Aufgaben zur Vorlesung
Vertiefung Mathematik I für NWI
Sommersemester 2007

D. Frettlöh
S. Selle

Abgabe: Mittwoch, 06.06.2007, 8:30 Uhr

Übungsgruppen: Di. 12-14, Di. 14-16, Postfach: UV5–1829 (Thomas Regier)
Di. 10-12, Postfach: UV5–1822 (Sabrina Selle)

Aufgabe 25:

Das **implizite** Euler-Verfahren wird definiert durch

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Die zugehörige explizite Iterationsvorschrift gewinnt man durch Umstellen nach u_{n+1}. Führen Sie dieses Verfahren von Hand für das Anfangswertproblem

$$u' = u, \quad u(0) = u_0 = 1 \qquad (\Rightarrow u(t) = \mathrm{e}^t) \tag{1}$$

durch. Berechnen Sie mindestens u_1, u_2, u_3. Geben Sie insbesondere eine explizite Darstellung aller $u_n, n \geq 1$ an.
Beweisen Sie anschließend, dass dieses Verfahren die Lösung e^t mit beliebiger Genauigkeit (bei hinreichend kleiner Wahl von h) approximiert.

(6 Punkte)

Aufgabe 26:

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$u' = 1 - \frac{1}{\cos(u - t + \frac{\pi}{2})}, \quad u(0) = \pi/2.$$

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung an

$$u' = -2 + \frac{t + u + 4}{t + u - 3}.$$

(6 Punkte)

— Bitte wenden —

Aufgabe 27:

Approximieren Sie die Lösung des Anfangswertproblems aus Aufgabe 24

$$u' = u\sin(t^2 + u), \quad u(0) = 0.2$$

mit dem Verfahren von Heun

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\Big(f(t_n, u_n) + f\big(t_n + h, u_n + hf(t_n, u_n)\big)\Big)$$

und dem Runge-Kutta-Verfahren

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)$$

mit

$$\begin{aligned}
f_1 &= f\left(t_n, u_n\right), \\
f_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, u_n + \frac{1}{2}hf_1\right), \\
f_3 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, u_n + \frac{1}{2}hf_2\right), \\
f_4 &= f\left(t_n + h, u_n + hf_3\right).
\end{aligned}$$

Wählen Sie das Intervall und die Werte für h wie in Aufgabe 24. Die zugehörigen Approximationen sollen geplottet werden.

(6 Punkte)