Universität Bielefeld **Sommersemester 2016**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaften II

Blatt 6

Aufgabe 1
Aus einem havarierten Kernkraftwerk sei der radioaktive Stoff A in die Umwelt gelangt. Stoff A zerfalle mit der Zerfallskonstanten $\lambda > 0$ in Stoff B, der ebenfalls radioaktiv ist. B zerfalle mit der Zerfallskonstanten $0 < \mu \neq \lambda$. Das zugehörige Gleichungssystem lautet also:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ \lambda & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $x(0) = x_0 > 0,\ y(0) = 0$, und skizzieren Sie $y(t)$. Wann ist $y(t)$ maximal?

Hinweis. Für die Berechnung der Matrixfunktion e^{tA} benötigen Sie die Identität

$$(x^{n+1} - y^{n+1}) : (x - y) = \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k = x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $x \neq y$.

Aufgabe 2
Betrachten Sie die Differentialgleichung $\ddot{u} - 2a\dot{u} + a^2 u = 0$.

(a) Weisen Sie nach, dass sowohl e^{at} als auch te^{at} Lösungen der Differentialgleichung sind.

(b) Sind die Lösungen aus (a) linear unabhängig?

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $u(0) = 0$ und $\dot{u}(0) = 1$.

(d) Skizzieren Sie die Lösung.

Aufgabe 3
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung.

(a) $y'' + y' - y = 0$.

(b) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

(c) $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Hinweis. In allen drei Fällen kennen Sie ein Lösungs-Fundamentalsystem, also eine Basis des Vektorraums der Lösungen.