Übungen zur Informationstheorie und Komplexität

Blatt 2

WS 1999/2000

1. Ein *binäres Suchproblem* ist ein Paar $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ bestehend aus einer endlichen Menge $\mathcal{X}$ (den Suchobjekten), und einer Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von $\mathcal{X}$ (den binären Fragen "$x \in F$?"), d.h. $\mathcal{F} \subset 2^{\mathcal{X}}$.
   Eine (deterministische) *Strategie* der *Fragekomplexität* l für das Problem $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ ist eine Folge $(f_0, \ldots, f_{l-1}, v)$ von Funktionen $f_i : \{0,1\}^i \to \mathcal{F}$ (i–te Frage) und $v : \{0,1\}^l \to \mathcal{X}$ (Votum). Für $x \in \mathcal{X}$ gehört zu dieser Strategie die Folge $(a_1(x), \ldots, a_l(x)) \in \{0,1\}^l$ der Antworten, die rekursiv wie folgt definiert sind:
   $$a_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } s \in f_{i-1}(a_1(x), \ldots, a_{i-1}(x)), \\ 0 & \text{falls } s \notin f_{i-1}(a_1(x), \ldots, a_{i-1}(x)). \end{cases}$$
   Wir nennen die Strategie *erfolgreich*, wenn für jedes $x \in \mathcal{X}$ gilt, daß
   $$v(a_1(x), \ldots, a_l(x)) = x.$$
   Strategien, für die alle f_i konstante Funktionen sind, heißen *nichtsequentiell* (oder *nichtadaptiv*). Zeige (mit $n = |\mathcal{X}|$):
   (a) Beim *unbeschränkten* Suchproblem $(\mathcal{X}, 2^{\mathcal{X}})$, d.h. alle Fragen sind erlaubt, hat jede erfolgreiche Strategie mindestens die Fragekomplexität $\lceil \log_2 n \rceil$, und es gibt eine nichtsequentielle Strategie, die diese Schranke erreicht.
   (b) Beim *Totalordnungs*–Suchproblem $([n], \mathcal{O})$ mit $\mathcal{O} = \{[a] : 1 \leq a \leq n\}$, wobei $[a]$ das ganzzahlige Intervall $\{1, \ldots, a\}$ bezeichnet, gilt: jede erfolgreiche Strategie hat mindestens die Fragekomplexität $\lceil \log_2 n \rceil$, und es gibt eine Strategie, die diese Schranke erreicht.
   (c) Beim Totalordnungs–Suchproblem $([n], \mathcal{O})$ (wie in (b)) hat jede erfolgreiche nichtsequentielle Strategie mindestens die Fragekomplexität $n - 1$.
   (d) Beim *Singleton*–Suchproblem $(\mathcal{X}, \binom{\mathcal{X}}{1})$, mit $\binom{\mathcal{X}}{k} = \{A \subset \mathcal{X} : |A| = k\}$, hat jede erfolgreiche Strategie mindestens die Fragekomplexität $n - 1$.
   (e)* Welches ist die minimale Fragekomplexität für das Suchproblem $(\mathcal{X}, \binom{\mathcal{X}}{k})$, mit $1 \leq k \leq n$?

2. Unter m sonst gleichartigen Münzen ist eine falsche, die sich durch ihr Gewicht von den anderen unterscheidet. Zeige:
   (a) Für $m = 13$ kann man die falsche durch drei Wägungen auf einer Balkenwaage finden, nicht aber für $m = 14$.
   (b) Wenn noch zusätzlich bekannt ist, daß die falsche Münze leichter ist, kann man diese unter $m = 27$ durch drei Wägungen auf einer Balkenwaage finden, nicht aber unter $m = 28$.

Übung: Mittwoch, 16ct, in U5–135.