Übungen zur Informationstheorie und Komplexität

Blatt 1

WS 1999/2000

1. Die binäre Entropiefunktion h ist für $x \in [0,1]$ definiert durch
$$h(x) = -x \log_2 x - (1-x)\log_2(1-x),$$
mit der Vereinbarung $0 \log 0 = 0$. Zeige:
   (a) h ist stetig in $[0,1]$ und differenzierbar in $(0,1)$.
   (b) h ist symmetrisch bezüglich $1/2$.
   (c) h ist konkav.
   (d) h ist streng monoton zunehmend in $[0,1/2]$ und streng monoton abnehmend in $[1/2,1]$.

2. Für $\lambda \in [0,1]$ und $n \to \infty$, $k_n \to \infty$ so, daß $k_n/n \to \lambda$, zeige:
   (a) $\frac{1}{n}\log_2 \binom{n}{k_n} \to h(\lambda)$.
   (b) Falls $\lambda \leq 1/2$ und $x^n \in \{0,1\}^n$: $\frac{1}{n}\log_2 |S^n_{k_n}(x^n)| \to h(\lambda)$ (wobei $S^n_d(x^n)$ die Kugel mit Radius d um x^n im n–dimensionalen Hammingraum ist).

   Hinweis: verwende die Strilingsche Formel
$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+1}} \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}.$$

3. Für einen DMC $W : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ (d.h. eine stochastische Matrix mit Zeilenindizierung durch $\mathcal{X}$) zeige: die Shannonkapazität $C(W)$ ist Null genau dann, wenn alle Zeilen von W identisch sind.

4. **(Zusatzaufgabe)** Weise die Goethesche Äußerung

   > *Die Mathematiker sind eine Art Franzosen; redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.*

   nach.

Übung: ??, ??:??, in ??–???,