beta]Y'_{\beta\gamma}$, insbesondere $\psi(A) \in \mathcal{N}'$ und $\psi'(\psi(A)) = nA^\top$.

Wegen $\mathcal{N}'(W) = \mathcal{N}(W^\top)$ erhält man dasselbe für Vertauschung gestrichener und ungestrichener Symbole: $I, J \in \mathcal{N}'$, $\psi'(\mathcal{N}') \subset \mathcal{N}$, $\psi\psi' = n\tau_{X'}$ (Transposition in $M_{X'}$). Damit folgt die Behauptung. □

Definition 2.16 *Seien U, V $X \times X$-Matrizen. Wir sagen, V entsteht durch* Skalierung *aus U, wenn es invertierbare Diagonalmatrizen Δ, Δ' gibt mit $V = \Delta U \Delta'$. Offenbar definiert dies eine Äquivalenzrelation auf den Matrizen. V heißt* symmetrisierbar*, wenn V durch Skalierung aus einer symmetrischen Matrix entsteht.*

Wir haben das direkt aus den Definitionen folgende

Lemma 2.17 *Sei W eine Typ II Matrix.*
(1) Entsteht $\widetilde{W}$ aus W durch Skalierung, so ist $\widetilde{W}$ ebenfalls vom Typ II und es ist $\mathcal{N}(W) = \mathcal{N}(\widetilde{W})$, $\mathcal{N}'(W) = \mathcal{N}'(\widetilde{W})$.
(2) Ist W symmetrisierbar, so ist $\mathcal{N}(W) = \mathcal{N}'(W)$ eine selbstduale Bose-Mesner-Algebra. □

Satz 2.18 ([JMN95]) *Sei $M = (X, W_+, W_-)$ Spinmodell vom Jonestyp. Dann sind W_+, W_- enthalten in der Bose-Mesner-Algebra $\mathcal{N}$ eines selbstdualen CAS, genauer ist die Abbildung*

$$\psi : M \longmapsto a^{-1} W_+ \circ (W_-^\top (W_+^\top \circ M)) = d^{-1} a^{-1} W_-^\top (W_+^\top \circ (W_- M))$$

eine Selbstdualität von $\mathcal{N}$.
Es gelten $\psi(I) = J$, $\psi(J) = I$, $\psi(W_+) = dW_-^\top$, $\psi(W_-) = dW_+$.

Beweis. Nach Definition 1.16.(1) und (2) ist W_+ vom Typ II. Definiere $\mathcal{N} = \mathcal{N}(W_+)$, $\mathcal{N}' = \mathcal{N}'(W_+)$ mit den Dualitätsabbildungen ψ, ψ' aus Definition 2.14. Wir haben die Typ III Gleichung III_{J6} aus Bemerkung 2.10

$$\sum_x W_+[x, \alpha] W_+[x, \beta] W_-[\gamma, x] = dW_+[\alpha, \beta] W_-[\beta, \gamma] W_-[\gamma, \alpha]$$

d.h. $W_+^\top Y_{\beta\gamma} = dW_-[\beta, \gamma] Y_{\beta\gamma}$. Daraus folgt $W_+ \in \mathcal{N}$ und $\psi(W_+^\top) = dW_-$, $\psi(W_+) = dW_-^\top$.
Vertauscht man in der vorigen Relation α und β, bleibt die linke Seite invariant, es folgt also

$$W_+[\alpha, \beta] W_-[\beta, \gamma] W_-[\gamma, \alpha] = W_+[\beta, \alpha] W_-[\alpha, \gamma] W_-[\gamma, \beta]$$

was für festes γ äquivalent zu

$$\Delta W_+ \Delta' = \Delta' W_+^\top \Delta = (\Delta W_+ \Delta')^\top$$

ist, mit $\Delta = \mathrm{Diag}(W_-[\gamma,\beta]|\beta)$, $\Delta' = \mathrm{Diag}(W_-[\beta,\gamma]|\beta)$. Also ist W_+ symmetrisierbar, mit Lemma 2.17.(2) folgt daher, daß $\mathcal{N} = \mathcal{N}'$ die Selbstdualität $\psi = \psi'$ hat. Insbesondere ist $W_- \in \mathcal{N}$ und $\psi(W_-) = dW_+$.

Um die Gleichungen für ψ herzuleiten, betrachte die Definitionsgleichung $AY_{\beta\gamma} = \psi(A)[\beta,\gamma]Y_{\beta\gamma}$ in der Koordinate β:

$$\sum_x A[\beta,x]W_+[x,\beta]W_-[\gamma,x] = \psi(A)[\beta,\gamma]W_+[\beta,\beta]W_-[\gamma,\beta]$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\psi(A)[\beta,\gamma] &= a^{-1}W_+[\beta,\gamma]\sum_x A[\beta,x]W_+[x,\beta]W_-[\gamma,x]\\ &= (a^{-1}W_+\circ((W_+^\top\circ A)W_-^\top))[\beta,\gamma]\end{aligned}$$

woraus die erste Darstellung von ψ wegen der Kommutativität der Multiplikation in $\mathcal{N}$ folgt. Die andere Darstellung ist dazu äquivalent, da die Gleichung

$$dW_+\circ(W_-^\top(W_+^\top\circ M)) = W_-^\top(W_+^\top\circ(W_-M))$$

allgemein für $M \in M_X$ gilt: sie ist nämlich nach Lemma 2.1 gleichwertig mit der Typ III Gleichung III_{J2}. □

Bemerkung 2.19 *Da die Relationen eines CAS insbesondere regulär sind, enthält das Ergebnis von Satz 2.18 die Beobachtung von Bemerkung 2.12 als Korollar.*

Korollar 2.20 *Sei $M = (X, W_+, W_-)$ 2-weight-Spinmodell vom Jonestyp, Dann erzeugen I, J, W_+ (mit Transponierung, Matrix-und Hadamardprodukt) die Bose-Mesner-Algebra $\mathbf{C}\mathcal{A}$ eines selbstdualen CAS $\mathcal{A}$, wobei die Selbstdualität ψ durch*

$$\psi : M \longmapsto a^{-1}W_+\circ(W_-^\top(W_+^\top\circ M)) = d^{-1}a^{-1}W_-^\top(W_+^\top\circ(W_-M))$$

beschrieben wird. Ferner ist $W_- \in \mathcal{A}$.

Beweis. $\mathbf{C}\mathcal{A}$ ist die kleinste Bose-Mesner-Unteralgebra von $\mathcal{N}$ aus Satz 2.18, die nach allgemeinen Prinzipien zu einem CAS $\mathcal{A}$ gehört. Das angegebene ψ kommt ebenfalls aus Satz 2.18, und wegen der Möglichkeit, ψ durch Bose-Mesner-Algebra-Operationen zu berechnen, ist klar, daß $\psi\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$. Also ist

ψ Selbstdualität von $\mathcal{A}$. Man sieht nun folgendermaßen, daß $W_- \in \mathcal{A}$: W_+ annulliert sein Minimalpoynom, etwa $\sum_{i=0}^m c_i W_+^i = 0$. Dabei ist $c_0 \neq 0$, da W_+ regulär, also $I = -c_0^{-1} \sum_{i=1}^m c_i W_+^i$, und daher $W_- = -c_0^{-1} \sum_{i=1}^m n c_i W_+^{i-1}$.

(Alternativ, indem man einfach $dW_- = \psi(W_+^\top)$ beachtet). □

Korollar 2.21 ([BB93], der symmetrische Fall: [Jae92]) *Sei $M = (X, W_+, W_-)$ 2-weight-Spinmodell vom Jonestyp, $\mathcal{M}$ die von $J, W_+, W_+^\top$ mit Matrixprodukt erzeugte Algebra, $\mathcal{H}$ die von $I, W_-, W_-^\top$ mit Hadamardprodukt erzeugte Algebra. Dann gibt es einen Algebrenisomorphismus $\psi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{H}$ mit $\psi(M) = a^{-1} W_+ \circ (W_-^\top (W_+^\top \circ M))$. Ist $\mathcal{M}$ unter Hadamardprodukt (analog: $\mathcal{H}$ unter Matrixprodukt) abgeschlossen, so ist $\mathcal{M} = \mathcal{H}$ Bose-Mesner-Algebra eines CAS mit Selbstdualität ψ.*

Beweis. Nach Satz 2.18 sind W_+, W_- in der Bose-Mesner-Algebra eines CAS enthalten, mit der dort angegebenen Dualität. Aus $\psi(I) = J, \psi(W_+) = W_-^\top, \psi(W_+^\top) = W_-$ folgt aber, daß sich ψ zu einem Isomorphismus der erzeugten Algebren $\mathcal{M}$ und $\mathcal{H}$ fortsetzt.

Man sieht nun wie im Beweis von Korollar 2.20, daß $W_- \in \mathcal{M}$. Ist nun $\mathcal{M}$ unter Hadamardprodukt abgeschlossen, ist $\mathcal{M}$ also die Bose-Mesner-Algebra eines CAS und wird von J, W_+ als Bose-Mesner-Algebra erzeugt. Somit ist Korollar 2.20 anwendbar und wir sind fertig.
Analog, wenn $\mathcal{H}$ unter Matrixprodukt abgeschlossen ist. □

Satz 2.22 (vgl. [BB93]) *Seien die $X \times X$-Matrizen W_+, W_- in der Bose-Mesner-Algebra eines selbstdualen CAS mit Systemen minimaler Idempotenter $(A_0, \ldots, A_m)$, $(E_0, \ldots, E_m)$, Eigenmatrizen P, $Q = \bar{P}$, und $Y_{\beta\gamma}, Y'_{\beta\gamma}$ wie in Abschnitt 2.2 (Korollar 2.11) definiert. Dann ist (X, W_+, W_-) Spinmodell vom Jonestyp genau wenn $W_+ = \sum_i t_i A_i$, $W_- = d \sum_i t_i E_i$ mit:*

(1) $PT = dT_-$ oder äquivalent

(1') $QT' = dT_-$

(2) $\forall i, j > 0\ \forall \beta\gamma\ (\beta, \gamma) \in R_j, t_j \neq t_i \Longrightarrow E_i Y_{\beta\gamma} = 0$,

wobei $T = (t_0, \ldots, t_m)$, $T_- = (t_0^{-1}, \ldots, t_m^{-1})$, $T' = (t_{0'}, \ldots, t_{m'})$.

Beweis. Da die Selbstdualität ψ E_i auf A_i, A_i auf $nE_{i'}$ abbildet gilt $\psi(W_+) = dW_-^\top, \psi(W_-) = dW_+$ für die angegebenen Darstellungen von W_- und W_+. Sie sind also gleichwertig.

Die Gleichung $W_+W_- = nI = \sum_j nE_j$ ist wegen

$$\begin{aligned} W_+W_- &= \left(\sum_i t_i A_i\right)\left(d\sum_j t_j E_j\right) \\ &= \sum_j \sum_i t_i t_j A_i E_j \\ &= d\sum_j \sum_i t_i t_j P_{ji} E_j \end{aligned}$$

äquivalent zu

$$\forall j \ \sum_i P_{ji} t_i = dt_j^{-1}, \text{ d.h. } PT = dT_-$$

Die Gleichung $W_+ \circ W_-^\top = J = \sum_i A_i$ ist wegen

$$\begin{aligned} W_+ \circ W_-^\top &= \left(\sum_i t_i A_i\right) \circ \left(d\sum_j t_{j'} E_j\right) \\ &= \sum_i \sum_j t_i t_{j'} d A_i \circ E_j \\ &= d^{-1} \sum_i \sum_j t_i t_{j'} Q_{ij} A_i \end{aligned}$$

äquivalent zu

$$\forall i \ \sum_j Q_{ij} t_{j'} = dt_i^{-1}, \text{ d.h. } QT' = dT_-$$

Dabei sind (1) und (1') äquivalent, weil $W_+W_- = nI$ vermöge ψ zu $W_+ \circ W_-^\top = J$ äquivalent ist.
Die Typ III Gleichungen sind nach Korollar 2.11 äquivalent zu $W_+Y_{\beta\gamma} = dW_-[\gamma,\beta]Y_{\beta\gamma}$. Nehmen wir (1) und (1') als gegeben an. Dann ist wegen $W_+W_- = nI$ und $W_- = d\sum_i t_i E_i$, $W_+ = d\sum_i t_i^{-1} E_i$. Damit lautet die letzte Gleichung

$$\sum_i t_i^{-1} E_i Y_{\beta\gamma} = W_-[\gamma,\beta] Y_{\beta\gamma}$$

was (durch Multiplikation mit E_i) zu

$$\forall i \ t_i^{-1} E_i Y_{\beta\gamma} = W_-[\gamma,\beta] E_i Y_{\beta\gamma}$$

wird, d.h. $E_i Y_{\beta\gamma}$ muß Null sein für $t_i^{-1} \neq W_-[\gamma, \beta]$. Sei $(\beta, \gamma) \in R_j$ (d.h. $A_j[\beta, \gamma] = 1$). Dann ist letztere Bedingung gleichwertig mit $t_i^{-1} \neq t_j^{-1}$.
Beachte schließlich, daß die Bedingung von (2) für $i = 0$ stets erfüllt ist: da $E_0 = 1/nJ$ und W_+ vom Typ II ist, gilt $E_0 Y_{\beta\gamma} = 0$ für $\beta \neq \gamma$. Ebenso für $j = 0$ (d.h $\beta = \gamma$): dann ist $Y_{\beta\beta} = \mathbf{1}$, der Vektor mit lauter Komponenten 1, und aus $E_i E_0 = 0$ für $i \neq 0$ folgt $E_i Y_{\beta\beta} = 0$. □

Bemerkung 2.23 *Aus dem Beweis geht hervor, daß (1), (1') äquivalent den Typ II Gleichungen sind, und (2) unter Voraussetzung von (1) äquivalent den Typ III Gleichungen ist.*

2.4 Modulare Invarianz

Sei wie vorher $M = (X, W_+, W_-)$ Spinmodell vom Jonestyp, $\mathcal{N}$ die M zugeordnete Bose-Mesner-Algebra mit Selbstdualität ψ. Sehen wir uns noch einmal die in Satz 2.18 gewonnene Darstellung der Selbstdualität von $\mathcal{N}$ an: Seien dazu $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{E}$ die Basen minimaler Idempotenter von $\mathcal{N}$, P bzw. Q die Eigenmatrizen.

Satz 2.24 ([JMN95], [BBJ]) *Mit $W_- = d\sum_i t_i E_i$, $W_+ = \psi(W_-)$ und $T' = \mathrm{Diag}(t_{0'}, \ldots, t_{m'})$, $T = \mathrm{Diag}(t_0, \ldots, t_m)$ ist*

$$\forall A \in \mathcal{N} \;\; \psi(A) = a^{-1} W_+ \circ (W_-^\top (W_+^\top \circ A))$$

äquivalent zu $(PT')^3 = ad^3 I$ (und zu $(PT)^3 = ad^3 I$). Ferner ist

$$\forall A \in \mathcal{N} \;\; \psi(A) = a^{-1} d^{-1} W_-^\top (W_+^\top \circ (W_- A))$$

äquivalent zu $(QRT')^3 = ad^3 I$ (und zu $(QTR)^3 = ad^3 I$, bzw. $(QRT)^3 = ad^3 I$).

Beweis. Wir haben $W_-^\top = \sum_i t_{i'} A_i$, $W_+ = \sum_i t_i A_i$, $W_+^\top = \sum_i t_{i'} A_i$. In der Basis $\mathcal{A}$ hat die lineare Abbildung $A \longmapsto W_+^\top \circ A$ offenbar die Matrix T'. In der Basis $\mathcal{E}$ hat $A \longmapsto W_-^\top A$ die Matrix dT', also in der Basis $\mathcal{A}$ die Matrix $dP^{-1}T'P$, da ψ in der Basis $\mathcal{E}$ die Matrix P hat, also auch in der Basis $\mathcal{A}$. Wegen $W_+ \circ A = (W_+^\top \circ A^\top)^\top$ hat $A \longmapsto W_+ \circ A$ in der Basis $\mathcal{A}$ die Matrix $RT'R$, wo R die Matrix der Transponierung τ_X ist. Zusammenfassend ist also die erste Gleichung für ψ äquivalent zu

$$P = a^{-1}(dRT'R)(P^{-1}T'P)T'$$

was wegen der Selbstdualität $RP^{-1} = P^{-1}R = d^{-2}P$ die erste Behauptung ergibt (beachte ferner $(PT)^3 = R(PT')^3R$).

Dia Abbildung $A \longmapsto W_- A$ hat in der Basis $\mathcal{E}$ die Matrix $dT = dRT'R$, also in der Basis $\mathcal{A}$ die Matrix $dQRT'RQ^{-1}$. Die Abbildung $A \longmapsto W_+^\top \circ A$ hat in der Basis $\mathcal{A}$ die Matrix T', und schließlich hat $A \longmapsto W_-^\top A$ in der Basis $\mathcal{A}$ die Matrix $dQT'Q^{-1}$. Zusammen ist die zweite Gleichung für ψ äquivalent zu

$$P = a^{-1}d^{-1}(dQT'Q^{-1})T'(dQRT'RQ^{-1}) = a^{-1}dR(RQT'Q^{-1}T'QRT')Rd^{-2}P$$

also mit der Selbstdualität $Q^{-1} = d^{-2}RQ$

$$I = a^{-1}d^{-3}(QRT')^3$$

(beachte ferner $RT' = TR$, sowie $(QRT)^3 = R(QTR)^3R$). □

Bemerkung 2.25 *Da Selbstdualität gleichbedeutend mit $P = QR$ ist, sind die beiden* modularen Invarianz Gleichungen $(PT')^3 = ad^3I$ *und* $(QRT')^3 = ad^3I$ *äquivalent, das aber bedeutet nach der Beobachtung am Ende des Beweises von Satz 2.18, daß sie „fast“ die Typ III Gleichungen implizieren: diese nämlich haben wir*

$$\forall M \in M_X \ dW_+ \circ (W_-^\top(W_+^\top \circ M)) = W_-^\top(W_+^\top \circ (W_- M))$$

ausgedrückt, während aus modularer Invarianz nach Satz 2.24 und der Beobachtung am Ende des Beweises von Satz 2.18

$$\forall A \in \mathcal{N} \ dW_+ \circ (W_-^\top(W_+^\top \circ A)) = W_-^\top(W_+^\top \circ (W_- A))$$

folgt.

Dieser Satz ist ein starkes Hilfsmittel beim Aufsuchen von Spinmodellen. Wir werden ihn im Kapitel 4 und im Kapitel 5 anwenden können.

2.5 Nomuras Methode der Lokalisierung

In einer schönen Arbeit [N95b] hat Nomura eine direkte Methode zum Studium der Gleichungen vom Typ III entdeckt, die eine gewisse Verwandtschaft mit der Konstruktion der Algebra $\mathcal{N}$ in Abschnitt 2.3 hat. Er nennt sie eine *Methode der Lokalisierung*, weil sie gestattet, sich auf einen einzelnen Eintrag von W_+ zu konzentrieren, und für diesen Gleichungen abzuleiten. Sei im folgenden stets $M = (X, W_+, W_-)$ ein Spinmodell vom Jonestyp. Für die nachfolgenden Betrachtungen ist es vorteilhaft, nur noch W_+ zu betrachten und die redundante Matrix W_- zu entfernen, ferner eine Normalisierung in die Definitionsgleichungen von M einzuführen: Wir schreiben $W = a^{-1}W_+$ (a der Modulus von M). Dann hat man

$W[\alpha,\alpha] = 1$
$\sum_x W[\alpha,x]W[\beta,x]^{-1} = \sum_x W[x,\alpha]W[x,\beta]^{-1} = n\delta_{\alpha\beta}$
$\sum_x W[\alpha,x]W[x,\beta]W[\gamma,x]^{-1} = d^*W[\alpha,\beta]W[\gamma,\alpha]^{-1}W[\gamma,\beta]^{-1}$
$\sum_x W[x,\alpha]W[\beta,x]W[x,\gamma]^{-1} = d^*W[\beta,\alpha]W[\alpha,\gamma]^{-1}W[\beta,\gamma]^{-1}$

mit $d^* = da^{-2}$. Beachte dabei, daß wir M bis auf Vorzeichen wiedergewinnen können: für eine gegebene Quadratwurzel d von n ist der Modulus durch die Gleichung $a^2 = d/d^*$ festgelegt. Der Kürze halber sprechen wir auch W als Spinmodell an, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind.

Definition 2.26 *Sei $Y \subset X, Z \subset X \times X$. Die $Y \times Z$-Matrizen $N_{Y,Z}, N'_{Y,Z}$ sind definiert durch*

$$N_{Y,Z}[\alpha,(\beta,\gamma)] = W[\alpha,\beta]W[\alpha,\gamma]^{-1}$$

$$N'_{Y,Z}[\alpha,(\beta,\gamma)] = W[\beta,\alpha]W[\gamma,\alpha]^{-1}$$

Die Spalten von $N_{Y,Z}$ bzw. $N'_{Y,Z}$ sind also die auf die Koordinaten Y eingeschränkten Vektoren $Y_{\beta\gamma}$ bzw. $Y_{\beta\gamma}$ mit $(\beta,\gamma) \in Z$.

Definition 2.27 *Sei $\vartheta \in \mathbf{C}^\times$. Definiere $m(\vartheta) = |\{\alpha | W[\alpha,\beta] = \vartheta\}|$ (nach Korollar 2.11 ist diese Anzahl unabhängig von β und gleich $|\{\alpha|W[\beta,\alpha] = \vartheta\}|$) und $m'(\vartheta) = |\{\alpha|W[\alpha,\beta] = \vartheta$ und $\alpha \neq \beta\}|$. Ferner für eine Menge Θ von Einträgen von W: $m(\Theta) = \sum_{\vartheta\in\Theta} m(\vartheta)$ und $m'(\Theta) = \sum_{\vartheta\in\Theta} m'(\vartheta)$.*

Satz 2.28 ([N95b]) *Sei Θ eine Menge von Einträgen von W, $Y \subset X$, $Z \subset X \times X$ mit $W[Z] \subset \Theta$. Dann ist* $\operatorname{Rang} N_{Y,Z}, \operatorname{Rang} N'_{Y,Z} \leq m(\Theta)$. *Insbesondere für $|Y| = |Z| > m(\Theta)$ ist* $\det N_{Y,Z} = \det N'_{Y,Z} = 0$.

Beweis. Da der Rang nur größer werden kann, wenn wir Y vergrößern, können wir ohne Einschränkung $Y = X$ annehmen. Die Spalten von $N_{X,Z}$ sind aber nach Definition gerade die $Y_{\beta\gamma}$ mit $(\beta,\gamma) \in Z$, die Eigenvektoren von W sind zu den Eigenwerten $d^*W[\beta,\gamma]^{-1}$. Sie liegen also in der direkten Summe der Eigenräume zu diesen Eigenwerten $\bigoplus_{\vartheta\in\Theta} \operatorname{Eig}(W, d^*\vartheta^{-1})$.

Insbesondere ist daher $\operatorname{Rang} N_{X,Z} \leq \sum_{\vartheta\in\Theta} \dim \operatorname{Eig}(W, d^*\vartheta^{-1})$, was wegen $\dim \operatorname{Eig}(W, d^*\vartheta^{-1}) = m(\vartheta)$ (nach Lemma 2.8) die Behauptung ergibt. Analog für $N'_{Y,Z}$. $\square$

Satz 2.29 ([N96a]) *Sei Θ eine Menge von Einträgen von W, $Y \subset X$, $Z \subset X \times X$ mit $W[Z] \subset \Theta$ und $Z \cap \{(x,x)|x \in X\} = \emptyset$. Dann ist $\operatorname{Rang} N_{Y,Z}, \operatorname{Rang} N'_{Y,Z} \leq m'(\Theta)$. Insbesondere für $|Y| = |Z| > m'(\Theta)$ ist $\det N_{Y,Z} = \det N'_{Y,Z} = 0$.*

Beweis. Falls $1 \notin \Theta$, ist $m(\Theta) = m'(\Theta)$, und die Behauptung schon in Satz 2.28 enthalten. Sei also $1 \in \Theta$: wie im Beweis zu Satz 2.28 können wir annehmen, daß $Y = X$. Wie dort sind wieder die $Y_{\beta\gamma} \in \operatorname{Eig}(W, d^*\vartheta^{-1})$. Für $(\beta,\gamma) \in Z$ ist aber $\beta \neq \gamma$, also nach den Typ II Gleichungen $Y_{\beta\gamma} \in \mathbf{1}^\perp$, denn $\sum_x W[x,\beta]W[x,\gamma]^{-1} = 0$. Zusammen: $Y_{\beta\gamma} \in \bigoplus_{\vartheta\in\Theta} \operatorname{Eig}(W, d^*\vartheta^{-1}) \cap \mathbf{1}^\perp$, also $\operatorname{Rang} N_{X,Z} \leq m(\Theta) - 1$, da $\mathbf{1} \in \operatorname{Eig}(W, d^*)$, wegen $m'(\Theta) = m(\Theta) - 1$ somit die Behauptung. $\square$

Im Abschnitt 6.2 werden wir aus diesen Sätzen weitreichende Folgerungen ziehen, hier sei als Demonstration das folgende Ergebnis aus [N95b] gezeigt:

Satz 2.30 *Sei W symmetrisch und ϑ mit $m(\vartheta) = 1$. Dann ist $\vartheta^4 = 1$.*

Beweis. Wähle beliebige α, β mit $W[\alpha,\beta] = W[\beta,\alpha] = \vartheta$. Ist $\alpha = \beta$, also $\vartheta = 1$, sind wir fertig. Sonst setze $Y = \{\alpha,\beta\}$, $Z = \{(\alpha,\beta),(\beta,\alpha)\}$. Nach Satz 2.28 ist die Determinante von

$$N_{Y,Z} = \begin{bmatrix} \vartheta^{-1} & \vartheta \\ \vartheta & \vartheta^{-1} \end{bmatrix}$$

gleich Null, d.h. $\vartheta^{-2} = \vartheta^2$. $\square$

Korollar 2.31 *Sei $M = (X, W_+, W_-)$ symmetrisches Spinmodell. Dann ist*

$$m(W_+) \leq \begin{cases} \frac{1}{2}(|X| - 1) & \text{\it für } |X| \text{ \it ungerade} \\ 1 + \frac{1}{2}|X| & \text{\it für } |X| \text{ \it gerade} \end{cases}$$

Beweis. Schreiben wir $W_+ = \sum_{i=0}^m t_i A_i$ wie in Bemerkung 2.12 (mit $m = m(W_+)$), so daß die A_i ($i > 0$) also Adjazenzmatrizen (etwa k_i-)regulärer Graphen sind. Ist $|X|$ ungerade, müssen alle k_i gerade sein, insbesondere größer 1, also folgt $|X| = \sum_i k_i \geq 1 + 2m$, und damit die Behauptung im ersten Fall. Ist $|X|$ gerade, und angenommen, es gäbe mehr als vier $i > 0$ mit $k_i = 1$: dann wäre ohne Einschränkung für $0 \leq i \leq 5$ $m(t_i) = 1$ oder $t_i = t_0$ Nach Satz 2.30 gilt aber dann für $1 \leq i \leq 5$, $\tau_i = t_i/t_0$: $\tau_i^4 = 1$, und $\tau_1, \ldots, \tau_5$ sind paarweise verschieden, ein Widerspruch. Also haben wir in diesem Fall $|X| = \sum_i k_i \geq 5 + 2(m-4) = 2m-3$, also $|X| \geq 2m-2$, da $|X|$ gerade. $\square$

Kapitel 3

Spinmodelle mit wenigen Eigenwerten

Nach Satz 2.18 liegt jedes Jonestyp-Spinmodell in der Bose-Mesner-Algebra eines selbstdualen CAS. Bei Spinmodellen mit bis zu vier Eigenwerten können wir diese explizit beschreiben:

Satz 3.1 (vgl. [BJS94]) *Sei $M = (X, W_+, W_-)$ Spinmodell vom Jonestyp, und seien $\mathcal{M}, \mathcal{H}$ die Matrixalgebren aus Korollar 2.21. Ist $m = m(W_+) = m(W_-) \leq 3$, so ist $\mathcal{M} = \mathcal{H}$ die Bose-Mesner-Algebra eines selbstdualen CAS der Klasse m.*

Beweis. Es ist nach Korollar 2.21 nur $\mathcal{M} = \mathcal{H}$ zu zeigen, die Behauptung über die Klasse folgt, da diese gleich $\dim \mathcal{H} - 1$, und offenbar $\dim \mathcal{H} = m + 1$ ist. Nach Korollar 2.21 ist aber $\mathrm{Span}_{\mathbf{C}}\{I, J, W_+, W_-, W_+^\top, W_-^\top\} \subset \mathcal{M} \cap \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$. Dabei ist $\dim \mathcal{H} = m + 1 \leq 4$, und offensichtlich hat der Raum am linken Ende der Kette Dimension $m + 1$, also sind alle Räume der Kette gleich, insbesondere $\mathcal{M} = \mathcal{H}$. $\square$

3.1 Potts-Modelle

Dies ist der Fall $m = 1$, der schon von Jones [Jo89] abgehandelt wurde: die zugehörigen Invarianten konnte er als Auswertung des Jonespolynoms an geeigneten Punkten identifizieren.
Sei $M = (X, W_+, W_-)$ ein Spinmodell vom Jonestyp mit Loopvariable d, und

mit $m = 1$. Nach Satz 3.1 erzeugen $J, W_+, W_+^\top$ eine zweidimensionale selbstduale Bose-Mesner-Algebra, d.h. die triviale Bose-Mesner-Algebra $\mathcal{P}(X)$. Sie ist symmetrisch, also ist auch W_+ symmetrisch. $\mathcal{P}(X)$ ist selbstdual, denn für die Eigenmatrizen gilt

$$P = \begin{bmatrix} 1 & n-1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = Q$$

Schreiben wir $W_+ = t_0 I + t_1(J - I)$, so folgt nach Korollar 2.21

$$t_0 + (n-1)t_1 = dt_0^{-1} \text{ und } t_0 - t_1 = dt_1^{-1}$$

was äquivalent ist zu

$$d = -t_1^2 - t_1^{-2} \text{ und } t_0 = -t_1^{-3}$$

Umgekehrt folgt daraus wiederum nach Korollar 2.21, daß (X, W_+, W_-) symmetrisches Spinmodell ist, da die Bedingungen (1), (1') nach Voraussetzung, die Bedingung (2) trivial erfüllt sind. Die so erhaltenen Spinmodelle heißen in der Literatur *Potts-Modelle*, im Fall $n = 2$ *Ising-Modelle*.
Notieren wir noch, daß für $\tau = t_1/t_0$ gilt:

$$\tau^2 + (n-2)\tau + 1 = 0 \text{ und } t_0^2 = d(1 + (n-1)\tau)^{-1}$$

und diese Gleichungen sind den obigen gleichwertig.

3.2 Der Fall m = 2

Dieser Fall wurde zum ersten Mal (fast) erschöpfend von Jaeger [Jae92] im Zusammenhang mit Spinmodellen für das *Kauffman-Polynom* [Ka90] diskutiert (vgl. auch [H94]). Sei $M = (X, W_+, W_-)$ Spinmodell vom Jonestyp mit Loopvariable d, und mit $m = 2$. Nach Satz 3.1 erzeugen $J, W_+, W_+^\top$ eine dreidimensionale selbstduale Bose-Mesner-Algebra $\mathcal{M}$. Offensichtlich ist eine Basis von $\mathcal{M}$ gegeben durch I, J und irgendeine der Matrizen W_+, $W_+^\top$, W_-, $W_-^\top$. Man sieht folgendermaßen, daß $\mathcal{M}$ (exakt) dreifach regulär ist: Nach Korollar A.46 und Satz A.44 müssen wir zeigen, daß das π-Bild eines Erzeugendensystems von $\mathcal{M}^{\otimes 3}$ in $\operatorname{im} \pi^*$ liegt. Das folgt aber aus den allgemein gültigen Gleichungen

$$\pi(I \otimes B \otimes C) = \pi^*(J \otimes C^\top \otimes B),\ \pi(J \otimes B \otimes C) = \pi^*(B^\top C \otimes J \otimes J)$$

(und zyklischen Permutationen davon) und der Formulierung

$$\pi(W_+^\top \otimes W_+ \otimes W_-) = d\pi^*(W_- \otimes W_-^\top \otimes W_+)$$

der Typ III Gleichungen mittels Stern- und Dreiecksprojektion.

Lemma 3.2 *Das einzige nichtsymmetrische dreifach reguläre CAS der Klasse 2 ist $\mathcal{G}(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$.*

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (A_0, A_1, A_2)$ ein CAS wie im Lemma. Dann ist $A_0 = I$, $A_1 = A_2^\top$, insbesondere hat A_1 die Valenz $(n-1)/2$. Da $A_1A_2 = A_1A_1^\top$ symmetrisch ist, ist $A_1A_2 = kI + \lambda(J-I)$, wobei offensichtlich $k = (n-1)/2$ ist. Multiplizieren mit J ergibt $((n-1)/2)^2 = (n-1)/2 + \lambda(n-1)$, d.h. $n = 4\lambda + 3$ und

$$A_1A_2 = A_2A_1 = (2\lambda+1)I + \lambda(A_1 + A_2)$$

woraus (mit $A_1 + A_2 = J - I$) folgt:

$$A_1^2 = \lambda A_1 + (\lambda+1)A_2, \quad A_2^2 = \lambda A_2 + (\lambda+1)A_1$$

Angenommen $\lambda > 0$. Betrachte eine feste Kante (x, y) des Graphen G mit Adjazenzmatrix A_1, und definiere die Eckenmengen

$$C = \{z|(y,z) \in G, (z,x) \in G\}, \quad D = \{z|(y,z) \in G, (x,z) \in G\}$$

Nach Definition ist $|C| = \lambda+1$ und $|D| = \lambda$, insbesondere sind C und D nicht leer. Nach Voraussetzung der dreifachen Regularität sind damit für $z \in C$ die Größen $|\{z' \in C|(z,z') \in G\}|$ und $|\{z' \in C|(z',z) \in G\}|$ der Nachbarschaften von z im von C induzierten Graphen unabhängig von z (und analog für D), d.h. $G|_C$ und $G|_D$ sind regulär, und zwar, da G ein Turnier ist (d.h. $(n-1)/2$-regulär und ohne Weg der Länge 2), Turniere. Das aber impliziert, daß $|C| = \lambda + 1$ und $|D| = \lambda$ ungerade sind, ein Widerspruch.

Für $\lambda = 0$, $n = 3$ ist offenbar $\mathcal{A} \cong \mathcal{G}(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$. □

Von jetzt an werden wir annehmen, daß M symmetrisch ist, insbesondere $n \geq 4$. Ziehen wir einige Folgerungen aus dem schon Bekannten: Seien $A_0 = I, A, B$ die minimalen Hadamard-Idempotenten, $E_0 = \frac{1}{n}J, E_1, E_2$ die minimalen Matrixprodukt-Idempotenten von $\mathcal{M}$ (schon in einer passenden Reihenfolge für eine Selbstdualität). A ist die Adjazenzmatrix eines Graphen G auf X, B die des Komplements $\bar{G}$, und die Tatsache, daß

$\mathcal{A} = (A_0 = I, A, B = J - I - A)$ ein CAS ist, ist äquivalent dazu, daß G stark regulär ist (vgl. Beispiel A.8 im Anhang), etwa mit Parametern (k, λ, μ), und mit Eigenwerten k, s, r (d.h. $A = kE_0 + sE_1 + rE_2$). Ohne Einschränkung sei G zusammenhängend, also $\mu \neq 0$. Man hat folgende Relationen (siehe Abschnitt A.2):

$$A^2 + (\mu - \lambda)A + (\mu - k)I = \mu J, \;\; r + s = \lambda - \mu, \;\; rs = \mu - k$$

Sehen wir uns die Selbstdualität von $\mathcal{M}$ an: Für

$$P = \begin{bmatrix} 1 & k & n-k-1 \\ 1 & s & -s-1 \\ 1 & r & -r-1 \end{bmatrix}$$

muß $P^2 = nI$ gelten, was äquivalent ist zu

$$k = r^2 + r - rs, \;\; n = (r-s)^2$$

woraus $\mu = r^2 + r, \lambda = r^2 + 2r + s$ folgt, insbesondere wegen $\mu \neq 0$ (sonst ist G nicht zusammenhängend) $r \neq 0, -1$. Außerdem ist wegen $m = 2$: $k \neq 0, n-1$, also $r - s + 1 \neq 0$ (was schon durch $n = (r-s)^2 \geq 4$ garantiert ist) und $r \neq 0$, $s \neq -1$. Die dreifache Regularität von $\mathcal{M}$ impliziert lokal starke Regularität von G und $\bar{G}$ (und ist nach [CGS78] sogar äquivalent dazu): das heißt, für alle $x \in X$ sind die *Residuen* $G(x)$, $\bar{G}(x)$ stark regulär, wobei $G(x) = G|_{N_G(x)}$ der von der Nachbarschaft von x induzierte Teilgraph von G ist, $\bar{G}(x) = \bar{G}|_{N_{\bar{G}}(x)}$. Bestimmen wir $W_+ = t_0 I + t_1 A + t_2 B$: Nach Satz 2.22 haben wir $PT = dT_-$, also mit Selbstdualität $P(T + \epsilon T_-) = \epsilon d(T + \epsilon T_-)$ für $\epsilon \in \{\pm 1\}$. Wegen $n = (r-s)^2$ können wir $d = \epsilon(r-s)$ ($\epsilon \in \{\pm 1\}$) schreiben. Nun hat P wegen $P^2 = nI$ nur die Eigenwerte $\pm \epsilon d$, und zwar wegen Spur $P = s - r = -\epsilon d$ ϵd einfach und $-\epsilon d$ zweifach. Ferner ist leicht zu sehen, daß $\mathbf{1} + \epsilon d^{-1} P \mathbf{1} = (1 + \epsilon d, 1, 1)$ Eigenvektor zum Eigenwert ϵd ist. Also folgt

$$T + \epsilon T_- = ((1 + \epsilon d)(t_1 + \epsilon t_1^{-1}), (t_1 + \epsilon t_1^{-1}), (t_1 + \epsilon t_1^{-1}))$$

und daraus $t_2 = \epsilon t_1^{-1}$ wegen $t_1 \neq t_2$. Im folgenden verwenden wir die Bezeichnungen $t_0 = a$, $t_1 = \epsilon t$. Bisher haben wir nur nur eine der Eigenwertgleichungen von P verwendet, die andere lautet $P(T - \epsilon T_-) = -\epsilon d(T - \epsilon T_-)$. Da $P + \epsilon dI$ Rang 1 hat, erhalten wir nur eine unabhängige Gleichung, nämlich

$$(1 + r - s)(a - \epsilon a^{-1} + (1 + r + s)(\epsilon t - t^{-1})) = 0$$

Mit der vorigen Gleichung

$$a + \epsilon a^{-1} - (1 + r - s)(\epsilon t + t^{-1}) = 0$$

folgen daraus (wegen $1 + r - s \neq 0$)

$$a = -s\epsilon t + (r+1)t^{-1}, \quad a^{-1} = -s\epsilon t^{-1} + (r+1)t$$

Diese beiden Gleichungen sind kompatibel (und liefern dann a als Funktion von t), genau wenn

$$s^2 + (r+1)^2 - \epsilon s(r+1)(t^2 + t^{-2}) = 1, \quad a = -s\epsilon t + (r+1)t^{-1}$$

Die beiden Entartungsfälle, in denen die Gleichung keine Bedingung für t liefert, sind $s = 0$, woraus $(r+1)^2 = 1$, also wegen $r \neq 0$ $r = -2$ folgt, und $r = -1$, was wegen $r \neq -1$ nicht eintritt. Jedenfalls ist $r - s = -2 = \epsilon d$, also $n = 4$, und umgekehrt erhalten wir für $n > 4$ die sogenannte *Kompatibilitätsbedingung* $s(r+1) \neq 0$. Damit erhalten wir insbesondere, daß $G \neq K_{m,\dots,m}$ ist, da letzterer Graph einen Eigenwert 0 hat. Also ist auch $\bar{G}$ zusammenhängend, d.h. $\mathcal{A}$ ist primitiv.

Fassen wir zusammen:

Satz 3.3 ([Jae92], [I93a], [Jae95a]) *Ist $M = (X, W_+, W_-)$ ein Spinmodell vom Jonestyp mit $m = 2$, so sind W_+, W_- enthalten in der Bose-Mesner-Algebra eines selbstdualen, exakt dreifach regulären CAS $\mathcal{A}$. Für $n > 3$ ist $\mathcal{A}$ symmetrisch, für $n > 4$ auch noch primitiv.* □

Es gilt nun auch die Umkehrung:

Satz 3.4 ([Jae92], [I93a]) *Sei $\mathcal{A} = (A_0 = I, A_1, A_2 = J - I - A_1)$ ein selbstduales, exakt dreifach reguläres CAS, $\mathcal{A}$ symmetrisch, falls $n > 3$, und primitiv, falls $n > 4$, mit Eigenwerten k, s, r von A, und $d = \epsilon(r - s)$ ($\epsilon \in \{\pm 1\}$). Dann gibt es $W_+, W_- \in \mathbf{C}\mathcal{A}$, so daß $M = (X, W_+ . W_-)$ Spinmodell vom Jonestyp mit Loopvariable d ist. Genauer ist für $n = 3$ M ein zyklisches Modell (Abschnitt 4.1), für $n = 4$ ist $M \cong \mathrm{Sq}_a^{-\epsilon}$ für beliebiges $a \in \mathbf{C}$, wobei*

$$\mathrm{Sq}_a^\sigma = ([4], W_+, W_-) \ \mathit{mit}\ W_+ = \begin{bmatrix} a & -a & \sigma a^{-1} & \sigma a^{-1} \\ -a & a & \sigma a^{-1} & \sigma a^{-1} \\ \sigma a^{-1} & \sigma a^{-1} & a & -a \\ \sigma a^{-1} & \sigma a^{-1} & -a & a \end{bmatrix}$$

und für $n > 4$ ist $W_+ = aI + \epsilon t A_1 + t^{-1} A_2$ mit

$$s^2 + (r+1)^2 - \epsilon s(r+1)(t^2 + t^{-2}) = 1, \quad a = -s\epsilon t + (r+1)t^{-1}$$

Beweis. Für den Fall $n = 3$ verweisen wir auf Abschnitt 4.1, Bemerkung 4.6.

Sei zunächst $n = 4$: Nach den obigen Betrachtungen (mit denselben Bezeichnungen) muß A_1 die Adjazenzmatrix eines C_4 sein, $r = -2$, $s = 0$, $d = -2\epsilon$, $t \in \mathbf{C}^\times$ beliebig und $a = -t^{-1}$, also $t_1 = -\epsilon a^{-1}$ und $t_2 = -a$. Die dort angestellten Überlegungen zeigen, daß dies äquivalent ist zu den Bedingungen (1), (1') von Satz 2.22 (und damit zu den Typ II Gleichungen). Die Typ III Gleichungen (in ihrer Eigenwertformulierung oder nach Satz 2.22.(2)) prüft man unmittelbar nach.

Wenden wir uns dem Fall $n > 4$ zu: Wiederum zeigen die obigen Betrachtungen, daß die Wahl von a und t wie im Satz angegeben die Typ II Gleichungen sicherstellt. Um das Erfülltsein der Typ III Gleichungen zu zeigen, bedienen wir uns Satz 2.22.(2), d.h. wir müssen

$$E_2 Y_{\beta\gamma} = 0 \text{ für } A_1[\beta,\gamma] = 1$$

$$E_1 Y_{\beta\gamma} = 0 \text{ für } A_2[\beta,\gamma] = 1$$

nachweisen. Aus Symmetriegründen wird es dabei genügen, die erste Gleichung zu betrachten (genauer: Übergang von t zu ϵt^{-1} entspricht Vertauschung von G mit $\bar{G}$, wie von E_1 mit E_2). Wir haben folgende (im Anschluß zu beweisende)

Behauptung 3.5 *Für alle $x \in X$ gilt*

$$G(x) = \bar{K}_k \text{ (d.h. } \lambda = 0\text{) oder } G \text{ hat Eigenwerte } \lambda, r_1 = \frac{\lambda}{r-s+2}, s$$

falls G kein Konferenzgraph ist (in welchem Fall es nur eine Selbstdualität gibt, also die Reihenfolge der Eigenwerte s, r eindeutig ist). Falls G Konferenzgraph ist, so ist G notwendig isomorph C_5 oder $L_2(3) = K_3 \times K_3$. Im ersten Fall erfüllen beide Selbstdualitäten die angegebene Bedingung, da $\lambda = \bar{\lambda} = 0$. Im zweiten muß dafür $s = 1, r = -2$ (folglich $r_1 = -1$) gewählt werden. (Dabei seien $(l, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ die Parameter von $\bar{G}$).

Identifizieren wir Teilmengen von X mit ihren charakteristischen Vektoren in $\mathbf{C}X$, und definieren $G_{ij}(\beta,\gamma) = \{x | A_i[x,\beta] = 1, A_j[x,\gamma] = 1\}$, so ist $Y_{\beta\gamma} = \sum_{i,j} t_i t_j^{-1} G_{ij}(\beta,\gamma)$. Seien β, γ Nachbarn in G, d.h. $A_1[\beta,\gamma] = 1$. Dann folgt

$$G_{00}(\beta,\gamma) = G_{02}(\beta,\gamma) = G_{20}(\beta,\gamma) = \emptyset,\ G_{01}(\beta,\gamma) = \{\beta\},\ G_{10}(\beta,\gamma) = \{\gamma\}$$

und damit

$$Y_{\beta\gamma}=\epsilon a t^{-1}\{\beta\}+\epsilon a^{-1}t\{\gamma\}+G_{11}(\beta,\gamma)+G_{11}(\beta,\gamma)+\epsilon t^2 G_{12}(\beta,\gamma)+\epsilon t^{-2}G_{21}(\beta,\gamma)$$

Die Gleichungen $E_2Y_{\beta\gamma}=0$, $E_2Y_{\gamma\beta}=0$ sind äquivalent zu $E_2(Y_{\beta\gamma}-Y_{\gamma\beta})=0$, $E_2(Y_{\beta\gamma}+Y_{\gamma\beta})=0$, und mit $G_{ij}(\beta,\gamma)=G_{ji}(\gamma,\beta)$ haben wir zunächst

$$Y_{\beta\gamma}-Y_{\gamma\beta}=\epsilon(at^{-1}-a^{-1}t)(\{\beta\}-\{\gamma\})+\epsilon(t^2-t^{-2})\,(G_{12}(\beta,\gamma)-G_{12}(\gamma,\beta))$$

Wegen

$$\begin{aligned} A_1\{\beta\} &= G_{10}(\beta,\gamma)+G_{11}(\beta,\gamma)+G_{12}(\beta,\gamma) \\ A_1\{\gamma\} &= G_{10}(\gamma,\beta)+G_{11}(\gamma,\beta)+G_{12}(\gamma,\beta) \end{aligned}$$

haben wir

$$G_{12}(\beta,\gamma)-G_{12}(\gamma,\beta)=A_1(\{\beta\}-\{\gamma\})+\{\beta\}-\{\gamma\}$$

und damit

$$\begin{aligned} \epsilon(Y_{\beta\gamma}-Y_{\gamma\beta}) &= (t^2-t^{-2})A_1(\{\beta\}-\{\gamma\}) \\ &\qquad +(at^{-1}-a^{-1}t+t^2-t^{-2})(\{\beta\}-\{\gamma\}) \\ &= (t^2-t^{-2})(A_1-rI)(\{\beta\}-\{\gamma\}) \end{aligned}$$

da aus der Definition von t und a folgt:

$$at^{-1}-a^{-1}t=(-r-1)(t^2-t^{-2})$$

Wegen $E_2A_1=rE_2$ haben wir damit $E_2(Y_{\beta\gamma}-Y_{\gamma\beta})=0$ bewiesen.

Ebenso finden wir

$$\begin{aligned} Y_{\beta\gamma}+Y_{\gamma\beta} &= \epsilon(at^{-1}+a^{-1}t)(\{\beta\}+\{\gamma\})+2(G_{11}(\beta,\gamma)+G_{22}(\beta,\gamma)) \\ &\quad +\epsilon(t^2+t^{-2})\,(G_{12}(\beta,\gamma)+G_{12}(\gamma,\beta)) \end{aligned}$$

und wegen

$$\begin{aligned} G_{11}(\beta,\gamma)+G_{22}(\beta,\gamma) &= X-(\{\beta\}+\{\gamma\})-(G_{12}(\beta,\gamma)+G_{12}(\gamma,\beta)) \\ G_{12}(\beta,\gamma) &= A_1\{\beta\}-\{\gamma\}-G_{11}(\beta,\gamma) \\ G_{12}(\gamma,\beta) &= A_1\{\gamma\}-\{\beta\}-G_{11}(\gamma,\beta) \end{aligned}$$

folgt erst

$$\begin{aligned}Y_{\beta\gamma}+Y_{\gamma\beta} &= 2X+\epsilon(at^{-1}+a^{-1}t-t^2-t^{-2})(\{\beta\}+\{\gamma\})\\ &\quad +(\epsilon t^2+\epsilon t^{-2}-2)\,(A_1(\{\beta\}+\{\gamma\})-2G_{11}(\beta,\gamma))\end{aligned}$$

und daraus mit $E_2A_1 = rE_2$, $E_2X = 0$

$$\begin{aligned}E_2(Y_{\beta\gamma}+Y_{\gamma\beta}) &= \big(\epsilon(at^{-1}+a^{-1}t-t^2-t^{-2})+r(\epsilon t^2+\epsilon t^{-2}-2)\big)E_2(\{\beta\}+\{\gamma\})\\ &\quad -2(\epsilon t^2+\epsilon t^{-2}-2)E_2G_{11}(\beta,\gamma)\\ &= \left(\frac{2(r-s)}{s(r+1)}\right)\Big((r^2+2r+s)E_2(\{\beta\}+\{\gamma\})\\ &\qquad -(r-s+2)E_2G_{11}(\beta,\gamma)\Big)\end{aligned}$$

wobei wir die Definition von t und a (nebenbei die Voraussetzung $n > 4$ in der Form $s(r+1) \neq 0$), sowie die Folgerung

$$\epsilon(at^{-1}+a^{-1}t) = \frac{r^2-s^2+2r}{s}$$

benutzt haben. Beachten wir noch $\lambda = r^2+2r+s$ und setzen $r_1 = \lambda/(r-s+2)$, so ist $E_2(Y_{\beta\gamma}+Y_{\gamma\beta}) = 0$ äquivalent zu

$$E_2G_{11}(\beta,\gamma) = r_1E_2(\{\beta\}+\{\gamma\})$$

Für $\lambda = 0$ ist diese Gleichung trivial erfüllt, da dann $r_1 = 0$ und G dreiecksfrei, also $G_{11}(\beta,\gamma) = \emptyset$ ist. Sei nun $\lambda > 0$. Die obige Behauptung sagt uns, daß für $\beta \in X$ das Residuum $G(\beta)$ stark regulär mit Eigenwerten λ, r_1, s ist (und zwar nicht trivial wegen $\lambda > 0$ und nicht vollständig wegen $\mu = r^2 + r > 0$). Da γ Nachbar von β ist, können wir also $G_{11}(\beta,\gamma) - r_1\{\gamma\} = mV_0 + V_1 + V_2$ schreiben, wo $V_0 = N(\beta)$, V_1 Eigenvektor (der Adjazenzmatrix B) von $G(\beta)$ zum Eigenwert r_1, V_2 Eigenvektor vom Eigenwert s ist (wobei wir diese Vektoren und Matrizen über $\mathbf{C}X$ ansehen, indem wir sie durch 0 fortsetzen, wenn Indizes außerhalb $N(\beta)$ vorkommen). Dabei erhalten wir m durch Skalarprodukt mit V_0 als $m = (\lambda - r_1)/k$. Nun ist $V_1 = 0$, da $G_{11}(\beta,\gamma) - r_1\{\gamma\}$ eine Spalte von $B - r_1I$ ist, also orthogonal zum Eigenraum zum Eigenwert r_1. Da wir $A_1V_2 = sV_2 + V'$ mit einem Vektor V' schreiben können, der auf $N(\beta)$ Null ist, bekommen wir durch Skalarprodukt

$$\langle sV_2, sV_2\rangle + \langle V', V'\rangle = \langle A_1V_2, A_1V_2\rangle = \langle A_1^2V_2, V_2\rangle$$

Nun haben wir aber $A_1^2 = -rsI + (r+s)A_1 + \mu J$, also durch leichte Rechnung $A_1^2 V_2 = s^2 V_2 + (r+s)V'$, was zu $V' = 0$ führt: $A_1 V_2 = sV_2$. Multiplizieren mit E_2 liefert nun $rE_2V_2 = sE_2V_2$, das heißt (wegen $r - s = \epsilon d \neq 0$) $E_2V_2 = 0$. Damit schließlich

$$\begin{aligned}
E_2(G_{11}(\beta,\gamma) - r_1\{\gamma\}) &= mE_2V_0 \\
&= mrE_2\{\beta\} \text{ wegen } V_0 = A_1\{\beta\} \\
&= r_1E_2\{\beta\}
\end{aligned}$$

(letzteres wegen $mr = k^{-1}(\lambda - r_1)r = r_1$, was mit $k = r^2 + r - rs$ folgt). □

Beweis von Behauptung 3.5. Wir behandeln zuerst den Fall $k = n - 1 - k$: dann ist $(r-s)^2 = n = 2k + 1 = 2(r^2 + r - rs) + 1$, also $s^2 = (r+1)^2$. Da $s \neq r + 1$ (sonst wäre $n = 1$), folgt $s = -1 - r$, d.h. G ist ein Konferenzgraph mit Parametern $n = 4\mu + 1$, $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$ und $\mu \geq 1$. Für $\mu = 1$ sind $G, \bar{G} \cong C_5$, insbesondere $\lambda = \bar{\lambda} = 0$, also haben wir die Behauptung. Für $\mu > 1$ ist ein beliebiges Residuum $G(x)$ stark regulär mit Parametern $(\mu - 1, p, q)$: seine Adjazenzmatrix erfüllt $B^2 = (\mu-1)I + pB + q(J - I - B)$. Multiplizieren mit J liefert mit $JB = BJ = (\mu - 1)J$:

$$(\mu-1)^2 = (\mu - 1) + p(\mu - 1) + q\,(2\mu - 1 - (\mu - 1))$$

d.h. $(\mu-1)(\mu-2-p) = \mu q$. Wäre $q > 0$, erhielten wir wegen $(\mu-1)|q$ und $\mu - 2 - p < \mu$ einen Widerspruch. Also notwendig $q = 0$, $p = \mu - 2$, weshalb $G(x)$ Vereinigung zweier K_μ ist. Bezeichne mit C die Vereinigung von x mit einer dieser Cliquen. Da C eine Clique induziert und wegen $|C| = \mu + 1 = \lambda + 2$ hat kein $y \in X \backslash C$ mehr als einen Nachbarn in C. Umgekehrt hat jedes $y \in C$ genau $\mu = k - \mu$ Nachbarn in $X \backslash C$. Also $3\mu = |X \backslash C| \geq \mu|C| = \mu(\mu + 1)$, d.h. $\mu = 2$. Es gibt einen eindeutigen Graphen mit diesen Parametern, nämlich $L_2(3)$: er hat Eigenwerte $\{s, r\} = \{1, -2\}$ und ist isomorph seinem Komplement. Da jedes Residuum isomorph $2K_2$ ist, also Eigenwerte $1, 1, -1$ hat, müssen $s = 1$, $r = -2$ gewählt werden, um $r_1 \in \{1, -1\}$ zu erhalten.

Sei nun $k \neq n - 1 - k$ (insbesondere ist G kein Konferenzgraph): wir nehmen ferner ohne Einschränkung $k > n - 1 - k$ an, da wir die Behauptung nicht nur für G sondern auch für $\bar{G}$ zeigen. Sei $x \in X$, und bezeichne π die natürliche Projektion von $\mathbf{C}X$ auf $\mathbf{C}\,(X \backslash (N(x) \cup \{x\}))$ durch Weglassen. Wegen der Selbstdualität haben wir $nE_1 = kA_0 + sA_1 + rA_2$, also $\operatorname{Rang} E_1 = \operatorname{Spur} E_1 = k$, d.h. $\operatorname{im} E_1$ ist k-dimensional. Also gibt es einen nichttrivialen Vektor $V + \rho\{x\} \in \operatorname{im} E_1 \cap \ker \pi$, wobei V nur auf $N(x)$ ungleich Null sei.

Insbesondere haben wir $J(V+\rho\{x\})=0$, $A_1(V+\rho\{x\})=s(V+\rho\{x\})$. Vergleich der Koeffizienten von $\{x\}$ in der ersten Gleichung liefert $\langle \mathbf{1},V\rangle=-\rho$, in der zweiten Gleichung ebenso $\langle \mathbf{1},V\rangle=s\rho$. Da (siehe oben) $s\neq -1$, folgt $\rho=0$, und wir erhalten, daß V ein Eigenvektor (der Adjazenzmatrix) von $G(x)$ ist. Da (siehe oben) $s\neq 0$, ist $G(x)$ nicht trivial, und nicht vollständig, da sonst G eine Vereinigung disjunkter Cliquen wäre, was wir durch die Voraussetzung ausgeschlossen haben. Also können wir, um neben λ und s den dritten Eigenwert r_1 von $G(x)$ zu bestimmen, eine Formel aus Abschnitt A.2 anwenden:

$$k(\lambda+sr_1)=(\lambda-r_1)(\lambda-s),\text{ d.h. } (\lambda+s(k-1))\,r_1=\lambda(\lambda-s-k)$$

Aus $k=r^2+r-rs$ und $\lambda=r^2+2r+s$ erhalten wir aber $\lambda+s(k-1)=r(s+1)(r-s+2)$ und $\lambda-s-k=r(s+1)$. Wegen $r(s+1)\neq 0$ (siehe oben) folgt $r_1=\lambda/(r-s+2)$.
Wenden wir uns nun $\bar{G}$ zu, dessen Parameter $(l,\bar{\lambda},\bar{\mu})$ wir Beispiel A.8 entnehmen: $l=n-1-k$, $\bar{\lambda}=n-2-2k+\mu$, $\bar{\mu}=n-2k+\lambda$, sowie Eigenwerten $s'=-1-r, r'=-1-s$ (dies entspricht Vertauschung von A_1,A_2, und von E_1,E_2, um die Selbstdualität zu erhalten!). Insbesondere ist $l={r'}^2+r'-r's'$, $\bar{\lambda}={r'}^2+2r'+s'$. Sei V ein Eigenvektor von $G(x)$ zum Eigenwert r_1, der nur auf $N_G(x)$ ungleich Null ist, und schreiben wir $A_1V=r_1V+V'$, wo V' auf $N_G(x)$ Null ist. Wegen $JV=0$ ist die $\{x\}$-Komponente von V Null, also ist V' nur auf $N_{\bar{G}}(x)$ ungleich Null. Wir können $\bar{\lambda}>0$ annehmen, weil wir sonst schon fertig sind, insbesondere ist $\bar{G}(x)$ nicht trivial. Ferner ist $\bar{G}(x)$ nicht vollständig, weil sonst $\bar{G}$ eine Vereinigung von Cliquen wäre, entgegen der Voraussetzung. Nun ist wegen $A_1^2=(r+s)A_1-rsI+\mu J$ (siehe Abschnitt A.2) und $JV=0$

$$\begin{aligned}A_1^2V=(r+s)A_1V-rsV&=(r+s)(r_1V+V')-rsV\\&=(r_1(r+s)-rs)\,V+(r+s)V'\end{aligned}$$

und folglich

$$A_1V'=A_1^2V-r_1A_1V=\big(r_1(r+s)-rs-r_1^2\big)\,V+(r+s-r_1)V'$$

Mit $A_2=J-I-A_1$ und $JV'=JA_1V-r_1JV=0$ also

$$\begin{aligned}A_2V'&=JV'-V'-A_1V'\\&=-V'-\big(r_1(r+s)-rs-r_1^2\big)\,V-(r+s-r_1)V'\\&=-\big(r_1(r+s)-rs-r_1^2\big)\,V-(1+r+s-r_1)V'\end{aligned}$$

Weiter haben wir

$$\langle V', V' \rangle = \langle A_1 V, V' \rangle = \langle V, A_1 V' \rangle = \left(r_1(r+s) - rs - r_1^2 \right) \langle V, V \rangle$$

Dabei ist $(r_1(r+s) - rs - r_1^2) = -(r_1 - s)(r_1 - r) \neq 0$, da die Eigenwerte r_1, s des stark regulären Graphen $G(x)$ verschieden sind, und $r_1 = r\ r^2 + 2r + s = \lambda = r_1(r+s-2) = r(r+s-2)$, also $s(r+1) = 0$ implizieren würde, was wir in der Voraussetzung (siehe oben) ausgeschlossen hatten. Daher ist $V' \neq 0$ und V' ein Eigenvektor von $\bar{G}(x)$ zum Eigenwert $r_1 - r - s - 1$. Definiert man $r_1' = \bar{\lambda}/(r' - s' + 2)$, so rechnet man mit den Definitionen leicht nach, daß $r - 1 - r - s - 1 = r_1'$. Um schließlich den dritten Eigenwert ρ von $\bar{G}(x)$ neben $\bar{\lambda}, r_1$ zu finden, gehen wir wie vorher vor:

$$l(\bar{\lambda} + r_1' \rho) = (\bar{\lambda} - r_1')(\bar{\lambda} - \rho)$$

also

$$\rho \left(\bar{\lambda} + (l-1) r_1' \right) = \bar{\lambda}(\bar{\lambda} - r_1' - l)$$

Man rechnet leicht nach, daß $\rho = s' = -1 - r$ eine Lösung ist, und daß es die einzige ist, folgt aus $\left(\bar{\lambda} + (l-1) r_1' \right) \neq 0$: andernfalls (da $\bar{\lambda} > 0$) $r' - s' + 2 + l - 1 = 0$, oder äquivalent

$$(r' + 1)^2 = s'(r' + 1), \text{ d.h. } s^2 = s(r+1)$$

Wegen $s(r+1) \neq 0$ und $s \neq r + 1$ kann dies nicht eintreten. □

Bemerkung 3.6 *Die Bestimmung aller selbstdualen stark regulären, lokal stark regulären Graphen ist ein bei weitem nicht gelöstes kombinatorisches Problem: vgl. [CGS78], [Jae92], [AS95], [Aig95], [Jae95b]. Die bekannten Klassen sind (mit Überschneidungen):*

1. *C_4 (mit den Modellen Sq_a^ϵ).*

2. *Konferenzgraphen C_5 (mit zyklischen Modellen: siehe Abschnitt 4.1) und $L_2(3)$ (siehe (4)).*

3. *Smith-Graphen mit Parametern $n = r^2(r+3)^2$, $k = r^3 + 3r^2 + r$, $\lambda = 0$, $\mu = r^2 + r$: es sind nur zwei bekannt, nämlich das Komplement des Clebsch-Graphen (fällt in (5)) und der Higman-Sims-Graph (um den sich die Arbeit [Jae92] dreht; siehe auch [H94]).*

4. *Gittergraphen $L_2(q)$ (mit Produkten von Potts-Modellen: siehe 6.1).*

5. *Sogenannte „Latin-Square-Graphen": die einzigen bekannten Beispiele erfüllen $r+s+1=\pm 1$ und kommen von regulären Hadamardmatrizen*[1] *(in diesem Fall ist $W_+ = W_-$ selbst eine reguläre Hadamardmatrix), und es wird vermutet, daß es keine anderen gibt (vgl. [CGS78], [AS95]).*

3.3 Der Fall m = 3

Daß Korollar 2.21 hier anwendbar ist, wurde zuerst in [BJS94] bemerkt. Leider ist die Situation hier schon viel weniger schön als im Fall $m = 2$. Zum ersten kann nicht mehr allgemein die dreifache Regularität gelten, wie das folgende Beispiel zeigt (es ist ein Spezialfall der Konstruktion aus Abschnitt 4.2): es gibt ein Spinmodell in $\mathbf{C}H(3,3)$, wo $H(3,3) = (R_0, R_1, R_2, R_3)$ das 3-Hammingschema der Dimension 3 ist (siehe Beispiel A.12), nämlich $W_+ = t_0\left(\sum_{i=0}^{3} \zeta^i A_i\right)$, wobei ζ eine primitive dritte Einheitswurzel ist, und $t_0^3 = (1+2\zeta)^{-3}$. Aber $H(3,3)$ ist nicht dreifach regulär: betrachte zwei R_2-benachbarte Punkte α, β in der R_2-Nachbarschaft von $\gamma = 111$. Für $\alpha = 122, \beta = 212$ gibt es einen gemeinsamen R_1-Nachbarn von α, β, γ (nämlich $x = 112$), für $\alpha = 122, \beta = 133$ jedoch nicht.[2]

Sei $M = (X, W_+, W_-)$ Spinmodell in der vierdimensionalen Bose-Mesner-Algebra $\mathbf{C}\mathcal{A}$ eines selbstdualen CAS $\mathcal{A}$. Dessen Eigenmatrizen seien

$$P = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} = \overline{Q}$$

wobei $c = n-1-a-b$ und $\gamma_i = -1-\alpha_i-\beta_i$ (vgl. Bemerkung A.19). Die Selbstdualität (d.h. $P^2 = nR$) verlangt: die Matrix

$$\begin{bmatrix} a + a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 & b + a\beta_1 + b\beta_2 + c\beta_3 & c + a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3 \\ a + \alpha_1^2 + \beta_1\alpha_2 + \gamma_1\alpha_3 & b + \alpha_1\beta_1 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\beta_3 & c + \alpha_1\gamma_1 + \beta_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 \\ a + \alpha_2\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \gamma_2\alpha_3 & b + \alpha_2\beta_1 + \beta_2^2 + \gamma_2\beta_3 & c + \alpha_2\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3 \\ a + \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 & b + \alpha_3\beta_1 + \beta_3\beta_2 + \gamma_3\beta_3 & c + \alpha_3\gamma_1 + \beta_3\gamma_2 + \gamma_3^2 \end{bmatrix}$$

---

[1] eine Hadamardmatrix H (siehe Beispiel A.13) heißt *regulär*, wenn sie symmetrisch ist, konstante Hauptdiagonale hat und alle ihre Zeilen- und Spaltensummen gleich sind.

[2] Genau besehen ist dies ein schlechtes Beispiel, da die $H(d,q)$ Fusionsschemata der $\mathcal{P}(q)^d$ sind, und die sind dreifach regulär (siehe Bemerkung A.47).

ist gleich der Matrix nR ohne deren erste Spalte (die Gleichungen der ersten Spalte sind bereits erfüllt). Die Gleichungen der letzten Spalte sind von den anderen abhängig. Auf den ersten Blick scheint es weiter keine Vereinfachung des Gleichungssystems zu geben.

Symmetrische Modelle

Nach Satz 2.22 haben wir $PT = dT_-$ und daher mit Selbstdualität ($P^2 = nI$) $PT_- = dT$, also sind $T + \epsilon T_-$ ($\epsilon \in \{\pm 1\}$) Eigenvektoren von P zum Eigenwert ϵd. Offenbar sind $\mathbf{1} + \epsilon d^{-1} P\mathbf{1}$ Eigenvektoren von P zum Eigenwert ϵd. Angenommen, ϵd hätte Vielfachheit 1: dann folgte $T + \epsilon T = (t_1 + \epsilon t_1)[1 + \epsilon d, 1, 1, 1]^\top$, also wären zwei der t_1, t_2, t_3 gleich, ein Widerspruch. Also haben d und $-d$ jeweils Vielfachheit 2, insbesondere ist Spur $P = 1 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = 0$.

Da nicht klar ist, wie man allgemein Informationen über P gewinnen kann, scheint es vielversprechend, den Spezialfall, daß $\mathcal{A}$ imprimitiv ist zu betrachten, wofür es zwei Möglichkeiten gibt:

(1) (ohne Einschränkung) R_1 ist eine Vereinigung von Cliquen,

(2) (ohne Einschränkung) $R_2 \cup R_3$ ist eine Vereinigung von Cliquen.

Wir kennen also die Struktur des Fusionschemas $(A_0, A_1, A_2 + A_3)$: es ist isomorph $l \cdot \mathcal{P}(m) \cong \mathcal{P}(l)[m]$. Es gibt nun jeweils drei Unterfälle (1_{jk}) bzw. (2_{jk}), je nachdem, welche Eigenraumprojektoren E_j, E_k fusioniert werden $(1 \leq j < k \leq 3)$, wobei man sich ohne Einschränkung auf $jk = 12$ und $jk = 23$ zurückziehen kann. Im Fall $jk = 23$ erbt das Fusionsschema die Selbstdualität von $\mathcal{A}$, insbesondere ist $l = m$ und die Eigenmatrix P' des Fusionsschemas festgelegt. Für $jk = 12$ dagegen müssen wir zwei Varianten a,b für die Eigenmatrix berücksichtigen. Dabei zeigt sich, daß die Selbstdualitätsbedingung folgende Gestalt von P impliziert:

Fall $\mathbf{1_{12}a}$ (isomorph $\mathbf{2_{12}b}$): mit $n = lm$ ist

$$P = \begin{bmatrix} 1 & m-1 & l-1 & (l-1)(m-1) \\ 1 & -1 & l-1 & -(l-1) \\ 1 & m-1 & -1 & -(m-1) \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

und man überlegt sich leicht, daß $\mathcal{A} \cong \mathcal{P}(l) \times \mathcal{P}(m)$ ist.

Fall $\mathbf{1_{12}b}$ (isomorph $\mathbf{2_{12}a}$): mit $lm = n$ ist

$$P = \begin{bmatrix} 1 & m-1 & l-m & l(m-1) \\ 1 & m-1 & l-m & l(m-1) \\ 1 & m-1 & -m & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und man macht sich leicht klar, daß es eine ganze Zahl μ gibt mit $l = m\mu$ und $\mathcal{A} = m \cdot (\mu \cdot \mathcal{P}(m))$.
Fall $\mathbf{1_{23}}$: mit $\beta_1, \beta_2 \in \mathbf{R}$ ist

$$P = \begin{bmatrix} 1 & m-1 & m^2 + m\beta_2 + \beta_1 & -m - m\beta_2 - \beta_1 \\ 1 & m-1 & \beta_1 & -m - \beta_1 \\ 1 & -1 & \beta_2 & -\beta_2 \\ 1 & -1 & m + \beta_2 & -m - \beta_2 \end{bmatrix}$$

Nun gilt aber offenbar $A_1A_2 = (m-1)A_2$, $A_1A_3 = (m-1)A_3$, und A_2 (analog A_3) ist (mit etwas Mißbrauch der Definition A.27) m-fache Verdickung eines Graphen G auf $[m]$, d.h. für dessen Adjazenzmatrix B gilt $A_2 = B \otimes J$ und $A_3 = (J - I - B) \otimes J$. Somit

$$A_2^2 = mB^2 \otimes J = p_{22}^0 I \otimes I + p_{22}^1 I \otimes (J - I) + p_{22}^2 B \otimes J + p_{22}^3 (J - I - B) \otimes J$$

und Hadamardmultiplikation mit $I \otimes J$ zeigt $p_{22}^0 = p_{22}^1$, also ist B stark regulär:

$$mB^2 = p_{22}^0 I + p_{22}^2 B + p_{22}^3 (J - I - B)$$

und habe die Eigenwerte k, r, s. Also $\mathcal{A} \cong \mathcal{S}(G)[m]$, und folglich ist P eine Zeilen-/Spalten-Permutation von

$$P_{\mathcal{S}(G)[m]} = \begin{bmatrix} 1 & mk & m(m-1-k) & m-1 \\ 1 & ms & m(-1-s) & m-1 \\ 1 & mr & m(-1-r) & m-1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(siehe Definition A.27 und Korollar A.36), im offensichtlichen Widerspruch zur eingangs gegebenen Gestalt von P.
Fall $\mathbf{2_{23}}$: mit $\beta_1, \beta_2 \in \mathbf{R}$ ist

$$P = \begin{bmatrix} 1 & (m-1)m & m + m\beta_1 + \beta_2 & -1 - \beta_2 - m\beta_1 \\ 1 & 0 & \beta_1 & -1 - \beta_1 \\ 1 & -m & \beta_2 & m - 1 - \beta_2 \\ 1 & -m & m + \beta_2 & -1 - \beta_2 \end{bmatrix}$$

Offenbar gilt aber $A_1A_2 = bA_1$, $A_1A_3 = cA_1$. Ferner ist die von A_2, A_3 erzeugte Matrixalgebra in $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(I, A_2, A_3)$ enthalten, d.h. die Einschränkung von A_2 auf irgendeine der maximalen Cliquen von $R_2 \cup R_3$ ist stark regulär, und zwar mit Parametern, die unabhängig von der Wahl der Clique sind, und Eigenwerten etwa k, r, s. Damit ist P eine Zeilen-/Spalten-Permutation von

$$P_{m\cdot\mathcal{S}(R_2)} = \begin{bmatrix} 1 & k & m-1-k & (m-1)m \\ 1 & s & -1-s & 0 \\ 1 & r & -1-r & 0 \\ 1 & k & k & -m \end{bmatrix}$$

(siehe Definition A.28 und Korollar A.36), im offensichtlichen Widerspruch zur eingangs gegebenen Gestalt von P.

Im Fall $1_{12}a$ kennen wir Spinmodelle, nämlich Tensorprodukte (siehe Abschnitt 6.1) von Potts-Modellen (wobei aber zunächst nicht klar ist, daß diese alle Möglichkeiten ausschöpfen: siehe dazu Korollar 6.7).

Erledigen wir noch den Fall $1_{12}b$: wir haben $X = [m] \times [\mu] \times [m]$ und

$$(ijk, rst) \in \begin{cases} R_3, & \text{falls } k \neq t \\ R_2, & \text{falls } k = t, j \neq s \\ R_1, & \text{falls } k = t, j = s, i \neq r \end{cases}$$

sowie

$$P = \begin{bmatrix} 1 & m-1 & (\mu-1)m & (m-1)m\mu \\ 1 & m-1 & (\mu-1)m & -m\mu \\ 1 & m-1 & -m & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q$$

Insbesondere zeigt die letzte Gleichung $t_0 \neq t_1$. Nach Satz 2.22 implizieren die Typ III Gleichungen, daß $(E_2 + E_3)Y_{\beta\gamma} = 0$ für $(\beta, \gamma) \in R_1$. Nun lesen wir an Q ab, daß $n(E_2 + E_3) = nA_0 - m(A_0 + A_1 + A_2)$, so daß die letztere Bedingung zu $(A_0 + A_1 + A_2)Y_{\beta\gamma} = m\mu Y_{\beta\gamma}$ wird. Ohne Einschränkung ist $\beta = 111$, $\gamma = 211$, also, mit $x = rst$

$$Y_{\beta\gamma}[x] = \begin{cases} 1 & \text{für } rst \notin \{111, 211\} \\ t_0 t_1^{-1} & \text{für } rst = 111 \\ t_0^{-1} t_1 & \text{für } rst = 211 \end{cases}$$

Jedoch mit $\alpha = ijk$ gilt

$$((A_0 + A_1 + A_2)Y_{\beta\gamma})[\alpha] = \sum_{x=rst, t=k} Y_{\beta\gamma}[x]$$
$$= \begin{cases} m\mu & \text{für } k \neq 1 \\ m(\mu-1) + m - 2 + t_0 t_1^{-1} + t_0^{-1} t_1 & \text{für } k = 1 \end{cases}$$

was nur für $t_0 = t_1$ möglich ist: Widerspruch.
In allen anderen Fällen scheint schon die Lösung der Typ II Gleichungen ein großes Problem zu sein. Allenfalls könnte man noch hoffen, mit Methoden wie den in Kapitel 5 dargestellten den Fall zu meistern, daß $\mathcal{A}$ das CAS eines abstandsregulären Graphen ist. Oder aber einen starken Struktursatz für primitive CAS der Klasse 3, die nicht von einem abstandsregulären Graphen kommen, aufzufinden und auszunutzen.
Wir schließen mit einer Aufzählung der bekannten symmetrischen Spinmodelle mit $m = 3$:

- Tensorprodukte (siehe Abschnitt 6.1) von Potts-Modellen M_j, $W_+^{(j)} = a_j I_{n_j} + b_j(J_{n_j} - I_{n_j})$ $(j = 1, 2)$, $b_j^2 + b_j^{-2} = -d_j$, $a_j = -b_j^{-3}$, wenn nicht $a_0 b_1 = a_1 b_0$. Das kommt genau für $b_0^4 = b_1^4$ vor, d.h. für $d_0 b_0^2 = d_1 b_1^2$.

- Zyklische Modelle der Dimensionen $n = 6, 7$ (siehe Abschnitt 4.1).

- Modelle aus dem Hammingschema $H(d, 3)$ (siehe Abschnitt 4.2) für $d \geq 3$.

Unsymmetrische Modelle

Bemerkung 3.7 *In der (mir inhaltlich unbekannten) Arbeit [I93b] von Ikuta erscheinen vermutlich die im folgenden dargestellten Ergebnisse.*

Hier können wir die Eigenmatrix allgemein näher bestimmen: ohne Einschränkung ist $A_3 = A_2^\top$, und A_1 symmetrisch, die Symmetrisierung ist also $\mathrm{Sym}(\mathcal{A}) = (A_0, A_1, A_2 + A_3)$. Nach Korollar A.35 ist sie selbstdual (mit den Eigenraumprojektoren $E_0, E_1, E_2 + E_3$), und sie habe die Eigenmatrizen

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & k & l \\ 1 & s & -1-s \\ 1 & r & -1-r \end{bmatrix} = Q'$$

mit $k+l=n-1$, $n=(s-r)^2$ (d.h. $r-s=\epsilon d$) und $k=r^2+r-rs$. Dann hat $\mathcal{A}$ die Eigenmatrix

$$P=\begin{bmatrix} 1 & k & \lambda & \lambda \\ 1 & s & \alpha & \bar{\alpha} \\ 1 & r & \beta & \bar{\beta} \\ 1 & r & \gamma & \bar{\gamma} \end{bmatrix}=\bar{Q}, \text{ mit } P^2=n\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

wobei $2\lambda=l$, $\alpha+\bar{\alpha}=-1-s$, $\beta+\bar{\beta}=\gamma+\bar{\gamma}=-1-r$. Wegen $E_3A_2=\gamma E_3$, $E_2A_3=\bar{\beta}E_2$ hat man $\bar{\beta}E_2=E_2A_3=E_3^\top A_2^\top=\gamma E_3^\top=\gamma E_2$, also $\gamma=\bar{\beta}$. Durch Subtraktion des $(0,2)$– und des $(0,3)$–Eintrags von P^2 erhält man $k(\alpha-\bar{\alpha})=0$, also ist $\alpha=\bar{\alpha}=(-1-s)/2$. Subtraktion des $(2,3)$– vom $(2,2)$–Eintrag von P^2 liefert $(\beta-\bar{\beta})^2=-n$, also $\beta-\bar{\beta}=i\epsilon' d$, womit auch β festliegt: $\beta=(-1-r+i\epsilon' d)/2$. Dadurch aber ist die Selbstdualität, wie man sich leicht überzeugt, sichergestellt.
Damit kann man an die Berechnung von $W_+=\sum_{i=0}^3 t_iA_i$ gehen: da P^2 die Eigenwerte n (dreifach) und $-n$ (einfach) hat, hat P die Eigenwerte $\pm d$ (insgesamt dreifach) und $\pm id$. Wegen $\operatorname{Spur} P=-\epsilon d+i\epsilon' d$ ist genauer ϵd einfacher, $-\epsilon d$ zweifacher, und $i\epsilon' d$ einfacher Eigenwert von P.
Die Typ II Gleichungen $PT=dT_-$ sind gleichbedeutend mit

$$\forall\omega \text{ mit } \omega^4=1 \;\; PU_\omega=\omega dU_\omega$$

wobei $U_\omega=T+\omega^{-1}T_-+\omega^{-2}T'+\omega^{-3}T'_-$: denn $PT_-=dT'$, $PT'=dT'_-$ und $PT'_-=dT$. Das heißt, U_ω ist Eigenvektor von P zum Eigenwert ωd. Für $\omega=i\epsilon'$ wird der Eigenraum von $[0,0,-1,1]^\top$ aufgespannt, und die Bedingung ist trivial erfüllt. Für $\omega=-i\epsilon'$ ist der Eigenraum Null, also $U_{-i\epsilon'}=0$, was zu der einen Gleichung

$$t_2-t_3+i\epsilon'(t_2^{-1}-t_3^{-1})=0$$

reduziert, also (da $t_2\neq t_3$) $t_2t_3=i\epsilon'$.
Für $\omega=\epsilon$ ist der Eigenraum eindimensional und wird von $[1+\epsilon d,1,1,1]^\top$ aufgespannt, also

$$U_\epsilon=\begin{bmatrix} 2(t_0+\epsilon t_0^{-1}) \\ 2(t_1+\epsilon t_1^{-1}) \\ (t_2+t_3)+\epsilon(t_2^{-1}+t_3^{-1}) \\ (t_3+t_2)+\epsilon(t_3^{-1}+t_2^{-1}) \end{bmatrix}\in \mathbf{C}\begin{bmatrix} 1+\epsilon d \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

was (mit $t_2 t_3 = i\epsilon'$) zu

$$\begin{aligned} t_0 + \epsilon t_0^{-1} &= (1+\epsilon d)(t_1 + \epsilon t_1^{-1}) \\ t_2 + t_3 &= (1 + i\epsilon\epsilon')(t_1 + \epsilon t_1^{-1}) \end{aligned}$$

reduziert. Damit kann man t_2, t_3 als Lösungen einer quadratischen Gleichung bis auf Vertauschung bestimmen (beide Varianten liefern Lösungen der Typ II Gleichungen, da diese invariant unter Transponieren sind).
Es bleibt die Eigenwertgleichung für $\omega = -\epsilon$: wie man sieht, sind die beiden letzten Komponenten von

$$U_{-\epsilon} = \begin{bmatrix} 2(t_0 - \epsilon t_0^{-1}) \\ 2(t_1 - \epsilon t_1^{-1}) \\ t_2 + t_3 - \epsilon(t_2^{-1} + t_3^{-1}) \\ t_2 + t_3 - \epsilon(t_2^{-1} + t_3^{-1}) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} t_0 - \epsilon t_0^{-1} \\ t_1 - \epsilon t_1^{-1} \\ i\epsilon\epsilon'(t_1 + \epsilon t_1^{-1}) \\ i\epsilon\epsilon'(t_1 + \epsilon t_1^{-1}) \end{bmatrix}$$

gleich, und auch die beiden letzten Gleichungen in $PU_{-\epsilon} = -\epsilon d U_{-\epsilon}$ identisch. Somit ist diese Eigenwertgleichung äquivalent zu

$$\begin{bmatrix} 1 & k & l \\ 1 & s & -1-s \\ 1 & r & -1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_0 - \epsilon t_0^{-1} \\ t_1 - \epsilon t_1^{-1} \\ i\epsilon\epsilon'(t_1 + \epsilon t_1^{-1}) \end{bmatrix} = -\epsilon d \begin{bmatrix} t_0 - \epsilon t_0^{-1} \\ t_1 - \epsilon t_1^{-1} \\ i\epsilon\epsilon'(t_1 + \epsilon t_1^{-1}) \end{bmatrix}$$

Da aber die links stehende Eigenmatrix P' von $\mathrm{Sym}(\mathcal{A})$ den zweifachen Eigenwert $-\epsilon d$ hat, der Rang von $P' + \epsilon d I$ also 1 ist, verbleiben wir mit der Gleichung

$$t_0 - \epsilon t_0^{-1} + r(t_1 - \epsilon t_1^{-1}) + (-1-s) i\epsilon\epsilon'(t_1 + \epsilon t_1^{-1}) = 0$$

Zusammen mit $t_0 + \epsilon t_0^{-1} = (1+\epsilon d)(t_1 + \epsilon t_1^{-1})$ ergibt dies

$$\begin{aligned} 2t_0 &= t_1 \left(1 + \epsilon d - r + i\epsilon\epsilon'(1+s)\right) + \epsilon t_1^{-1} \left(1 + \epsilon d + r + i\epsilon\epsilon'(1+s)\right) \\ 2\epsilon t_0^{-1} &= t_1 \left(1 + \epsilon d + r - i\epsilon\epsilon'(1+s)\right) + \epsilon t_1^{-1} \left(1 + \epsilon d - r - i\epsilon\epsilon'(1+s)\right) \end{aligned}$$

Mit $\epsilon d = r - s$ kann man die Ausdrücke rechts noch etwas vereinfachen, und erhält die einzig verbleibende Kompatibilitätsbedingung

$$\begin{aligned} 4\epsilon = \epsilon &\left((1-s)^2 + (1+s)^2 + (1+2r-s)^2 + (1+s)^2\right) \\ &+ t_1^2 \left((1+r-s)^2 - (r - i\epsilon\epsilon'(1+s))^2\right) \\ &+ t_1^{-2} \left((1+r-s)^2 - (r + i\epsilon\epsilon'(1+s))^2\right) \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat immer (und dann höchstens vier!) Lösungen in $t_1 \in \mathbf{C}$: andernfalls hätte man den Widerspruch $r = s = -1$.
Was nun noch zu tun bliebe, wäre die Lösung der Typ III Gleichungen. Vermutlich läuft dies auf die Angabe kombinatorischer Bedingungen an $\mathcal{A}$ hinaus, deren Erfülltsein die Validität aller oben konstruierten Lösungen garantiert. Beispielsweise ist notwendig $\mathcal{A}$ dreifach regulär: die Typ III Gleichungen kann man nämlich mittels Stern- und Dreiecksprojektionen wie folgt umformulieren:

$$\begin{aligned}
\pi(W_+^\top \otimes W_+ \otimes W_-) &= d\pi^*(W_- \otimes W_-^\top \otimes W_+) && (III_{J1})\\
\pi(W_+^\top \otimes W_+ \otimes W_-^\top) &= d\pi^*(W_-^\top \otimes W_- \otimes W_+) && (III_{J7})\\
\pi(W_+^\top \otimes W_- \otimes W_-) &= d\pi^*(W_- \otimes W_+ \otimes W_+) && (III_{J2})\\
\pi(W_+^\top \otimes W_- \otimes W_-^\top) &= d\pi^*(W_-^\top \otimes W_+^\top \otimes W_+) && (III_{J3})\\
\pi(W_-^\top \otimes W_+ \otimes W_+) &= d\pi^*(W_+^\top \otimes W_- \otimes W_-) && (III_{J6})\\
\pi(W_-^\top \otimes W_+ \otimes W_+^\top) &= d\pi^*(W_+^\top \otimes W_-^\top \otimes W_-) && (III_{J7})\\
\pi(W_-^\top \otimes W_- \otimes W_+) &= d\pi^*(W_+ \otimes W_+^\top \otimes W_-) && (III_{J5})\\
\pi(W_-^\top \otimes W_- \otimes W_+^\top) &= d\pi^*(W_+^\top \otimes W_+ \otimes W_-) && (III_{J3})
\end{aligned}$$

Nun folgt aus der Tatsache, daß $\{I, J, W_-, W_+\}$, $\{I, J, W_-^\top, W_+^\top\}$, sowie $\{I, J, W_+, W_+^\top\}$ und $\{I, J, W_-, W_-^\top\}$ Basen von $\mathbf{C}\mathcal{A}$ sind (bei den letzten beiden folgt dies daraus, daß sonst $t_1^2 = i\epsilon'$ wäre, im Widerspruch zur Kompatibilitätsbedingung): die Tensorprodukte oben auf der linken Seite zusammen mit denen der Form $A \otimes B \otimes C$, wo eines der A, B, C gleich I oder J ist, spannen $(\mathbf{C}\mathcal{A})^{\otimes 3}$ auf. Mit obigen Gleichungen und den schon im Fall $m = 2$ verwendeten Gleichungen

$$\pi(I \otimes B \otimes C) = \pi^*(J \otimes C^\top \otimes B),\ \pi(J \otimes B \otimes C) = \pi^*(B^\top C \otimes J \otimes J)$$

(und deren zyklischen Permutationen) folgt nun aus Satz A.44 die Behauptung.

Die konkret bekannten Beispiele sind durch zyklische Modelle und Tensorprodukte gegeben:

- Zyklische Modelle der Dimensionen $n = 4, 5$ (siehe Abschnitt 6.1).
- Tensorprodukte (siehe Abschnitt 6.1) von $d \geq 2$ zyklischen Modellen der Dimension $n = 3$.

Kapitel 4

Konstruktionen

Die ersten beiden Konstruktionen in diesem Kapitel beruhen auf der Lösung der modularen Invarianz Gleichung (Abschnitt 2.4). Leider ist das Kriterium dieser Gleichung nicht hinreichend für Spinmodelle, daher müssen die definierenden Gleichungen separat geprüft werden.

4.1 Zyklische Modelle

Sei $\mathcal{A} = \mathcal{G}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ das CAS einer zyklischen Gruppe (vgl. Beispiel A.7), mit Eigenmatrizen $P, Q = \bar{P}$ wie in Abschnitt A.2 (mit einer festen primitiven n-ten Einheitswurzel ζ). Sei ferner $M = (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, W_+, W_-)$ ein (symmetrisches) Spinmodell mit $W_+, W_- \in \mathbf{C}\mathcal{A}$, Loopvariable d und Modulus a. Nach Satz 2.24 erfüllt mit $W_+ = \sum_{i=0}^{D} t_i A_i$ die Matrix $T = \mathrm{Diag}(t_0, \ldots, t_D)$ die modulare Invarianz Gleichung $(PT)^3 = ad^3 I$, falls das dort konstruierte CAS eine Fission von $\mathcal{A}$ ist, und die dort konstruierte Dualität mit der durch P beschriebenen übereinstimmt (es gibt mehrere verschiedene Selbstdualitäten: wie man sich leicht überzeugt, genau die durch die Matrizen in Abschnitt A.2 beschriebenen: die Wahl der primitiven n-ten Einheitswurzel ζ korrespondiert zur Wahl eines Automorphismus von $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$). Nun gilt das folgende

Lemma 4.1 ([BB94a], [B96]) $T = \mathrm{Diag}(t_0, \ldots, t_{n-1})$ *erfüllt die modulare Invarianz Gleichung* $(PT)^3 = t_0 d^3 I$ *(mit* $d^2 = n$*), genau wenn*

$$t_j/t_0 = \eta^{-j(j+2s)}, \quad t_0^2 = d\eta^{-s^2} \left(\sum_j \eta^{-j^2} \right)^{-1}$$

mit einem $s \in [n]$ und $\eta = \zeta^{(n-1)/2}$ für ungerades n, $\eta^2 = \zeta^{-1}$ für gerades n (und alle Indizes i, j,etc. seien modulo n verstanden).

Vorausgeschickt sei folgendes einfache

Lemma 4.2 *Falls η wie in Lemma 4.1, $a \equiv b \mod n$, so gilt:*
(1) $\eta^{2a} = \eta^{2b}$
(2) $\eta^{a^2} = \eta^{b^2}$

Beweis. (1) ist klar, und für ungerades n (2) ebenfalls. Ist n gerade, so gilt $a^2 \equiv b^2 \mod 2n$, also (2). □

Beweis von Lemma 4.1. Lemma 4.2 zeigt, daß die Behauptung sinnvoll ist. Zeigen wir zunächst die Notwendigkeit der Bedingungen:

Sei $T = \mathrm{Diag}(t_0, \ldots, t_{n-1})$ so, daß $(PT)^3 = t_0 d^3 I$. Notieren wir also

$$\sum_{l,k} \zeta^{il+lk+kj} t_l t_k t_j = 0 \text{ für } i \neq j$$

Behauptung 1: Für alle u, v gilt

$$n\zeta^{uv} t_u t_v = \sum_{l,k \text{ mit } l+k=u+v} \zeta^{lk} t_l t_k$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j,\ j\neq i} \zeta^{-vj} \left(\sum_{l,k} \zeta^{il+lk+kj} t_l t_k \right) \\
&= \sum_{l,k} \zeta^{il+lk} t_l t_k \left(\sum_{j,\ j\neq i} \zeta^{(k-v)j} \right) \\
&= \sum_{l} (n-1) \zeta^{il+lv} t_l t_v - \sum_{l,k,\ k\neq v} \zeta^{il+lk} t_l t_k \zeta^{(k-v)i} \\
&= \sum_{l} n \zeta^{il+lv} t_l t_v - \sum_{l,k} \zeta^{il+lk+ki-vi} t_l t_k
\end{aligned}$$

Also für alle u

$$\begin{aligned}
0 &= n^{-1} \sum_{i} \zeta^{-iu} \left(n \sum_{l} \zeta^{il+lv} t_l t_v - \sum_{l,k} \zeta^{il+lk+ki-vi} t_l t_k \right) \\
&= n\zeta^{uv} t_u t_v - \sum_{l,k \text{ mit } l+k-v=u} \zeta^{lk} t_l t_k
\end{aligned}$$

Behauptung 2: Für alle u, v gilt

$$\zeta^{uv} t_u t_v = t_{u+v} t_0$$

Beweis. Folgt aus Behauptung 1, da dort die rechte Seite nur von $u + v$ abhängt.

Behauptung 3: Es gibt ξ, so daß für alle j gilt

$$t_j = \xi^j \zeta^{j(j-1)/2} t_0 \text{ und } \xi^n = 1 \text{ für ungerades } n,\ \xi^n = -1 \text{ für gerades } n$$

(wobei im letzteren Fall j als kleinster nichtnegativer Rest in $\mathbf{Z}$ verstanden ist).

Beweis. Nach Behauptung 2 ist $\zeta^{j-1} t_{j-1} t_1 = t_j t_0$, mit $\xi = t_1/t_0$ also $t_j = \xi \zeta^{j-1} t_{j-1}$, induktiv somit $t_j = \xi^j \zeta^{j(j-1)/2} t_0$ (hier ist es wichtig, den kleinsten nichtnegativen Rest zu verwenden). Das liefert $t_{n-1} = \xi^{n-1} \zeta^{(n-1)(n-2)/2} t_0$. Nochmalige Anwendung von Behauptung 2 ergibt $\zeta^{n-1} t_{n-1} t_1 = t_0^2$, also $t_{n-1} = \zeta \xi^{-1} t_0$, Vergleich also $\zeta^{n(n-3)/2} \xi^n = 1$. Ist nun n ungerade, ist $(n-3)/2$ ganzzahlig und es folgt $\xi^n = 1$. Ist dagegen n gerade, so ist $n - 3$ ungerade und $\zeta^{n/2} = -1$, also $\xi^n = -1$.

Damit folgt der Satz: denn für ungerades n ist $\xi = \zeta^x$, also

$$t_j/t_0 = \xi^j \zeta^{j(j-1)/2} = \zeta^{(j^2 - j + xj)/2} = \eta^{-(j^2 + (x-1)j)}$$

und man kann s so wählen, daß $2s \equiv x - 1 \mod n$. Für gerades n ist $\xi = \eta^x$, also

$$t_j/t_0 = \xi^j \zeta^{j(j-1)/2} = \eta^{-(j^2 - j - xj)}$$

und man kann s so wählen, daß $2s \equiv x + 1 \mod 2n$ ist, denn x ist ungerade: andernfalls könnte man ξ als Potenz von ζ ausdrücken, und man hätte den Widerspruch $\xi^n = 1$.

Die Gleichung für t_0 erhält man nun, wenn man die modulare Invarianz Gleichung für den Matrixeintrag ($i = 0, j = 0$) aufschreibt:

$$\begin{aligned} nd &= \sum_{k,l} \zeta^{lk} t_l t_k = \sum_{k,l} \eta^{-2lk - l^2 - 2ls - k^2 - 2ks} t_0^2 \\ &= t_0^2 \eta^{s^2} \sum_{k,l} \eta^{-(k+l+s)^2} = n t_0^2 \eta^{s^2} \sum_j \eta^{-j^2} \end{aligned}$$

Umgekehrt rechnet man leicht nach, daß die angegebenen t_i tatsächlich modulare Invarianz erfüllen. □

Bemerkung 4.3 *Klassische Ergebnisse der Zahlentheorie besagen, daß die* Gaußschen Summen $\sum_l \eta^{\pm l^2}$ *das* $\sqrt{n}$*-fache gewisser Einheitswurzeln sind: vgl. Kapitel 5 in [Na51].*

Satz 4.4 ([BB94a], [B96]) *Seien* $t_0, \ldots, t_n$ *wie in Lemma 4.1. Dann ist* $M = (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, W_+, W_-)$ *mit* $W_+ = \sum_i t_i A_i$, $W_- = \sum_i t_{i'}^{-1} A_i$ *ein Spinmodell vom Jonestyp mit Loopvariable* d.

Beweis. Für beliebiges i ist

$$\begin{aligned}\sum_j \zeta^{ij} \eta^{-j(j+2s)} &= \sum_j \eta^{-2ij-j^2-2sj} = \sum_j \eta^{-(j+(s+i))^2+(s+i)^2} \\ &= \eta^{(s+i)^2} \sum_l \eta^{-l^2} = \eta^{i(i+2s)} \eta^{s^2} \sum_l \eta^{-l^2}\end{aligned}$$

also mit den Definitionen $PT = dT_-$. Daher ist

$$W_- = \sum_i t_i^{-1} A_{i'} = d^{-1} \sum_i \sum_j P_{ij} t_j A_{i'} = d \sum_j t_j E_j$$

d.h. Satz 2.22 ist anwendbar und Bedingung (1), (1') erfüllt.

Nun zeigen wir für alle i, $(\beta, \gamma) \notin R_i$ $E_i Y_{\beta\gamma} = 0$: wegen $nE_i = \sum_j \zeta^{-ij} A_j$ ist das gleichbedeutend mit $\sum_j \zeta^{-ij} A_j Y_{\beta\gamma} = 0$. Da $A_j[\alpha, x] = \delta_{\alpha - x, j}$ und $Y_{\beta\gamma}[x] = W_+[\beta, x] W_-[x, \gamma] = t_{\beta - x} t^{-1}_{(x-\gamma)'}$, haben wir

$$(A_j Y_{\beta\gamma})[\alpha] = \sum_x A_j[\alpha, x] Y_{\beta\gamma}[x] = Y_{\beta\gamma}[\alpha - j]$$

und somit

$$\begin{aligned}\left(\sum_j \zeta^{-ij} A_j Y_{\beta\gamma}\right)[\alpha] &= \sum_j \zeta^{-ij} t_{\beta-(\alpha-j)} t^{-1}_{((\alpha-j)-\gamma)'} \\ &= \sum_j \zeta^{-i(\alpha-j)} t_{\beta-j} t^{-1}_{\gamma-j} \\ &= \zeta^{-i\alpha} \sum_j \eta^{-2ij-(\beta-j)^2+(\gamma-j)^2} \text{ (vgl. Lemma 4.2)} \\ &= \zeta^{-i\alpha} \eta^{-\beta^2+\gamma^2} \sum_j \eta^{-2ij+2(\beta-\gamma)j} \\ &= \zeta^{-i\alpha} \eta^{-\beta^2+\gamma^2} \sum_j \zeta^{j(i-\beta+\gamma)} = 0\end{aligned}$$

da $(\beta, \gamma) \notin R_i$, d.h. $\beta - \gamma \neq i$ ist. $\square$

Bemerkung 4.5 *Der Beweis zeigt eigentlich noch mehr: nämlich, daß alle die $Y_{\beta\gamma}$ Eigenvektoren aller E_i sind, d.h. die nach Satz 2.18 zu M gehörige Bose-Mesner-Algebra $\mathcal{N}(W_+)$ ist enthalten in und damit gleich der Gruppenalgebra $\mathbf{C}\mathcal{G}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$.*

Bemerkung 4.6 *Die zyklischen Modelle sind die einzigen bekannten unsymmetrischen Spinmodelle vom Jonestyp: die ersten Beispiele lieferten Kawagoe, Munemasa, Watatani [KMW94] durch explizite Lösung der Gleichungen auf dem Computer: beispielsweise für $n = 3$ die Modelle*

$$W_+ = \zeta_{24} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \zeta_{24}^{16} \\ \zeta_{24}^{16} & 1 & 1 \\ 1 & \zeta_{24}^{16} & 1 \end{bmatrix}$$

mit einer primitive 24-ten Einheitswurzel ζ_{24} (dies sind nach obigem Satz alle unsymmetrischen Spinmodelle für $\mathcal{G}(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$). In [BB94a] wurden sie in den oben präsentierten allgemeinen Rahmen gestellt.

Bemerkung 4.7 *Sei M eines der in Satz 4.4 konstruierten Spinmodelle. M ist symmetrisch genau dann, wenn $2s \equiv 0 \mod n$. Diese Spinmodelle waren schon aus [GJo89] bekannt (vgl. auch [Jo89]).*

4.2 Modelle aus Hammingschemata

Sei $\mathcal{A} = H(D, q)$ mit $D \geq 1$, $q \geq 2$ ein Hammingschema, mit Eigenmatrizen $P = Q$ (da selbstdual: siehe Beispiel A.12 und Abschnitt A.4). Sei ferner $M = ([q]^D, W_+, W_-)$ ein (symmetrisches) Spinmodell mit $W_+, W_- \in \mathbf{C}\mathcal{A}$, Loopvariable d und Modulus a. Nach Satz 2.24 erfüllt mit $W_+ = \sum_{i=0}^{D} t_i A_i$ die Matrix $T = \mathrm{Diag}(t_0, \ldots, t_D)$ die modulare Invarianz Gleichung $(PT)^3 = ad^3 I$, falls das dort konstruierte CAS eine Fission von $H(D, q)$ ist, und die dort konstruierte Dualität mit der durch P beschriebenen übereinstimmt (es kann unter Umständen zwei verschiedene Selbstdualitäten geben, zum Beispiel bei $H(2, 3) = L_2(3)$). Nun gilt folgendes

Lemma 4.8 ([BBIK92], [BB94b]) *Die Matrix $S = \alpha_0 \,\mathrm{Diag}(1, \alpha, \ldots, \alpha^D)$ löst die modulare Invarianz Gleichung $(PS)^3 = I$, falls $\alpha^2 + (q-2)\alpha + 1 = 0$ und $\alpha_0^3 = q^{-D}(1 + (q-1)\alpha)^{-D}$.*

Beweis. Siehe [BBIK92], [BB94b]. (Wir geben nachfolgend einen direkten Beweis, daß die mittels S konstruierten Matrizen W_+, W_- zu Spinmodellen gehören). □

Bemerkung 4.9 *Chihara und Stanton haben in [ChS95] gezeigt, daß es auch nicht mehr Lösungen der modularen Invarianz Gleichung gibt als die im Lemma angegebenen, wenn $D > 2$ (vgl. Satz 5.4 und Bemerkung 5.5).*

Es gilt nun (vgl. die Bemerkung am Ende von [BBIK92]!)

Satz 4.10 ([BBIK92]) *Wählt man $T = (t_0, \dots, t_D)$ mit $t_0^2 = \pm q^D \alpha_0^3$, $t_i = \alpha^i t_0$ (α, α_0 wie im Lemma), so ist $M = ([q]^D, W_+, W_-)$ mit $W_+ = \sum_i t_i A_i$, $W_- = \sum_i t_i^{-1} A_i$ ein (symmetrisches) Spinmodell. Genauer ist $M \cong M_0^{\otimes D}$ (siehe Satz 6.1), wo M_0 ein Potts-Modell der Dimension q ist.*

Beweis. Ohne Einschränkung ist $t_0^2 = q^D \alpha_0^3$, da $([q]^D, W_+, W_-)$ Spinmodell mit Loopvariable d ist genau wenn $([q]^D, iW_+, -iW_-)$ Spinmodell mit Loopvariable $-d$ ist. Sei $M_0 = ([q], V_+, V_-)$ ein geeignetes Potts-Modell der Dimension q mit Loopvariable $d = q^{1/2}$: $V_+ = aI + t(J - I)$, $V_- = a^{-1}I + t^{-1}(J - I)$ mit

$$t = \alpha a, \ a^2 = q^{-1/2}(1 + (q-1)\alpha)^{-1/2}, \text{ mit } a^D = t_0$$

(siehe Abschnitt 3.1: damit $t^2 + t^{-2} = -d$, $a = -t^{-3}$). In dieser Schreibweise ist klar, daß

$$\begin{aligned} V_+^{\otimes D} &= a^D \left(I + \alpha(J - I)\right) \\ &= t_0 \sum_i \alpha^i A_i \text{ (mit den Matrizen } A_i \text{ von } \mathcal{A}!) \\ &= W_+ \end{aligned}$$

und ebenso $V_-^{\otimes D} = W_-$. □

4.3 Modelle aus Hadamardgraphen

Für eine $4m \times 4m$-Hadamardmatrix H wird im Anhang, Beispiel A.13 ein abstandsregulärer Graph G auf $16m$ Ecken konstruiert mit Schnittparametern $(4m, 4m-1, 2m, 1; 1, 2m, 4m-1, 4m)$. Nomura [N94a] hat für das CAS

$\mathcal{D}(G)$ Spinmodelle angegeben:
Nach Konstruktion besteht $\mathcal{D}(G)$ aus den Relationsmatrizen $A_0 = I$ und

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_+ & H_- \\ 0 & 0 & H_- & H_+ \\ H_+^\top & H_-^\top & 0 & 0 \\ H_-^\top & H_+^\top & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} J-I & J-I & 0 & 0 \\ J-I & J-I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J-I & J-I \\ 0 & 0 & J-I & J-I \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_- & H_+ \\ 0 & 0 & H_+ & H_- \\ H_-^\top & H_+^\top & 0 & 0 \\ H_+^\top & H_-^\top & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

wobei $H_+ = (J+H)/2$ und $H_- = (J-H)/2$.

Satz 4.11 *Sei $n = 16m$, $d^2 = 4m$, und seien $t_0, \ldots, t_4$ so, daß*

$$t_2^2 + t_2^{-2} = -d, \;\; t_0 = t_4 = -t_2^{-3}, \;\; t_1^4 = 1, \;\; t_3 = -t_1$$

Dann ist (M, W_+, W_-) mit

$$W_+ = \sum t_i A_i, \quad W_- = \sum t_i^{-1} A_i$$

symmetrisches Spinmodell mit Loopvariable $2d$.

Beweis. Wir haben nach Definition

$$W_+ = \begin{bmatrix} A & A & \omega H & -\omega H \\ A & A & -\omega H & \omega H \\ \omega H^\top & -\omega H^\top & A & A \\ -\omega H^\top & \omega H^\top & A & A \end{bmatrix}$$

wo $A = t_0 I + t_2(J-I)$ zu einem Pottsmodell der Dimension $4m$ gehört, und $\omega = t_1$ eine vierte Einheitswurzel ist. Offenbar ist W_+ symmetrisch, ferner ist W_- schon so definiert, daß $W_+ \circ W_- = J$ ist:

$$W_- = \begin{bmatrix} 4mA^{-1} & 4mA^{-1} & \omega^{-1}H & -\omega^{-1}H \\ 4mA^{-1} & 4mA^{-1} & -\omega^{-1}H & \omega^{-1}H \\ \omega^{-1}H^\top & -\omega^{-1}H^\top & 4mA^{-1} & 4mA^{-1} \\ -\omega^{-1}H^\top & \omega^{-1}H^\top & 4mA^{-1} & 4mA^{-1} \end{bmatrix}$$

(beachte, daß A zu einem Pottsmodell gehört: daher $A \circ 4mA^{-1} = J$). Damit (und mit $HH^\top = 4m$) prüft man die Typ II Gleichung $W_+W_- = nI$ unmittelbar nach.

Um die Typ III Gleichungen nachzuprüfen, führen wir folgende Indizierungskonvention ein: Die Zeilen und Spalten von A indiziert die Menge X der Kardinalität $4m$, die $X \times X$-Blöcke von W_+, W_- indiziert $\{0,1\}^2$ in der Reihenfolge 00, 01, 10, 11. Wir verwenden die Eigenwertformulierung der Gleichungen, wobei wir die dem Pottsmodell A zugeordneten Eigenvektoren mit $Z_{\beta\gamma}$ ($\beta, \gamma \in X$) bezeichnen. Ferner sei $h_{\beta\gamma}[x] = H[x,\beta]H[x,\gamma]$, $h'_{\beta\gamma}[x] = H[\beta,x]H[\gamma,x]$. Damit ist

$$Y_{\beta 0\epsilon,\gamma 0\epsilon} = \begin{bmatrix} Z_{\beta\gamma} \\ Z_{\beta\gamma} \\ h'_{\beta\gamma} \\ h'_{\beta\gamma} \end{bmatrix}, \quad Y_{\beta 0\epsilon,\gamma 0\epsilon'} = \begin{bmatrix} Z_{\beta\gamma} \\ Z_{\beta\gamma} \\ -h'_{\beta\gamma} \\ -h'_{\beta\gamma} \end{bmatrix}$$

$$Y_{\beta 1\epsilon,\gamma 1\epsilon} = \begin{bmatrix} h_{\beta\gamma} \\ h_{\beta\gamma} \\ Z_{\beta\gamma} \\ Z_{\beta\gamma} \end{bmatrix}, \quad Y_{\beta 1\epsilon,\gamma 1\epsilon'} = \begin{bmatrix} -h_{\beta\gamma} \\ -h_{\beta\gamma} \\ Z_{\beta\gamma} \\ Z_{\beta\gamma} \end{bmatrix}$$

(wobei die Meinung ist, daß $\epsilon' = 1 - \epsilon$). In allen diesen Fällen ist klar, daß

$$W_+Y_{\beta\eta\epsilon,\gamma\eta\varphi} = 2dA[\beta,\gamma]^{-1}Y_{\beta\eta\epsilon,\gamma\eta\varphi} = 2dW_-[\beta\eta\epsilon,\gamma\eta\varphi]^{-1}Y_{\beta\eta\epsilon,\gamma\eta\varphi}$$

wenn man noch beachtet, daß $Jh_{\beta\gamma} = Jh'_{\beta\gamma} = n\delta_{\beta\gamma}\mathbf{1}$, also $Ah_{\beta\beta} = Ah'_{\beta\beta} = dt_0^{-1}\mathbf{1}$ und für $\beta \neq \gamma$: $Ah_{\beta\gamma} = (t_0 - t_2)h_{\beta\gamma}$, $Ah'_{\beta\gamma} = (t_0 - t_2)h'_{\beta\gamma}$, wobei $t_0 - t_2 = -t_2^{-3} - t_2 = dt_2^{-1}$.

Definieren wir Vektoren $U_{\beta\gamma}$, $U'_{\beta\gamma}$, $V_{\beta\gamma}$, $V'_{\beta\gamma}$ durch

$$U_{\beta\gamma}[x] = A[x,\beta]H[x,\gamma],\ V_{\beta\gamma}[x] = H[x,\beta]/A[x,\gamma] \text{ und}$$

$$U'_{\beta\gamma}[x] = A[\beta,x]H[\gamma,x],\ V'_{\beta\gamma}[x] = H[\beta,x]/A[\gamma,x]$$

Damit wird

$$Y_{\beta 0\epsilon,\gamma 1\eta} = \begin{bmatrix} (-1)^\eta\omega^{-1}U_{\beta\gamma} \\ -(-1)^\eta\omega^{-1}U_{\beta\gamma} \\ (-1)^\epsilon\omega V'_{\beta\gamma} \\ -(-1)^\epsilon\omega V'_{\beta\gamma} \end{bmatrix}, \quad Y_{\beta 1\epsilon,\gamma 0\eta} = \begin{bmatrix} (-1)^\epsilon\omega^{-1}V_{\beta\gamma} \\ -(-1)^\epsilon\omega^{-1}V_{\beta\gamma} \\ (-1)^\eta\omega U'_{\beta\gamma} \\ -(-1)^\eta\omega U'_{\beta\gamma} \end{bmatrix}$$

Einsetzen liefert

$$W_+Y_{\beta 0\epsilon,\gamma 1\eta} = \begin{bmatrix} 2(-1)^\epsilon \omega^2 HV'_{\beta\gamma} \\ -2(-1)^\epsilon \omega^2 HV'_{\beta\gamma} \\ 2(-1)^\eta H^\top U_{\beta\gamma} \\ -2(-1)^\eta H^\top U_{\beta\gamma} \end{bmatrix}, \quad W_+Y_{\beta 1\epsilon,\gamma 0\eta} = \begin{bmatrix} 2(-1)^\eta \omega^2 HU'_{\beta\gamma} \\ -2(-1)^\eta \omega^2 HU'_{\beta\gamma} \\ 2(-1)^\epsilon H^\top V_{\beta\gamma} \\ -2(-1)^\epsilon H^\top V_{\beta\gamma} \end{bmatrix}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} HV'_{\beta\gamma}[\alpha] &= \sum_x H[\alpha,x]H[\beta,x]/A[\gamma,x] \\ &= \begin{cases} dt_0 & \alpha = \beta \\ (t_0^{-1} - t_2^{-1})H[\alpha,\gamma]H[\beta,\gamma] = dt_2 H[\alpha,\gamma]H[\beta,\gamma] & \alpha \neq \beta \end{cases} \\ &= dH[\beta,\gamma]U_{\beta\gamma}[\alpha] \end{aligned}$$

und analog

$$H^\top U_{\beta\gamma} = dH[\beta,\gamma]V'_{\beta\gamma},\;\; HU'_{\beta\gamma} = dH[\gamma,\beta]V_{\beta\gamma},\;\; H^\top V_{\beta\gamma} = dH[\gamma,\beta]U'_{\beta\gamma}$$

Daher folgen

$$W_+Y_{\beta 0\epsilon,\gamma 1\eta} = 2d\omega(-1)^{\epsilon+\eta}H[\beta,\gamma]Y_{\beta 0\epsilon,\gamma 1\eta} = 2dW_-[\beta,\gamma]Y_{\beta 0\epsilon,\gamma 1\eta}$$

$$W_+Y_{\beta 1\epsilon,\gamma 0\eta} = 2d\omega(-1)^{\epsilon+\eta}H[\gamma,\beta]Y_{\beta 1\epsilon,\gamma 0\eta} = 2dW_-[\beta,\gamma]Y_{\beta 1\epsilon,\gamma 0\eta}$$

womit wir fertig sind. □

Bemerkung 4.12 *Wir können die Verschlingungsinvarianten der Spinmodelle aus Hadamardgraphen als Verallgemeinerung der Invarianten aus Potts-Modellen ansehen, die – wie bekannt ist (vgl. etwa [Jae92]) – äquivalent dem Jonespolynom sind. In seiner Arbeit [N95a] (von der auch der vorstehende Beweis inspiriert ist) weist Nomura darauf hin, daß Jones Beispiele gegeben hat für Verschlingungen, die durch die hier angegebenen, nicht aber durch das Jonespolynom unterschieden werden. Ferner hat Jaeger [Jae96b] gezeigt, daß die Invariante nicht von der konkreten Hadamardmatrix abhängt, und sie sogar explizit durch die Jonespolynome von Teilverschlingungen ausgedrückt.*

Bemerkung 4.13 *Für die so konstruierten Spinmodelle aus Hadamardgraphen gilt stets $m(W_+) = 4$.*

Kapitel 5

Spinmodelle aus Graphen

In diesem Kapitel betrachten wir symmetrische Spinmodelle, deren Gewichtsmatrizen mittels der Abstandsrelation eines Graphen G auf den Spins X definiert sind: $W_+[\alpha,\beta] = t_{\partial(\alpha,\beta)}$. Alle bisherigen Resultate in dieser Richtung geben notwendige Bedingungen an G oder Einschränkungen für die Werte der t_i. Interessanterweise werden dabei ausschließlich die Typ III Gleichungen eingesetzt.

5.1 Spinmodelle aus abstandsregulären Graphen

Ein wichtiger Spezialfall des Satzes 2.18 ist, daß das betrachtete Spinmodell in der Bose-Mesner-Algebra des (symmetrischen) CAS $\mathcal{D}(G)$ eines abstandsregulären Graphen G auf X liegt. Für Notation siehe Anhang A.1.

Für $\alpha, \beta, \gamma \in X$, $i, j, k \in \{0, \dots, D = \mathrm{diam}(G)\}$ definiere

$$P(ijk|\alpha\beta\gamma) = |\{x \in X | \partial(x,\alpha) = i, \partial(x,\beta) = j, \partial(x,\gamma) = k\}|$$

Dann hat man folgenden

Satz 5.1 ([N94a]) *Sei G wie oben, $W_+, W_- \in \mathbf{C}\mathcal{D}(G)$, mit $W_+ = \sum_i t_i A_i$, $W_- = \sum_i t_i^{-1} A_i$. Dann ist (X, W_+, W_-) (symmetrisches) Spinmodell genau wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $\forall k > 0 \;\; \sum_{i,j} p_{ij}^k t_i t_j^{-1} = 0$

(ii) $\forall \alpha\beta\gamma \in X \;\; \sum_{i,j,k} P(ijk|\alpha\beta\gamma) t_i t_j t_k^{-1} = d t_u t_v^{-1} t_w^{-1}$, *wobei* $u = \partial(\alpha,\beta)$, $v = \partial(\alpha,\gamma)$, $w = \partial(\beta,\gamma)$.

Beweis. Mit den obigen Definitionen ist (i) äquivalent den Typ II Gleichungen, (ii) äquivalent den Typ III Gleichungen. □

Bemerkung 5.2 *Offenbar eine wichtige Spezialisierung ist der Fall, daß $P(ijk|\alpha\beta\gamma)$ nur noch von u, v, w mit $(\beta,\gamma) \in R_u, (\gamma,\alpha) \in R_v, (\alpha,\beta) \in R_w$ abhängt. Das CAS ist damit* dreifach regulär*: in diesem Fall schreiben wir $K(ijk|uvw) = P(ijk|\alpha\beta\gamma)$ (siehe Anhang A.5).*

Wir werden die in der letzten Bemerkung angeklungene Gedankenrichtung nicht weiter verfolgen. Stattdessen betrachten wir weiterhin beliebige abstandsreguläre Graphen, und Spinmodelle wie in Satz 5.1. Nehmen wir an, daß die in Satz 2.18 beschriebene, W_+ zugeordnete Algebra $\mathbf{C}\mathcal{D}(G)$ umfaßt. Gilt ferner $t_i \neq t_0$ für alle $i > 1$, so überlegt man sich leicht, daß die von J, W_+ erzeugte Bose-Mesner-Algebra gleich $\mathbf{C}\mathcal{D}(G)$ ist, diese ist also nach Korollar 2.20 selbstdual und man hat eine modulare Invarianz Gleichung nach Satz 2.24.

Lemma 5.3 ([ChS95]) *Sei $\mathcal{A}$ ein selbstduales CAS mit Eigenmatrix P. Dann folgt aus $(PT)^3 = I$ mit einer Diagonalmatrix $T = \mathrm{Diag}(T_0, \ldots, T_D)$ für alle i, j:*

$$k_i P_{ij} \frac{T_i}{T_0} \frac{T_j}{T_0} = \sum_r k_r p_{ij}^r \frac{T_r}{T_0}$$

$$k_i P_{ij} \frac{T_0}{T_i} \frac{T_0}{T_j} = \sum_r k_r p_{ij}^r \frac{T_0}{T_r}$$

Beweis. (Skizze). Aus $PTP = (TPT)^{-1}$ und $(PTP)^{-1} = TPT$ erhält man zunächst

$$n^{-1} P_{ij} T_i^{-1} T_j^{-1} = \sum_k P_{ik} T_k P_{kj}$$

$$n^2 P_{ij} T_i T_j = \sum_k P_{ik} T_k^{-1} P_{kj}$$

und unter Benutzung der Identitäten

$$P_{ki} P_{kj} = \sum_l p_{ij}^l P_{kl}, \qquad k_i P_{ik} = k_k P_{ki}$$

(die man bei [BI84], 53 bzw. 63 findet), sowie der obigen Gleichungen für $i = 0$ erhält man die Behauptung. □

Satz 5.4 ([ChS95]) *Sei $G \neq C_4$ ein abstandsregulärer Graph mit Durchmesser $D > 1$, selbstdualem CAS $\mathcal{D}(G)$ und Eigenmatrix P. Dann gibt es höchstens 12 komplexe Diagonalmatrixen T mit $(PT)^3 = I$.*

Beweis. (Skizze). In Lemma 5.3 setzen wir $j = 1$ und erhalten wegen

$$p_{i1}^r = \begin{cases} b_{i-1} & \text{für } r = i-1 \\ a_i & \text{für } r = i \\ c_{i+1} & \text{für } r = i+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} k_i P_{i1} \frac{T_0}{T_1} \frac{T_0}{T_i} &= b_{i-1} k_{i-1} \frac{T_0}{T_{i-1}} + a_i k_i \frac{T_0}{T_i} + c_{i+1} k_{i+1} \frac{T_0}{T_{i+1}} \\ k_i P_{i1} \frac{T_1}{T_0} \frac{T_i}{T_0} &= b_{i-1} k_{i-1} \frac{T_{i-1}}{T_0} + a_i k_i \frac{T_i}{T_0} + c_{i+1} k_{i+1} \frac{T_{i+1}}{T_0} \end{aligned}$$

Daraus ersieht man, daß $T_i T_0^{-1}$ ein Polynom t_i vom Grad höchstens i in $\xi = T_1 T_0^{-1}$ ist: $T_i T_0^{-1} = t_i(\xi)$, und ebenso $T_i^{-1} T_0 = t_i(\xi^{-1})$, woraus sich die T_i aus ξ und T_0 ergeben.
Es folgt für alle i: $t_i(\xi) t_i(\xi^{-1}) = 1$. Für $i = 1$ ist diese Bedingung trivial erfüllt, für $i = 2$ jedoch erhält man

$$P_{11}\xi^4 + a_1(P_{11} - 1)\xi^3 - (P_{11}^2 + a_1^2 - b_1^2 + 1)\xi^2 + a_1(P_{11} - 1)\xi + P_{11} = 0$$

Diese Gleichung ist nicht trivial, da sonst $P_{11} = 0 = a_1$, $b_1 = 1$, was wegen $G \neq C_4$ ausgeschloßen ist. Sie hat also höchstens vier Lösungen, und für jede Lösung ξ hat man höchstens drei passende Werte von T_0 (ein Skalierungsfaktor, um $(PT)^3 = I$ zu erfüllen: die möglichen T_0 unterscheiden sich also um den Faktor dritter Einheitswurzeln). $\square$

Als Korollar erhalten wir, daß es (abgesehen vom Fall $G = C_4$) nur sehr wenige (für gegebene Loopvariable und feste Selbstdualität nämlich höchstens 12) Spinmodelle in $\mathbf{C}\mathcal{D}(G)$ gibt, die $\mathbf{C}\mathcal{D}(G)$ erzeugen.

Bemerkung 5.5 *In der zitierten Arbeit von Chihara und Stanton werden ferner spezielle CAS untersucht: die Hammingschemata (siehe A.12) und gewisse CAS, die man den Mengen der Bilinearformen, der alternierenden*

Formen, und der hermiteschen Formen über endlichen Körpern zuordnet (siehe [BI84], 306ff). Für die ersteren betrachtet man noch t_3 und kann so die Lösungsmenge noch weiter einschränken auf sechs Werte (die auch alle Lösungen der Gleichung ergeben; siehe dazu auch Lemma 4.8). Für die letzteren zeigt sich sogar, daß keine *Lösungen der modularen Invarianz Gleichung existieren. Beachte aber, daß dies nicht bedeutet, daß es in ihren Bose-Mesner-Algebren keine Spinmodelle gibt!*

5.2 Spinmodelle aus dreiecksfreien Graphen

In einer Serie von Arbeiten [N96a], [N95c], [N96b] hat Nomura die Untersuchung von Spinmodellen betrieben, die wie in der Einleitung dieses Kapitels mittels Graphen konstruiert sind. Seine Resultate in dieser Richtung sind die beiden folgenden Sätze:

Satz 5.6 ([N96a]) *Sei X die Eckenmenge eines dreiecksfreien, zusammenhängenden Graphen G mit Durchmesser D, und ∂ die zugehörige Abstandsfunktion. Seien $t_0, \ldots, t_D$ komplexe Zahlen so, daß $W_+[\alpha,\beta] = W_-[\alpha,\beta]^{-1} = t_{\partial(\alpha,\beta)}$ ein (symmetrisches) Spinmodell (X, W_+, W_-) definiert. Dabei sei für alle $i > 1$ $t_i \neq t_1$ und $t_{i-2} \neq t_i \neq t_{i-1}$. Dann ist G abstandsregulär und fast bipartit (siehe folgende Definition).*

Definition 5.7 *Ein zusammenhängender Graph mit Durchmesser D heißt* fast bipartit, *wenn er keinen ungeraden Kreis einer Länge kleiner $2D + 1$ hat (Insbesondere sind alle bipartiten Graphen fast bipartit, ferner aber beispielsweise alle Kreise C_n, auch die ungeraden!).*

Satz 5.8 ([N96b]) *Sei G ein abstandsregulärer fast bipartiter Graph auf X mit Durchmesser D, und $t_0, \ldots, t_D$ so, daß $W_+[\alpha,\beta] = W_-[\alpha,\beta]^{-1} = t_{\partial(\alpha,\beta)}$ ein (symmetrisches) Spinmodell (X, W_+, W_-) definiert. Ferner sei für alle $i > 1$ $t_i \neq t_1$. Dann ist G 2-homogen (siehe folgende Definition).*

Definition 5.9 *Ein abstandsregulärer Graph heißt t-*homogen, *wenn für alle r, s, i, j gilt: für $\partial(u,v) = t$, $\partial(v,w) = s$, $\partial(u,w) = r$ ist $|\Gamma_i(u) \cap \Gamma_j(v) \cap \Gamma_1(w)|$ unabhängig von der Wahl von u, v, w (d.h. in der Sprache von Bemerkung 5.2: $K(ij1|srt)$ existiert).*

Wir verzichten hier auf Beweise dieser Sätze: sie beruhen auf der geschickten mehrfachen Ausnutzung der Sätze 2.28 und 2.29. Um einen Eindruck von der

Komplexität der Beweise zu haben, sehe man in Abschnitt 6.2 den Beweis von Satz 6.11 an. Warum man überhaupt mit dieser Methode die Parameter von G in den Griff bekommt, sollte aus Satz 5.1 klar sein: schließlich betrifft die Lokalisierungsmethode die Typ III Gleichungen, und um diese zu verifizieren, braucht man als Daten die Größe der Umgebung von Ecken, sowie von gewissen zweifachen und dreifachen Umgebungsschnitten.

In derselben Arbeit [N96b], die den zweiten der obigen Sätze enthält, hat Nomura dann noch die 2-homogenen fast bipartiten abstandsregulären dreiecksfreien Graphen nach ihren Schnittparametern klassifiziert. Wir geben seine Liste, mit den bekannten Graphen, die diese Parameter haben, und den bekannten Spinmodellen (siehe auch [N95c] für eine Liste im Fall bipartiter Graphen). Vorher noch die

Definition 5.10 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Der Graph $2G = (V \times \{0, 1\}, E')$ mit $(v\epsilon, w\delta) \in E'$ genau wenn $(v, w) \in E$ und $\epsilon \neq \delta$ heißt* zweifache Überlagerung *von G.*

1. $(k; 1)$: vollständige Graphen K_{k+1}. Potts-Modelle.

2. $(k, k-1; 1, k)$: vollständig bipartite Graphen $K_{k,k}$ – nur für $k = 2$ selbstdual. Modelle Sq_a^ϵ (siehe Satz 3.4).

3. $(k, k-1; 1, c)$ mit $k = \gamma(\gamma^2 + 3\gamma + 1)$, $c = \gamma(\gamma + 1)$: dreiecksfreie selbstduale Smithgraphen – nur für $\gamma = 1, 2$ bekannt: Clebsch-Graph und Higman-Sims-Graph. Die zugehörigen Spinmodelle haben wir in Abschnitt 3.2 berechnet.

4. $(k + 1, k, 1; 1, k, k + 1)$: Komplement des $2 \times k$-Gittergraphen. Tensorprodukte (vgl. Satz 6.1) von Ising- und Potts-Modellen.

5. $(4\gamma, 4\gamma - 1, 2\gamma, 1; 1, 2\gamma, 4\gamma - 1, 4\gamma)$: Hadamardgraphen. Spinmodelle aus Abschnitt 4.3.

6. $(k, k-1, k-c, c, 1; 1, c, k-c, k-1, k)$ mit $k = \gamma(\gamma^2 + 3\gamma + 1)$, $c = \gamma(\gamma + 1)$: zweifache Überlagerungen von Graphen aus (3). Für den Clebsch-Graph ist dies der fünfdimensionale Hyperkubus, siehe (9) für Spinmodelle. Für den Higman-Sims-Graph hat man Tensorprodukte eines Modells aus (3) mit Ising-Modellen.

7. $(2, 1, \ldots, 1; 1, \ldots, 1, 2)$ mit Durchmesser D: Kreise C_{2D+1}. Zyklische Modelle (vgl. Abschnitt 4.1).

8. $(1, \ldots, 1; 1, \ldots, 1)$ mit Durchmesser D: Kreise C_{2D}. Zyklische Modelle (vgl. Abschnitt 4.1).

9. $(D, \ldots, 2, 1; 1, 2, \ldots, D)$: D-dimensionaler Hyperkubus. Modelle aus Hammingschemata (vgl. Abschnitt 4.2).

10. $(2D+1, \ldots, D+2; 1, \ldots, D)$: Quotient eines $(2D+1)$-dimensionalem Hyperkubus unter Identifikation von Antipoden. Für $D = 1$ ist das K_4, und wir kennen das Potts-Modell, für $D = 2$ ist es der Clebsch-Graph, und wir haben Modelle unter (3). Allgemein liefern die Modelle aus Hammingschemata zur Dimension $2D$ Beispiele, wenn D gerade. Sonst scheinen keine bekannt zu sein.

Kapitel 6

Neue Spinmodelle aus alten

In diesem Kapitel wird die allgemeine Konstruktion des Tensorprodukts zweier Spinmodelle eingeführt. Ferner beweisen wir zwei Faktorisierungssätze von Nomura.

6.1 Tensorprodukt

Satz 6.1 (vgl. [H94]) *Sind M_1, M_2 4-weight-Spinmodelle, $M_j = (X_j, W_1^{(j)}, \ldots, W_4^{(j)})$, mit Loopvariablen d_j und Moduli a_j ($j = 1, 2$), so ist ihr* Tensorprodukt $M_1 \otimes M_2 = (X_1 \times X_2, W_i^{(1)} \otimes W_i^{(2)} | i = 1, 2, 3, 4)$ *ein 4-weight-Spinmodell mit Loopvariable $d_1 d_2$ und Modulus $a_1 a_2$. Ferner gilt für die zugeordneten Verschlingungsinvarianten $\zeta_{M_1 \otimes M_2} = \zeta_{M_1} \zeta_{M_2}$.*

Beweis. Folgt direkt aus der Definition und den universellen Eigenschaften des Tensorprodukts. □

Bemerkung 6.2 *Sind M_1,M_2 2-weight-Modelle vom Jonestyp, so ist es auch $M_1 \otimes M_2$, sind M_1, M_2 symmetrisch, so auch $M_1 \otimes M_2$.*

Bemerkung 6.3 *Vom Standpunkt der Verschlingungsinvarianten bringen Tensorprodukte also nichts Neues.*

Wir haben nun folgendes Gegenstück zu Satz 6.1:

Satz 6.4 *Seien $M_j = (X_j, W_1^{(j)}, \ldots, W_4^{(j)})$ ($j = 1, 2$) und $M = (X = X_1 \times X_2, W_i = W_i^{(1)} \otimes W_i^{(2)} | i = 1, 2, 3, 4)$ so, daß M_1 und M 4-weight-Spinmodelle sind. Dann ist auch M_2 4-weight-Spinmodell.*
Sind ferner M_1, M vom Jonestyp (bzw. symmetrisch), so auch M_2.

Beweis. Prüfen wir die Bedingungen der Definition 1.10 für 4-weight-Spinmodelle nach:

$$\begin{aligned} J_{X_1} \otimes J_{X_2} = J_X &= W_1 \circ W_3^\top \\ &= (W_1^{(1)} \otimes W_1^{(2)}) \circ (W_3^{(1)\top} \otimes W_3^{(2)\top}) \\ &= (W_1^{(1)} \circ W_3^{(1)\top}) \otimes (W_1^{(2)} \circ W_3^{(2)\top}) \\ &= J_{X_1} \otimes (W_1^{(2)} \circ W_3^{(2)\top}) \end{aligned}$$

also $W_1^{(2)} \circ W_3^{(2)\top} = J_{X_2}$. Ebenso

$$\begin{aligned} n_1 I_{X_1} \otimes n_2 I_{X_2} = n I_X &= W_1 W_3 \\ &= (W_1^{(1)} \otimes W_1^{(2)})(W_3^{(1)} \otimes W_3^{(2)}) \\ &= (W_1^{(1)} W_3^{(1)}) \otimes (W_1^{(2)} W_3^{(2)}) \\ &= n_1 I_{X_1} \otimes (W_1^{(2)} W_3^{(2)}) \end{aligned}$$

also $W_1^{(2)} W_3^{(2)} = n_2 I_{X_2}$. Analog beweist man $W_2^{(2)} \circ W_4^{(2)\top} = J_{X_2}$ und $W_2^{(2)} W_4^{(2)} = n_2 I_{X_2}$.
Für die Typ III Gleichungen verwenden wir die Eigenwertformulierung Bemerkung 2.7:

$$\begin{aligned} (d_1 W_4^{(1)}[\beta_1, \gamma_1] Y^{(1)}_{\beta_1\gamma_1}) \otimes (W_1^{(2)} Y^{(2)}_{\beta_2\gamma_2}) &= (W_1^{(1)} Y^{(1)}_{\beta_1\gamma_1}) \otimes (W_1^{(2)} Y^{(2)}_{\beta_2\gamma_2}) \\ &= (W_1^{(1)} \otimes W_1^{(2)}) Y^{(1)}_{\beta_1\gamma_1} \otimes Y^{(2)}_{\beta_2\gamma_2} \\ &= W_1 Y_{\beta_1\beta_2, \gamma_1\gamma_2} \\ &= d W_4[\beta_1\beta_2, \gamma_1\gamma_2] Y_{\beta_1\beta_2,\gamma_1\gamma_2} \\ &= (d_1 W_4^{(1)}[\beta_1, \gamma_1] Y^{(1)}_{\beta_1\gamma_1}) \otimes (d_2 W_4^{(2)}[\beta_2, \gamma_2] Y^{(2)}_{\beta_2\gamma_2}) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} W_1^{(2)} Y^{(2)}_{\beta_2\gamma_2} &= d_2 W_4^{(2)}[\beta_2, \gamma_2] Y^{(2)}_{\beta_2\gamma_2}; \text{ die Bedingung} \\ W_1^{(2)\top} Y'^{(2)}_{\beta_2\gamma_2} &= d_2 W_4^{(2)\top}[\beta_2, \gamma_2] Y'^{(2)}_{\beta_2\gamma_2} \end{aligned}$$

beweist man analog. □

Anwendungen

1. Man kann (symmetrische) Spinmodelle mit $m = 2$ der Dimension 4^l konstruieren: für $l = 1$ kennen wir aus Satz 3.4 die Spinmodelle

$$\mathrm{Sq}_a^\epsilon = ([4], W_+, W_-) \text{ mit } W_+ = \begin{bmatrix} a & -a & \epsilon a^{-1} & \epsilon a^{-1} \\ -a & a & \epsilon a^{-1} & \epsilon a^{-1} \\ \epsilon a^{-1} & \epsilon a^{-1} & a & -a \\ \epsilon a^{-1} & \epsilon a^{-1} & -a & a \end{bmatrix}$$

wo $a \in \mathbf{C}^\times, \epsilon = \pm 1$,und für $l > 1$ bekommen wir Spinmodelle als mehrfache Tensorprodukte dieser. Sind dabei alle a gleich 1, so erhält man Spinmodelle aus regulären Hadamardmatrizen wie in Abschnitt 3.2

2. Die Spinmodelle aus Abschnitt 3.2 auf den Gittergraphen $L_2(q)$ sind Tensorprodukte zweier geeigneter q-dimensionaler Potts-Modelle: denn nach Satz 3.4 gibt es in der Bose-Mesner-Algebra von $\mathcal{S}(L_2(q))$ nur vier Spinmodelle mit $m = 2$. Soviele Spinmodelle erhalten wir aber auch durch die Tensorproduktbildung aus Potts-Modellen.

3. Nomura hat in [N95a] folgende mit dem Tensorprodukt verwandte allgemeine Konstruktion beschrieben:

Definition 6.5 *Sei W $X \times X$-Matrix, $\epsilon = (\epsilon_x | x \in X) \in \{+1, -1\}^X$. Definiere W' durch $W'[\alpha, \beta] = \epsilon_\alpha \epsilon_\beta W[\alpha, \beta]$, ferner*

$$U(W, \epsilon) = \begin{bmatrix} W & W & W' & -W' \\ W & W & -W' & W' \\ W' & -W' & W & W \\ -W' & W' & W & W \end{bmatrix}$$

$$V(W, \epsilon) = \begin{bmatrix} W' & -W' & W & W \\ -W' & W' & W & W \\ W & W & W' & -W' \\ W & W & -W' & W' \end{bmatrix}$$

Dann haben wir nach [N95a] und in Beantwortung der dort gestellten Frage:

Satz 6.6 *Sei $M = (X, W_+, W_-)$ Spinmodell vom Jonestyp, $\epsilon \in \{\pm 1\}^X$. Dann sind $(4X, U_+, U_-)$ und $(4X, V_+, V_-)$ Spinmodelle vom Jonestyp, wobei $U_+ = U(W_+, \epsilon), U_- = U(W_-, \epsilon)$ und $V_+ = V(W_+, \epsilon), V_- = V(W_-, \epsilon)$. Sie sind nämlich beide isomorph zu $M \otimes \mathrm{Sq}_1^1$ (Sq_a^ϵ: siehe Satz 3.4).*

Beweis. Wir identifizieren $4X$ mit $X \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$, wobei wir für den zweiten Faktor die Anordnung $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ festlegen, damit die Matrizen von Definition 6.5 richtig gelesen werden. Seien $\delta_x \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ mit $\epsilon_x = (-1)^{\delta_x}$ $(x \in X)$. Damit ist

$$U_+[(\alpha,(c,c')),(\beta,(d,d'))] = \begin{cases} W_+[\alpha,\beta] & c = d \\ W_+[\alpha,\beta](-1)^{c'+d'}(-1)^{\delta_\alpha+\delta_\beta} & c \neq d \end{cases}$$

$$V_+[(\alpha,(c,c')),(\beta,(d,d'))] = \begin{cases} W_+[\alpha,\beta] & c \neq d \\ W_+[\alpha,\beta](-1)^{c'+d'}(-1)^{\delta_\alpha+\delta_\beta} & c = d \end{cases}$$

Wir definieren eine Bijektion $s : 4X \longrightarrow 4X$ durch

$$s : (\alpha,(c,c')) \longmapsto (\alpha,(c,c'+\delta_\alpha))$$

In Abschnitt 3.2 hatten wir Sq_1^1 durch

$$W_+ = W_- = H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

definiert. Man sieht aber sofort, daß die Festlegung

$$W_+ = W_- = H' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ein isomorphes Spinmodell liefert. Nun folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} U_+[s(\alpha,(c,c')),s(\beta,(d,d'))] &= W_+[\alpha,\beta]H[(c,c'),(d,d')] \\ V_+[s(\alpha,(c,c')),s(\beta,(d,d'))] &= W_+[\alpha,\beta]H'[(c,c'),(d,d')] \end{aligned}$$

und ebenso für U_-, V_-. Also ist $(4X,U_+,U_-) \cong M \otimes \mathrm{Sq}_1^1 \cong (4X,V_+,V_-)$. □

4. Spinmodelle in den Produktschemata $\mathcal{P}(l) \times \mathcal{P}(m)$ (vgl. Abschnitt 3.3, Symmetrische Modelle):

Korollar 6.7 *Sei $M = ([l] \times [m], W_+, W_-)$ Spinmodell mit Loopvariable d in der Bose-Mesner-Algebra von $\mathcal{P}(l) \times \mathcal{P}(m)$. Ferner sei $lm > 4$, oder $lm = 4$ und $m(W_+) = 3$. Dann ist M Potts-Modell oder Tensorprodukt zweier Potts-Modelle der Dimensionen l und m.*

Beweis. Wir können $lm > 4$ annehmen, das CAS hat dann nur eine Selbstdualität (für $lm = 4$ siehe Abschnitt 7.1, den Fall $\mathcal{A}_2^{(4)}$), seine Eigenmatrix ist (mit $A_0 = I_l \otimes I_m$, $A_1 = I_l \otimes (J_m - I_m)$, $A_1 = (J_l - I_l) \otimes I_m$, $A_3 = (J_l - I_l) \otimes (J_m - I_m)$)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & m-1 & l-1 & (l-1)(m-1) \\ 1 & -1 & l-1 & -(l-1) \\ 1 & m-1 & -1 & -(m-1) \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sei $W_+ = t_0A_0 + t_1A_1 + t_2A_2 + t_3A_3$. Falls $m(W_+) = 1$, liegt offenbar ein Potts-Modell vor. Den Fall $m(W_+) = 2$ haben wir in Abschnitt 3.2 abgehandelt: ist $t_1 = t_3$ oder $t_2 = t_3$, so ist das entstehende Fusionsschema imprimitiv, nach Satz 3.3 ein Widerspruch. Ist $t_1 = t_2$, so entsteht durch Fusion von A_1 und A_2 nur dann ein CAS, wenn $l = m$, nämlich $\mathcal{S}(L_2(m))$. Nach Satz 3.4 und obiger Anwendung 2 ist M daher Tensorprodukt zweier Potts-Modelle.
Sei nun $m(W_+) = 3$, und setzte $T = \mathrm{Diag}(t_0, \ldots, t_3)$. Dann gilt nach Satz 2.24 $(PT)^3 = d^3T_0I$ (da W_+, J nach Voraussetzung die Bose-Mesner-Algebra von $\mathcal{P}(l) \times \mathcal{P}(m)$ erzeugen). Durch geeignete Skalierung kann man auf der rechten Seite I erzielen, und somit Lemma 5.3 anwenden: für $\tau_i = t_it_0^{-1}$ gilt

$$k_iP_{ij}\tau_i\tau_j = \sum_r k_rp_{ij}^r\tau_r$$

Für $i = j = 1$ erhält man $\tau_1^2 + (m-2)\tau_1 + 1 = 0$, für $i = j = 2$: $\tau_2^2 + (l-2)\tau_2 + 1 = 0$, und für $i = 1, j = 2$: $\tau_3 = \tau_1\tau_2$. Damit faktorisiert T in ein Tensorprodukt zweier 2×2-Matrizen, W_+ (und ebenso W_-) also in ein Tensorprodukt zweier Matrizen vom Format l und m, die — wie man leicht sieht (siehe auch Abschnitt 3.1) — zu Potts-Modellen gehören. □

6.2 Zwei Struktursätze von Nomura

In [N95b] hat Nomura einen Weg aufgezeigt, Spinmodelle unter gewissen Voraussetzungen als Tensorprodukte schreiben zu können. Damit bekommt die

Produktkonstruktion des vorigen Abschnitts Bedeutung für das Klassifikationsproblem. Der Schlüssel zu diesen Sätzen ist Nomuras Methode der Lokalisierung (siehe Abschnitt 2.5). Wir betrachten im folgenden ein symmetrisches Spinmodell $M = (X, W_+, W_-)$, und normalisieren wie in Abschnitt 2.5 zu $W = a^{-1}W_+$, und verwenden auch sonst die Notation von dort.

Lemma 6.8 *Sei $\vartheta \neq -1$ und $m(\vartheta) = 1$. Ist $W[\alpha, \beta] = \vartheta$, so gilt für alle $x \in X$ $W[x, \beta] = \pm\vartheta W[x, \alpha]$.*

Beweis. Für $Y = \{\alpha, x\}$, $Z = \{(\alpha, \beta), (\beta, \alpha)\}$ ist

$$N_{Y,Z} = \begin{bmatrix} \vartheta^{-1} & \vartheta \\ ab^{-1} & a^{-1}b \end{bmatrix}$$

mit $a = W[x, \alpha]$, $b = W[x, \beta]$. Nach Satz 2.28 folgt $(a^{-1}\vartheta b)^2 = 1$. □

Lemma 6.9 *Sei $\vartheta \neq -1$ und $m(\vartheta) = 1$. Ist $W[\alpha, \beta] = \vartheta = W[\gamma, \delta]$, so gilt $W[\alpha, \delta] = W[\beta, \gamma]$ und $W[\alpha, \gamma] = W[\beta, \delta]$.*

Beweis. Für $Y = \{\alpha, \beta\}$, $Z = \{(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)\}$ ist

$$N_{Y,Z} = \begin{bmatrix} \vartheta^{-1} & ab^{-1} \\ ac^{-1} & \vartheta^{-1} \end{bmatrix}$$

mit $a = W[\alpha, \gamma]$, $b = W[\alpha, \delta]$, $c = W[\beta, \gamma]$. Nach Satz 2.28 folgt $\vartheta^{-2} = a^2b^{-1}c^{-1}$, wegen Lemma 6.8 aber auch $a^2b^{-2} = \vartheta^{-2}$, also $b = c$. Ebenso $W[\alpha, \gamma] = W[\beta, \delta]$. □

Satz 6.10 ([N95b]) *Ist W Spinmodell, und ϑ so, daß $m(\vartheta) = 1$, so folgt $\vartheta^4 = 1$. Ist $\vartheta^2 = -1$, so ist $M \cong M_1 \otimes M_2$ mit einem zweidimensionalen Potts-Modell M_1 und einem Spinmodell M_2.*

Beweis. Der erste Teil ist Satz 2.30. Sei $\vartheta^2 = -1$: dann ist jedem $\alpha \in X$ ein eindeutiges β zugeordnet mit $W[\alpha, \beta] = \vartheta$, also ist n gerade, und wir können X als $X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m\}$ schreiben mit $W[\alpha_i, \beta_i] = \vartheta$. Nach Lemma 6.9 sind

$$W[\alpha_1, \alpha_i] = W[\beta_1, \beta_i], \ W[\alpha_1, \beta_i] = W[\beta_1, \alpha_i] \text{ für alle } i$$

und nach Lemma 6.8 $W[\alpha_1, \beta_i] = \pm\vartheta W[\alpha_1, \alpha_i]$. Wir vertauschen α_i und β_i, falls $W[\alpha_1, \beta_i] = -\vartheta W[\alpha_1, \alpha_i]$, und erhalten

$$W[\alpha_1, \beta_i] = \vartheta W[\alpha_1, \alpha_i] \text{ für alle } i$$

Sei nun $a = W[\alpha_i, \alpha_j]$, $b = W[\alpha_i, \beta_j]$: betrachte für $Y = \{\alpha_1, \alpha_i\}$, $Z = \{(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_j, \beta_j)\}$

$$N_{Y,Z} = \begin{bmatrix} \vartheta^{-1} & \vartheta^{-1} \\ \vartheta^{-1} & ab^{-1} \end{bmatrix}$$

Mit Satz 2.28 folgt $b = \vartheta a$, wir haben also

$$W[\alpha_i, \beta_j] = \vartheta W[\alpha_i, \alpha_j] \text{ für alle } i, j$$

Definiert man nun noch

$$X_1 = \{\alpha_1, \beta_1\}, \quad X_2 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$$

und durch Einschränkung von W auf X_1 bzw. X_2 erhält man $M_1 = (X_1, W_+^{(1)}, W_-^{(1)})$ bzw. $M_2 = (X_2, W_+^{(2)}, W_-^{(2)})$. Dabei ist klar, daß M_1 ein zweidimensionales Potts-Modell ist, sowie, daß unter der Identifizierung von X mit $X_1 \times X_2$ vermöge

$$(\alpha_1, \alpha_i) \longmapsto \alpha_i, \quad (\beta_1, \alpha_i) \longmapsto \beta_i$$

$M \cong M_1 \otimes M_2$ gilt. Nach Satz 6.4 ist also auch M_2 Spinmodell. $\square$

Die folgenden Überlegungen behandeln den nächstschwierigeren Fall, daß es einen Eintrag $\vartheta \neq 1$ der Vielfachheit 2 gibt, d.h. das Vorkommen von ϑ in W definiert die Adjazenzmatrix C eines zweiregulären Graphen auf X. Ziel ist der

Satz 6.11 ([N95b]) *Sei $\vartheta \neq 1$ und $m(\vartheta) = 2$ und C enthalte einen Zykel der Länge $k \neq 4$. Falls $k \equiv 2 \mod 4$, sei zusätzlich $\vartheta^k \neq 1$. Dann ist M Tensorprodukt eines zyklischen Modells der Dimension k mit einem Spinmodell der Dimension $|X|/k$. Ist insbesondere $k = |X|$, so ist M ein zyklisches Modell.*

Um diesen Satz beweisen zu können, brauchen wir erst eine Reihe von Lemmata. Vorher allerdings sehen wir uns noch einmal die zyklischen Modelle aus Abschnitt 4.1 mit der hier verwendeten Normalisierung an:

Lemma 6.12 *Die Matrix W mit $W[\alpha, \beta] = \vartheta^{(\alpha-\beta)^2}$ ist Spinmodell genau dann, wenn ϑ primitive n-te Einheitswurzel, falls n ungerade bzw. primitive $2n$-te Einheitswurzel, falls n gerade.*

Beweis. Die eine Richtung ist in Satz 4.4. Umgekehrt sei W ein Spinmodell: die Typ II Gleichungen sind dann

$$n\delta_{\alpha\beta} = \sum_j \vartheta^{(\alpha-j)^2-(\beta-j)^2} = \vartheta^{\alpha^2-\beta^2} \sum_j \vartheta^{2j(\beta-\alpha)}$$

Insbesondere für $\beta = 0$:

$$\sum_j \left(\vartheta^{2\alpha}\right)^j = 0 \text{ für alle } \alpha \neq 0$$

D.h. $\vartheta^{2\alpha}$ ist n-te Einheitswurzel ungleich 1 für alle $\alpha \neq 0$. Für ungerades n folgt, daß ϑ primitive n-te Einheitswurzel ist, für gerades n, daß ϑ^2 primitive n-te Einheitswurzel ist, d.h. ϑ ist primitive $2n$-te Einheitswurzel. □

Lemma 6.13 *C ist disjunkte Vereinigung von k-Zykeln.*

Beweis. Nach Satz 2.18 ist C zweireguläre Relation oder Vereinigung zweier perfekter Matchings in einem symmetrischen CAS. Nach Lemma A.52 ist C also Vereinigung gleich langer Zykel. □

Für das folgende halten wir $\vartheta \neq 1$ mit $m(\vartheta) = 2$ fest. Eine Folge $(\alpha_0, \dots, \alpha_l)$ paarweise verschiedener $\alpha_i \in X$ heiße *Pfad* der Länge l, wenn für alle $i < l$ $W[\alpha_i, \alpha_{i+1}] = \vartheta$. Ein *Zykel* der Länge k ist ein Pfad $(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ mit $W[\alpha_{k-1}, \alpha_0] = \vartheta$ (nach obigem Lemma 6.13 ist C eine disjunkte Vereinigung von Zyklen der Länge k).

Lemma 6.14 *Sei $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ Pfad, $a = W[\alpha_2, \alpha_0]$. Dann ist $a = \pm 1$ oder $a = \vartheta^4$. Wenn $a = \vartheta$ (d.h. $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ ein Zykel der Länge 3), so gilt $\vartheta^3 = 1$.*

Beweis. Betrachte für $Y = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$, $Z = \{(\alpha_1, \alpha_0), (\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_2, \alpha_1)\}$

$$N_{Y,Z} = \begin{bmatrix} \vartheta & a^{-1}\vartheta & a\vartheta^{-1} \\ \vartheta^{-1} & \vartheta^{-1} & \vartheta \\ a^{-1}\vartheta & \vartheta & \vartheta^{-1} \end{bmatrix}$$

Nach Satz 2.28 ist $a^{-2}\vartheta^{-1}(a - \vartheta^4)(a^2 - 1) = 0$, also $a = \pm 1$ oder $a = \vartheta^4$.

Gilt $a = \vartheta$, so sei $Y = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$ und $Z = \{(\alpha_1, \alpha_0), (\alpha_0, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2)\}$, also

$$N_{Y,Z} = \begin{bmatrix} \vartheta & \vartheta^{-1} & 1 \\ \vartheta^{-1} & 1 & \vartheta^{-1} \\ 1 & \vartheta & \vartheta \end{bmatrix}$$

Mit Satz 2.28 $\vartheta^{-2}(\vartheta - 1)(\vartheta^3 - 1) = 0$, und daher die Behauptung, weil $\vartheta \neq 1$.
□

Lemma 6.15 *Sei* $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *Pfad, aber kein Zykel. Dann sind* $W[\alpha_0, \alpha_2] = W[\alpha_1, \alpha_3] = \vartheta^4$ *und* $W[\alpha_0, \alpha_3] = \vartheta^9$.

Beweis. Setze $a = W[\alpha_0, \alpha_2]$, $b = W[\alpha_1, \alpha_3]$, $c = W[\alpha_0, \alpha_3]$. Für $Y = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$ und $Z = \{(\alpha_1, \alpha_0), (\alpha_2, \alpha_1), (\alpha_2, \alpha_3)\}$ betrachte

$$N_{Y,Z} = \begin{bmatrix} \vartheta & a\vartheta^{-1} & ac^{-1} \\ \vartheta^{-1} & \vartheta & b^{-1}\vartheta \\ a^{-1}\vartheta & \vartheta^{-1} & \vartheta^{-1} \end{bmatrix}$$

Nach Satz 2.28 ist $\vartheta^{-2}(a - \vartheta^4)(c^{-1} - \vartheta^{-1}) = 0$, wegen $c \neq \vartheta$ also $a = \vartheta^4$. Ebenso $b = \vartheta^4$.
Als nächstes wählen wir $Y = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3\}$ und $Z = \{(\alpha_1, \alpha_0), (\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_2, \alpha_3)\}$ und erhalten

$$N_{Y,Z} = \begin{bmatrix} \vartheta & a^{-1}\vartheta & ac^{-1} \\ \vartheta^{-1} & \vartheta^{-1} & b^{-1}\vartheta \\ bc^{-1} & b\vartheta^{-1} & \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vartheta & \vartheta^{-3} & c^{-1}\vartheta^4 \\ \vartheta^{-1} & \vartheta^{-1} & \vartheta^{-3} \\ c^{-1}\vartheta^4 & \vartheta^3 & \vartheta \end{bmatrix}$$

Nach Satz 2.28 ist daher $c^{-1}\vartheta^6(c^{-1} - \vartheta^{-9})(c - \vartheta) = 0$, und wegen $c \neq \vartheta$ also $c = \vartheta^9$. □

Korollar 6.16 *Wenn* $k > 4$ *ist, gilt* $\vartheta^8 \neq 1$.

Beweis. Sei $(\alpha_0, \ldots, \alpha_4)$ so ein Pfad (existiert nach Voraussetzung). Dann sind α_2 und α_4 die Nachbarn von α_3, insbesondere ist $W[\alpha_3, \alpha_0] \neq \vartheta$. Mit Lemma 6.15 folgt $W[\alpha_3, \alpha_0] = \vartheta^9$, also $\vartheta^8 \neq 1$. □

Lemma 6.17 *Seien* $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ $(k \geq 4)$ *so, daß* $(\alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \alpha_{i+3}, \alpha_{i+4})$ *für alle* $i \leq k - 4$ *Pfad ist. Dann gilt*

$$W[\alpha_i, \alpha_j] = \vartheta^{(i-j)^2} \text{ für alle } i, j$$

Beweis. Durch Induktion nach $l = |i - j|$: für $l \leq 3$ folgt die Behauptung aus Lemma 6.15. Sei $l > 3$ und angenommen, die behauptete Gleichung gelte für alle i, j mit $|i-j| < l$. Wähle i, j mit $l = j-i$, und sei $a = W[\alpha_i, \alpha_j]$. Betrachte $N_{Y,Z}$ für $Y = \{\alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}\}$, $Z = \{(\alpha_{i+1}, \alpha_i), (\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}), (\alpha_{j-1}, \alpha_j)\}$: dann ist nach Satz 2.28

$$\begin{aligned}
0 = \det N_{Y,Z} &= \det \begin{bmatrix} \vartheta & \vartheta^{-3} & \vartheta^{(l-1)^2} a^{-1} \\ \vartheta^{-1} & \vartheta^{-1} & \vartheta^{(l-2)^2-(l-1)^2} \\ \vartheta^{-3} & \vartheta & \vartheta^{(l-3)^2-(l-1)^2} \end{bmatrix} \\
&= \vartheta^{-2l+1} \det \begin{bmatrix} \vartheta & \vartheta^{-3} & \vartheta^{l^2} a^{-1} \\ \vartheta^{-1} & \vartheta^{-1} & \vartheta^{2} \\ \vartheta^{-3} & \vartheta & \vartheta^{4} \end{bmatrix} \\
&= \vartheta^{-2l+1}(1-\vartheta^{-4})(a^{-1}\vartheta^{l^2}-1)
\end{aligned}$$

Daher wegen $\vartheta^4 \neq 1$ (Korollar 6.16) $a = \vartheta^{l^2}$. □

Korollar 6.18 *Sei $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$ Zykel der Länge $k \neq 4$. Dann gilt*

$$W[\alpha_i, \alpha_j] = \vartheta^{(i-j)^2} \textit{ für alle } i, j$$

Beweis. Für $k = 3$ folgt aus Lemma 6.14 $\vartheta^3 = 1$, also $W[\alpha_0, \alpha_2] = \vartheta = \vartheta^4$. Für $k > 4$ folgt die Behauptung aus Lemma 6.17. □

Korollar 6.19 *Ist W Spinmodell, $m(\vartheta) = 2$ und $n \neq 4$. Gibt es einen Zykel der Länge n, so ist W ein zyklisches Modell.*

Beweis. Aus dem vorangehenden Korollar 6.18 erhalten wir alle Einträge von W, und dies liefert nach Satz 4.4 ein zyklisches Spinmodell. □

Lemma 6.20 *Ist $k \neq 4$, so gilt $\vartheta^{2k} = 1$. Ist k ungerade, so gilt sogar $\vartheta^k = 1$.*

Beweis. Wegen Lemma 6.14 können wir $k > 4$ voraussetzen. Sei $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$ ein Zykel der Länge k, und $\alpha_k = \alpha_0$. Dann ist Lemma 6.17 anwendbar und es folgt zunächst für gerades $k = 2\varkappa$:

$$\vartheta^{(\varkappa-1)^2} = W[\alpha_{\varkappa-1}, \alpha_0] = W[\alpha_{\varkappa-1}, \alpha_k] = \vartheta^{(\varkappa+1)^2}$$

also $\vartheta^{2k} = \vartheta^{4\varkappa} = 1$. Ähnlich, wenn $k = 2\varkappa + 1$ ungerade:

$$\vartheta^{\varkappa^2} = W[\alpha_{\varkappa}, \alpha_0] = W[\alpha_{\varkappa}, \alpha_k] = \vartheta^{(\varkappa+1)^2}$$

also $\vartheta^k = \vartheta^{2\varkappa+1} = 1$. □

Lemma 6.21 *Für k und ϑ gilt eines der folgenden:*

(1) $k = p^f$ mit ungerader Primzahl p, $f \geq 1$ und ϑ ist eine primitive k-te Einheitswurzel.

(2) $k = 2p^f$ mit ungerader Primzahl p, $f \geq 1$ und ϑ ist eine primitive k-te oder $2k$-te Einheitswurzel.

(3) $k = 2^f$ mit $f \geq 3$ und ϑ ist eine primitive $2k$-te Einheitswurzel.

Beweis. (1) Sei zunächst k ungerade: es ist bekannt, daß es genau für ungerade Primpotenzen nicht mehr als zwei Lösungen modulo k der Gleichung $y^2 \equiv 1 \mod k$ gibt (für die Notwendigkeit: es gibt immer die Lösungen ± 1, und falls k nicht von der angegebenen Gestalt ist, kann man sich weitere mittels chinesischem Restsatz aus Lösungen der Gleichung modulo Teilern von k konstruieren). Gibt es aber y mit $1 < y < k-1$ mit $y^2 \equiv 1 \mod \operatorname{ord}(\vartheta)$, so folgt mit Lemma 6.20 und Lemma 6.17 $W[\alpha_y, \alpha_0] = \vartheta^{y^2} = \vartheta$, ein Widerspruch zu $m(\vartheta) = 2$. Also ist k Primpotenz und $\operatorname{ord}(\vartheta) = k$, d.h. ϑ ist primitive k-te Einheitswurzel.

(2) Sei k gerade und habe den ungeraden Primteiler p. Es darf (wie eben) kein y mit $1 < y < k-1$ geben, so daß $y^2 \equiv 1 \mod \operatorname{ord}(\vartheta)$, daher ist $\operatorname{ord}(\vartheta) = k$ oder $= 2k$. Es ist bekannt, daß es genau für das zweifache ungerader Primpotenzen nicht mehr als zwei Lösungen modulo k der Gleichung $y^2 \equiv 1 \mod k$ gibt, und daß für diese dann sogar $y^2 \equiv 1 \mod 2k$ gilt, sieht man unmittelbar ein.

Es bleibt der Fall (3): $k = 2^f$, $f \geq 3$ wegen $k \neq 4$. Wiederum darf es kein y mit $1 < y < k-1$ geben, so daß $y^2 \equiv 1 \mod \operatorname{ord}(\vartheta)$, und daher ist $\operatorname{ord}(\vartheta) = k$ oder $= 2k$. Da für $f \geq 3$ die Gleichung $y^2 \equiv 1 \mod 2^f$ vier Lösungen modulo 2^f hat, folgt $\operatorname{ord}(\vartheta) = 2k$. □

Korollar 6.22 *Sei W Spinmodell, $m(\vartheta) = 2$ mit $\vartheta^k \neq 1$ für $k \equiv 2 \mod 4$ und C ein Zykel der Länge $k \neq 4$. Dann ist $W|_{C\times C}$ ein zyklisches Modell.*

Beweis. Nach Lemma 6.21 und Voraussetzung ist ϑ primitive k-te Einheitswurzel für ungerades k, primitive $2k$-te Einheitswurzel für gerades k. Für $C = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$ ist ferner $W[\alpha_i, \alpha_j] = \vartheta^{(i-j)^2}$, also folgt mit Lemma 6.12 die Behauptung. □

Im folgenden sei $C = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$ ein fester Zykel der Länge $k \neq 4$. Die Indizes der α dehnen wir auf die ganzen Zahlen aus, indem wir sie modulo k verstehen: damit gilt für beliebige i, j $W[\alpha_i, \alpha_j] = \vartheta^{(i-j)^2}$.

Lemma 6.23 *Für $x \in X$ seien $a_i = W[x, \alpha_i]$. Dann gilt für alle i*

$$a_{i-1}a_{i+1} = a_i^2\vartheta^2$$

Beweis. Wegen $W[\alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}] = \vartheta^4$ ist für $Y = \{\alpha_{i-1}, \alpha_i, x\}$, $Z = \{(\alpha_{i-1}, \alpha_i), (\alpha_i, \alpha_{i-1}), (\alpha_i, \alpha_{i+1})\}$

$$N_{Y,Z} = \begin{bmatrix} \vartheta^{-1} & \vartheta & \vartheta^{-3} \\ \vartheta & \vartheta^{-1} & \vartheta^{-1} \\ a_{i-1}a_i^{-1} & a_{i-1}^{-1}a_i & a_i a_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}$$

Mit Satz 2.28 folgt $(a_{i-1}a_i^{-1} - a_i a_{i+1}^{-1}\vartheta^2)(1 - \vartheta^4) = 0$, also wegen $\vartheta^4 \neq 1$ die Behauptung. □

Lemma 6.24 *Für $x \in X$ seien $a_i = W[x, \alpha_i]$. Dann gilt für alle i*

$$a_i = a_0^{1-i}a_1^i\vartheta^{i(i-1)}, \textit{ insbesondere } a_0^k = a_1^k\vartheta^k$$

Beweis. Wir verwenden Induktion nach i. Offenbar ist die Gleichung erfüllt für $i = 0, 1$, sei also $i > 1$: dann gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$a_{i-1} = a_0^{1-(i-1)}a_1^{i-1}\vartheta^{(i-1)(i-2)}, \; a_{i-2} = a_0^{1-(i-2)}a_1^{i-2}\vartheta^{(i-2)(i-3)}$$

Nach Lemma 6.23 folgt

$$\begin{aligned} a_i &= a_{i-2}^{-1}a_{i-1}^2\vartheta^2 \\ &= a_0^{-1+(i-2)+2-2(i-1)}a_1^{-(i-2)+2(i-1)}\vartheta^{-(i-3)(i-2)+2(i-2)(i-1)+2} \\ &= a_0^{1-i}a_1^i\vartheta^{i(i-1)} \end{aligned}$$

Wegen $\alpha_k = \alpha_0$ hat man ferner

$$\begin{aligned} a_0 = a_k &= a_0^{1-k}a_1^k\vartheta^{k(k-1)}, \text{ d.h.} \\ a_0^k &= a_1^k\vartheta^{k(k-1)} = a_1^k\vartheta^k \end{aligned}$$

(letzteres, da $\vartheta^{k^2} = 1$!). □

Lemma 6.25 *Für $x \in X$ seien $a_i = W[x, \alpha_i]$, und für $k \equiv 2 \mod 4$ sei $\vartheta^k \neq 1$. Dann gibt es m mit $a_{m+1} = a_m\vartheta$.*

Beweis. Sei zunächst k ungerade: Nach Lemma 6.21 ist ϑ primitive k-te Einheitswurzel, und da nach Lemma 6.24 $a_0^k = a_1^k$, gibt es l mit $a_1 = a_0\vartheta^l$. Wir erhalten, wieder nach Lemma 6.24, daß

$$a_i = a_0^{1-i}\left(a_0\vartheta^l\right)^i \vartheta^{i(i-1)} = a_0\vartheta^{i(i+l-1)}$$

also gilt $a_{m+1} = a_m\vartheta$ genau wenn $(m+1)(l+m) \equiv m(l+m-1)+1 \mod k$, was äquivalent ist zu $2m \equiv 1-l \mod k$, und diese Gleichung ist modulo k eindeutig lösbar.
Ist k gerade, so ist nach Lemma 6.21 und Voraussetzung ϑ primitive $2k$-te Einheitswurzel. Wegen $\vartheta^k = -1$ erhalten wir mit Lemma 6.24 $a_0^k = -a_1^k$, also $a_0^{2k} = a_1^{2k}$, und es gibt l mit $a_1 = a_0\vartheta^l$. Dabei ist l ungerade, da sonst $a_0^k = a_1^k$ wäre. Wie vorher erhalten wir, daß $a_{m+1} = a_m$ genau, wenn $2m \equiv 1-l \mod 2k$, was wegen $1-l$ gerade eindeutig modulo k lösbar ist. □

Im weiteren Verlauf sei $D = (\beta_0, \dots, \beta_{k-1})$ ein weiterer Zykel. Wir wollen die $\lambda_{ij} = W[\alpha_i, \beta_j]$ $(\lambda = \lambda_{00})$ bestimmen:

Lemma 6.26 *Wenn $\lambda_{01} = \vartheta\lambda$, so folgt:*
(1) $\lambda_{10} = \lambda_{01}$.
(2) $\lambda_{11} = \lambda$ oder $\lambda_{11} = \lambda\vartheta^4$

Beweis. (1) Für $Y = \{\alpha_0, \beta_0, \beta_1\}$, $Z = \{(\alpha_0, \alpha_1), (\beta_0, \beta_1), (\beta_1, \beta_0)\}$ ist

$$N_{Y,Z} = \begin{bmatrix} \vartheta^{-1} & \vartheta^{-1} & \vartheta \\ \lambda\lambda_{10}^{-1} & \vartheta^{-1} & \vartheta \\ \lambda\vartheta\lambda_{11}^{-1} & \vartheta & \vartheta^{-1} \end{bmatrix}$$

also $(\lambda\lambda_{10}^{-1} - \vartheta^{-1})(\vartheta^4 - 1)\vartheta^{-2} = 0$, wegen $\vartheta^4 \neq 1$ somit die Behauptung.
(2) Nach (1) ist $\lambda_{10} = \lambda\vartheta$, also mit Lemma 6.23

$$\lambda_{20} = \lambda_{00}^{-1}\lambda_{10}^2\vartheta^2 = \lambda\vartheta^4$$

Und weiter nach Lemma 6.23

$$\lambda_{21} = \lambda_{01}^{-1}\lambda_{11}^2\vartheta^2 = \lambda^{-1}\lambda_{11}^2\vartheta$$

also

$$\lambda_{20}\lambda_{21}^{-1} = \lambda\vartheta^4(\lambda^{-1}\lambda_{11}^2\vartheta)^{-1} = \lambda^2\lambda_{11}^2\vartheta^3$$

Für $Y = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$, $Z = \{(\alpha_0, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_0), (\beta_0, \beta_1)\}$ wird damit

$$N_{Y,Z} = \begin{bmatrix} \vartheta^{-1} & \vartheta & \vartheta^{-1} \\ \vartheta & \vartheta^{-1} & \lambda\lambda_{11}^{-1}\vartheta \\ \vartheta^3 & \vartheta^{-3} & \lambda^2\lambda_{11}^{-2}\vartheta^3 \end{bmatrix}$$

woraus mit Satz 2.28 $\vartheta(1-\vartheta^4)(\lambda\lambda_{11}^{-1}-1)(\lambda^2\lambda_{11}^{-2}-\vartheta^{-4}) = 0$ folgt, also wegen $\vartheta^4 \neq 1$ die Behauptung. □

Lemma 6.27 *Wenn $\lambda_{01} = \vartheta\lambda$ und $\lambda_{11} = \lambda$, so gilt für alle i, j:*

$$\lambda_{ij} = \lambda\vartheta^{(i-j)^2}$$

Beweis. Wir beweisen die Formel durch Induktion nach $l = i + j$ $(i, j \geq 0)$: nach Lemma 6.26 ist sie für $l = 0, 1$ richtig, sei also zunächst $l = 2$. Dann hat man mit Lemma 6.23

$$\lambda_{20} = \lambda_{00}^{-1}\lambda_{10}^2\vartheta^2 = \lambda\vartheta^4$$

und analog $\lambda_{02} = \lambda\vartheta^4$. $\lambda_{11} = \lambda$ gilt nach Voraussetzung. Sei nun $l = i+j > 2$. Wegen Symmetrie können wir $i \leq j$ annehmen, insbesondere $j \geq 2$. Dann wird mit Lemma 6.23 und Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &= \lambda_{i,j-2}^{-1}\lambda_{i,j-1}^2\vartheta^2 \\ &= \left(\lambda\vartheta^{(i-j+2)^2}\right)^{-1}\left(\lambda\vartheta^{(i-j+1)^2}\right)^2\vartheta^2 \\ &= \lambda\vartheta^{(i-j)^2} \end{aligned}$$

□

Lemma 6.28 *Sei $\vartheta^k \neq 1$ für $k \equiv 2 \mod 4$. Dann kann man jeden Zykel E so numerieren, d.h. $E = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{k-1})$ schreiben, daß für alle i, j*

$$W[\alpha_i, \gamma_j] = W[\alpha_0, \gamma_0]\vartheta^{(i-j)^2}$$

Beweis. Alle Zykel haben nach Lemma 6.13 die gleiche Länge k. Sei E irgendwie indiziert, dann gibt es nach Lemma 6.25 ein m mit $W[\alpha_0, \gamma_{m+1}] = W[\alpha_0, \gamma_m]\vartheta$. Durch Rotation der Indizes können wir dabei $m = 0$ annehmen. Nach Lemma 6.26.(2) ist (mit $a = W[\alpha_0, \gamma_0]$) $W[\alpha_1, \gamma_1] = a$ oder

$W[\alpha_1, \gamma_1] = a\vartheta^4$. Im ersten Fall sind wir mittels Lemma 6.27 fertig. Nehmen wir also den zweiten Fall an: mit Lemmata 6.23 und 6.26.(1) gilt

$$W[\alpha_1, \gamma_{k-1}] = W[\alpha_1, \gamma_1]^{-1} W[\alpha_1, \gamma_0]^2 \vartheta^2 = \left(a\vartheta^4\right)^{-1} (a\vartheta)^2 \vartheta^2 = a$$
$$W[\alpha_0, \gamma_{k-1}] = W[\alpha_0, \gamma_1]^{-1} W[\alpha_0, \gamma_0]^2 \vartheta^2 = (a\vartheta)^{-1} a^2 \vartheta^2 = a\vartheta$$

Kehren wir also E um, indem wir $\gamma'_i = \gamma_{k-i}$ setzen, so ist

$$W[\alpha_0, \gamma'_0] = a = W[\alpha_1, \gamma'_1], \;\; W[\alpha_0, \gamma'_1] = a\vartheta = W[\alpha_1, \gamma'_0]$$

und mit Lemma 6.27 folgt die Behauptung. □

Lemma 6.29 *Sei $\lambda_{10} = \lambda_{01} = \lambda\vartheta$ und $\lambda_{11} = \lambda$. Dann gilt für alle $x \in X$: $W[x, \alpha_1] = W[x, \alpha_0]\vartheta$ impliziert $W[x, \beta_1] = W[x, \beta_0]\vartheta$.*

Beweis. Sei $a_i = W[\alpha_i, x]$, $b_i = W[\beta_i, x]$, somit $a_1 = a_0\vartheta$ und für $Y = \{\alpha_0, \alpha_1, c\}$, $Z = \{(\alpha_0, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_0), (\beta_0, \beta_1)\}$ ist

$$N_{Y,Z} = \begin{bmatrix} \vartheta^{-1} & \vartheta & \vartheta^{-1} \\ \vartheta & \vartheta^{-1} & \vartheta \\ \vartheta^{-1} & \vartheta & b_0 b_1^{-1} \end{bmatrix}$$

also nach Satz 2.28 $\vartheta^{-2}(1 - \vartheta^4)(b_0 b_1^{-1} - \vartheta^{-1}) = 0$, d.h. wegen $\vartheta^4 \neq 1$ $b_1 = b_0\vartheta$. □

Lemma 6.30 *Sei $E = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{k-1})$ Zykel, und sei für alle i, j*

$$W[\alpha_i, \beta_j] = W[\alpha_0, \beta_0]\vartheta^{(i-j)^2}, \quad W[\alpha_i, \gamma_j] = W[\alpha_0, \gamma_0]\vartheta^{(i-j)^2}$$

Dann ist für alle i, j

$$W[\beta_i, \gamma_j] = W[\beta_0, \gamma_0]\vartheta^{(i-j)^2}$$

Beweis. Wegen $W[\alpha_0, \beta_1] = W[\alpha_1, \beta_0] = \lambda\vartheta$, $\lambda = W[\alpha_1, \beta_1]$ und $W[\alpha_1, \gamma_0] = W[\alpha_0, \gamma_0]\vartheta$, folgt aus Lemma 6.29 (mit $x = \gamma_0$) $W[\beta_1, \gamma_0] = W[\beta_0, \gamma_0]\vartheta$. Durch Umnumerieren ($\beta'_i = \beta_{1-i}$, $\gamma'_i = \gamma_{1-i}$) erhält man ebenso $W[\gamma_0, \beta_1] = W[\beta_1, \gamma_1]\vartheta$. Da nach Lemma 6.26.(1) $W[\beta_0, \gamma_1] = W[\beta_1, \gamma_0]$, folgt $W[\beta_1, \gamma_1] = W[\beta_0, \gamma_0]$, also mit Lemma 6.27 die Behauptung. □

Nun sind wir soweit, den anfangs behaupteten Satz zu zeigen:

Beweis von Satz 6.11. Seien $C_1, \ldots, C_m$ die Zykeln von M, die nach Lemma 6.13 alle die gleiche Länge k haben. Wähle eine beliebige Indizierung für C_1, d.h.

$$C_1 = \{\alpha_{1,0}, \ldots, \alpha_{1,k-1}\}$$

Nach Lemma 6.28 kann man die anderen Zykel so anordnen,

$$C_r = \{\alpha_{r,0}, \ldots, \alpha_{r,k-1}\},$$

daß für alle r, i, j (für $r = 1$ mit Korollar 6.18)

$$W[\alpha_{1,i}, \alpha_{r,j}] = W[\alpha_{1,0}, \alpha_{r,0}]\vartheta^{(i-j)^2}$$

Dann gilt nach Lemma 6.30 für alle r, s, i, j

$$W[\alpha_{r,i}, \alpha_{s,j}] = W[\alpha_{r,0}, \alpha_{s,0}]\vartheta^{(i-j)^2}$$

Nun setze $X_1 = \{\alpha_{1,i} | i = 0, \ldots, k-1\}$, $X_2 = \{\alpha_{r,0} | r = 1, \ldots, m\}$. Dann erhält man durch Einschränkung von W auf X_j $M_j = (X_j, W_+^{(j)}, W_-^{(j)})$ $(j = 1, 2)$, und nach Korollar 6.22 ist M_1 zyklisches Spinmodell. Mit der Identifizierung von $X_1 \times X_2$ mit X vermöge

$$(\alpha_{1,i}, \alpha_{r,0}) \longmapsto \alpha_{r,i}$$

sieht man $W_+ = W_+^{(1)} \otimes W_+^{(2)}$ und $W_- = W_-^{(1)} \otimes W_-^{(2)}$ unmittelbar ein, also ist nach Satz 6.4 M_2 Spinmodell und $M \cong M_1 \otimes M_2$. $\square$

Kapitel 7

Kleine Spinmodelle

In diesem Kapitel werden wir symmetrische Spinmodelle bis zur Dimension 11, unsymmetrische vom Jonestyp bis zur Dimension 7 klassifizieren.

7.1 Klassifikation kleiner symmetrischer Modelle

Im Abschnitt A.6 befindet sich eine vollständige Liste der symmetrischen CAS auf bis zu 11 Punkten. Nach Satz 2.18 sind in deren Bose-Mesner-Algebren alle Spinmodelle M bis zur Dimension 11 enthalten. Wir gebrauchen die Sprechweise „M liegt in $\mathcal{A}$“ für die Tatsache, daß W_+, W_- in der Bose-Mesner-Algebra von $\mathcal{A}$ liegen. Nach diesem Satz können wir uns ferner auf selbstduale CAS beschränken. Wir klassifizieren die Spinmodelle nach der kleinsten Bose-Mesner-Algebra, in der sie vorkommen und geben wo möglich eine Realisierung als Tensorprodukt an. Die in jeder Dimension vorkommenden Potts-Modelle (Abschnitt 3.1) geben wir dabei nicht an. Stillschweigend benutzen wir die Notation $W_+ = \sum_i t_i A_i$, wobei die Relationen A_i gemäß der Tabelle in Abschnitt A.6 angeordnet seien.

Bemerkung 7.1 *In einer gemeinsamen Arbeit [BJS94] haben Bannai, Jaeger und Sali symmetrische Spinmodelle bis zur Dimension 7 klassifiziert.*

M liegt in $\mathcal{A}_1^{(4)}$

Diesen Fall haben wir schon in Abschnitt 3.2 abgehandelt: M ist ein Spinmodell Sq_a^ϵ (siehe Satz 3.4), $a \in \mathbf{C}^\times, \epsilon = \pm 1$.

M liegt in $\mathcal{A}_2^{(4)}$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß t_1, t_2, t_3 paarweise verschieden sind, da M sonst nach Satz 3.1 in einem kleineren selbstdualen CAS liegt, also in $\mathcal{P}(4)$ oder in $\mathcal{A}_1^{(4)}$. Nach Satz 2.30 ist daher für alle i: $(t_i/t_0)^4 = 1$, es gibt also ein i mit $t_i \neq \pm t_0$. Nach Satz 6.10 ist M also Tensorprodukt zweier Potts-Modelle der Dimension 2.

M liegt in $\mathcal{A}_1^{(5)}$

Diesen Fall haben wir schon in Abschnitt 3.2 abgehandelt: M ist eines der Spinmodelle auf dem Pentagon, also ist M ein zyklisches Modell (vgl. Abschnitt 4.1).

M liegt in $\mathcal{A}_3^{(6)}$

Nach Korollar 6.7 ist M ein Produkt eines zweidimensionalen mit einem dreidimensionalen Potts-Modell.

M liegt in $\mathcal{A}_1^{(7)}$

Ohne Einschränkung sind t_1, t_2, t_3 paarweise verschieden, da M sonst in einem kleineren selbstdualen CAS, also in $\mathcal{P}(7)$ liegt. Also ist $m(t_i) = 2$ für ein $i > 0$, nach Satz 6.11 ist also M ein zyklisches Modell.

M liegt in $\mathcal{A}_3^{(8)}$

Nach Korollar 6.7 ist M ein Produkt eines zweidimensionalen mit einem vierdimensionalen Potts-Modell.

M liegt in $\mathcal{A}_4^{(8)}$

Ohne Einschränkung sind t_1, t_2, t_3 paarweise verschieden, da wir sonst im Fall $m = 2$ (Abschnitt 3.2) sind: dann wäre aber entweder 8 Quadratzahl oder es gäbe einen Konferenzgraphen auf 8 Ecken, was beides ein Widerspruch ist. Wäre andererseits $m(t_2) = 1$ und $t_2 \neq -t_0$, so wäre M nach Satz 6.10 Tensorprodukt eines zweidimensionalen Potts-Modells mit einem Spinmodell, das aber nur ein Potts-Modell sein könnte, aus Gradgründen ein Widerspruch.

Also ist $t_2 = \epsilon t_0$ mit $\epsilon = \pm 1$. Nach Satz 2.22 gilt mit der ersten Eigenmatrix P $PT = dT_-$, d.h.

$$\begin{aligned} t_0 + 2t_1 + \epsilon t_0 + 4t_3 &= dt_0^{-1} \\ t_0 - 2t_1 + \epsilon t_0 &= dt_1^{-1} \\ t_0 + 2t_1 + \epsilon t_0 - 4t_3 &= \epsilon dt_0^{-1} \\ t_0 - \epsilon t_0 &= dt_3^{-1} \end{aligned}$$

Aus der dritten Gleichung folgt $\epsilon = -1$, durch Addition der nullten und der zweiten der Widerspruch $4t_1 = 0$. Also gibt es in $\mathcal{A}_4^{(8)}$ keine Spinmodelle außer dem Potts-Modell.

M liegt in $\mathcal{A}_5^{(8)}$

Ohne Einschränkung sind $t_1, \ldots, t_4$ paarweise verschieden, da sonst M nach Satz 3.1 in einem kleineren CAS liegt. Insbesondere ist $m(t_1) = 2$ oder $m(t_3) = 2$, also ist M nach Satz 6.11 ein zyklisches Modell der Dimension 8.

M liegt in $\mathcal{A}_8^{(8)}$

Ohne Einschränkung gibt es unter $t_1, \ldots, t_5$ nur höchstens eine Gleichung: sonst ist M nach Satz 3.1 in einem kleineren CAS. Sind $t_1, \ldots, t_5$ paarweise verschieden, so muß für ein $i \in \{1, 4, 5\}$ $m(t_i) = 1$ und $t_i \neq -t_0$ sein, also ist M Tensorprodukt eines zweidimensionalen Potts-Modells mit einem vierdimensionalen Spinmodell (d.h. einem Sq_a^ϵ, oder einem Potts-Modell, oder einem Produkt zweier Potts-Modelle). Nun können wir $t_2 \neq t_3$ annehmen, da sonst M in $\mathcal{A}_7^{(8)}$ liegt. Ebenso $t_1 \neq t_5$, da M sonst in $\mathcal{A}_6^{(8)}$ liegt. Für $t_4 = t_1$ (bzw. $t_4 = t_5$) folgt aus $PT = dT_-$, daß $t_5 \neq \pm t_0$ (bzw. $t_1 \neq \pm t_0$) ist, also (wegen $m(t_5) = 1$ bzw. $m(t_1) = 1$) ist ebenfalls M Tensorprodukt mit einem zweidimensionalen Potts-Modell. Also können wir ab hier $t_2 \neq t_3$ und $t_1 \neq t_4 \neq t_5 \neq t_1$ annehmen und daß $\{t_2, t_3\} \cap \{t_1, t_4, t_5\}$ einelementig ist. Sei das gemeinsame Element t_i ($i \in \{1, 4, 5\}$): da es unter $t_1, \ldots, t_5$ keine weiteren Gleichungen gibt, ist wiederum M Tensorprodukt mit einem zweidimensionalen Potts-Modell, außer $\{t_1, t_4, t_5\} \backslash \{t_i\} = \{t_0, -t_0\}$. Bis auf simultane Zeilen-/Spaltenpermutationen gibt es nur die im Anhang gegebene Eigenmatrix P, und wir haben folgende Fälle:

- $t_0 = t_1 = -t_4$: aus der nullten mit der vierten Gleichung von $PT = dT_-$ folgt $t_5 = -t_0 = t_4$, ein Widerspruch.

- $t_0 = t_4 = -t_1$: aus der nullten mit der ersten Gleichung folgt $t_2 = -t_0 = t_4$, Widerspruch.

- $t_1 = -t_5 = \pm t_0$: aus der ersten und der fünften Gleichung folgt durch Addition $t_4 = -t_0 \in \{t_1, t_5\}$, Widerspruch.

- $t_0 = t_5 = -t_4$: aus der nullten und der vierten Gleichung folgt $t_1 = -t_0 = t_4$, Widerspruch.

- $t_0 = t_4 = -t_5$: aus der vierten und der fünften Gleichung folgt $t_2 = t_0 = t_4$, Widerspruch.

Es gibt also in $\mathcal{A}_8^{(8)}$ keine weiteren Spinmodelle.

M liegt in $\mathcal{A}_9^{(8)}$

Ohne Einschränkung gibt es unter $t_1, \ldots, t_7$ höchstens drei Gleichungen, da sonst M nach Satz 3.1 in einem kleineren CAS liegt. Hat man verschiedene $i, j > 0$ mit $m(t_i) = m(t_j) = 1$, so faktorisiert M nach Satz 6.10 mit einem zweidimensionalen Potts-Modell. Von nun an nehmen wir an, daß es höchstens ein $i > 0$ gibt mit $m(t_i) = 1$, und dann notwendig $t_i = -t_0$. Es gibt dann allenfalls noch ein $j > 0$ mit $t_j = t_0$, und für alle anderen Indizes $k > 0$ ist $m(t_k) \geq 2$. Damit folgt (wie in Korollar 2.31) $m(W_+) \leq 4$, d.h. es gibt tatsächlich drei Gleichungen unter $t_1, \ldots, t_7$. Es gibt nicht vier gleiche unter $t_1 \ldots, t_7$, sonst bleiben zwei verschiedene mit Vielfachheit 1, und das Spinmodell faktorisiert wie eben erklärt. Damit bleiben zwei Hauptfälle:
I. Es gibt $i(1), i(2), i(3), j(1), j(2), l(1), l(2)$ mit $\{i(1), i(2), i(3), j(1), j(2), l(1), l(2)\} = \{1, \ldots, 7\}$ und $t_{i(1)} = t_{i(2)} = t_{i(3)}$, $t_{j(1)} = t_{j(2)}$, $t_{l(1)} = t_0$, $t_{l(2)} = -t_0$.
II. Es gibt $i(k), j(k)$ mit $t_{i(k)} = t_{j(k)}$ $(k = 1, 2, 3)$ und l mit $t_l = \pm t_0$ so, daß $\{i(1), i(2), i(3), j(1), j(2), j(3), l\} = \{1, \ldots, 7\}$.
Wir nutzen nun die hohe Symmetrie von $\mathcal{A}_9^{(8)}$ aus: seine Automorphismen entsprechen nämlich bijektiv den Gruppenautomorphismen von $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$, und diese sind gerade die $\mathbb{F}_2$-Vektorraum-Automorphismen von $\mathbb{F}_2^3$. Wir schreiben daher die Indizes $i \in \{0, \ldots, 7\}$ dreistellig binär, und lesen sie als Koeffiziententupel von Vektoren in $\mathbb{F}_2^3$ in der Standardbasis.[1] Welche Gestalt hat

[1]beachte, daß dies die Elemente von $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$ und damit von $\mathcal{A}_9^{(8)}$ in richtiger Reihenfolge wiedergibt!

nun die Eigenmatrix P? Mit der gerade eingeführten Basis von $\mathcal{A}$ ist die Eigenmatrix des Anhangs gegeben durch $P'_{ij} = (-1)^{i \cdot j}$ (wobei im Exponenten das Standardskalarprodukt in $\mathbb{F}_2^3$ steht). Nach Satz A.37 ist durch PP'^{-1} ein Automorphismus α von $\mathcal{A}_9^{(8)}$ gegeben, der sich offenbar durch eine lineare Permutation π der Indizes $i \in \mathbb{F}_2^3$ ausdrücken läßt: $\alpha A_i = A_{\pi(i)}$. Nach Korollar A.38 gilt $P'_{\pi(i),j} = P_{ij} = P'_{i,\pi(j)}$, d.h. π ist selbstadjungiert bezüglich des Standardskalarprodukts. Das wiederum bedeutet, daß $\beta(i,j) = \pi(i) \cdot j$ eine symmetrische nicht ausgeartete Bilinearform ist, und somit $P_{ij} = (-1)^{\beta(i,j)}$. Die Gleichungen $PT = dT_-$ lauten damit $dt_i^{-1} = \sum_{x \in \mathbb{F}_2^3} (-1)^{\beta(i,x)} t_x$.

Fall I:

(1) $i(1), i(2), i(3)$ linear abhängig, d.h. $E = \{0, i(1), i(2), i(3)\}$ ist Ebene in $\mathbb{F}_2^3$. Ohne Einschränkung $i(1) = 001, i(2) = 010, i(3) = 011$, ferner ohne Einschränkung $j(1) = 100, j(2) = 101$. Also ist M im CAS(!) $(A_0, A_{001}, A_{010} + A_{011}, A_{100} + A_{101}, A_{110}, A_{111}) \cong \mathcal{A}_8^{(8)}$.

(2) $i(1), i(2), i(3)$ Basis, ohne Einschränkung $i(1) = 001, i(2) = 010, i(3) = 100$. Damit zwei Unterfälle: (2a) ohne Einschränkung $j(1) = 011, j(2) = 101$, oder (2b) ohne Einschränkung $j(1) = 011, j(2) = 111$. Im Fall (2a) erkennt man leicht, daß M in $\mathcal{A}_8^{(8)}$ liegt. an, wobei ohne Einschränkung $t_{110} = t_0 = -t_{101}$, da man noch die Freiheit eines Automorphismus von $\mathbb{F}_2^3$ hat, der 001 und 010 vertauscht und 100 fixiert. Im Fall (2b) erhalten wir durch Subtraktion der Gleichungen 0 und 110 bzw. durch Addition der Gleichungen 0 und 101

$$\sum_{x \notin \ker \beta(\cdot, 110)} t_x = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{x \in \ker \beta(\cdot, 101)} t_x = 0$$

Unterscheiden wir nach dem Wert von $\beta(101, 101)$:

$\beta(101, 101) = 0$. Dann gibt es drei Varianten für $\ker \beta(\cdot, 101)$, so daß wir die zweite der obigen Gleichungen anwenden können:

- $\ker \beta(\cdot, 101) = \{0, 101, 001, 100\}$ führt sofort zum Widerspruch $t_{001} = 0$.
- $\ker \beta(\cdot, 101) = \{0, 101, 110, 011\}$ führt zum Widerspruch $t_{011} = -t_0 = t_{101}$.
- $\ker \beta(\cdot, 101) = \{0, 101, 010, 111\}$ impliziert $t_{001} + t_{011} = 0$ ist. Um die erste der Gleichungen auszuwerten, muß man $E = \mathbb{F}_2^3 \setminus \ker \beta(\cdot, 110)$ kennen, wobei schon $0 \notin E$, $101 \in E$ bekannt ist. Unterscheiden wir wieder zwei Fälle:

– $110 \notin E$ ergibt jedenfalls eine Gleichung $t_{001} = \pm t_{101}$, mit Widerspruch.

– $110 \in E$ beläßt uns mit zwei Möglichkeiten:

  * $E = \{101, 110, 001, 010\}$ liefert den Widerspruch $t_{001} = 0$.
  * $E = \{101, 110, 100, 111\}$, folglich $\ker \beta(\cdot, 110) = \{0, 001, 010, 011\}$. Es folgt $\ker \beta(\cdot, 011) = \{0, 010, 100, 110\}$. Nun subtrahiere die Gleichungen 001 und 010: das liefert

$$\sum_{x \notin \ker \beta(\cdot, 011)} (-1)^{\beta(001,x)} t_x = 0$$

was mit unseren bisherigen Ergebnissen zu $t_{011} = \pm t_{101}$ führt, Widerspruch.

$\beta(101, 101) = 1$. Es gibt nun vier Varianten für $\ker \beta(\cdot, 101)$:

- $\ker \beta(\cdot, 101) = \{0, 010, 100, 110\}$ ergibt sofort den Widerspruch $t_{001} = -t_0 = t_{101}$.

- $\ker \beta(\cdot, 101) = \{0, 111, 001, 110\}$ läßt uns drei Möglichkeiten für $E = \mathbb{F}_2^3 \setminus \ker \beta(\cdot, 110)$, die zu Widersprüchen $t_{111} = -t_0$ bzw. $t_{001} = -t_0$ bzw. $t_{001} = t_0$ führen.

- $\ker \beta(\cdot, 101) = \begin{cases} \{0, 011, 001, 010\}, \text{ also } 2t_{001} + t_{011} + t_0 = 0 \\ \{0, 011, 100, 111\}, \text{ also } t_{001} + 2t_{011} + t_0 = 0 \end{cases}$
haben gemeinsam, daß $\beta(110, 101) = 1$, also bleiben vier Möglichkeiten für $E = \mathbb{F}_2^3 \setminus \ker \beta(\cdot, 110)$:

  – $E = \{101, 110, 010, 001\}$ führt sofort zum Widerspruch $t_{001} = 0$.
  – $E = \{101, 110, 111, 100\}$ liefert $t_{001} = -t_0$ oder $t_{011} = -t_0$, beides Widersprüche.
  – $E = \begin{cases} \{101, 011, 010, 100\}, \text{ also } 2t_{001} + t_{011} - t_0 = 0 \\ \{101, 011, 001, 111\}, \text{ also } t_{001} + 2t_{011} - t_0 = 0 \end{cases}$
  führen beide zu Widersprüchen: entweder $t_0 = 0$ oder $t_{001} = -t_0$ oder $t_{011} = -t_0$.

Fall II:
Jedes Paar $i(k), j(k)$ spannt eine Ebene E_k in $\mathbb{F}_2^3$ auf, und verschiedene Paare

haben verschiedene Ebenen. Jede Ebene E_k wird durch ihren Normalenvektor u_k beschrieben, und wir haben zwei Möglichkeiten:
(1) u_1, u_2, u_3 linear abhängig, ohne Einschränkung $u_1 = 001, u_2 = 010, u_3 = 011$, d.h.

$$\begin{aligned} E_1\backslash\{0\} &= \{100, 010, 110\} \\ E_2\backslash\{0\} &= \{100, 001, 101\} \\ E_3\backslash\{0\} &= \{100, 011, 111\} \end{aligned}$$

Damit zwei Unterfälle: (1a) ohne Einschränkung $l = 100$, $i(1) = 010, j(1) = 110$, $i(2) = 001, j(2) = 101$, $i(3) = 011, j(3) = 111$. Man überzeugt sich leicht, daß damit M in $\mathcal{A}_6^{(8)}$ liegt. Oder (1b) ohne Einschränkung $l = 110$, $i(1) = 010, j(1) = 100$, $i(2) = 001, j(2) = 101$, $i(3) = 011, j(3) = 111$. Man sieht wiederum leicht, daß M in $\mathcal{A}_8^{(8)}$ liegt.
(2) u_1, u_2, u_3 Basis, ohne Einschränkung $u_1 = 001, u_2 = 010, u_3 = 100$, d.h.

$$\begin{aligned} E_1\backslash\{0\} &= \{010, 100, 110\} \\ E_2\backslash\{0\} &= \{001, 100, 101\} \\ E_3\backslash\{0\} &= \{001, 010, 011\} \end{aligned}$$

Damit ohne Einschränkung $l = 111$ und $i(1) = 010, j(1) = 110$, $i(2) = 100, j(2) = 101$, $i(3) = 001, j(3) = 011$. Subtraktion der Gleichungen $i(k)$ und $j(k)$ liefert die Gleichungen

$$(\mathrm{Z}_a) \qquad \sum_{x \in E_c} (-1)^{\beta(x,b)} t_x = 0 \qquad \text{mit } E_c = \mathbb{F}_2^3 \setminus \ker \beta(\cdot, c)$$

wo $(a, b, c) =_{\text{zykl}} (001, 010, 100)$ (d.h. eine zyklische Permutation der rechten Seite) ist. Die verschiedenen Varianten für E_a $(a \in \{001, 010, 100\})$ sind:

$$E_a = \begin{cases} \{001, 010, 100, 111\} & \text{oder} \\ \{x, x+y, x+z, 111\} & \text{mit } (x, y, z) =_{\text{zykl}} (001, 010, 100) \quad \text{oder} \\ \{x, x+y, z, z+y\} & \text{mit } (x, y, z) =_{\text{zykl}} (001, 010, 100) \end{cases}$$

Standardschluß: Ist $(a, b, c) =_{\text{zykl}} (001, 010, 100) =_{\text{zykl}} (x, y, z)$ und $x, x+y \in E_c$, so folgt $\beta(y, b) = 0$ und $\beta(y, c) = 0$, insbesondere $\ker \beta(\cdot, y) = \{0, b, c, b+c\}$ und $E_y = \{a, a+b, a+c, 111\}$.

Beweis. Wäre $\beta(y,b)=1$, so folgte aus (Z_a) $t_p = t_q$ für $E_c = \{x, x+y, p, q\}$, Widerspruch. Wäre $\beta(y,c)=1$, so wäre $y \in E_c$, also auch $0 \in E_c$, Widerspruch. □

Durch iterierte Anwendung dieses Standardschlußes erhält man nun aus $x, x+y \in E_c$ (für ein c muß so etwas vorkommen) nacheinander $E_y = \{a, a+b, a+c, 111\}$, $E_b = \{z, z+x, z+y, 111\}$, $E_x = \{c, c+a, c+b, 111\}$, $E_a = \{y, y+z, y+x, 111\}$, $E_z = \{b, b+c, b+a, 111\}$, $E_c = \{x, x+y, x+z, 111\}$. Damit werden aber die Gleichungen (Z_a) ($a \in \{001, 010, 100\}$) zu

$$2t_x = t_z + t_{111} \qquad \text{mit } (x,y,z) =_{\text{zykl}} (001, 010, 100)$$

Somit $t_x = t_y = t_z = t_{111}$, Widerspruch.

In $\mathcal{A}_9^{(8)}$ gibt es also keine Spinmodelle, die nicht schon in kleineren CAS enthalten sind.

M liegt in $\mathcal{A}_1^{(9)}$

Diesen Fall haben wir schon in Abschnitt 3.2 abgehandelt: da $n > 4$ und das CAS imprimitiv ist, gibt es hier keine Spinmodelle.

M liegt in $\mathcal{A}_2^{(9)}$

Auch diesen Fall haben wir in Abschnitt 3.2 abgehandelt: M ist eines der Spinmodelle auf dem Gittergraphen $L_2(3)$, d.h. nach Anwendung 2 in Abschnitt 6.1 Tensorprodukt zweier dreidimensionaler Potts-Modelle.

M liegt in $\mathcal{A}_3^{(9)}$

Ohne Einschränkung sind t_1, t_2, t_3 paarweise verschieden, da M sonst nach Satz 3.1 in einem kleineren CAS liegt. Damit ist aber ohne Einschränkung $m(t_1) = 2$ und nach Satz 6.11 ist M Tensorprodukt eines zyklischen Modells der Dimension drei mit einem weiteren dreidimensionalen Spinmodell, d.h ein Tensorprodukt zweier dreidimensionaler Potts-Modelle.

M liegt in $\mathcal{A}_4^{(9)}$

Ohne Einschränkung sind t_1, t_2, t_3, t_4 paarweise verschieden, da M sonst nach Satz 3.1 in einem kleineren CAS liegt. Damit ist aber für ein $i > 0$ $m(t_i) =$

2 und nach Satz 6.11 ist M Tensorprodukt eines zyklischen Modells der Dimension drei mit einem weiteren dreidimensionalen Spinmodell, d.h ein Tensorprodukt zweier dreidimensionaler Potts-Modelle.

M liegt in $\mathcal{A}_5^{(9)}$

Ohne Einschränkung sind t_1, t_2, t_3, t_4 paarweise verschieden, da M sonst nach Satz 3.1 in einem kleineren CAS liegt (was hier nur ein triviales CAS sein könnte). Damit ist aber für ein $i > 0$ $m(t_i) = 2$ und nach Satz 6.11 ist M Tensorprodukt eines zyklischen Modells mit einem weiteren Spinmodell, also entweder ein zyklisches Modell oder Produkt zweier dreidimensionaler Potts-Modelle.

M liegt in $\mathcal{A}_6^{(10)}$

Nach Korollar 6.7 ist M ein Pottsmodell oder Produkt eines zweidimensionalen mit einem fünfdimensionalen Potts-Modells.

M liegt in $\mathcal{A}_7^{(10)}$

Wenn unter $t_1, \ldots, t_5$ zwei Gleichungen gelten, ist M nach Satz 3.1 in einem kleineren CAS. Also ist $m(t_i) = 2$ für ein $i > 0, i \neq 3$, und daher M nach Satz 6.11 Tensorprodukt eines zyklischen Modells der Dimension 5 mit einem zweidimensionalen Potts-Modell.

M liegt in $\mathcal{A}_1^{(11)}$

Wenn unter $t_1, \ldots, t_5$ zwei Gleichungen gelten, ist M nach Satz 3.1 in einem kleineren CAS, was nur ein triviales CAS sein könnte. Also ist $m(t_i) = 2$ für ein $i > 0$, und daher M nach Satz 6.11 ein zyklisches Modell der Dimension 11.

7.2 Klassifikation sehr kleiner Modelle vom Jonestyp

Im folgenden sei $M = (X, W_+, W_-)$ ein Spinmodell vom Jonestyp, das wir ausdrücklich als unsymmetrisch voraussetzen. Insbesondere ist $m > 1$, da es für $m = 1$ nur die Potts-Modelle gibt. Wie üblich schreiben wir $W_+ = \sum t_i A_i$ wie in Bemerkung 2.12. Wir klassifizieren die Spinmodelle nach ihrer Dimension und nach $m = m(W_+)$.

Bemerkung 7.2 *Ikuta hat in seiner (mir nicht zugänglichen) Dissertation [I94] unsymmetrische Spinmodelle bis zur Dimension 8 klassifiziert. (Zitiert nach Jaeger [Jae95b]).*

n = 3

Es kann nur $m = 2$ sein, und Satz 3.3 mit Lemma 3.2 besagt, daß (A_0, A_1, A_2) ein CAS und isomorph $\mathcal{G}(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ ist. Nach Korollar 2.20 legt W_+ eine Selbstdualität der erzeugten Bose-Mesner-Algebra $\mathbf{C}\mathcal{G}(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ fest, nach Satz 2.24 folgt eine modulare Invarianz Gleichung, also ist M nach Lemma 4.1 zyklisches Modell laut Satz 4.4.

Nach Satz 3.3 gibt es ferner keine nichtsymmetrischen Spinmodelle mit $m = 2$ für $n > 3$. Im folgenden können wir also $m \geq 3$ annehmen.

n = 4

Es ist $m = 3$, also ist (A_0, A_1, A_2, A_3) nach Satz 3.1 ein CAS und isomorph $\mathcal{G}(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$ (sonst symmetrisch). Nach Korollar 2.20 legt W_+ eine Selbstdualität der erzeugten Bose-Mesner-Algebra $\mathbf{C}\mathcal{G}(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$ fest, und nach Satz 2.24 folgt eine modulare Invarianz Gleichung, also ist M nach Lemma 4.1 zyklisches Modell laut Satz 4.4.

n = 5

Ist $m = 3$, so ist (A_0, A_1, A_2, A_3) nach Satz 3.1 ein CAS, ohne Einschränkung mit Valenzen $k_1 = k_2 = 1, k_2 = 2$. Also ist A_1 ein 5-Zykel, erzeugt also bereits $\mathcal{G}(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})$. In diesem Fall also gibt es kein Spinmodell.

Ist $m = 4$, so haben $A_1, \ldots, A_4$ alle Valenz 1, die von J, W_+ erzeugte Bose-Mesner-Algebra ist also $\mathbf{C}\mathcal{G}(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})$. Nach Korollar 2.20 legt W_+ eine Selbstdualität dieser Bose-Mesner-Algebra fest, und nach Satz 2.24 folgt eine modulare Invarianz Gleichung, also ist M nach Lemma 4.1 zyklisches Modell laut Satz 4.4.

$\mathbf{n = 6}$

Ist $m = 3$, so ist (A_0, A_1, A_2, A_3) nach Satz 3.1 ein CAS. Es gibt zwei Fälle für die Valenzen: ohne Einschränkung $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = 3$ oder $k_3 = 1$, $k_1 = k_2 = 2$. Im ersten Fall kann A_1 weder ein perfektes Matching sein, da sonst auch A_2 ein Matching wäre, also (A_0, A_1, A_2) eine Gruppe mit Exponent 2, ein Widerspruch, noch ein 6-Zykel, da dieser bereits $\mathcal{G}(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})$ erzeugte. Also ist A_1 ein Paar von 3-Zykeln, A_2 deren Umkehrung, und A_3 der Rest, ein $K_{3,3}$. Das so definierte CAS ist isomorph $2 \cdot \mathcal{G}(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$, und hat nach Korollar A.36 die Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & \omega & \bar{\omega} & 0 \\ 1 & \bar{\omega} & \omega & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2\omega & 2\bar{\omega} & 0 \\ 1 & 2\bar{\omega} & 2\omega & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ist also nicht selbstdual.

Im zweiten Fall muß A_3 ein perfektes Matching sein, A_1, A_2 beide keine ungerichteten Graphen, insbesondere sind A_1, A_2 inverse Relationen, haben also keine Kante, die in beiden Richtungen durchlaufen wird. $A_1 + A_2$ ist die Adjazenzmatrix des $K_{2,2,2}$, das ist der Oktaedergraph: A_1 ist eine Orientierung des Oktaeders so, daß jede Ecke zwei einlaufende und zwei auslaufende Kanten hat. Man sieht leicht, daß es eine Seite des Oktaeders geben muß, die einen gerichteten 3-Zykel induziert. Mit $A_1^2 = p_{11}^0 I + p_{11}^1 A_1 + p_{11}^2 A_2 + p_{11}^3 A_3$ ist also $p_{11}^0 = 0$ und $p_{11}^2 \geq 1$, d.h. jede Kante ist in einem gerichteten 3-Zykel (der nur von einer Seite induziert sein kann). Da keine Kante in mehr als zwei Seiten ist, hat man auch $p_{11}^2 \leq 2$, und man überzeugt sich schnell, daß es keine Möglichkeit der Orientierung gibt mit $p_{11}^2 = 1$: also $p_{11}^2 = 2$ und mit Lemma A.3 $p_{11}^i = 0$ für $i \neq 2$. Wiederum überzeugt man sich leicht, daß es (bis auf Isomorphie) genau ein mögliche Orientierung gibt, und daß das entstehende CAS isomorph $\mathcal{G}(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})[2]$ ist; nach Korollar A.36 hat es die Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2\omega & 2\bar{\omega} & 0 \\ 1 & 2\bar{\omega} & 2\omega & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & \omega & \bar{\omega} & 0 \\ 1 & \bar{\omega} & \omega & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

ist also auch nicht selbstdual.

Ist $m = 4$, so ist ohne Einschränkung $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ ein CAS: sonst ist die von J, W_+ erzeugte Bose-Mesner-Algebra sechsdimensional, also gleich $\mathbf{C}\mathcal{G}(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})$ (siehe nächsten Fall), und W_+ legt nach Korollar 2.20 eine Selbstdualität fest, also ist M nach Lemma 4.1 zyklisches Modell laut Satz 4.4. Die Valenzen seien ohne Einschränkung $k_2 = k_3 = k_4 = 1$, $k_1 = 2$. Keines der A_2, A_3, A_4 kann ein 6-Zykel sein, da ein solcher bereits $\mathcal{G}(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})$ erzeugt. Also besteht ohne Einschränkung A_2 aus zwei gerichteten 3-Zykeln, A_4 ist die Umkehrung von A_2 und A_3 ein perfektes Matching. Man kann sich leicht überlegen, daß dann A_1 ein ungerichteter 6-Zykel ist. Keine der beiden Möglichkeiten aber, das Matching zu legen, führt zu einem CAS.

Ist $m = 5$, so haben $A_1, \ldots, A_5$ alle Valenz 1, und eines (ohne Einschränkung A_1) ist ein gerichteter 6-Zykel, wie man sich leicht überlegt.[2] Also ist die von J, W_+ erzeugte Bose-Mesner-Algebra $\mathbf{C}\mathcal{G}(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})$. Nach Korollar 2.20 legt W_+ eine Selbstdualität dieser Bose-Mesner-Algebra fest, und nach Satz 2.24 folgt eine modulare Invarianz Gleichung, also ist M nach Lemma 4.1 zyklisches Modell laut Satz 4.4.

$\mathbf{n = 7}$

Ist $m = 3$, so ist (A_0, A_1, A_2, A_3) nach Satz 3.1 ein CAS. Es gibt drei Fälle für die Valenzen: ohne Einschränkung $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = 4$ oder $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$ oder $k_1 = k_2 = k_3 = 2$. Wenn $k_1 = 1$ ist, ist A_1 notwendig ein 7-Zykel, erzeugt also schon $\mathcal{G}(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})$. Also tritt nur der dritte Fall ein: sei ohne Einschränkung A_2 nicht symmetrisch, und $A_3 = A_2^\top$. Notwendig also ist A_1 symmetrisch, insbesondere ein 7-Zykel, und wir können auf X ein $\mathcal{G}(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}) = (B_i | i \in \mathbf{Z}/7\mathbf{Z})$ so realisieren, daß $A_1 = B_1 + B_{-1}$. Dann ist $A_1^2 = 2I + B_2 + B_{-2}$, was sich als ganzzahlige Kombination der A_i schreiben lassen muß. Da $A_0 = I$, A_2, A_3 aber schon Valenz 2 haben, folgt ohne Einschränkung $A_2 = B_2 + B_{-2}$, ein Widerspruch, da wir A_2 als unsymmetrisch vorausgesetzt hatten.

Ist $m \in \{4, 5, 6\}$, ist ohne Einschränkung $k_1 = 1$. Da die A_i in einem CAS liegen, ist A_1 also ein 7-Zykel, d.h. die von J, W_+ erzeugte Bose-Mesner-Algebra ist $\mathbf{C}\mathcal{G}(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})$, und W_+ bestimmt nach Korollar 2.20 eine Selbstdualität. Nach Satz 2.24 folgt eine modulare Invarianz Gleichung, also ist M nach Lemma 4.1 zyklisches Modell laut Satz 4.4.

[2] oder bei Nomiyama [No95] ersieht.

Anhang A

Kommutative Assoziations-Schemata (CAS)

In diesem Anhang fassen wir alle Definitionen und Ergebnisse aus der Theorie der kommutativen Assoziations-Schemata (CAS), die wir benötigen, zusammen. Weitere Informationen können [BI84] oder [BCN89] entnommen werden.

A.1 Definitionen

Im folgenden sei stets X eine endliche Menge und $n = |X|$.

Definition A.1 *Ein* kommutatives Assoziations-Schema (CAS) der Klasse t auf X *ist ein* $(t+1)$*-Tupel* $(R_0, \dots, R_t)$ *mit*

(1) $\bigcup_i R_i = X \times X$*,* $R_i \cap R_j = \emptyset$ *für* $i \neq j$

(2) $R_0 = \mathrm{id}$

(3) Für alle i *existiert* i' *mit* $R_{i'} = R_i^{-1} (= \{(x,y) : (y,x) \in R_i\})$

(4) Für alle i, j, k*: Für alle* $(x,z) \in R_k$ *ist die Anzahl der* $y \in X$ *mit* $(x,y) \in R_j$ *und* $(y,z) \in R_i$ *unabhängig von* x, y, z*. Wir bezeichnen diese Konstanten mit* p_{ij}^k *und nennen sie* Schnittzahlen*. Die* $p_{ii'}^0$ *heißen* Valenzen *und werden auch mit* k_i *bezeichnet*

(5) Für alle i, j, k *gilt* $p_{ij}^k = p_{ji}^k$

Ist in (3) stets $i' = i$*, so heißt das CAS* symmetrisch.

Diese Definition läßt sich sehr elegant mittels der Adjazenzmatrizen A_i der Relationen R_i ausdrücken (dabei bezeichnet I die Einheitsmatrix, J die Matrix, deren sämtliche Einträge 1 sind und $\circ$ das *Hadamardprodukt* gleichformatiger Matrizen, das in der komponentenweisen Multiplikation der Einträge besteht):

Bemerkung A.2 *Die 0-1-Matrizen $(A_0, \dots, A_t)$ sind die Adjazenzmatrizen eines CAS (in welchem Fall wir $\mathcal{A} = (A_0, \dots, A_t)$ ebenfalls als CAS bezeichnen) genau wenn*

(1) $\sum_i A_i = J,\ A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$

(2) $A_0 = I$

(3) $A_i^\top = A_{i'}$

(4) $A_i A_j = \sum_k p_{ij}^k A_k$

(5) $A_i A_j = A_j A_i$

Dabei ist das CAS symmetrisch, genau wenn alle A_i symmetrisch sind.

Lemma A.3 *(0) Für alle $i \neq j$: $p_{ij'}^0 = 0$*
(1) Für alle i: $A_i J = J A_i = k_i J$
(2) Für alle i, k: $k_i = \sum_j p_{ij}^k$
(3) Für alle i, j: $k_i k_j = \sum_k p_{ij}^k k_k$

Beweis. (1) $A_i^\top A_i = A_i A_i^\top = k_i I + \dots$, also hat A_i in jeder Zeile und in jeder Spalte genau k_i Einträge 1.
(2) $J = \sum_j A_j$, also $\sum_k k_i A_k = k_i J = A_i J = \sum_j A_i A_j = \sum_k \sum_j p_{ij}^k A_k$, und durch Koeffizientenvergleich die Behauptung.
(3) Aus $A_i A_j = \sum_k p_{ij}^k A_k$ durch Multiplikation mit J und mit (1).
(0) folgt nun aus (2) und der Nichtnegativität der p_{ij}^k. $\square$

Definition A.4 *Sei $\mathcal{A} = (A_0, \dots, A_t)$ CAS auf X, $\mathcal{A}' = (A_0', \dots, A_{t'}')$ CAS auf X'. Dann heißt $\mathcal{A}$* (kombinatorisch) isomorph *$\mathcal{A}'$, in Zeichen $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$, wenn es Bijektionen $p : X \longrightarrow X'$ und $r : \{0, \dots, t\} \longrightarrow \{0, \dots, t'\}$ gibt mit*

$$\forall i \forall \alpha, \beta\ A_i[\alpha, \beta] = A_{ri}'[p\alpha, p\beta]$$

Definition A.5 *Ein CAS $(R_0, \dots, R_t)$ heißt* primitiv, *wenn für kein $T \subset \{0, \dots, t\}$ die Relation $\bigcup_{i \in T} R_i$ eine nichttriviale[1] Äquivalenzrelation ist.*

[1] d.h. weder gleich id noch gleich $X \times X$.

Grundlegende Beispiele

Beispiel A.6 *Das triviale CAS* $\mathcal{P}(X)$. Es ist das eindeutig bestimmte CAS der Klasse 1 auf X, nämlich $(I, J - I)$. Die Schnittzahlen gehen aus den Gleichungen $I^2 = I$, $I(J - I) = (J - I)I = J - I$ und $(J - I)^2 = (n - 1)I + (n-2)(J - I)$ hervor. Es ist offenbar primitiv und symmetrisch. Für $X = [n]$ schreiben wir auch $\mathcal{P}(n)$.

Beispiel A.7 *Gruppenschemata* $\mathcal{G}(X)$. X trage die Struktur einer endlichen abelschen Gruppe. Dann bilden die $R_x = \{(u, v)|u - v = x\}$, $x \in X$ ein CAS der Klasse $|X| - 1$, denn man prüft in der Matrixformulierung sofort nach, daß (1) und (2) erfüllt sind, ferner $A_x^\top = A_{-x}$ (d.h. $x' = -x$), $A_xA_y = A_yA_x = A_{x+y}$. Es ist offenbar symmetrisch genau wenn $X \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^k$ für ein $k \in \mathbf{N}$. Es ist primitiv, genau wenn X keine als die trivialen Untergruppen hat, d.h. wenn $X \cong (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ mit einer Primzahl p ist.

Offenbar ist $\mathcal{G}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \cong \mathcal{P}(2)$.

Dieses Beispiel zeigt, daß es recht viele CAS gibt, und daß man sie als Verallgemeinerung endlicher abelscher Gruppen auffassen kann.

Beispiel A.8 *Stark reguläre Graphen.* Sei A eine symmetrische 0-1-Matrix, deren Diagonale konstant 0 ist. Wir wollen untersuchen, unter welchen Voraussetzungen $(I, A, B = J - I - A)$ ein CAS ist. Es ist klar, daß es k, λ, μ geben muß mit $A^2 = kI+\lambda A+\mu B$. Daraus folgt zunächst, daß A k-regulär ist (d.h. in jeder Zeile oder Spalte sind genau k Einträge 1), d.h. $AJ = JA = kJ$, ferner

$$\begin{aligned} B^2 &= (J - I)^2 - (J - I)A - A(J - I) + A^2 \\ &= (n - 2)J + I - 2kJ + 2A + kI + \lambda A + \mu B \\ &= (n - 1 - k)I + (n - 2 - 2k + \mu)B + (n - 2k + \lambda)A \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} AB = BA &= (J - I - A)A = kJ - A - A^2 \\ &= (k - 1 - \lambda)A + (k - \mu)B \end{aligned}$$

Interpretiert man A als Adjazenzmatrix eines Graphen G, so ist also (I, A, B) CAS genau wenn G *stark regulär mit Parametern* (k, λ, μ) ist, d.h. wenn G k-regulär ist und je zwei verschiedene Ecken x, y genau λ bzw. μ gemeinsame Nachbarn in G haben, je nachdem x und y in G benachbart bzw. nicht benachbart sind. Das wiederum ist ersichtlich gleichbedeutend damit, daß $\bar{G}$ stark regulär ist mit Parametern $(l, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ mit $l = n-1-k$, $\bar{\lambda} = n-2-2k+\mu$, $\bar{\mu} = n-2k+\lambda$. Das zugehörige CAS nennen wir $\mathcal{S}(G)$.

Speziell heißt G *Konferenzgraph*, wenn G und $\bar{G}$ gleiche Parameter haben, d.h. wenn $k = l = n-1-k$, $\lambda = \bar{\lambda} = n-2-2k+\mu$, $\mu = \bar{\mu} = n-2k+\lambda$. Wie man sich leicht überzeugt, ist dies gleichbedeutend mit $n = 4\mu+1$, $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$.

Abstandsreguläre Graphen und symmetrische CAS

Sei G ein abstandsregulärer Graph auf X mit Durchmesser D und Schnittparametern $(b_0, \ldots, b_{D-1}; c_1, \ldots, c_D)$. Das heißt: G ist zusammenhängend und mit den i-Nachbarschaften $\Gamma_i(x) = \{y \in X | \partial(x,y) = i\}$ gilt für alle i und alle Ecken x, y im Abstand i: $c_i = |\Gamma_{i-1}(x) \cap \Gamma_1(y)|$ und $b_i = |\Gamma_{i+1}(x) \cap \Gamma_1(y)|$. Insbesondere ist G k-regulär mit $k = b_0$, $c_0 = d_0 = 0, c_1 = 1$. Beachte dabei, daß wegen der Dreiecksungleichung für ∂

$$\Gamma_1(y) \subset \Gamma_{i-1}(x) \cup \Gamma_i(x) \cup \Gamma_{i+1}(x)$$

gilt, also $a_i = |\Gamma_i(x) \cap \Gamma_1(y)| = k - b_i - c_i$.

Definiere damit Relationen R_i auf X durch $R_i = \{(\alpha,\beta) | \partial(\alpha,\beta) = i\}$ und $\mathcal{D}(G) = (R_0, \ldots, R_D)$.

Bemerkung A.9 *Ein zusammenhängender Graph G ist stark regulär mit Parametern (k, λ, μ) genau wenn G abstandsregulär vom Durchmesser 2 (bzw. 1, wenn G vollständig) und mit Schnittparametern $(k, k-1-\lambda; 1, n-2k+\lambda)$ ist.*

Satz A.10 *$\mathcal{D}(G)$ ist ein symmetrisches CAS und seine Produktstruktur ist durch folgende Gleichungen rekursiv festgelegt sind:*

$$A_i A_1 = A_1 A_i = b_{i-1} A_{i-1} + a_i A_i + c_{i+1} A_{i+1} \textit{ und}$$

$$A_i A_{j+1} = c_{j+1}^{-1} (A_i A_j A_1 - b_{j-1} A_i A_{j-1} - a_j A_i A_j) \textit{ für } j < D$$

Also für die Schnittzahlen:

$$p_{i1}^k = p_{1i}^k = \begin{cases} b_{i-1} & \textit{für } k = i-1 \\ a_i & \textit{für } k = i \\ c_{i+1} & \textit{für } k = i+1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$p^k_{i,j+1} = \frac{c_k p^{k-1}_{ij} + b_{j-1} p^k_{i,j-1} + a_j p^k_{ij} + a_k p^k_{ij} + b_k p^{k+1}_{ij}}{c_{j+1}}$$

Beweis. Die erste Gleichung ist nur ein anderer Ausdruck für die Definition der Schnittparameter. Nach A_{i+1} aufgelöst ergibt sie

$$A_{j+1} = c^{-1}_{j+1}(A_j A_1 - b_{j-1} A_{j-1} - a_j A_j) \text{ für } j < D$$

(dabei ist $c_{j+1} \neq 0$, da es in jedem Abstand kleiner oder gleich D Ecken gibt). Einsetzen ergibt daraus die zweite Gleichung. Offensichtlich kann man damit alle Produkte $A_i A_j$ rekursiv auswerten und erhält die angegebenen Formeln für die p^k_{ij}. □

Bemerkung A.11 *Man kann sich (ähnlich wie die Betrachtungen zu stark regulären Graphen in Beispiel A.8) überlegen, daß ein Graph G abstandsregulär ist genau wenn die Abstandsrelationen $R_i = \partial^{-1}(i)$ ein CAS bilden.*

Beispiel A.12 *Hammingschemata $H(D, q)$.* kommen von den abstandsregulären Graphen G mit $V(G) = [q]^D$, in denen zwei Ecken genau dann benachbart sind, wenn sie sich in genau einer Koordinate unterscheiden (so ist G also für $q = 2$ der Kantengraph des D-dimensionalen Würfels Q_D). Seine Durchmesser ist offenbar D und seine Schnittparameter sind durch

$$b_i = i, \quad c_i = (q-1)(D-i)$$

gegeben.

Beispiel A.13 *Hadamardschemata* sind CAS $\mathcal{D}(G)$, wo G ein *Hadamardgraph der Ordnung* $4m$ ist, d.h. ein abstandsregulärer Graph auf $16m$ Ecken mit Durchmesser 4 und Schnittparametern $(4m, 4m-1, 2m, 1; 1, 2m, 4m-1, 4m)$. Es besteht folgende natürliche bijektive Korrespondenz zwischen Hadamardgraphen der Ordnung $4m$ und Hadamardmatrizen der Ordnung $4m$:

Sei H eine Hadamardmatrix, d.h. eine Matrix der Ordnung n, deren Einträge alle ± 1 sind und mit $HH^\top = nI$. Man sieht leicht, daß $n = 4m$ für eine natürliche Zahl m. Wir konstruieren einen Graphen $G(H)$ auf $[4m] \times \{0, 1\}^2$ mit der Adjazenzmatrix (mit $4m \times 4m$-Blöcken)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_+ & H_- \\ 0 & 0 & H_- & H_+ \\ H_+^\top & H_-^\top & 0 & 0 \\ H_-^\top & H_+^\top & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wobei $H_+ = (J+H)/2$ und $H_- = (J-H)/2$ (wobei $\{0,1\}^2$ als $00, 01, 10, 11$ angeordnet sei). Man sieht direkt, daß $G = G(H)$ abstandsregulär mit den angegebenen Parametern ist, wenn man mit

$$A_0 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} J-I & J-I & 0 & 0 \\ J-I & J-I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J-I & J-I \\ 0 & 0 & J-I & J-I \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_- & H_+ \\ 0 & 0 & H_+ & H_- \\ H_-^\top & H_+^\top & 0 & 0 \\ H_+^\top & H_-^\top & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

nachrechnet, daß

$$A_1^2 = 2mA_2 + 4mA_0,\ A_1A_2 = A_2A_1 = (4m-1)A_1 + (4m-1)A_3,$$
$$A_1A_3 = A_3A_1 = 2mA_2 + 4mA_4,\ A_1A_4 = A_4A_1 = A_3$$

Sei umgekehrt ein Hadamardgraph G gegeben. Wir zeigen, daß er von einer Hadamardmatrix herkommt: Aus der ersten Gleichung von Satz A.10 erhalten wir durch Multiplizieren mit J $k_1k_i = b_{i-1}k_{i-1} + d_ik_i + c_{i+1}k_{i+1}$, mit $k_0 = 1$, $k_1 = 4m$ also rekursiv $k_2 = 8m-2$, $k_3 = 4m$, $k_4 = 1$. Damit ist jeder Ecke v ein eindeutiger Antipode $a(v)$ mit $\partial(v, a(v)) = 4$ zugeordnet, insbesondere $a(a(v)) = v$. Angenommen, G hätte einen Kreis ungerader Länge, dann wäre die Länge eines minimalen ungeraden Kreises höchstens 9, es gäbe also $i \leq 4$ so, daß es benachbarte Ecken in $\Gamma_i(x)$ für eine Ecke x gäbe. Das aber hieße $d_i \neq 0$, ein Widerspruch, da man leicht $d_i = 0$ für alle i nachrechnet. Also partitioniert G die Eckenmenge in zwei gleich große Teile. Wir können also die Eckenmenge $X \times \{0,1\}^2$ mit $|X| = 4m$ schreiben, so daß

$$G \text{ Teilgraph von } K_{X\times\{0\}\times\{0,1\}, X\times\{1\}\times\{0,1\}}, \qquad a(x, \epsilon 0) = (x, \epsilon 1)$$

Schreiben wir nun die Adjazenzmatrizen der Abstandsrelationen als $X \times X$-Block-Matrizen, so ist klar, daß

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} J-I & J-I & 0 & 0 \\ J-I & J-I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J-I & J-I \\ 0 & 0 & J-I & J-I \end{bmatrix}$$

Ferner mit geeigneten Matrizen B, C, D, E

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B & C \\ 0 & 0 & D & E \\ B^\top & D^\top & 0 & 0 \\ C^\top & E^\top & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & J-B & J-C \\ 0 & 0 & J-D & J-E \\ J-B^\top & J-D^\top & 0 & 0 \\ J-C^\top & J-E^\top & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wegen $A_1A_4 = A_4A_1 = A_3$ folgt nun $B = E, C = D$, sowie $J - B = E$, zusammen also $B = E = H_+$, $C = D = H_-$ mit $H_+ + H_- = J$.

Der $(00, 00)$-Block von A_1^2 ist (wenn wir $H_+ = (J + H)/2$, $H_- = (J - H)/2$ benutzen) $(J^2 + HH^\top)/2 = 2mJ + HH^\top/2$. Wegen $A_1^2 = 2mA_2 + 4mA_0$ muß dies aber gleich $2mJ + 2mI$ sein, also $HH^\top = 4mI$, d.h. H ist Hadamardmatrix und offensichtlich ist $G = G(H)$.

A.2 Die Bose-Mesner-Algebra

Sei $\mathcal{A}$ ein CAS der Klasse t auf X. Dann ist der von $\mathcal{A}$ erzeugte Unterraum $\mathbf{C}\mathcal{A}$ von $M_X = \mathbf{C}^{X\times X}$ nach Definition eine kommutative $\mathbf{C}$-Algebra mit Identität sowohl unter gewöhnlichem Matrixprodukt wie unter Hadamardprodukt, die unter Transposition abgeschlossen ist. Sie heißt die *Bose-Mesner-Algebra* von $\mathcal{A}$. Die A_i sind offenbar die minimalen Idempotenten von $\mathbf{C}\mathcal{A}$ bezüglich Hadamardprodukt. Es gibt auch eindeutig bestimmte minimale Idempotente $E_0, \dots, E_t$ bezüglich Matrixprodukt: Es sind die Orthogonalprojektoren auf die (simultanen) Eigenräume der A_i (es sind genau $t+1$, da diese Projektoren ja eine Basis von $\mathbf{C}\mathcal{A}$ bilden). Wir wählen kanonisch $E_0 = \frac{1}{n}J$ (offensichtlich idempotent, und minimal, weil Projektion auf einen eindimensionalen Unterraum).

Satz A.14 *Sei $\mathcal{M} \subset M_X$ kommutative $\mathbf{C}$-Algebra mit Identität sowohl unter gewöhnlichem Matrixprodukt wie unter Hadamardprodukt (insbesondere enthält sie I und J), die unter Transposition abgeschlossen ist. Dann ist $\mathcal{M}$ Bose-Mesner-Algebra eines CAS auf X.*

Beweis. Wir zeigen, daß $\mathcal{M}$ eine Basis von 0-1-Matrizen hat, die paarweise Hadamardprodukt 0 haben. Wir nennen eine 0-1-Matrix $A \in \mathcal{M}$ *primitiv*, wenn $A \neq 0$ und es für jede Matrix $M \in \mathcal{M}$ ein $\alpha = \alpha_A(M) \in \mathbf{C}$ gibt mit $M \circ A = aA$. Offensichtlich haben verschiedene primitive Matrizen Produkt 0, und man sieht folgendermaßen, daß die Menge $\mathcal{A}$ der primitiven Matrizen $\mathcal{M}$ erzeugt (also eine Basis ist): für alle $M \in \mathcal{M}$ ist $M - \sum_{A\in\mathcal{A}} \alpha_A(M)A$ Element von $\mathcal{A}^\perp = \{B \in \mathcal{M} | \forall A \in \mathcal{A}\ B \circ A = 0\}$. Angenommen $\mathcal{A}^\perp \neq 0$, dann gibt es ein $B \in \mathcal{A}^\perp \backslash \{0\}$ mit minimaler Anzahl von Einträgen ungleich 0, und einem Eintrag 1. Offensichtlich ist $B \circ B - B \in \mathcal{A}^\perp$ und hat weniger Einträge ungleich 0 als B, also $B \circ B = B$, d.h. B ist eine 0-1-Matrix. Ebenso ist für alle $M \in \mathcal{M}$ $M \circ B - \alpha B$ in $\mathcal{A}^\perp$ und hat für geeignetes α weniger Einträge ungleich 0 als B, also $M \circ B = \alpha B$. Folglich ist $B \in \mathcal{A}$, ein Widerspruch. Daraus folgt nun die Behauptung, denn es gibt ein Basiselement A_0 mit $I \circ A_0 = A_0$, da ja $I \in \mathcal{M}$. A_0 ist offensichtlich symmetrisch, also ist wegen der Kommutativität der Matrixmultiplikation in $\mathcal{M}$ $A_0 J$ symmetrisch, also $A_0 = I$. Für alle Elemente $A_0, \ldots, A_t$ von $\mathcal{A}$ ist $J \circ A_i = A_i$, also $J = \sum_i A_i$, und da $\mathcal{M}$ unter Matrixprodukt abgeschlossen ist, gibt es (notwendig natürlichzahlige) Parameter p_{ij}^k mit $A_i A_j = A_j A_i = \sum_k p_{ij}^k A_k$. □

Bemerkung A.15 *Satz A.14 zeigt, daß CAS auch durch* $\mathcal{E} = (E_0, \ldots, E_t)$ *definiert werden können. Es gilt nämlich offenkundig:*

(1') $\sum_i E_i = I$, $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$

(2') $E_0 = \frac{1}{n} J$

(3') $E_i^\top = \overline{E}_i = E_{\hat{i}}$

(4') $E_i \circ E_j = n^{-1} \sum_k q_{ij}^k E_k$

(5') $E_i \circ E_j = E_j \circ E_i$

Man kann zeigen, daß die Krein-Parameter q_{ij}^k *nichtnegative reelle Zahlen sind (vgl. [BI84], [BCN89]). Die* $k_i^* = q_{i\hat{i}}^0$ *heißen* duale Valenzen*; für sie gilt* $k_i^* = \operatorname{Spur} E_i = \operatorname{Rang} E_i > 0$ *(siehe folgendes Lemma). Mit diesen Axiomen erhalten wir denselben Begriff von Bose-Mesner-Algebra* $\mathbf{C}\mathcal{E}$*, also auch von CAS.*

Lemma A.16 *(0) Für alle* $i \neq j$: $q_{i\hat{j}}^0 = 0$

(1) Für alle i: $E_i \circ I = k_i^*/nI$, *oder äquivalent* $\operatorname{Spur} E_i = k_i^*$

(2) Für alle i, k: $k_i^* = \sum_j q_{ij}^k$

(3) Für alle i, j: $k_i^* k_j^* = \sum_k q_{ij}^k k_k^*$

Beweis. (1) $\operatorname{Spur} E_i = \operatorname{Spur} E_i E_i = \sum_x (E_i E_i)[x,x] = \sum_{x,y} E_i[x,y] E_i[y,x] = \sum_{x,y} (E_i \circ E_{\hat{i}})[x,y]$. Nun ist $E_i \circ E_{\hat{i}} = n^{-1} \sum_j q_{i\hat{i}}^j E_j$ und Multiplikation mit E_0 liefert für beliebiges $x \in X$ $\left(\sum_y (E_i \circ E_{\hat{i}})[x,y]\right) E_0 = n^{-1} q_{i\hat{i}}^0 E_0$, also $\sum_{x,y} (E_i \circ E_{\hat{i}})[x,y] = q_{i\hat{i}}^0 = k_i^*$.

(2) $\sum_k k_i^*/n E_k = k_i^*/nI = E_i \circ I = \sum_j E_i \circ E_j = n^{-1} \sum_k \sum_j q_{ij}^k A_k$, und durch Koeffizientenvergleich die Behauptung.

(3) Aus $E_i \circ E_j = n^{-1} \sum_k q_{ij}^k E_k$ durch Hadamardmultiplikation mit I und mit (1).
(0) folgt nun aus (2) und der Nichtnegativität der q_{ij}^k. $\square$

Bemerkung A.17 *Isomorphe CAS haben offenbar isomorphe Bose-Mesner-Algebren. Beachte aber, daß Isomorphie der abstrakten Bose-Mesner-Algebrastruktur nur Gleichheit der Parameter der CAS, im allgemeinen nicht aber kombinatorische Isomorphie impliziert. Ein Beispiel wird durch Graphen aus lateinischen Quadraten gegeben: Ein* lateinisches Quadrat *L der Ordnung n ist eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus $\{1, \ldots, n\}$, so daß jede Zahl in jeder Zeile und Spalte genau einmal vorkommt. Wir konstruieren Graphen GL auf $[n] \times [n]$, wobei zwei Ecken $(i,j), (u,v)$ genau dann verbunden seien, wenn $i = u$ oder $j = v$ oder $L[i,j] = L[u,v]$ ist. Man überlegt sich leicht, daß für festes n alle diese Graphen stark regulär sind und gleiche Parameter $(3n-3, 2n-4, 6)$ haben. Für $n = 4$ betrachte folgende zwei lateinische Quadrate:*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad L' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Die Graphen GL, GL' haben Parameter $(9,4,6)$, sind aber nicht isomorph: Man kann sich überlegen, daß die Automorphismengruppe von GL eckentransitiv wirkt, und daß für jede Ecke der von ihrer Nachbarschaft induzierte Teilgraph isomorph $L_2(3) = K_3 \times K_3$, insbesondere stark regulär mit Parametern $(4,1,2)$ ist. In GL' aber induziert die Nachbarschaft von $(1,4)$ einen Graphen H, der nicht stark regulär ist: die benachbarten Ecken $(1,1), (1,2)$ von H haben einen gemeinsamen Nachbarn, die benachbarten Ecken $(1,1), (2,4)$ jedoch nicht.

Da sowohl $\mathcal{A}$ als auch $\mathcal{E}$ kanonische Basen der Bose-Mesner-Algebra sind, hat man auf dieser einen (nach Wahl einer Reihenfolge der Basen) kanonischen (Vektorraum-)Automorphismus ψ mit $\psi(E_i) = A_i$, dessen Matrix relativ der Basis $\mathcal{E}$ wir mit P bezeichnen:

$$A_j = \sum_i P_{ij} E_i, \text{ d.h. mit Spaltenindex j}$$

Die Abbildung $n\psi^{-1}$ beschreiben wir in der Basis $\mathcal{A}$ durch eine Matrix Q:

$$nE_j = \sum_i Q_{ij} A_i, \text{ d.h. mit Spaltenindex j}$$

Offenbar gilt $PQ = QP = nI$.

Definition A.18 *Die Matrizen P bzw. Q heißen* erste *bzw.* zweite Eigenmatrix *von $\mathcal{A}$. Offenbar ist $E_i A_j = A_j E_i = P_{ij} E_i$ und $A_i \circ E_j = E_j \circ A_i = 1/n Q_{ij} A_i$. Das heißt insbesondere, daß die E_i simultane Eigenraumprojektoren für die A_j sind.*

Durch Summation über j und Koeffizientenvergleich erhält man

Bemerkung A.19 *Für alle i ist*

$$\sum_j P_{ij} = \sum_j Q_{ij} = \begin{cases} n & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen wir die Eigenmatrizen für unsere grundlegenden Beispiele:

Das triviale CAS $\mathcal{P}(n)$ hat die Eigenraumprojektoren $E_0 = J/n$ und $E_1 = I - J/n$, also die Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & n-1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = Q$$

Das Gruppenschema $\mathcal{G}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ hat die Eigenraumprojektoren

$$E_i = \frac{1}{n}\left(\sum_j \zeta^{-ij} A_j\right)$$

und folglich die Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & \cdots & \zeta^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{n-1} & \cdots & \zeta^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}, \quad Q = \bar{P}$$

wobei $\zeta = e^{2\pi i/n}$ oder allgemein eine beliebige primitive n-te Einheitswurzel. Für allgemeine endliche abelsche Gruppen ist Q die Matrix der Fouriertransformation und P die der Inversen (d.h. sie ist nichts weiter als die Charaktertabelle der Gruppe).

Für einen stark regulären Graphen G mit Parametern (k, λ, μ) hat die Adjazenzmatrix A höchstens drei Eigenwerte, k, s, r. Das Komplement hat damit die Eigenwerte $n-1-k, -1-s, -1-r$, die erste Eigenmatrix ist also

$$P = \begin{bmatrix} 1 & k & n-1-k \\ 1 & s & -1-s \\ 1 & r & -1-r \end{bmatrix}$$

Nach Definition der Parameter haben wir stets $A^2+(\mu-\lambda)A+(\mu-k)I = \mu J$, durch Mulitplikation mit E_1, E_2, also, daß s, r Nullstellen von $T^2+(\mu-\lambda)T+(\mu-k)$ sind, insbesondere $r+s = \lambda-\mu$, $rs = \mu-k$ (letzteres impliziert $rs \leq 0$; zusammen mit Spur $A = 0$, was ja eine gewichtete Summe der Eigenwerte k, s, r ist, folgt, daß einer der beiden Eigenwerte s, r negativ, der andere nichtnegativ ist). Die Gleichung für A können wir als $(A-sI)(A-rI) = \mu J$ umformulieren, was nach Multiplikation mit J die Relation $(k-s)(k-r) = \mu n = n(k+rs)$ ergibt. Seien für die Eigenraumprojektoren $E_0 = 1/nJ, E_1, E_2$ $e_i = \text{Rang}\, E_i = \dim \operatorname{im} E_i$. Dann hat man e_0=1 und $e_1 + e_2 = n-1$, sowie (wegen Spur $A_1 = 0$) $e_1 s + e_2 r = -k$, zusammen mit $r+s = \lambda-\mu$ erhält man so, falls $e_1 \neq e_2$, s, r als rationale ganz algebraische, also ganze Zahlen. $e_1 = e_2 = (n-1)/2$ aber impliziert $k = (\mu-\lambda)(n-1)/2$: da wir G als nichttrivial und nicht vollständig annehmen können, folgt $\mu - \lambda = 1$, $k = (n-1)/2$, aus $A^2 = kI + \lambda A + \mu(J-I-A)$ also $k = 2\mu$, $n = 4\mu+1$, $\lambda = \mu - 1$: G ist ein Konferenzgraph, seine Eigenwerte sind $s, r = (-1 \pm \sqrt{n})/2$.

A.3 Konstruktionen

Produkt

Das Produkt zweier CAS läßt sich am einfachsten durch seine Bose-Mesner-Algebra verstehen.

Definition A.20 *Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ CAS auf X_1, X_2. Dann ist das* Produktschema *$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ auf $X = X_1 \times X_2$ das CAS mit Bose-Mesner-Algebra $\mathbf{C}\mathcal{A} = \mathbf{C}\mathcal{A}_1 \otimes \mathbf{C}\mathcal{A}_2$.*

Bemerkung A.21 *Haben die CAS $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ Eigenmatrizen P_1, Q_1, P_2, Q_2, so hat $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ die Eigenmatrizen $P = P_1 \otimes P_2$, $Q = Q_1 \otimes Q_2$.*

Bemerkung A.22 *Offenbar ist für abelsche Gruppen G, H: $\mathcal{G}(G \times H) = \mathcal{G}(G) \times \mathcal{G}(H)$. Insbesondere $\mathcal{G}\left((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^k\right) \cong \mathcal{P}(2)^k$.*

Fusion, Fission, Symmetrisierung

Definition A.23 *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ CAS auf X. Sind die Relationen von $\mathcal{A}$ Vereinigungen von Relationen $\mathcal{B}$, so heißt $\mathcal{A}$* Fusionsschema*, oder kurz* Fusion *von $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$* Fissionsschema*, oder kurz* Fission *von $\mathcal{A}$, in Zeichen: $\mathcal{A} < \mathcal{B}$. Offenbar heißt dies nichts anderes, als daß $\mathbf{C}\mathcal{A}$ Unter-Bose-Mesner-Algebra von $\mathbf{C}\mathcal{B}$ ist. Wir vereinbaren folgende Sprechweise: mit $\mathcal{B} = (B_0, \ldots, B_s)$ gibt es zu jedem $A \in \mathcal{A}$ $I_A \subset \{0, \ldots, s\}$ mit $A = \sum_{j \in I_A} B_j$. Wir sagen dann, daß A* durch Fusion der $B_j, j \in I_A$ entsteht*, und die* $B_j, j \in I_A$ durch Fission von A entstehen*.*

Bemerkung A.24 *Hat dabei $\mathcal{B}$ die Eigenmatrizen P, Q (relativ den Basen $(B_0, \ldots, B_s)$ bzw. $(F_0, \ldots, F_s)$ minimaler Idempotenter bzgl. Hadamard- bzw. Matrixprodukt), so erhält man die Eigenmatrizen P', Q' von $\mathcal{A}$ wie folgt: $A_j = \sum_{l \in I_{A_j}} B_i$ hat die Eigenwerte $\sum_{j \in I_{A_j}} P_{kl}$ für die Projektoren F_k. Dann ist $E_i = \sum_{k \in I^*_{E_i}} F_k$, wobei die Partition von $\{0, \ldots, s\}$ durch die $I^*_{E_i}$ einer Äquivalenzrelation korresponiert, in der k_1, k_2 äquivalent sind, genau wenn für alle j gilt $\sum_{l \in I_{A_j}} P_{k_1 l} = \sum_{l \in I_{A_j}} P_{k_2 l}$. Offenbar gilt*

$$P'_{ij} = \sum_{l \in I_{A_j}} P_{kl} \text{ für beliebiges } k \in I^*_{E_i}$$

$$Q'_{ij} = \sum_{l \in I^*_{E_j}} Q_{kl} \text{ für beliebiges } k \in I_{A_i}$$

Ein Spezialfall von Fusion ist Symmetrisierung.

Definition A.25 *Sei $\mathcal{A}$ ein CAS auf X. Dann ist die* Symmetrisierung $\mathrm{Sym}(\mathcal{A})$ *von $\mathcal{A}$ das CAS auf X mit der Bose-Mesner-Algebra der symmetrischen Matrizen von $\mathbf{C}\mathcal{A}$.*

Beispiel A.26 $\mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})) \cong \mathcal{P}(3)$.

Miscellanea

Hier sollen zwei speziellere, kombinatorisch nützliche Konstruktionen eingeführt werden: ich nenne sie *Verdickung* und *Vervielfältigung*.

Definition A.27 *Sei $\mathcal{A} = (A_0, \dots, A_t)$ ein CAS. Die ν-fache* Vervielfältigung *$\nu \cdot \mathcal{A}$ von $\mathcal{A}$ ist dasjenige Fusionsschema von $\mathcal{A} \times \mathcal{P}(\nu)$, das durch Fusionieren aller $A_i \otimes (J - I)$, $(A_i \in \mathcal{A})$ zu $B_{t+1} = J_X \otimes (J - I)$ entsteht. Man überlegt sich leicht, daß $\nu \cdot \mathcal{A} = (B_0, \dots, B_t, B_{t+1})$, mit $B_i = A_i \otimes I_{[\nu]}$ für $i \leq t$, ein CAS ist:*

$$B_i B_j = \sum_k p_{ij}^k B_k \text{ für } i, j \leq t$$

$$B_i B_{t+1} = B_{t+1} B_i = k_i B_{t+1} \text{ für } i \leq t$$

$$B_{t+1}^2 = (\nu - 2) n B_{t+1} + (\nu - 1) n J_X \otimes I_{[\nu]} = (\nu - 2) n B_{t+1} + \sum_{i \leq t} (\nu - 1) n B_i$$

Definition A.28 *Sei $\mathcal{A}$ ein CAS. Die ν-fache* Verdickung *$\mathcal{A}[\nu]$ von $\mathcal{A}$ ist dasjenige Fusionsschema von $\mathcal{A} \times \mathcal{P}(\nu)$, das durch Fusionieren aller Paare $(A_i \otimes I, A_i \otimes (J - I))$, $(i > 0)$ zu $B_i = A_i \otimes J$ entsteht. Man überlegt sich leicht, daß $\mathcal{A}[\nu] = (B_0, \dots, B_t, B_{t+1})$, mit $B_0 = A_0 \otimes I$, $B_{t+1} = A_0 \otimes (J - I)$, ein CAS ist:*

$$B_i B_j = \sum_k \nu p_{ij}^k B_k \text{ für } 0 < i, j \leq t$$

$$B_0 = I, \ B_{t+1}^2 = (\nu - 1) I + (\nu - 2) B_{t+1}$$

$$B_i B_{t+1} = B_{t+1} B_i = (\nu - 1) B_i \text{ für } 0 < i \leq t$$

A.4 Dualität

Im folgenden bezeichne τ_X die Transposition in M_X.

Definition A.29 *Seien $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ Bose-Mesner-Algebren von CAS auf X, X', ferner $\psi : \mathcal{M} \longmapsto \mathcal{M}'$, $\psi' : \mathcal{M}' \longmapsto \mathcal{M}$ lineare Abbildungen. Das Paar (ψ, ψ') heißt* Dualität, *wenn*

(1) $\psi' \psi = \tau_X$, $\psi \psi' = \tau_{X'}$

(2) $\psi(AB) = (\psi A) \circ (\psi B)$, $\psi'(A'B') = (\psi' A') \circ (\psi' B')$.

In diesem Fall heißen $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ dual.

Ist $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ und $\psi = \psi'$, so heißt $\mathcal{M}$ selbstdual, *und ψ* Selbstdualität.

Satz A.30 *Sei (ψ, ψ') Dualität von Bose-Mesner-Algebren $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$. Dann gelten die Gleichungen*

$\psi(A \circ B) = \frac{1}{n} (\psi A)(\psi B)$, $\psi'(A' \circ B') = \frac{1}{n} (\psi' A')(\psi' B')$.

Beweis. Nach Definition ist ψ ein Isomorphismus von Vektorräumen, es gibt also zu $A', B' \in \mathcal{M}'$ $A, B \in \mathcal{M}$ mit $A' = \psi A, B' = \psi B$. Wir setzen in die zweite Gleichung von Definition A.29.(2) ein:
$\psi'((\psi A)(\psi B)) = (\psi'\psi A) \circ (\psi'\psi B) = (nA^\top) \circ (nB^\top)$, also $n((\psi A)(\psi B))^\top = n^2\psi\left((A \circ B)^\top\right)$. Die Behauptung folgt, weil nach Definition A.29.(1) $\psi\tau_X = \tau_{X'}\psi$. Analog für ψ'. □

Korollar A.31 *Sei (ψ, ψ') Dualität von Bose-Mesner-Algebren $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ mit Basen $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ bzw. $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ minimaler Idempotenter bezüglich Hadamard- bzw. Matrixprodukt. Dann gilt $\psi\mathcal{A} = n\mathcal{E}'$, $\psi\mathcal{E} = \mathcal{A}'$, $\psi'\mathcal{A}' = n\mathcal{E}$, $\psi'\mathcal{E}' = \mathcal{A}$, genauer kann man die genannten Basen so indizieren, daß für alle i:*

$$\psi E_i = A'_i,\ \psi A_i = nE_i'^\top, \quad \psi' E'_i = A_i,\ \psi' A'_i = nE_i^\top$$

So eine Indizierung sei stets implizit in der Anwesenheit einer Dualität. □

Korollar A.32 *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ CAS und (ψ, ψ') Dualität ihrer Bose-Mesner-Algebren $\mathbf{C}\mathcal{A}, \mathbf{C}\mathcal{A}'$. Bezeichne die $'$-Abbildung (Definition A.1) der Indizes für $\mathcal{A}'$ mit s, die $\hat{}$-Abbildung mit h, so gelten*

$$\forall i\ s(i) = i\hat{},\ h(i) = i'$$

Ferner für die Schnittzahlen

$$\forall i, j, k\ q'^k_{ij} = p^k_{ij},\ p'^k_{ij} = q^k_{ij}$$

Insbesondere ist für ein selbstduales CAS $i' = i\hat{}$ und die Kreinparameter sind gleich den Schnittzahlen.

Beweis. Wir haben

$$A'_{s(i)} = A_i'^\top = \psi E_i^\top = \psi E_{i\hat{}} = A'_{i\hat{}}$$

und

$$nE'_{h(i)} = nE_i'^\top = \psi A_i = \left(\psi A_i^\top\right)^\top = (\psi A_{i'})^\top = nE'_{i'}$$

Ferner aus $E_i \circ E_j = n^{-1}\sum_k q^k_{ij} E_k$ durch Anwendung von ψ

$$\sum_k p'^k_{ij} A'_k = A'_i A'_j = \sum_k q^k_{ij} A'_k$$

also $p'^k_{ij} = q^k_{ij}$ und analog $q'^k_{ij} = p^k_{ij}$. □

Satz A.33 *Seien $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ Bose-Mesner-Algebren mit ersten und zweiten Eigenmatrizen P, P' und Q, Q', und (ψ, ψ') Dualität von $(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$. Dann gilt $Q' = \bar{P}$, $Q = \bar{P}'$. Umgekehrt folgt aus diesen Gleichungen, daß für die durch $\psi : E_i \longmapsto A'_i$, $\psi' : E'_i \longmapsto A_i$ definierten linearen Abbildungen (ψ, ψ') eine Dualität ist.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_i Q_{ij} A_i = nE_j = \left(\psi A'_j\right)^\top = \left(\psi \overline{A'_j}\right)^\top &= \left(\psi\left(\sum_i \overline{P'_{ij} E'_i}\right)\right)^\top \\ = \sum_i \overline{P'_{ij}} \left(\psi E_i'^\top\right)^\top = \sum_i \overline{P'_{ij}} A_i\end{aligned}$$

also $Q_{ij} = \overline{P'_{ij}}$, und analog $P_{ij} = \overline{Q'_{ij}}$. Für die Umkehrung beachte, daß ψ, ψ' linear sind, und Definition A.29.(2) erfüllen. Ferner

$$\begin{aligned}\psi'\psi E_j = \psi' A'_j = \psi'\left(\sum_i P'_{ij} E'_i\right) &= \sum_i P'_{ij} A_i \\ = \sum_i \overline{Q_{ij}} A_i = \sum_i \overline{Q_{ij} A_i} &= n\overline{E_j} = nE_j^\top\end{aligned}$$

also (1) $\psi'\psi = n\tau_X$, und analog $\psi\psi' = n\tau_{X'}$. □

Beispiele für Dualität liefert folgender

Satz A.34 *Sei $\mathcal{B} = (B_0, \ldots, B_s)$ selbstduales CAS mit Selbstdualität ψ und Matrixprodukt-Idempotenten $(F_0, \ldots, F_s)$, $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ ein Fusionsschema mit Hadamard-Idempotenten $A_0, \ldots, A_t$, $A_i = \sum_{k \in I_i} B_k$. Dann ist, mit $E_i = \sum_{k \in I_i} F_k$, $\mathcal{M} = \sum_i \mathbf{C} E_i$ Bose-Mesner-Algebra eines CAS $\mathcal{A}'$ und die Einschränkung $(\psi|_{\mathbf{C}\mathcal{A}}, \psi|_{\mathbf{C}\mathcal{A}'})$ ist eine Dualität von $(\mathbf{C}\mathcal{A}, \mathbf{C}\mathcal{A}')$.*

Beweis. Daß $(\psi|_{\mathbf{C}\mathcal{A}}, \psi|_{\mathbf{C}\mathcal{A}'})$ die Gleichungen von Definition A.29 erfüllt, folgt, weil ψ Selbstdualität ist. Es ist nur noch zu zeigen, daß $\mathcal{M}$ Bose-Mesner-Algebra ist: offenbar ist es eine $\mathbf{C}$-Algebra, es ist also nur Abgeschlossenheit unter Hadamardprodukt zu zeigen. Nun ist wegen $\psi F_k = B_k$ $\psi_{\mathcal{M}}$ ein Epimorphismus auf $\mathbf{C}\mathcal{A}$, also aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus. Damit gilt für $A, B \in \mathcal{M}$: $\psi(A \circ B) = n^{-1}(\psi A)(\psi B) \in \mathbf{C}\mathcal{A}$, also $A \circ B = \psi^{-1}\left(\psi(A \circ B)\right) = \psi^{-1}\left(n^{-1}(\psi A)(\psi B)\right) \in \mathcal{M}$. □

Korollar A.35 *Ist $\mathcal{A}$ selbstduales CAS mit Selbstdualität ψ, so ist* $\mathrm{Sym}(\mathcal{A})$ *selbstdual mit Selbstdualität $\psi|_{\mathbf{C}\,\mathrm{Sym}(\mathcal{A})}$.* □

Für die Konstruktionen der Verdickung und Vervielfältigung (Definition A.27 und A.28) hat man das für sich schöne

Korollar A.36 *Sei $\mathcal{A} = (A_0, \ldots, A_t)$ CAS mit einer Selbstdualität ψ, $\nu \geq 2$ eine natürliche Zahl, ψ_0 die Selbstdualität von $\mathbf{C}\mathcal{P}(\nu)$. Dann ergibt die Selbstdualität $\psi \otimes \psi_0$ von $\mathbf{C}\mathcal{A} \otimes \mathbf{C}\mathcal{P}(\nu)$ durch Einschränkung eine Dualität von $(\mathbf{C}(\nu \cdot \mathcal{A}), \mathbf{C}(\mathcal{A}[\nu]))$.*

Beweis. Wir berechnen minimale Idempotente und Eigenmatrizen der Verdickung und Vervielfältigung: $\nu \cdot \mathcal{A} = (A_0 \otimes I, \ldots, A_t \otimes I, J_X \otimes (J - I))$ und $\mathcal{A}[\nu] = (A_0 \otimes I, A_1 \otimes J, \ldots, A_t \otimes J, A_0 \otimes (J - I))$. Seien die minimalen Matrixprodukt-Idempotenten von $\mathcal{A}$ $(E_0, \ldots, E_t)$ mit $A_i = \psi E_i$. Mit den Matrixprodukt-Idempotenten $1/\nu J$ und $I - 1/\nu J$ von $\mathcal{P}(\nu)$, ist das ψ-Urbild von $\nu \cdot \mathcal{A}$ gleich

$$(E_0 \otimes 1/\nu J, E_1 \otimes I, \ldots, E_t \otimes I, E_0 \otimes (I - 1/\nu J))$$

was man direkt als Basis von Matrixprodukt-Idempotenten von $\mathcal{A}[\nu]$ erkennt. Das ψ-Urbild von $\mathcal{A}[\nu]$ ist

$$(E_0 \otimes 1/\nu J, E_1 \otimes I, \ldots, E_t \otimes I, E_0 \otimes (I - 1/\nu J))$$

was man ebenso direkt als Basis von Matrixprodukt-Idempotenten von $\nu \cdot \mathcal{A}$ erkennt. Mit Satz A.34 folgt die Behauptung.

Man sieht dies auch, wenn man sich die ersten Eigenmatrizen notiert: die erste Eigenmatrix $P_{\mathcal{A}}$ sei (mit dem Vektor $\mathbf{k}$ der Valenzen und dem Vektor $\mathbf{1}$ mit lauter Einsen)

$$P_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{k} \\ \mathbf{1} & P_0 \end{bmatrix} = \overline{Q_{\mathcal{A}}}$$

Dann erkennt man mit den obigen Bezeichnungen, daß

$$P_{\nu \cdot \mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{k} & n(\nu - 1) \\ \mathbf{1} & P_0 & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{k} & -n \end{bmatrix}$$

$$P_{\mathcal{A}[\nu]} = \begin{bmatrix} 1 & \nu\mathbf{k} & \nu - 1 \\ \mathbf{1} & \nu P_0 & \nu - 1 \\ 1 & \mathbf{0} & -1 \end{bmatrix}$$

und rechnet nach, daß $P_{\nu\cdot\mathcal{A}}\overline{P_{\mathcal{A}[\nu]}} = n\nu I_{t+2}$ ist, also $Q_{\mathcal{A}[\nu]} = \overline{P_{\nu\cdot\mathcal{A}}}$, $Q_{\nu\cdot\mathcal{A}} = \overline{P_{\mathcal{A}[\nu]}}$, was nach Satz A.33 Dualität bedeutet. $\square$

In den Anwendungen im Hauptteil der Arbeit sind wir mit selbstdualen CAS beschäftigt. In der Regel gibt es mehrere Selbstdualitäten (siehe am Ende von Abschnitt A.2 die Eigenmatrizen der Gruppenschemata), die aber in Relation zueinander stehen:

Satz A.37 *Sei $\mathcal{A}$ selbstduales CAS, mit zwei Selbstdualitäten ψ_1, ψ_2. Dann ist $\alpha = \psi_2\psi_1^{-1}$ ein Automorphismus der Bose-Mesner-Algebra $\mathbf{C}\mathcal{A}$ und es gilt $\alpha\psi_1\alpha = \psi_1$.*
Umgekehrt sei ψ Selbstdualität und α ein Automorphismus mit $\alpha\psi\alpha = \psi$, so ist $\alpha\psi$ eine Selbstdualität.

Beweis. Es gilt $n\tau_X = \psi_2^2 = \alpha\psi_1\alpha\psi_1$, durch Multiplikation mit ψ_1 und mit $\psi_1^2 = n\tau_X$ folgt die erste Behauptung, denn daß α Bose-Mesner-Algebra-Automorphismus ist, folgt unmittelbar aus den Definitionen. Für die zweite rechnet man einfach nach $(\alpha\psi)^2 = (\alpha\psi\alpha)\psi = \psi^2 = n\tau_X$. $\square$

Korollar A.38 *Sei ψ Selbstdualität von $\mathcal{A}$, α ein Bose-Mesner-Algebra-Automorphismus, der folglich die A_i permutiert: $\alpha : A_i \longmapsto A_{\pi(i)}$. Dann ist $\alpha\psi$ Selbstdualität genau wenn $\forall i,j\ P_{\pi(i),j} = P_{i,\pi(j)}$.*

Beweis. Wir verwenden die Bedingung von Satz A.37 in der Form $\alpha\psi\alpha = \psi$. Es reicht dabei, die Basis der A_i zu betrachten:
linke Seite: $A_j \longmapsto A_{\pi(j)} \longmapsto nE_{\pi(j)'} = \sum_i P_{i,\pi(j)'}A_i \longmapsto \sum_i P_{i,\pi(j)'}A_{\pi(i)}$,
rechte Seite: $A_j \longmapsto nE_{j'} = \sum_i P_{i,j'}A_i = \sum_i P_{\pi(i),j'}A_{\pi(i)}$.
Mit $\pi(j)' = \pi(j')$ (da $\alpha\tau_X = \tau_X\alpha$) folgt die Behauptung. $\square$

A.5 Dreifach reguläre CAS

Für ein CAS $\mathcal{A}$ schreiben wir

$$\nabla\mathcal{A} = \{(u,v,w) | \exists\alpha\beta\gamma\ (\beta,\gamma) \in R_u, (\gamma,\alpha) \in R_v, (\alpha,\beta) \in R_w\}$$

(d.h. $(u,v,w) \in \nabla\mathcal{A}$ genau wenn $p_{uv}^{w'} > 0$).

Definition A.39 *Definiere lineare Abbildungen (*Stern- *bzw.* Dreiecksprojektion*)*

$$\pi \textit{ bzw. } \pi^* : \mathbf{C}\mathcal{A} \otimes \mathbf{C}\mathcal{A} \otimes \mathbf{C}\mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}X \otimes \mathbf{C}X \otimes \mathbf{C}X$$

durch

$$\pi(A\otimes B\otimes C)=\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\sum_x A[x,\alpha]B[x,\beta]C[x,\gamma]\alpha\otimes\beta\otimes\gamma$$

$$\pi^*(A\otimes B\otimes C)=\sum_{\alpha,\beta,\gamma} A[\beta,\gamma]B[\gamma,\alpha]C[\alpha,\beta]\alpha\otimes\beta\otimes\gamma$$

Ferner definiere Vektoren $Y_{ijk}=\pi(E_i\otimes E_j\otimes E_k)$, $\Delta_{uvw}=\pi^*(A_u\otimes A_v\otimes A_w)$ *in* $\mathbf{C}X\otimes\mathbf{C}X\otimes\mathbf{C}X$.

Definition A.40 *Ein CAS* $\mathcal{A}$ *heißt* dreifach regulär, *wenn für alle* $(i,j,k)\in\{0,\dots,t\}^3$, $(u,v,w)\in\nabla\mathcal{A}$ *eine ganze Zahl* $K(ijk|uvw)$ *existiert mit*

$$K(ijk|uvw)=|\{x|(x,\alpha)\in R_i,(x,\beta)\in R_j,(x,\gamma)\in R_k\}|$$

für alle α,β,γ *mit* $(\beta,\gamma)\in R_u,(\gamma,\alpha)\in R_v,(\alpha,\beta)\in R_w$. *D.h. wenn*

$$\sum_x A_i[x,\alpha]A_j[x,\beta]A_k[x,\gamma]=\sum_{uvw\in\nabla\mathcal{A}}K(ijk|uvw)A_u[\beta,\gamma]A_v[\gamma.\alpha]A_w[\alpha,\beta]$$

(da es solche α,β,γ *gibt, ist* $K(ijk|uvw)$ *eindeutig definiert).*

Satz A.41 *Sei* $\mathcal{A}$ *ein CAS. Ist* $\mathcal{A}$ *dreifach regulär, so gilt für den durch*

$$K(A_i\otimes A_j\otimes A_k)=\sum_{uvw\in\nabla\mathcal{A}}K(ijk|uvw)A_u\otimes A_v\otimes A_w$$

definierten Endomorphismus von $\mathbf{C}\mathcal{A}\otimes\mathbf{C}\mathcal{A}\otimes\mathbf{C}\mathcal{A}$

$$\pi=\pi^*K$$

Gibt es umgekehrt ein K *mit dieser Eigenschaft, so ist* $\mathcal{A}$ *dreifach regulär.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ dreifach regulär. Dann ist nach Definition

$$\begin{aligned}\pi(A_i\otimes A_j\otimes A_k)&=\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\sum_{uvw\in\nabla\mathcal{A}}K(ijk|uvw)A_u[\beta,\gamma]A_v[\gamma,\alpha]A_w[\alpha,\beta]\\&=\sum_{uvw\in\nabla\mathcal{A}}K(ijk|uvw)\pi^*(A_u\otimes A_v\otimes A_w)\\&=\pi^*\left(\sum_{uvw\in\nabla\mathcal{A}}K(ijk|uvw)A_u\otimes A_v\otimes A_w\right)\\&=\pi^*K(A_i\otimes A_j\otimes A_k)\end{aligned}$$

Sei umgekehrt K mit $\pi = \pi^* K$ gegeben, mit Koeffizienten $K(ijk|uvw)$, so daß also

$$K(A_i \otimes A_j \otimes A_k) = \sum_{u,v,w=0}^{d} K(ijk|uvw) A_u \otimes A_v \otimes A_w$$

gilt. Anwenden von π^* liefert mit der Voraussetzung

$$\pi(A_i \otimes A_j \otimes A_k) = \sum_{uvw \in \nabla\mathcal{A}} K(ijk|uvw) \pi^*(A_u \otimes A_v \otimes A_w)$$

(wobei man beachtet, daß für $uvw \notin \nabla\mathcal{A}$ $\pi^*(A_u \otimes A_v \otimes A_w) = \Delta_{uvw} = 0$ ist), also für alle α, β, γ

$$\sum_x A_i[x,\alpha] A_j[x,\beta] A_k[x,\gamma] = \sum_{uvw \in \nabla\mathcal{A}} K(ijk|uvw) A_u[\beta,\gamma] A_v[\gamma.\alpha] A_w[\alpha,\beta]$$

□

Motiviert durch diese Charakterisierung dreifacher Regularität geben wir folgende

Definition A.42 *Das CAS $\mathcal{A}$ mit den Stern- und Dreiecksprojektionen π, π^* heißt* dual dreifach regulär, *wenn es einen Endomorphismus K^* von $\mathbf{C}\mathcal{A} \otimes \mathbf{C}\mathcal{A} \otimes \mathbf{C}\mathcal{A}$ gibt mit $\pi^* = \pi K^*$.*

Es heißt exakt dreifach regulär, *wenn es sowohl dreifach regulär wie dual dreifach regulär ist.*

Wir untersuchen nun die Y_{ijk} und Δ_{uvw} näher. Sei $\nabla^*\mathcal{A} = \{(i,j,k)|Y_{ijk} \neq 0\}$, dann gilt

Lemma A.43 $(\Delta_{uvw}|(u,v,w) \in \nabla\mathcal{A})$ *ist eine Orthogonalbasis von* $\operatorname{im}\pi^*$, *genauer ist*

$$\langle \Delta_{uvw}, \Delta_{xyz} \rangle = n k_w p_{uv}^{w'} \delta_{uvw,xyz}$$

$(Y_{ijk}|(i,j,k) \in \nabla^*\mathcal{A})$ *ist eine Orthogonalbasis von* $\operatorname{im}\pi$, *genauer ist*

$$\langle Y_{ijk}, Y_{rst} \rangle = n^{-1} k_k^* q_{ij}^{\hat{k}} \delta_{ijk,rst}$$

Insbesondere ist $\nabla^*\mathcal{A} = \{(i,j,k)|q_{ij}^{\hat{k}} > 0\}$ und daher für selbstduales $\mathcal{A}$: $\nabla^*\mathcal{A} = \nabla\mathcal{A}$ (da dann $q_{ij}^{\hat{k}} = p_{ij}^{k'}$, vgl. Korollar A.32).

Beweis. $\langle \Delta_{uvw}, \Delta_{xyz} \rangle$ ist die Anzahl der (α, β, γ) mit $(\beta, \gamma) \in R_u \cap R_x$, $(\gamma, \alpha) \in R_v \cap R_y$, $(\alpha, \beta) \in R_w \cap R_z$. Offensichtlich ist diese 0 für $uvw \neq xyz$. Für $uvw = xyz$ kann man sie leicht abzählen: n Möglichkeiten für die erste Position, k_w für die zweite, $p_{uv}^{w'}$ für die dritte.
Ferner

$$\begin{aligned}
\langle Y_{ijk}, Y_{rst} \rangle &= \sum_{\alpha\beta\gamma} \left(\sum_x E_i[x, \alpha] E_j[x, \beta] E_k[x, \gamma] \right) \left(\sum_y E_r^\top[y, \alpha] E_s^\top[y, \beta] E_t^\top[y, \gamma] \right) \\
&= \delta_{ijk,rst} \sum_{x,y} E_i[x, y] E_j[x, y] E_k[x, y] \\
&= \delta_{ijk,rst} \sum_{x,y} (E_i \circ E_j \circ E_k)[x, y]
\end{aligned}$$

Nach Definition ist $E_i \circ E_j \circ E_k = n^{-2} \sum_{l,m} q_{ij}^l q_{lk}^m E_m$. Multiplikation mit $E_0 = 1/nJ$ liefert für beliebiges $x \in X$

$$\left(\sum_y (E_i \circ E_j \circ E_k)[x, y] \right) E_0 = n^{-2} \sum_l q_{ij}^l q_{lk}^0 E_0$$

also

$$\sum_{x,y} (E_i \circ E_j \circ E_k)[x, y] = n^{-1} \sum_l q_{ij}^l q_{lk}^0 = n^{-1} q_{ij}^{k^\wedge} q_{kk^\wedge}^0$$

da $q_{lk}^0 = q_{kl}^0 = 0$ für $l \neq k^\wedge$ (Lemma A.16). □

Definieren wir nun Endomorphismen κ, κ^* von $\mathbf{C}\mathcal{A} \otimes \mathbf{C}\mathcal{A} \otimes \mathbf{C}\mathcal{A}$ durch

$$\kappa(E_i \otimes E_j \otimes E_k) = \sum_{uvw \in \nabla \mathcal{A}} \langle Y_{ijk}, \Delta_{uvw} \rangle / \langle \Delta_{uvw}, \Delta_{uvw} \rangle A_u \otimes A_v \otimes A_w$$

$$\kappa^*(A_u \otimes A_v \otimes A_w) = \sum_{ijk \in \nabla^* \mathcal{A}} \langle \Delta_{uvw}, Y_{ijk} \rangle / \langle Y_{ijk}, Y_{ijk} \rangle E_i \otimes E_j \otimes E_k$$

Satz A.44 *Für ein CAS $\mathcal{A}$ sind äquivalent:*
(1) $\mathcal{A}$ ist dreifach regulär.
(2) $\operatorname{im} \pi \subset \operatorname{im} \pi^*$.
(3) für die oben definierte Abbildung κ gilt $\pi = \pi^* \kappa$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) und (3) $\Rightarrow$ (1) folgen aus Satz A.41. Mit Lemma A.43 ist

$$\begin{aligned}\pi^*\kappa(E_i \otimes E_j \otimes E_k) &= \sum_{uvw \in \nabla\mathcal{A}} \langle Y_{ijk}, \Delta_{uvw}\rangle / \langle \Delta_{uvw}, \Delta_{uvw}\rangle \Delta_{uvw} \\ &= Y_{ijk}, \text{ da } Y_{ijk} \in \operatorname{im}\pi \subset \operatorname{im}\pi^* \\ &= \pi(E_i \otimes E_j \otimes E_k)\end{aligned}$$

was (2) $\Rightarrow$ (3) zeigt. $\square$

Satz A.45 *Für ein CAS $\mathcal{A}$ sind äquivalent:*
(1) $\mathcal{A}$ ist dual dreifach regulär.
(2) $\operatorname{im}\pi^* \subset \operatorname{im}\pi$.
(3) für die oben definierte Abbildung κ^* gilt $\pi^* = \pi\kappa^*$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) und (3) $\Rightarrow$ (1) folgen aus Definition A.42. Mit Lemma A.43 ist

$$\begin{aligned}\pi\kappa^*(A_u \otimes A_v \otimes A_w) &= \sum_{ijk \in \nabla^*\mathcal{A}} \langle \Delta_{uvw}, Y_{ijk}\rangle / \langle Y_{ijk}, Y_{ijk}\rangle Y_{ijk} \\ &= \Delta_{uvw}, \text{ da } \Delta_{uvw} \in \operatorname{im}\pi^* \subset \operatorname{im}\pi \\ &= \pi^*(A_u \otimes A_v \otimes A_w)\end{aligned}$$

was (2) $\Rightarrow$ (3) zeigt. $\square$

Korollar A.46 *Sei $\mathcal{A}$ ein CAS.*
(1) $\mathcal{A}$ ist exakt dreifach regulär genau wenn $\operatorname{im}\pi = \operatorname{im}\pi^*$.
(2) Ist $\mathcal{A}$ dreifach regulär (bzw. dual dreifach regulär), so ist $\mathcal{A}$ exakt dreifach regulär genau wenn $|\nabla\mathcal{A}| = |\nabla^*\mathcal{A}|$.
(3) Ist $\mathcal{A}$ dreifach regulär (bzw. dual dreifach regulär) und selbstdual, so ist $\mathcal{A}$ exakt dreifach regulär.

Beweis. (1) folgt aus den beiden vorangehenden Sätzen A.44 und A.45.
(2) folgt daraus, daß nach Lemma A.43 $(Y_{ijk} | ijk \in \nabla^*\mathcal{A})$ Basis von $\operatorname{im}\pi$, $(\Delta_{uvw} | uvw \in \nabla\mathcal{A})$ Basis von $\operatorname{im}\pi^*$ ist und mit Satz A.44 und Korollar A.46.
(3) folgt mit (2), weil nach Lemma A.43 $\nabla\mathcal{A} = \nabla^*\mathcal{A}$. $\square$

Bemerkung A.47 *Mit den universellen Eigenschaften des Tensorprodukts ersieht man aus den Sätzen A.44 und A.45, daß das Produkt dreifach regulärer (bzw. dual dreifach regulärer) CAS dreifach regulär (bzw. dual dreifach regulär) ist.*

A.6 Klassifikation kleiner CAS

Wir geben hier eine vollständige Klassifikation aller symmetrischen CAS auf höchstens 11 Punkten. Wir sortieren die CAS primär nach ihrer Größe, d.h. nach $n = |X|$. Sekundär nach ihrer Klasse, d.h. nach der Dimension ihrer Bose-Mesner-Algebra. Tertiär lexikographisch nach ihrer Valenzpartition (das ist die absteigend geordnete Folge der Valenzen, die offenbar eine Zahlpartition von n ist). Wir geben jeweils eine geeignete Realisierung des CAS an und notieren seine Eigenmatrizen.

Allgemeine Prinzipien

Lemma A.48 *Sei $\mathcal{A}$ symmetrisches CAS. Dann ist die* Matchinggruppe $\mu_{\mathcal{A}} = \{A_i \in \mathcal{A} | k_i = 1$, *d.h.* $A_i = I$ *oder* A_i *Matching*$\}$ *eine abelsche Matrixgruppe, die Exponent 2 hat, falls sie nicht trivial ist.*

Beweis. Es ist klar, daß für $A \in \mu_{\mathcal{A}}$ gilt $A^2 = I$. Ferner ist nach Lemma A.3 für $A_i, A_j \in \mu_{\mathcal{A}}$: $1 = k_i k_j = \sum_k p_{ij}^k k_k$, also gibt es genau ein k mit $p_{ij}^k > 0$, und damit notwendig $p_{ij}^k = k_k = 1$, d.h. $A_k \in \mu_{\mathcal{A}}$ und $A_i A_j = A_j A_i = A_k$. $\square$

Lemma A.49 *Sei $\mathcal{A}$ symmetrisches CAS.*
(1) Die Multiplikation in $\mathcal{A}$ definiert eine valenzerhaltende Wirkung von $\mu_{\mathcal{A}}$ auf $\mathcal{A}$.
(2) $\mu_{\mathcal{A}}$ wirkt auf X als Gruppe von Permutationsmatrizen fixpunktfrei, insbesondere ist $|\mu_{\mathcal{A}}|$ ein Teiler von n.

Beweis. Sei $A_i \in \mu_{\mathcal{A}}$. (1) Für $A_j \in \mathcal{A}$ ist zunächst $A_i A_j = \sum_k p_{ij}^k A_k$, also $A_j = A_i^2 A_j = \sum_k p_{ij}^k A_i A_k$. Es folgt, daß es ein k gibt mit $p_{ij}^k = 1$ und $p_{ij}^l = 0$ für $l \neq k$, d.h. $A_i A_j = A_k$. Aus Lemma A.3 folgt ferner $k_j = k_k$.
(2) Die Wirkung ist offensichtlich, und sie ist fixpunktfrei, weil A_i entweder gleich I ist oder ein perfektes Matching. $\square$

Bemerkung A.50 *Die beiden Lemmata A.48 und A.49 gelten (mit Abschwächung) auch im unsymmetrischen Fall: die Relationen mit Valenz eins bilden eine Matrixgruppe γ, die auf $\mathcal{A}$ durch Matrixprodukt wirkt. Auf X wirkt γ als Permutationsgruppe fixpunktfrei, insbesondere ist $|\gamma|$ ein Teiler von $|X|$.*

Lemma A.51 *Ist n ungerade, so sind alle k_i $(i > 0)$ gerade.*

Beweis. Für $i > 0$ ist A_i die Adjanzenzmatrix eines k_i-egulären Graphen. Durch doppeltes Abzählen der Kanten: $k_i n = 2|E|$, also ist k_i gerade. □

Lemma A.52 *Sei $\mathcal{A}$ symmetrisches CAS, eine Vereinigung G von Relationen habe Valenz 2. Dann ist G eine Vereinigung gleich langer Zyklen.*

Beweis. Es ist klar, daß G (mit Adjanzenzmatrix A) eine Vereinigung von Zykeln ist: $A = \sum_j \Gamma_j$, Γ_j Zykel auf den Ecken $X_j \subset X$. Es ist klar, daß das Matrixalgebra-Erzeugnis von A in $\bigoplus_j M_{X_j}$ enthalten ist (und Teilmenge von $\mathbf{C}\mathcal{A}$ ist).
1. Fall: ein Zykel hat ungerade Länge. Ohne Einschränkung hat Γ_1 die minimale ungerade Länge l und angenommen, es gäbe Γ_2 mit einer anderen Länge. Dann ist

$$\begin{aligned}(A^l) \circ (I_{X_1 \cup X_2}) &= (\Gamma_1^l + \Gamma_2^l) \circ (I_{X_1} + I_{X_2}) \\ &= 2I_{X_1} + 0I_{X_2}\end{aligned}$$

und wir erhalten den Widerspruch $(A^l) \circ I \notin \mathbf{C}\mathcal{A}$.
2. Fall: Alle Zykel sind gerade. Ohne Einschränkung hat Γ_1 die minimale Länge l, und angenommen, es gäbe Γ_2 mit einer größeren Länge. Dann ist

$$\begin{aligned}(A^l) \circ (I_{X_1 \cup X_2}) &= (\Gamma_1^l + \Gamma_2^l) \circ (I_{X_1} + I_{X_2}) \\ &= \left(2 + \binom{l}{l/2}\right) I_{X_1} + \binom{l}{l/2} I_{X_2}\end{aligned}$$

und wir erhalten den Widerspruch $(A^l) \circ I \notin \mathbf{C}\mathcal{A}$. □

Lemma A.53 *Sei $\mathcal{A}$ symmetrisches CAS, eine Vereinigung von Relationen ein Zykel der Länge n. Dann ist $\mathcal{A}$ isomorph einer Fission von* $\mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}))$. *Ist insbesondere n ungerade, so ist $\mathcal{A} \cong$* $\mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}))$.

Beweis. Sei B die Adjazenzmatrix des Zykels, nach Voraussetzung ist $A \in \mathbf{C}\mathcal{A}$. Definiere $B_0, \ldots, B_{\lfloor n/2 \rfloor}$ durch $B_i[\alpha, \beta] = 1$ genau wenn α, β in B den Abstand i haben. Offenbar sind $B_0 = I, B_1 = B \in \mathbf{C}\mathcal{A}$. Wir zeigen induktiv, daß alle $B_i \in \mathbf{C}\mathcal{A}$: Sei dies für $0, \ldots, i$ $(0 < i < \lfloor n/2 \rfloor)$ schon gezeigt, dann haben wir

$$BB_i = \begin{cases} 2I + B_2 & \text{für } i = 1 \\ B_{i-1} + B_{i+1} & \text{für } i > 1 \end{cases}$$

also nach Induktionsvoraussetzung $B_{i+1} \in \mathbf{C}\mathcal{A}$. Unmittelbar sieht man schließlich ein, daß $\mathcal{B} = (B_0, \ldots, B_{\lfloor n/2 \rfloor})$ ein symmetrisches CAS und isomorph $\mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}))$ ist.

Ist $\mathcal{A}$ eine echte Fission von $\mathcal{B}$, so ist eine Relation der Valenz 2 aus $\mathcal{B}$ in $\mathcal{A}$ in zwei perfekte Matchings zerlegt, insbesondere ist n gerade. $\square$

In der folgenden Aufstellung lassen wir das triviale CAS (Beispiel A.6) stets fort, daher beginnt sie erst mit $n = 4$. Bis $n = 10$ finden wir die CAS (ohne Eigenmatrizen) bei Nomiyama [No95] (es ist aber nicht schwer, sich die Tabelle mittels der obigen Lemmata zu konstruieren). Für $n = 11$ ist die Diskussion kurz, und wir geben sie explizit.

$\mathbf{n = 4}$

$\mathcal{A}_1^{(4)} = \mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}))$: ist selbstdual mit Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = Q$$

$\mathcal{A}_2^{(4)} = \mathcal{P}(2) \times \mathcal{P}(2)$: ist selbstdual mit Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = Q$$

$\mathbf{n = 5}$

$\mathcal{A}_1^{(5)} = \mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}))$: ist selbstdual mit Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & \omega & \omega' \\ 1 & \omega' & \omega \end{bmatrix} = Q$$

wobei $\omega = \zeta_5 + \zeta_5^{-1}, \omega' = \zeta_5^2 + \zeta_5^{-2} = -1 - \omega$ mit $\zeta_5 = e^{2\pi i/5}$.

n = 6

$\mathcal{A}_1^{(6)} = \mathcal{S}(2K_3)$: ist nicht selbstdual und hat Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{A}_2^{(6)} = \mathcal{S}(3K_2)$: ist nicht selbstdual und hat Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bemerkung A.54 *Wie man sieht (vgl. Korollar A.36) sind $\mathcal{A}_1^{(6)}$ und $\mathcal{A}_2^{(6)}$ dual zueinander im Sinn von Definition A.29. Beide sind ferner Fusionen von $\mathcal{A}_3^{(6)}$.*

$\mathcal{A}_3^{(6)} = \mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})) \cong \mathcal{P}(3) \times \mathcal{P}(2)$: ist selbstdual mit Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = Q$$

n = 7

$\mathcal{A}_1^{(7)} = \mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}))$: ist selbstdual mit Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} = Q$$

wobei $\alpha_j = \zeta_7^j + \zeta_7^{-j}$ mit $\zeta_7 = e^{2\pi i/7}$.

n = 8

$\mathcal{A}_1^{(8)} = \mathcal{P}(4)[2] < \mathcal{A}_3^{(8)}$: ist nicht selbstdual und hat Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{A}_2^{(8)} = 2 \cdot \mathcal{P}(4) < \mathcal{A}_3^{(8)}$: ist nicht selbstdual und hat Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{A}_3^{(8)} = H(3,2) \cong \mathcal{P}(2) \times \mathcal{P}(4)$: ist selbstdual mit Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = Q$$

$\mathcal{A}_4^{(8)} = (\mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})))[2] \cong 2 \cdot \mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}))$: ist selbstdual mit Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = Q$$

$\mathcal{A}_5^{(8)} = \mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}))$: ist selbstdual mit Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = Q$$

$\mathcal{A}_6^{(8)} = (\mathcal{P}(2) \times \mathcal{P}(2))[2] < \mathcal{A}_8^{(8)}$: ist nicht selbstdual und hat Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{A}_7^{(8)} = 2 \cdot (\mathcal{P}(2) \times \mathcal{P}(2)) < \mathcal{A}_8^{(8)}$: ist nicht selbstdual und hat Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{A}_8^{(8)} = \mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z})) = \mathcal{P}(2) \times \mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}))$: ist selbstdual mit Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = Q$$

$\mathcal{A}_9^{(8)} = \mathcal{G}((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3) \cong \mathcal{P}(2)^3$: ist selbstdual mit Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = Q$$

$\mathbf{n = 9}$

$\mathcal{A}_1^{(9)} = \mathcal{S}(3K_3) \cong \mathcal{P}(3)[3] \cong 3 \cdot \mathcal{P}(3)$: ist selbstdual mit Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = Q$$

$\mathcal{A}_2^{(9)} = \mathcal{S}(L_2(3))$ ($L_2(3)$ ist der 3×3-Gittergraph): ist selbstdual mit Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = Q$$

$\mathcal{A}_3^{(9)} = \mathcal{P}(3) \times \mathcal{P}(3)$: ist selbstdual mit Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = Q$$

$\mathcal{A}_4^{(9)} = \mathrm{Sym}(\mathcal{G}((\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2))$: ist selbstdual mit Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = Q$$

$\mathcal{A}_5^{(9)} = \mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}))$: ist selbstdual mit Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & -1 & \alpha_4 \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_4 & -1 & \alpha_1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & \alpha_4 & \alpha_1 & -1 & \alpha_2 \end{bmatrix} = Q$$

wobei $\alpha_j = \zeta_9^j + \zeta_9^{-j}$ mit $\zeta_9 = e^{2\pi i/9}$. Offenbar ist $\alpha_3 = -1$ und $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0$, $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_4\alpha_1 = -3$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_4 = -1$, d.h. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ sind die Nullstellen von $\alpha^3 - 3\alpha - 1$.

$\mathbf{n = 10}$

$\mathcal{A}_1^{(10)} = \mathcal{P}(5)[2] \cong \mathcal{S}(5K_2) < \mathcal{A}_6^{(10)}$: ist nicht selbstdual und hat Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{A}_2^{(10)} = 2 \cdot \mathcal{P}(5) < \mathcal{A}_6^{(10)}$: ist nicht selbstdual und hat Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{A}_3^{(10)} = \mathcal{S}(\mathrm{Petersen})$: ist nicht selbstdual und hat Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 5/3 & -8/3 \\ 1 & -5/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{A}_4^{(10)} = 2\cdot\mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})) < \mathcal{A}_7^{(10)}$: ist nicht selbstdual und hat Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 2\omega & 2\omega' & 1 \\ 1 & 2\omega' & 2\omega & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & \omega & \omega' & 0 \\ 1 & \omega' & \omega & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{A}_5^{(10)} = \mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}))[2] < \mathcal{A}_7^{(10)}$: ist nicht selbstdual und hat Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & \omega & \omega' & 0 \\ 1 & \omega' & \omega & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 2\omega & 2\omega' & 1 \\ 1 & 2\omega' & 2\omega & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

wobei $\omega = \zeta_5 + \zeta_5^{-1}, \omega' = \zeta_5^2 + \zeta_5^{-2} = -1 - \omega$ mit $\zeta_5 = e^{2\pi i/5}$.

$\mathcal{A}_6^{(10)} = \mathcal{P}(2) \times \mathcal{P}(5)$: ist selbstdual mit Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = Q$$

$\mathcal{A}_7^{(10)} = \mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/10\mathbf{Z})) \cong \mathcal{P}(2) \times \mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}))$: ist selbstdual mit Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & \omega & \omega' & 1 & \omega & \omega' \\ 1 & \omega' & \omega & 1 & \omega' & \omega \\ 1 & 2 & 2 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & \omega & \omega' & -1 & -\omega & -\omega' \\ 1 & \omega' & \omega & -1 & -\omega' & -\omega \end{bmatrix} = Q$$

wobei $\omega = \zeta_5 + \zeta_5^{-1}, \omega' = \zeta_5^2 + \zeta_5^{-2} = -1 - \omega$ mit $\zeta_5 = e^{2\pi i/5}$.

n = 11

Da n ungerade ist, folgt aus Lemma A.49, daß die Matchinggruppe trivial ist. Überhaupt müßen nach Lemma A.51 alle Valenzen (außer $k_0 = 1$) gerade sein. Ist die Klasse größer als 2, gibt es eine Relation der Valenz zwei. Gibt es eine Relation der Valenz 2, ist sie nach Lemma A.52 ein Zykel der

Länge 11, also ist das CAS nach Lemma A.53 ein Gruppenschema. Es bleibt der Fall, daß das CAS von einem stark regulären Graphen G kommt (vgl. Beispiel A.8), der nach dem vorigen ohne Einschränkung 4-regulär ist. Seine anderen Parameter seien λ, μ, seine Adjazenzmatrix A, B die seines Komplements, d.h. $A^2 = 4I + \lambda A + \mu B$. Durch Multiplikation mit J erhält man $4^2 = 4 + 4\lambda + 6\mu$, also $(\lambda, \mu) = (3, 0)$ oder $= (0, 2)$. Im ersten Fall zerfällt G in Kopien von K_5, ein Widerspruch. Im zweiten Fall ist G dreiecksfrei und jede Nichtkante ist Diagonale eines eindeutigen 4-Zykels in G, insbesondere ist $|E(G)| = 2|E(\bar{G})|$, und es folgt der Widerspruch, daß 3 ein Teiler von $|E(K_{11})| = 55$ ist. Es gibt also keinen stark regulären Graphen auf 11 Punkten.

$\mathcal{A}_1^{(11)} = \mathrm{Sym}(\mathcal{G}(\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}))$: ist selbstdual mit Eigenmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ 1 & \beta_2 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_3 & \beta_1 \\ 1 & \beta_3 & \beta_5 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_4 \\ 1 & \beta_4 & \beta_3 & \beta_1 & \beta_5 & \beta_2 \\ 1 & \beta_5 & \beta_1 & \beta_4 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} = Q$$

wobei $\beta_j = \zeta_{11}^j + \zeta_{11}^{-j}$ mit $\zeta_{11} = e^{2\pi i/11}$.

Literatur

[Aig95] M. Aigner, Knoten, Spin-Modelle, Graphen, *Typoskript*(1995), unveröffentlicht (Basis von [AS95])

[AS95] M. Aigner, J. J. Seidel, Knoten, Spinmodelle und Graphen, *Jber. d. Dt. Math. Verein.*, **97**(1995), 75–96

[B96] Et. Bannai, Modular invariance property and spin models attached to cyclic group association schemes, *J. of Stat. Planning and Inference*, **51**(1996), 107–124

[BB93] E. Bannai, E. Bannai, Generalized spin models and association schemes, *Mem. Fac. Science Kyushu Univ. A*, **47**(1993)2, 397-409

[BB94a] E. Bannai, E. Bannai, Spin models on finite cyclic groups, *J. of Alg. Comb.*, **3**(1994), 234–259

[BB94b] E. Bannai, E. Bannai, Modular invarince of the character table of the Hamming association scheme $H(d,q)$, *J. Number Theory*, **47**(1994), 79–92

[BB95] E. Bannai, E. Bannai, Generalized generalized spin models (four-weight spin models), *Pac. J. Math.*, **170**(1995), 1–16

[BBIK92] E. Bannai, E. Bannai, T. Ikuta, K. Kawagoe, Spin models constructed from the Hamming association schemes, *Proceedings* 10^{th} *Algebraic Combinatorics Symposium, Gifu University*, 1992, 91-102

[BBJ] E. Bannai, E. Bannai, F. Jaeger, On spin models, modular invariance, and duality, eingereicht

[BI84] Ei. Bannai, T. Ito, *Algebraic Combinatorics I, Association Schemes*, Menlo Park, 1984

[BJS94] Ei. Bannai, F. Jaeger, A. Sali, Classification of small spin models, *Kyushu J. Math.*, **48**(1994), 185–200

[Ba82] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, London, 1982

[BCN89] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance Regular Graphs*, Berlin, New York, 1989

[BZ85] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, Berlin, New York, 1985

[CGS78] P. J. Cameron, J. M. Goethals, J. J. Seidel, Strongly regular graphs having strongly regular subconstituents, *J. Algebra*, **55**(1978), 257–280

[ChS95] L. Chihara, D, Stanton, A matrix equation for association schemes, *Graphs and Combinatorics*, **11**(1995), 103–108

[GP94] N. D. Gilbert, T. Porter, *Knots and Surfaces*, Oxford, 1994

[GJo89] D. M. Goldschmidt, V. F. R. Jones, Metaplectic link invariants, *Geom. Dedicata*, **31**(1989), 165–191

[H94] P. de la Harpe, Spin models for link polynomials, strongly regular graphs and Jaeger's Higman-Sims-model, *Pac. J. Math.*, **162**(1994), 57–96

[I93a] T. Ikuta, Spin models corresponding to nonsymmetric association schemes of class 2, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A*, **47**(1993), 383–390

[I93b] T. Ikuta, Spin models corresponding to nonsymmetric association schemes of class three, *Preprint*, 1993

[I94] T. Ikuta, On spin models attached to association schemes, PhD thesis, Kyushu University, 1994

[Jae92] F. Jaeger, Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial, *Geom. Dedicata*, **4**(1992), 23–52

[Jae95a] F. Jaeger, On Spin Models, Triply Regular Association Schemes, and Duality, *J. of Alg. Comb.*, **4**(1995), 103–144

[Jae95b] F. Jaeger, Spin models for link invariants, in: P. Rowlinson (Hrsg.), *Surveys in Combinatorics 1995 (15th British combinatorial conference, July 1995)*, Cambridge, 1995

[Jae96a] F. Jaeger, Classification of spin models in terms of association schemes, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **24**(1996), 285–309

[Jae96b] F. Jaeger, New constructions for link invariants, *Pac. J. of Math.*, **176**(1996)1, 71–116

[JMN95] F. Jaeger, M. Matsumoto, K. Nomura, Bose-Mesner algebras related with type II matrices and spin models, *Research Institute for Mathematical Sciences report RIMS-1057*, Entwurf (Dezember 1995), eingesandt

[Jo85] V. F. R. Jones, A polynomial invariant for knots via Von Neumann algebras, *Bull. Am. Math. Soc.*, **12**(1985), 103–111

[Jo89] V. F. R. Jones, On knot invariants related to some statistical mechanical models, *Pacific J. of Math.*, **137**(1989)2, 311–334

[Ka87a] L. H. Kauffman, *On Knots*, Annals of Mathematical Studies, **115**, Princeton, 1987

[Ka87b] L. H. Kauffman, State models and the Jones polynomial, *Topology*, **26**(1987), 395–407

[Ka90] L. H. Kauffman, An invariant of regular isotopy, *Transactions of the AMS*, **318**(1990)2, 417–471

[KMW94] K. Kawagoe, A. Munemasa, Y. Watatani, Generalized spin models, *J. of Knot Theory and its Ramifications*, **3**(1994), 465–475

[Mu87] K. Murasugi, Jones polynomial and classical conjectures in knot theory, *Topology*, **26**(1987), 187–194

[Na51] T. Nagell, *Introduction to Number Theory*, Stockholm, New York, 1951

[No95] E. Nomiyama, Classification of association schemes with at most ten vertices, *Kyushu J. Math.*, **49**(1995), 163–195

[N94a] K. Nomura, Spin models constructed from Hadamard matrices, *J. Comb. Theory (A)*, **68**(1994), 251–261

[N95a] K. Nomura, Twisted extensions of spin models, *J. of Alg. Comb.*, **4**(1995), 173–182

[N95b] K. Nomura, Spin models with an eigenvalue of small multiplicity, *J. Comb. Theory (A)*, **71**(1995), 293–315

[N95c] K. Nomura, Spin models on bipartite distance regular graphs, *J. Comb. Theory (B)*, **64**(1995), 300–312

[N96a] K. Nomura, Spin models on triangle-free connected graphs, *J. Comb. Theory (B)*, **67**(1996), 284–295

[N96b] K. Nomura, Spin models and almost bipartite 2-homogeneous graphs, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **24**(1996), 285–308

[N97] K. Nomura, An algebra associated with a spin model, *J. of Alg. Comb.*, **6**(1997), 53–58

[R48] K. Reidemeister, *Knotentheorie*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **1**, 1948

[Tait] P. G. Tait, On Knots, in: Scientific Papers Vol. I, 273–347, London 1898

[Y96] M. Yamada, Hadamard matrices and spin models, *J. of Stat. Planning and Inference*, **51**(1996), 309–321