Übungen zur Informationstheorie und Komplexität

Blatt 3

WS 1999/2000

1. Beweise die log–*Summen–Ungleichung*:
   Für alle $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n > 0$, $a = \sum_i a_i$, $b = \sum_i b_i$ gilt
   $$\sum_i a_i \log \frac{a_i}{b_i} \geq a \log \frac{a}{b},$$
   mit Gleichheit genau dann, wenn $\frac{a_i}{b_i} = \text{const.}$ Folgere:

   (a) $D(\cdot\|\cdot)$ ist konvex in beiden Argumenten, d.h. für Verteilungen P_1, P_2, Q_1, Q_2 und $\lambda \in [0,1]$ gilt
   $$D(\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2 \| \lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2) \leq \lambda D(P_1\|Q_1) + (1-\lambda)D(P_2\|Q_2).$$

   (b) Die Entropie $H(P)$ ist konkav (Hinweis: werte $D(P\|U)$ aus, wo U die Gleichverteilung ist).

2. Beweise die "Parallelogramm–Identität" für die I–Divergenz: für Verteilungen P, Q, R gilt
   $$D(P\|R) + D(Q\|R) = D\left(P\|\frac{P+Q}{2}\right) + D\left(Q\|\frac{P+Q}{2}\right) + 2D\left(\frac{P+Q}{2}\|R\right).$$
   Folgere, daß für eine Verteilung R und eine abgeschlossene konvexe Menge $\mathcal{P}$ von Verteilungen das $\inf\{D(P\|R) : P \in \mathcal{P}\}$ in einem *eindeutigen* $P \in \mathcal{P}$ angenommen wird, sofern das Infimum endlich ist.

3. Beweise die Eindeutigkeitsaussage im Satz von Sperner (z.B. vermittels der Ahlswede–Zhang–Identität).

4. Ein *poset mit Rangfunktion* ist eine halbgeordnete Menge $(\mathcal{S}, \leq)$ mit einem Minimum 0 und der Eigenschaft, daß für alle $x, y \in \mathcal{S}$ mit $x \leq y$ alle saturierten Ketten von x nach y die gleiche Länge d(x,y) haben (wobei wir d(x,x)=0 setzen). Dann heißt $r(x) = d(0,x)$ der *Rang* von x, $\mathcal{N}_i = \{x \in \mathcal{S} : r(x) = i\}$ das *i–te Niveau.*

   (a) Zeige: ist $(\mathcal{S}, \leq)$ ein poset mit Rangfunktion so, daß die Anzahl saturierter Ketten durch ein Element $x \in \mathcal{S}$ nur vom Rang $r(x)$ abhängt, dann gilt die verallgemeierte LYM–Ungleichung:
   $$\mathcal{A} \subset \mathcal{S} \text{ Antikette, } \mathcal{A}_i := \mathcal{A} \cap \mathcal{N}_i \Longrightarrow \sum_i \frac{|\mathcal{A}_i|}{|\mathcal{N}_i|} \leq 1.$$

   (b) Folgere die Kraft–Ungleichung für präfixfreie Codes durch Betrachtung der Präfixordung $(\mathcal{X}^n, \prec)$, d.h. $x \prec y$ genau dann wenn x Präfix von y.

Übung: Mittwoch, 16ct, in U5–135.