Dr. D. Frettlöh 11.5.2010

Übungen zur Vorlesung Elementare Algebra und Geometrie

Blatt 5

Aufgabe 17:
Bestimmen Sie ggT(1234, 4321). Finden Sie $a, b \in \mathbb{Z}$, so dass gilt

$$a \cdot 1234 + b \cdot 4321 = \mathrm{ggT}(1234, 4321).$$

Aufgabe 18:
Zeigen Sie:
(a) Eine sechsstellige Zahl der Form *abcabc*, wobei die erste Ziffer a nicht Null sein soll, ist immer durch 7, 11 und 13 teilbar.
(b) Eine Zahl der Form $11 \cdots 1$ (n Einsen) kann nur prim sein, falls n prim ist.

Aufgabe 19:
Beweisen Sie:
(a) Für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n(n^2-1) \equiv 0 \mod 24$.
(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $2^n - (-1)^n \equiv 0 \mod 3$.

Aufgabe 20:
Eine Zahl a heißt *vollkommen*, falls die Summe Ihrer Teiler (ausgenommen a selbst) gleich a ist. Zeigen Sie:
(a) Wenn n nicht prim ist, dann ist $2^n - 1$ auch nicht prim.
(b) Wenn p prim ist und $2^p - 1$ auch, dann ist $2^{p-1}(2^p - 1)$ eine vollkommene Zahl. Welches sind die ersten vier vollkommenen Zahlen dieser Form?

(Nebenbei: Es ist bis heute unbekannt, ob es ungerade vollkommene Zahlen gibt. Wenn Sie eine finden, schreiben Sie mir unbedingt.)

Abgabetermin: Dienstag, 18.5.2010, 12 Uhr in den Postkästen in Raum V3-128:
I. Ludwig: Fach 120, C. Buschkamp: Fach 182.