Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden der Biowissenschaften III
Fourieranalysis und ausgewählte Kapitel der Stochastik

Blatt 10

Aufgabe 36:
Beweisen Sie die diskrete Version des Satzes von Plancherel: Für $f, g \in C^N$ gilt

$$\sum_{n=0}^{N-1} f_n \overline{g}_n = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{f}_n \overline{\widehat{g}}_n$$

Aufgabe 37:
Berechnen Sie die DFT von $f = (1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{N-1})$.

Aufgabe 38:
Betrachten wir die lineare Abbildung $D_2 : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ die durch

$$D_2(c_0, \ldots, c_{N-1}) := (\tilde{c}_0, \ldots, \tilde{c}_{N-1}),$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{c}_0 &:= (-c_{N-1} + 2c_0 - c_1), \\ \tilde{c}_{N-1} &:= (-c_{N-2} + 2c_{N-1} - c_0), \\ \tilde{c}_j &:= (-c_{j-1} + 2c_j - c_{j+1}), \quad \text{für } 1 \le j \le N-2, \end{aligned}$$

gegeben ist. Außerdem sei

$$\mathbb{C}^{N \times N} \ni M := \begin{pmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{N-1} \end{pmatrix},$$

mit $\lambda_k := 4 \sin^2(k\pi/N)$ für $k = 0, \ldots, N-1$. Sei weiter wie üblich $\frac{1}{\sqrt{N}} \overline{V}$ die Darstellungsmatrix der DFT.

Dann gilt

$$D_2 = \overline{V}^{-1} M \overline{V}.$$

Aufgabe 39:
Eine Version der *diskreten Cosinus-Transformation* ist gegeben durch die Matrix

$$M := \frac{2}{N}\left(\cos\left(\frac{2j+1}{2N}k\pi\right)\right)_{0\leq j,k\leq N-1}$$

(hier bezeichne j den Zeilen- und k den Spaltenindex), d.h. $\mathrm{DCT}(f) = Mf$.

Zeigen Sie, dass die Spalten von M paarweise orthogonal sind. Wie muss man die Spalten normieren, damit sie eine ON-Basis bilden (und somit M zu einer orthogonalen Matrix wird)?

Abgabetermin: Freitag, 8.1.2010, in der Vorlesung