Übungen zur Informationstheorie und Komplexität

Blatt 4

WS 1999/2000

1. Zeige, daß für die Anzahl der n–Typen gilt: $|\mathcal{P}(n,\mathcal{X})| = \binom{n+|\mathcal{X}|-1}{|\mathcal{X}|-1}$.

2. Drücke für $Q \in \mathcal{P}(n,\mathcal{X})$ die Kardinalität von $\mathcal{T}_Q^n$ durch einen Multinomialkoeffizienten aus und bestimme mittels der Stirling–Formel (siehe Blatt 1) deren asymptotisches Verhalten.

3. Beweise die *Pinsker–Ungleichung* für Wahrscheinlichkeitsverteilungen P und Q:
$$D(P\|Q) \geq \frac{1}{2\ln 2}\|P-Q\|_1^2.$$
(Hinweis: Zeige die Ungleichung erst für den Fall binärer Verteilungen, und dann für den allgemeinen Fall durch Gruppieren der Wahrscheinlichkeit in zwei Teilen, unter Verwendung der log–Summen–Ungleichung (siehe Blatt 3)).

4. Für Verteilungen P und Q auf $\mathcal{X}$ zeige:
$$\|P-Q\|_1 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow |H(P)-H(Q)| \leq -\alpha \log \frac{\alpha}{|\mathcal{X}|}.$$

5. Beweise, daß der Huffman–Code auch in der Klasse *aller* eindeutig decodierbaren Codes optimal bezüglich der mittleren Länge ist.

6. Zeige, daß die Entropie $H_n(p_1,\dots,p_n) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i$ die Shannonschen Axiome erfüllt, d.h.
   (a) H_n ist stetig.
   (b) $H_n(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n})$ wächst monoton mit n.
   (c) *Gruppierungsaxiom*: Für $P=(p_1,\dots,p_n)$, und $Q=(q_1,\dots,q_s)$ mit $q_j = \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} p_i$ und $0=n_0<n_1<\cdots<n_s=n$, gilt:
$$H_n(P) = H_s(Q) + \sum_{j=1}^{s} q_j H_{n_j-n_{j-1}}\left(\frac{p_{n_{j-1}+1}}{q_j},\dots,\frac{p_{n_j}}{q_j}\right).$$

Übung: Mittwoch, 16ct, in U5–135.