Universität Bielefeld
C. Huck **Sommersemester 2016**

Präsenzübungen zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaften II

Blatt 2

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass die Maximum-Norm $\|\cdot\|_\infty$ tatsächlich eine Normfunktion auf dem $\mathbb{R}^d$ ist.

Aufgabe 2
Skizzieren Sie den Ball $B_1(0)$ vom Radius 1 um den Nullpunkt bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$ auf dem $\mathbb{R}^2$. Wie sehen diese Bälle bezüglich anderer Normen aus?

Aufgabe 3
Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ gilt

$$\|x-y\| \geq \Big| \|x\| - \|y\| \Big|.$$

Hinweis. Verwenden Sie die Dreiecksungleichung.

Aufgabe 4
Sei $C([a,b])$ der reelle Vektorraum der stetigen Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

tatsächlich eine Normfunktion auf $C([a,b])$ ist. Zeigen Sie weiter, dass auch durch

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

eine Normfunktion auf $C([a,b])$ definiert ist. Zeigen Sie außerdem, dass es eine Konstante $K > 0$ gibt, sodass für alle $f \in C([a,b])$ gilt

$$\|f\|_1 \leq K\|f\|_\infty.$$

Zeigen Sie, dass die beiden Normen nicht äquivalent sind.

Hinweis. Zur Nicht-Äquivalenz: Geben Sie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C([0,1])$ an, die bezüglich der Integral-Norm, nicht aber bezüglich der Supremumsnorm gegen die Nullfunktion konvergiert.